TEMA 7º: REPRESENTACIÓN CONFORME. APLICACIONES CONFORMES ELEMENTALES.

1. INTRODUCCIÓN

En este tema estudiaremos aspectos geométricos de las funciones holomorfas.

DEFINICIÓN: Consideremos una función $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ y sea $B(z_0)$ una bola abierta centrada en z_0 contenida en D. Supongamos que $f(z) \neq f(z_0)$, $\forall z \in B(z_0) \setminus \{z_0\}$. Decimos que f conserva ángulos en el punto z_0 si existe

$$\lim_{r \to 0+} e^{-i\theta} A[f(z_0+re^{i\theta}) - f(z_0)]$$

y es independiente de θ, siendo A la función signo

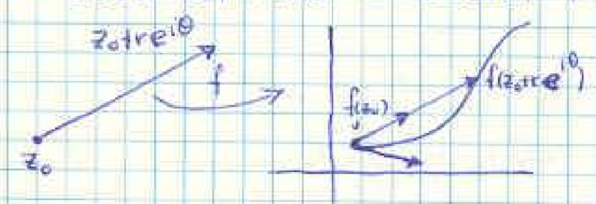
$$A(\omega) = \frac{\omega}{|\omega|}, \ \forall \omega \neq 0.$$

Equivalentemente, f conserva ángulos en z_0 si

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lim_{r \to 0+} \frac{f(z_0+re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0+re^{i\theta}) - f(z_0)|} = \lambda e^{i\theta}, \ \forall \theta$$

Es obvio que λ, caso de existir, tiene módulo 1 pues $|A[f(z_0+re^{i\theta}) - f(z_0)]| = 1$ y $|e^{-i\theta}| = 1$. Por tanto, $\lambda = e^{i \operatorname{Arg} \lambda}$.

Consideremos el vector "rayo" inicial $z_0 + re^{i\theta}$. Fijos z_0 y θ,



y supuesto que f es continua, entonces $f(z_0+re^{i\theta})$ es una función continua en la variable real r, y el rayo $z_0+re^{i\theta}$ se transforma en una curva en $\mathbb{C}$.

$f(z_0+re^{i\theta}) - f(z_0)$ es un vector que une los puntos $f(z_0+re^{i\theta})$ y $f(z_0)$ y al dividirlo por su módulo da un vector unitario, cuyo límite cuando $r \to 0+$ es el vector tangente unitario a la curva en $f(z_0)$.

Pues bien, que f conserve ángulos en z_0 significa que dado otro rayo $z_0+re^{i\theta'}$, cuya diferencia de amplitudes con el anterior es $\theta'-\theta$, se verifica que los vectores unitarios tangentes a las curvas imágenes de ambos rayos en $f(z_0)$ siguen formando un ángulo $\theta'-\theta$

1.1. TEOREMA: Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $B(z_0) \subset D$ de forma que $f(z) \neq f(z_0)$, $\forall z \in B(z_0) \setminus \{z_0\}$. Si f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f conserva ángulos en z_0.
Recíprocamente, si existe la diferencial de f (considerada como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) y dicha diferencial es no nula, y f conserva ángulos en z_0, entonces f es diferenciable en z_0 en sentido complejo y $f'(z_0) \neq 0$.

Demostr.: Consideremos la función $g(z) = f(z+z_0) - f(z_0)$ definida en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} / z+z_0 \in D\}$. Todo lo que se dice en el enunciado para f en z_0 **es** equivalente a decirlo de g en 0:

- $f(z) \neq f(z_0)$, $\forall z \in B(z_0) \setminus \{z_0\} \iff g(z) \neq g(0) = 0$, $\forall z \in B(0) \setminus \{0\}$.
- $g'(0) = f'(z_0)$
- f es diferenciable en sentido real en z_0 si, y solo si, g es diferenciable en sentido real en 0.
- f conserva ángulos en z_0 si, y solo si, g los conserva en 0.

Podemos por tanto suponer que $z_0 = 0$ y que $f(z_0) = 0$.

i) Supongamos que existe $f'(0)$ y es distinta de cero. Sea $f'(0) = a \neq 0$. Entonces

$$\lim_{r \to 0+} e^{-i\theta} A[f(re^{i\theta})] = \lim_{r \to 0+} e^{-i\theta} \frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} =$$

$$= \lim_{r \to 0+} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot \frac{r\,|e^{i\theta}|}{|f(re^{i\theta})|} = a \cdot \frac{1}{|a|}$$

que es independiente de θ.

Luego f conserva ángulos en 0.

ii) Seguimos suponiendo que $f(z_0) = z_0 = 0$.
Supongamos ahora que f es diferenciable en sentido real en 0, que dicha diferencial es no nula y que f conserva ángulos en 0. Queremos probar que f es derivable en sentido complejo en 0 y que $f'(0) \neq 0$.
Puesto que f es diferenciable en $(0,0)$ en sentido real existe una aplicación lineal $l: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y) = f(0,0) + l(x,y) + \|(x,y)\| \cdot \eta(x,y)$$

donde $\lim \eta(x,y) = 0$

Pero $f(0,0)=0$. Sea $a=\ell(1,0)\in\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ y $b=\ell(0,1)\in\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$. Entonces $\ell(x,y)=ax+by$ y a y b no son ambos nulos pues $\ell\neq 0$. Luego

$$f(x,y)=ax+by+\|(x,y)\|\,\eta(x,y).$$

que también se puede escribir en la forma

$$f(z)=a\frac{z+\bar z}{2}+b\frac{z-\bar z}{2i}+|z|\,\eta(z)$$

donde $\lim_{z\to 0}\eta(z)=0$, y también

$f(z)=\alpha z+\beta\bar z+|z|\,\eta(z)$, donde $\alpha=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{i}b)$, $\beta=\frac{1}{2}(a-\frac{1}{i}b)$.

Además α y β no son ambos nulos, pues si lo fuesen se tendría que $\alpha+\beta=a=0$ y $\alpha-\beta=\frac{1}{i}b=0$, en contra de que a y b no son ambos nulos.

Por otra parte, f conserva ángulos en 0, es decir, siendo $f(0)=0$, existe y es independiente de θ el límite

$$\lim_{r\to 0+}e^{-i\theta}\frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|}=\lim_{r\to 0+}\frac{\alpha re^{i\theta}+\beta re^{-i\theta}+r\,\eta(re^{i\theta})}{|\alpha re^{i\theta}+\beta re^{-i\theta}+r\,\eta(re^{i\theta})|}\,e^{-i\theta}=$$

$$=\lim_{r\to 0+}e^{-i\theta}\frac{\alpha e^{i\theta}+\beta e^{-i\theta}+\eta(re^{i\theta})}{|\alpha e^{i\theta}+\beta e^{-i\theta}+\eta(re^{i\theta})|}=$$

$$=\lim_{r\to 0+}\frac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}+e^{-i\theta}\eta(re^{i\theta})}{|e^{-i\theta}|\,|\alpha e^{i\theta}+\beta e^{-i\theta}+\eta(re^{i\theta})|}=\lim_{r\to 0+}\frac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}+e^{-i\theta}\eta(re^{i\theta})}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta}+e^{-i\theta}\eta(re^{i\theta})|}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta}|}$$

esto siempre que $\alpha+\beta e^{-2i\theta}\neq 0$.

Veamos que a lo sumo hay dos valores de θ que anulan $\alpha+\beta e^{-2i\theta}$ en $]-\pi,\pi]$. Si $\alpha+\beta e^{-2i\theta}=0$ entonces $|\alpha|=|\beta|$ pues $|e^{-2i\theta}|=1$. Luego si $|\alpha|\neq|\beta|$ ningún valor de θ anula $\alpha+\beta e^{-2i\theta}$. Pero en el caso $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ (recordar que α y β no son ambos nulos), dado $-\frac{\alpha}{\beta}$ que es de módulo 1, existe un único $\theta_1\in]-\pi,\pi]$ tal que $-\frac{\alpha}{\beta}=e^{-i\theta_1}$. Luego $e^{-i(\theta_1+2k\pi)}=-\frac{\alpha}{\beta}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ y por tanto $e^{-2i(\frac{\theta_1}{2}+k\pi)}=-\frac{\alpha}{\beta}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$. Pero entre los valores $\frac{\theta_1}{2}+k\pi$ sólo dos están en $]-\pi,\pi]$ (para $k=0$, y para $k=1$ ó $k=-1$ según sea $\theta_1\leq 0$ ó $\theta_1>0$).

Luego $\dfrac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta}|}$ es constante salvo a lo sumo para dos valores de $\theta\in]-\pi,\pi]$

Por tanto, $\alpha+\beta e^{-2i\theta}$ tiene siempre la misma dirección salvo, quizás, para dos valores de θ, lo cual solo puede ocurrir si $\beta=0$.

Debe ser entonces $\alpha\neq 0$ y por tanto

$$f(z)=\alpha z+|z|\cdot\eta(z) \quad \text{con} \quad \lim_{z\to 0}\eta(z)=0,$$

lo que significa ya que f es derivable en sentido complejo en 0 y $f'(0)=\alpha\neq 0$. csqd.

OBSERVACION: Se probará que la condición $f(z)\neq f(z_0)$, $\forall z\in B(z_0)\setminus\{z_0\}$ se satisface si f es holomorfa y $f'(z_0)\neq 0$, con lo cual dicha hipótesis no es muy restrictiva en el teorema anterior. Además, las funciones holomorfas conservan ángulos en z_0 si, y solo si, $f'(z_0)\neq 0$. Lo probamos en el siguiente teorema pidiendo que f sea analítica, pero probaremos más adelante que f es analítica si y solo si es holomorfa.

1.2. TEOREMA: Si f es analítica en z_0 y $f'(z_0)=0$, entonces f no conserva ángulos en z_0.

Demostr.: De nuevo podemos suponer $z_0=f(z_0)=0$ y, por hipótesis, $f'(z_0)=0$. Siendo f analítica se verifica que $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{k)}(0)}{k!}z^k$. Como $f(0)=f'(0)=0$ se verifica que existe $m\geq 2$ tal que $f(z)=z^m g(z)$ donde g es analítica en 0 y $g(0)\neq 0$. Entonces

$$\lim_{r\to 0+}e^{-i\theta}\frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|}=\lim_{r\to 0+}e^{-i\theta}\frac{(re^{i\theta})^m g(re^{i\theta})}{|(re^{i\theta})^m g(re^{i\theta})|}=\lim_{r\to 0+}e^{-i\theta}\frac{r^m e^{mi\theta}g(re^{i\theta})}{r^m\,|g(re^{i\theta})|}=$$

$$=\lim_{r\to 0+}e^{i\theta(m-1)}\frac{g(re^{i\theta})}{|g(re^{i\theta})|}=(e^{i\theta})^{m-1}\frac{g(0)}{|g(0)|}$$

por ser continua en 0. Como $m\geq 2$, el límite anterior depende θ, y por tanto f no conserva ángulos en 0. csqd.

OBSERVACION: En el Análisis real no existe un resultado parecido pues, por ejemplo, la función

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto f(x,y)=\|(x,y)\|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

es diferenciable (en sentido real) en 0 con diferencial nula, y conserva ángulos en 0.

DEFINICIÓN: Una función $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice conforme en D si conserva ángulos en todos los puntos de D.

En principio la definición de aplicación conforme es la dada, pero desde el punto de vista analítico interesa que f sea holomorfa, en cuyo caso f será conforme si y solo si tiene derivada no nula en D. En adelante consideraremos que f es conforme si, y solo si, es holomorfa con derivada no nula en D (o bien si es holomorfa y conserva ángulos en D).

2. EJEMPLOS DE APLICACIONES CONFORME. (*)

① La función exponencial $f(z) = e^z$ es holomorfa y con derivada no nula en $\mathbb{C}$. Por tanto, es una aplicación conforme en $\mathbb{C}$. Estudiemos algunas propiedades interesantes de esta función. Veremos en primer lugar como transforma las rectas $x = x_0$ e $y = y_0$.

Si $z = x + iy$ y $x = x_0$ entonces

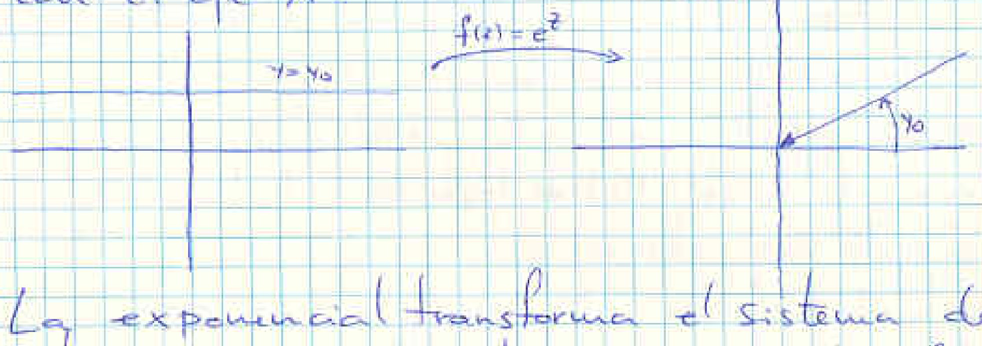
$$|e^z| = |e^{x_0 + iy}| = |e^{x_0}| \cdot |e^{iy}| = e^{x_0}$$

Luego la recta $x = x_0$ se transforma en el disco de centro cero y radio e^{x_0} (la frontera del disco).

Si $z = x + iy$ e $y = y_0$ entonces

$$e^z = e^{x + iy_0} = e^x(\cos y_0 + i \operatorname{sen} y_0)$$

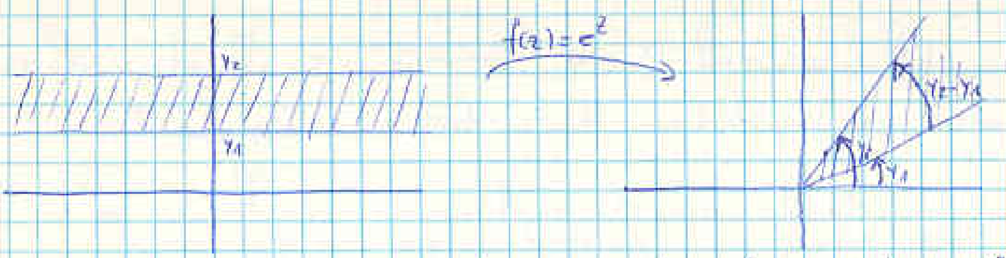
Luego la recta $y = y_0$ se transforma en una semirrecta que empieza en el origen (sin tocarlo) y forma un ángulo y_0 con el eje X.



La exponencial transforma el sistema de coordenadas cartesianas en el sistema de coordenadas polares; ambos sistemas son ortogonales.

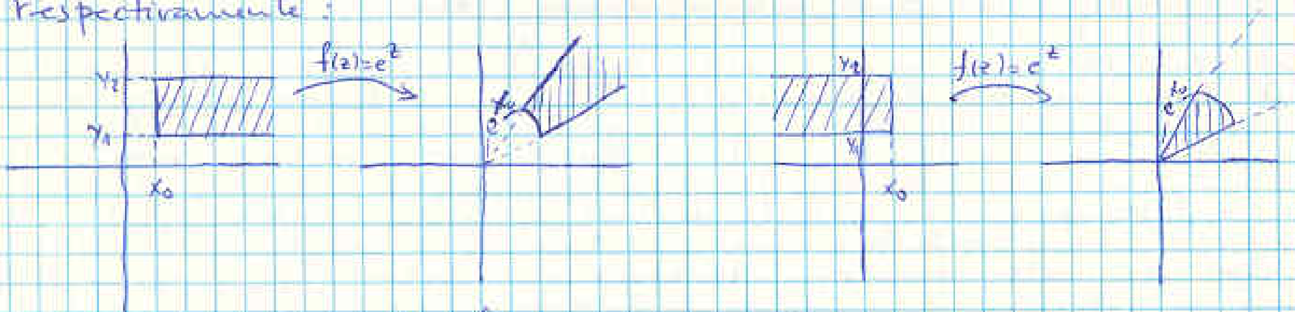
También transforma conformemente una banda horizontal $y_1 < y < y_2$ (si $y_2 - y_1 < 2\pi$) en un sector de amplitud $y_2 - y_1$

(*) Probaremos que son holomorfas con derivada no nula. Más adelante probaremos que



Si es $y_2 - y_1 = \pi$, la ~~semi~~ banda se transforma en un semiplano.

Las semibandas $\{z\in\mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z \le x_0,\ y_1 \le \operatorname{Im} z \le y_2\}$ y $\{z\in\mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z \ge x_0,\ y_1 \le \operatorname{Im} z \le y_2\}$ (con $y_2 - y_1 < 2\pi$) se transforman en los conjuntos $\{z\in\mathbb{C} \,/\, |z| \le e^{x_0},\ y_1 \le \operatorname{Arg} z \le y_2\}$ y $\{z\in\mathbb{C} \,/\, |z| \ge e^{x_0},\ y_1 \le \operatorname{Arg} z \le y_2\}$ respectivamente:



Lo dicho para la función exponencial se puede decir, pero a la inversa, para la función logaritmo.

(2) Consideremos la función $f(z) = z^2$ definida en $D = \mathbb{C}^*$. f es holomorfa y con derivada no nula en D. Luego $f(z) = z^2$ es una aplicación conforme en D. Sus partes real e imaginaria son respectivamente

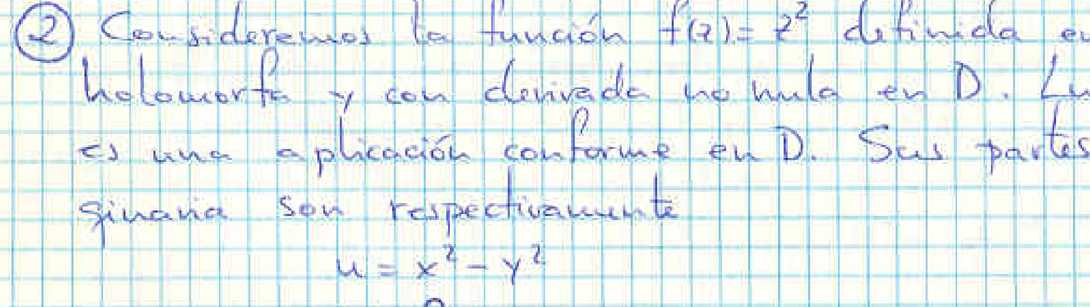
$$u = x^2 - y^2$$
$$v = 2xy$$

Para averiguar cuales son las curvas de nivel se hace $u = cte$ y $v = cte$. Un tipo de curvas de nivel se obtiene haciendo $u = u_0$, es decir la hipérbola

$$x^2 - y^2 = u_0$$

es una curva de nivel. Otro tipo es la hipérbola

$$2xy = v_0$$



Las curvas de nivel se cortan ortogonalmente

La imagen de la curva $x^2-y^2=u_0$ por $f(z)=z^2$ es la recta $u=u_0$ y la imagen de $2xy=v_0$ es la recta $v=v_0$, que, como cabía esperar, se cortan ortogonalmente.

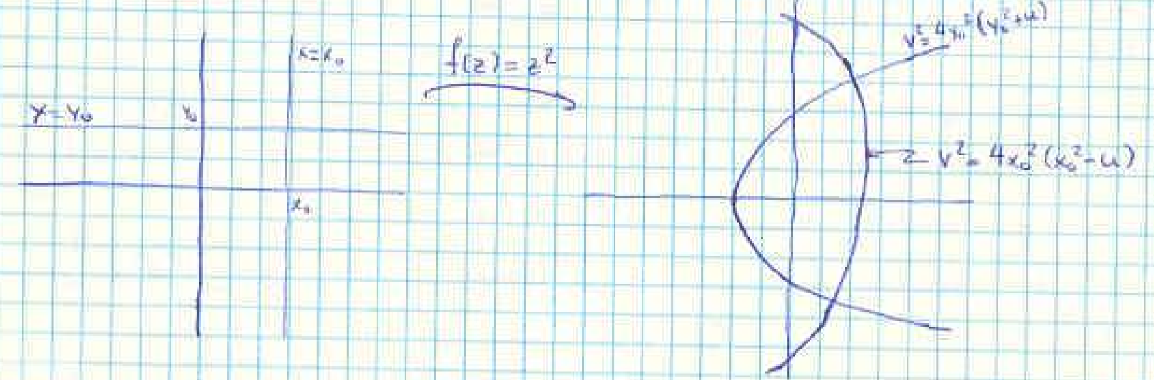
La recta $x=x_0$ se transforma en el conjunto $\{(u,v)\in\mathbb{C} / u=x_0^2-y^2,\ v=2x_0y\}$, cuya ecuación es

$$v^2=4x_0^2(x_0^2-u) \qquad (1)$$

que es una parábola de eje horizontal.

La imagen de la recta $y=y_0$ es, análogamente, la parábola $v^2=4y_0^2(y_0^2+u)$ (2)

Las parábolas (1) y (2) son ortogonales pues lo son las rectas $x=x_0$ e $y=y_0$.



③ <u>TRANSFORMACIONES BILINEALES</u>: Se define una transformación bilineal (o una transformación fracción lineal) como una aplicación del tipo

$$f: z\in\mathbb{C} \longmapsto f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d\in\mathbb{C})$$

para $z\neq -\frac{d}{c}$, y donde suponemos que c y d no se anulan simultáneamente.

En el caso de que $ad-bc\neq 0$ la transformación se llama de Möebius. En lo sucesivo consideraremos transformaciones bilineales de Möebius.

La función f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$. En el caso $c=0$, f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, y se verifica

$$f'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}, \quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{-\tfrac{d}{c}\}.$$

Luego $f'(z)\neq 0$ en $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$.

Por tanto, toda transformación de Möebius es una aplicación conforme.

Se verifica además que f es inyectiva (si a y c no se anulan simultaneamente) y en este caso

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

Es trivial comprobar que la composición de dos aplicaciones bilineales es bilineal.

Si $\lambda \neq 0$, $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ determinan la misma transformación bilineal.

Podemos extender la definición de transformación bilineal a una función $f: \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ haciendo

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \ f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \ f(\infty) = \frac{a}{c}$$

entendiendo que cuando $c = 0$, las dos últimas igualdades se reducen a decir que $f(\infty) = \infty$. Notese que si $c = 0$, entonces ni a ni d se anulan.

$f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sigue siendo continua pues $\lim_{z \to \infty} f(z) = \frac{a}{c}$ y $\lim_{z \to -\frac{d}{c}} f(z) = \infty$.

Veamos algunos casos particulares de transformaciones bilineales.

3.1) Desde luego son bilineales las traslaciones

$$f(z) = z + b, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

3.2) Si $a \neq 0$, es una transformación bilineal la aplicación $f(z) = a \cdot z \quad (a \in \mathbb{C})$.

Una aplicación de este tipo se llama dilatación.

La dilatación puede observarse como la composición

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto |a| \cdot z \longmapsto |a| e^{i \operatorname{Arg} a} \cdot z$$

La aplicación $z \longmapsto |a| \cdot z$ es una homotecia de razón $|a|$.

La aplicación $z \longmapsto e^{i \operatorname{Arg} a} z$ es un giro de ángulo $\operatorname{Arg} a$, y centro 0.

Luego toda dilatación es composición de una homotecia y un giro.

Si $|a| = 1$, la dilatación se transforma en una rotación o giro: $f(z) = e^{i\theta} z$

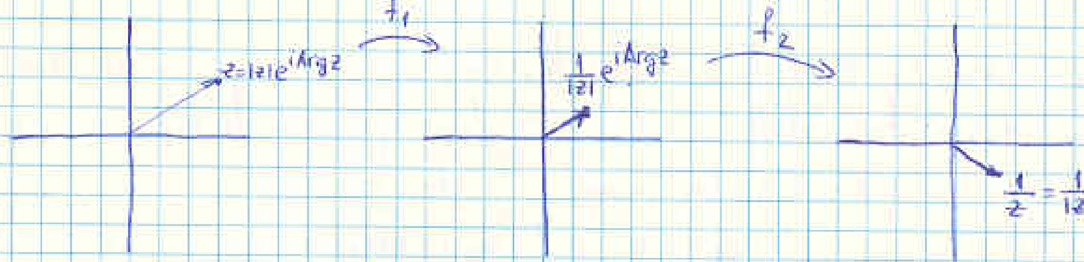
3.3) Otra transformación bilineal es la inversión compleja

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0).$$

La inversión compleja puede expresarse como la siguiente composición

$$z \in \mathbb{C}^* \xmapsto{f_1} \frac{1}{|z|} e^{i \operatorname{Arg} z} \xmapsto{f_2} \frac{1}{|z|} e^{-i \operatorname{Arg} z} = \frac{1}{z}$$

La primera aplicación es la inversión real con centro cero y potencia 1 y la segunda es una simetría respecto al eje real



<u>2.1. PROPOSICION:</u> Si f es una transformación bilineal entonces es la composición de traslaciones, dilataciones e inversiones.

Demostr.: Si $c=0$, entonces $f(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$.

Entonces, si $f_1(z)=\frac{a}{d}z$ y $f_2(z)=z+\frac{b}{d}$ entonces $f=f_2\circ f_1$, donde f_1 es una dilatación y f_2 es una traslación.

Si $c\neq 0$, consideremos las aplicaciones $f_1(z)=z+\frac{d}{c}$, $f_2(z)=\frac{1}{z}$, $f_3(z)=\frac{bc-ad}{c^2}z$ y $f_4(z)=z+\frac{a}{c}$ y se verifica trivialmente que $f=f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1$ c.s.q.d.

<u>OBSERVACION:</u> Sin necesidad de utilizar que toda función holomorfa con derivada no nula es conforme, es trivial comprobar que toda transformación bilineal conserva ángulos, pues las traslaciones, dilataciones e inversiones conservan ángulos.

3. Algo más sobre transformaciones bilineales. Razón doble

A) Sea $S(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ una transformación bilineal.

Es fácil comprobar que, si S no es la identidad, entonces tiene a lo sumo dos puntos dobles, es decir a lo sumo existen dos valores de z en $\mathbb{C}_\infty$ tales que $S(z)=z$ (*), en el caso $c=0$, un punto doble es ∞.

Por tanto, si una transformación bilineal tiene tres puntos dobles, necesariamente es la identidad.

Como consecuencia, si dos transformaciones bilineales coinciden sobre tres puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$, entonces son iguales. En efecto: sean S y T transformaciones bilineales y z_1, z_2, z_3 puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$ tales que $S(z_1) = T(z_1)$, $S(z_2) = T(z_2)$, $S(z_3) = T(z_3)$.
Entonces $T^{-1} \circ S$ es una transformación bilineal que deja fijos los puntos z_1, z_2, z_3 y por tanto $T^{-1} \circ S = i_{\overline{\mathbb{C}}}$. Luego $T = S$.

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos y $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ también distintos dos a dos. Cabe preguntarse si existe una transformación bilineal S tal que

$$S(z_1) = w_1 \ , \ S(z_2) = w_2 \ , \ S(z_3) = w_3 .$$

La respuesta es afirmativa como probaremos más adelante. De momento podemos asegurar que si existe una tal S, entonces es única, según se ha probado.

Vamos a definir ahora una transformación bilineal de particular interés.

Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$.
Definimos la aplicación

$$S : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

por

i) $S(z) = \dfrac{z - z_3}{z - z_4} : \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ si $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$

ii) $S(z) = \dfrac{z - z_3}{z - z_4}$ si $z_2 = \infty$.

iii) $S(z) = \dfrac{z_2 - z_4}{z - z_4}$ si $z_3 = \infty$

iv) $S(z) = \dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}$ si $z_4 = \infty$ (*)

En cualquier caso es trivial comprobar que se trata de una transformación bilineal de Möebius.

Se verifica en cualquiera de los casos que

$$S(z_2) = 1 \ , \ S(z_3) = 0 \ , \ S(z_4) = \infty$$

S es la única transformación bilineal que lleva los puntos z_2, z_3, z_4 en los puntos $1, 0, \infty$ respectivamente, según se probó anteriormente.

Pues bien,

(*) Observar que ii), iii) e iv) se obtienen de i) por paso al límite.

DEFINICION: Si $z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ son distintos dos a dos y $z_1 \in \overline{\mathbb{C}}$ se define la **razón** doble de los puntos z_1, z_2, z_3, z_4, que denotaremos (z_1, z_2, z_3, z_4), por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = S(z_1),$$

es decir, es la imagen de z_1 por la única aplicación bilineal $S: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ que transforma z_2 en 1, z_3 en 0 y z_4 en ∞.

Se verifica trivialmente que

- $(z_2, z_2, z_3, z_4) = 1$
- $(z_3, z_2, z_3, z_4) = 0$
- $(z_4, z_2, z_3, z_4) = \infty$
- $(z, 1, 0, \infty) = z$, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, pues la única transformación bilineal que transforma 1 en 1, 0 en 0 y ∞ en ∞ es la identidad en $\overline{\mathbb{C}}$.

De la definición anterior se deduce que si $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ son puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$ y M es una transformación bilineal tal que $M(\omega_2) = 1$, $M(\omega_3) = 0$, $M(\omega_4) = \infty$, entonces

$$M(\omega) = (\omega, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \quad \forall \omega \in \overline{\mathbb{C}}.$$

3.1. PROPOSICION: Si z_2, z_3, z_4 son puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$ y T es una transformación bilineal entonces

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)), \quad \forall z_1 \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Demostr.: Sea la transformación bilineal

$$S: z \in \overline{\mathbb{C}} \longmapsto S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$$

y sea $M = S \circ T^{-1}$. M es pues una transformación bilineal que verifica

$$M(T(z_2)) = S(z_2) = 1$$
$$M(T(z_3)) = S(z_3) = 0$$
$$M(T(z_4)) = S(z_4) = \infty$$

Luego $M(z) = (z, T(z_2), T(z_3), T(z_4))$, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

En particular, si $z_1 \in \overline{\mathbb{C}}$ para $z = T(z_1)$ se tiene

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = S(z_1) = (S \circ T^{-1})(T(z_1)) = M(T(z_1)) =$$
$$= (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)). \quad \text{csqd}$$

La siguiente proposición asegura que siempre existe una transformación bilineal que transforma tres puntos distintos dados en otros tres puntos distintos fijados también de antemano.

3.2. PROPOSICION: Si z_2, z_3, z_4 son puntos de $\overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos y w_2, w_3, w_4 son puntos distintos dos a dos de $\overline{\mathbb{C}}$, entonces existe una única transformación bilineal S tal que
$$S(z_i) = w_i \; , \quad i = 2, 3, 4.$$

Demostr.: Ya se probó anteriormente que, de existir, ha de ser única. Probemos que existe una tal S.

Sea $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ y $M(w) = (w, w_2, w_3, w_4)$.

Entonces $S = M^{-1} \circ T$ es una transformación bilineal que verifica:
$$S(z_2) = M^{-1}(T(z_2)) = M^{-1}(1) = w_2$$
$$S(z_3) = M^{-1}(T(z_3)) = M^{-1}(0) = w_3$$
$$S(z_4) = M^{-1}(T(z_4)) = M^{-1}(\infty) = w_4 . \qquad \text{csqd.}$$

B) Cuando se hable de círculo en $\overline{\mathbb{C}}$, ha de entenderse que estamos hablando o bien de una circunferencia en el plano o bien de una recta (que pensada en la esfera de Riemann es una circunferencia que pasa por el polo norte).

Veremos que las transformaciones bilineales transforman círculos en círculos (en $\overline{\mathbb{C}}$). Antes probemos la siguiente

3.3. PROPOSICION: Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos de $\overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos. Entonces $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ si, y solo si, los cuatro puntos son concíclicos (es decir, están en un círculo).

Demostr.: (*) Sea $S : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ la transformación bilineal definida por $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$.

Entonces $S^{-1}(\mathbb{R}) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} \,/\, (z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \}$.

y tambien, añadiendo el punto z_4
$$z \in S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \iff (z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

S^{-1} es una transformación bilineal que lleva 1 a z_2, 0 a z_3 e ∞ a z_4.

Probemos que $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ es un círculo, con lo cual habremos terminado; en efecto: si z_1 es tal que $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ entonces z_1 está sobre el círculo $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ que pasa por z_2, z_3, z_4, y si z_1 está en el círculo determinado por z_2, z_3, z_4, que es $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, entonces $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

(*) Tres puntos distintos de $\overline{\mathbb{C}}$ determinan un único círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ (si uno de los puntos es ∞, el círculo es la recta que pasa por los otros dos). Obviamente $(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq \infty$ pues $z_1 \neq z_4$

pues siendo $t_1 \neq t_4$, $(t_1,t_2,t_3,t_4) \neq \infty$.

Basta pues probar que $S^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ es un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$. Probaremos algo más: cualquiera que sea la transformación bilineal $S:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $S^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ es un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$. Sea $S: z\in\overline{\mathbb{C}} \longmapsto S(z)=\frac{az+b}{cz+d}\in\overline{\mathbb{C}}$.

Sea $x\in\mathbb{R}$ y $w=S^{-1}(x)$. Entonces $S(w)=x\in\mathbb{R}$. Por tanto, $S(w)=\overline{S(w)}$, es decir

$$(\mathrm{I})\quad \frac{aw+b}{cw+d}=\frac{\bar a\bar w+\bar b}{\bar c\bar w+\bar d}$$

Entonces

$$(\mathrm{II})\quad (a\bar c-\bar a c)|w|^2+(a\bar d-\bar b c)w+(b\bar c-\bar a d)\bar w+(b\bar d-\bar b d)=0$$

Esta ecuación es satisfecha por todo $w\in S^{-1}(\mathbb{R})$. Incluso la satisface $-\frac{d}{c}=S^{-1}(\infty)$, como puede comprobarse.

Recíprocamente, si w satisface (II), entonces se verifica (I) para $w\neq-\frac{d}{c}$. Luego si $w\neq-\frac{d}{c}$, $w\in S^{-1}(\mathbb{R})$ (si w satisface (II)). En caso $w=-\frac{d}{c}$ se tiene $w=S^{-1}(\infty)$. Luego (w satisface (II)) $\Leftrightarrow$ $(w\in S^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\}))$.

Basta pues probar que el conjunto de $w\in\overline{\mathbb{C}}$ tales que w satisface (II) es un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$.

Distinguiremos dos casos:

i) $a\bar c\in\mathbb{R}$: En este caso $a\bar c$ coincide con su conjugado, $\bar a c$, y por tanto $a\bar c-\bar a c=0$. La ecuación (II) queda en la forma

$$(a\bar d-\bar b c)w+(b\bar c-\bar a d)\bar w+(b\bar d-\bar b d)=0$$

Sean $\alpha=2(a\bar d-\bar b c)$ y $\beta=i(b\bar d-\bar b d)$

Entonces (II) se puede escribir en la forma

$$\frac{\alpha}{2}w-\frac{\bar\alpha}{2}\bar w+\frac{\beta}{i}=0$$

o bien, multiplicando por $\frac{1}{i}$,

$$\operatorname{Im}(\alpha w)-\beta=0 \qquad (\mathrm{III})$$

pues $\operatorname{Im}(\alpha w)=\frac{\alpha w-\overline{\alpha w}}{2i}$.

Además $\beta\in\mathbb{R}$, por ser un número $(b\bar d)$ menos su conjugado multiplicado por i. (III) se escribe entonces en la forma

$$\operatorname{Im}(\alpha w-i\beta)=0$$

que es la ecuación de una recta. (*)

(*) La recta que pasa por dos puntos $a,b\in\mathbb{C}$ es $\frac{w-a}{b-a}=t\in\mathbb{R}$, que se puede escribir en la forma $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{b-a}w-\frac{a}{b-a}\right)=0$

ii) Supongamos ahora que $a\bar{c} \notin \mathbb{R}$: Entonces $a\bar{c} - \bar{a}c \neq 0$ y dividiendo (II) por $a\bar{c}-\bar{a}c$ se obtiene

$$|w|^2 + \bar{\gamma} w + \gamma \bar{w} - \delta = 0 \qquad \text{(IV)}$$

siendo

$$\gamma = \frac{b\bar{c} - d\bar{a}}{a\bar{c} - \bar{a}c} \quad \text{y} \quad \delta = -\frac{b\bar{d} - \bar{b}d}{a\bar{c} - \bar{a}c}$$

Notemos que $\delta \in \mathbb{R}$, pues $b\bar{d} - \bar{b}d$ y $a\bar{c} - \bar{a}c$ son imaginarios puros.

Se verifica que

$$(w+\gamma)(\bar{w}+\bar{\gamma}) = |w|^2 + \gamma\bar{w} + \bar{\gamma} w + |\gamma|^2$$

Luego (IV) se puede escribir en la forma

$$(w+\gamma)(\bar{w}+\bar{\gamma}) = |\gamma|^2 + \delta$$

o bien

$$|w+\gamma| = [|\gamma|^2 + \delta]^{1/2}$$

Se puede comprobar que

$$|\gamma|^2 + \delta = \left| \frac{ad - bc}{\bar{a}c - a\bar{c}} \right|^2$$

que es distinto de cero, pues $ad-bc$ es el determinante de la transformación bilineal S. Pero

$$|w+\gamma| = \left| \frac{ad-bc}{\bar{a}c - a\bar{c}} \right|$$

es la ecuación de una circunferencia de centro $-\gamma$ y radio $\left| \frac{ad-bc}{\bar{a}c - a\bar{c}} \right|$. c.s.q.d.

3.4. PROPOSICION: Una transformación bilineal $S: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ transforma círculos de $\overline{\mathbb{C}}$ en círculos de $\overline{\mathbb{C}}$.

Demostr.: Sea C un círculo de $\overline{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos distintos de C. Sean $w_2 = S(z_2)$, $w_3 = S(z_3)$, $w_4 = S(z_4)$.

Los puntos w_2, w_3, w_4 determinan un único círculo C' en $\overline{\mathbb{C}}$ (no olvidemos que S es biyectiva y por tanto w_2, w_3, w_4 son distintos dos a dos). En virtud de PROPOSICION 3.1. se verifica que

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (S(z), w_2, w_3, w_4), \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (1)$$

De la demostración de la proposición anterior se deduce que

$$C = \{z \in \overline{\mathbb{C}} / (z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}.$$

De (1) se deduce que $\forall z \in C$, $(S(z), w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y por tanto $S(z) \in C'$, $\forall z \in C$. Además $S: C \to C'$ es trivialmente bijectiva. csqd.

Cabe preguntarse ahora si, dados dos círculos C y C' en $\overline{\mathbb{C}}$, existe una transformación bilineal que transforma uno en el otro. La respuesta es afirmativa.

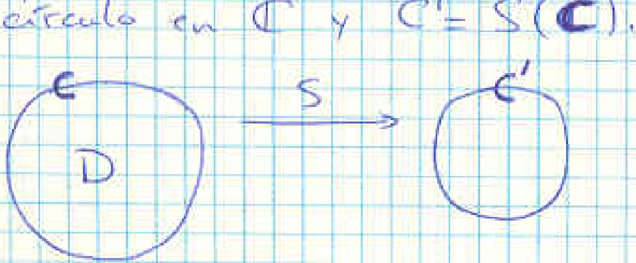
3.5 PROPOSICION: Dados dos círculos C y C' en $\overline{\mathbb{C}}$ existe una transformación bilineal $T: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que $T(C) = C'$. Además, para cada tres puntos distintos en C y tres puntos distintos en C' existe una transformación bilineal que lleva unos sobre los otros y, por tanto, C en C'.

Demostr.: Sean $z_2, z_3, z_4 \in C$ puntos distintos dos a dos, y $w_2, w_3, w_4 \in C'$ también distintos dos a dos. Consideremos las transformaciones bilineales

$R(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ y $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$.

Entonces $S^{-1} \circ R$ es una transformación bilineal tal que $(S^{-1} \circ R)(z_2) = w_2$, $(S^{-1} \circ R)(z_3) = w_3$, $(S^{-1} \circ R)(z_4) = w_4$ y, por tanto, $S^{-1} \circ R$ transforma C en C'. csqd.

OBSERVACION: Consideremos un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ (pensemos en una circunferencia sobre la esfera de Riemann, pasando o no por el polo norte). No queda muy claro aquí la idea de interior o exterior de dicho círculo como ocurría con las circunferencias en $\mathbb{C}$. Más adelante precisaremos esto. En el caso de una recta en $\overline{\mathbb{C}}$ el interior será uno de los semiplanos que determina y el exterior el otro. En cualquier caso, sea S una transformación bilineal, C un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ y $C' = S(C)$. Entonces S transforma el interior de C en el interior de C' o en el exterior de C'; es decir si D es el interior de C dos puntos arbitrarios de D se transforman por S en puntos que están ambos en el interior de C' o ambos en el exterior de C'. Además, todo punto



del interior de C' es imagen de uno del interior de C. Sea lo que sea el interior D de C, D es conexo. Siendo S continua $S(D)$ es conexo. Entonces, si existiesen w_1, w_2 en $S(D)$ uno de ellos en el interior de C' y otro en el exterior, existiría $w \in S(D)$ tal que $w \in C'$, y, por tanto, existiría $z \in D \cap C$ tal que $S(z) = w$, lo cual no puede ocurrir pues $D \cap C = \emptyset$. Además (supuesto que S transforma el interior de C en el interior D' de C') se verifica que S^{-1} es una transformación bilineal que lleva al menos un punto de D' en uno de D y, por un razonamiento análogo, $S^{-1}(D') \subset D$. Queda así probado que $S(D) = D'$. Lo mismo se puede decir para el exterior de C. Más adelante mejoraremos este resultado.

C) SIMETRÍA:

Los puntos z y $\bar{z}$ son simétricos respecto a $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. Supongamos que S es una transformación bilineal tal que $S(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En este caso S admite una expresión de la forma

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

pues en ese caso se tendría que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\bar{a}x+\bar{b}}{\bar{c}x+\bar{d}} \qquad (I)$$

y tenemos dos transformaciones bilineales que coinciden en más de dos puntos y, por tanto, en todos. Si dividimos (I) por uno de los coeficientes a, b, c, d no nulo se comprueba que dichos coeficientes son reales(*). Desde luego si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se tiene que $S(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Bien, pues en el caso de que $S(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se verifica que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{S(z)} = S(\bar{z}) \qquad (1)$$

y diremos que $S(\bar{z})$ y $S(z)$ son simétricos respecto de $\mathbb{R}$, lo cual por (1) corresponde a nuestra intuición de simetría.

La siguiente definición generaliza esto para el caso de un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$.

(*) O de otra forma: la imagen por S de tres números reales distintos (p.ej., $1, 0, \infty$) son números reales distintos. Ver ahora la PROPOSICIÓN 3.2.

DEFINICIÓN: Sea T una transformación bilineal que transforma $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ en un círculo C de $\overline{\mathbb{C}}$. Dos puntos w y w^* se dicen simétricos respecto de C si existe z tal que $w = T(z)$ y $w^* = T(\overline{z})$, es decir si

$$T^{-1}(w^*) = \overline{T^{-1}(w)}$$

Sabemos que existen infinitas transformaciones bilineales que transforman $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ en C (basta fijar tres puntos distintos de $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ y considerar cada vez ternas distintas de puntos distintos dos a dos en C que sean las imágenes de los puntos fijados en $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$). Se plantea entonces el problema de ver si la definición anterior depende de T. La respuesta es que no depende de T. En efecto: sea S otra transformación bilineal tal que $S(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = C$. Entonces $S^{-1}\circ T$ transforma $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ en $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, y por tanto

$$\overline{(S^{-1}\circ T)(z)} = (S^{-1}\circ T)(\overline{z}), \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Luego

$$S^{-1}(w^*) = S^{-1}(T(\overline{z})) = (S^{-1}\circ T)(\overline{z}) = \overline{(S^{-1}\circ T)(z)} = \overline{S^{-1}(T(z))} = \overline{S^{-1}(w)}$$

En particular: Si C es un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 son puntos distintos de C se verifica que z y z^* son simétricos respecto a C si $(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}$. Basta aplicar la definición para la transformación $T: \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to C$ tal que $T^{-1} = (\cdot, z_2, z_3, z_4)$.

En este caso particular, la simetría respecto a C es independiente de los puntos z_2, z_3, z_4 distintos que elijamos en C. (*)

Además se verifica que z coincide con su simétrico respecto a C si, y solo si, $z\in C$, pues si $z = z^*$ entonces $(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}$ y por tanto $(z^*, z_2, z_3, z_4)\in\mathbb{R}$ lo que prueba que $z^*\in C$, es decir, $z\in C$, y recíprocamente, si $z\in C$ entonces $(z, z_2, z_3, z_4)\in\mathbb{R}$ y por tanto $(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$, lo que prueba que z coincide con su simétrico.

Probemos ahora que en el caso de que C sea una recta, la simetría definida coincide con el concepto de

(*) Realmente esto no es un caso particular, pues toda transformación bilineal que lleve C en $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ es de la forma $(\cdot, z_2, z_3, z_4)$ con $z_2, z_3, z_4\in C$.

simetría respecto de una recta en el plano conocido.

Basta tomar $z_4 = \infty$, pues toda recta en $\overline{\mathbb{C}}$ pasa por ∞. En este caso decir que $(z, z_2, z_3, \infty) = \overline{(z^*, z_2, z_3, \infty)}$ significa que

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\overline{z^*} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}} \qquad (\text{II})$$

De ello se deduce que

$$|z - z_3| = |\overline{z^*} - \overline{z}_3|$$

pues $|z_2 - z_3| = |\overline{z}_2 - \overline{z}_3|$. Por tanto $|z - z_3| = |z^* - z_3|$. Esto es cierto para cualquier punto z_3 de la recta. Luego las distancias de z y z^* a dicha recta coinciden. Ya solo falta probar que están en semiplanos distintos. De (II) se deduce que

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\overline{z^*} - \overline{z}_3}{\overline{z}_2 - \overline{z}_3}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3}\right) \qquad (\text{III})$$

Como la ecuación de la recta que pasa por z_2 y z_3 es

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w - z_3}{z_2 - z_3}\right) = 0$$

se deduce de (III) que z y z^* están en distintos semiplanos, como queríamos probar.

Veamos ahora qué ocurre cuando C es un círculo de $\mathbb{C}$. Sea $C = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| = R\}$, con $0 < R < +\infty$.

Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de C. Se verifica entonces que

$$\overline{z}_j - \overline{a} = \frac{R^2}{z_j - a}, \quad j = 2, 3, 4 \qquad (\text{III}')$$

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$ y z^* su simétrico respecto a C. Entonces

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \overset{(1)}{=} \overline{(z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} \overset{(2)}{=}$$

$$= (\overline{z} - \overline{a}, \overline{z}_2 - \overline{a}, \overline{z}_3 - \overline{a}, \overline{z}_4 - \overline{a}) \overset{(3)}{=} \left(\overline{z} - \overline{a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a}\right) \overset{(4)}{=}$$

$$= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a\right) \overset{(5)}{=} \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a, z_2, z_3, z_4\right)$$

(1) es cierta pues la razón doble de cuatro puntos coincide con la razón doble de sus imágenes mediante una transformación de Möbius, en este caso, una traslación de vector $-a$.

(2) es cierta pues, $z, z_2, z_3, z_4, a \in \mathbb{C}$ (existe, por tanto, el conjugado de cada uno de ellos).

(3) por (III').

(4) Idem que (1), pero en este caso se trata de una inversión de centro 0 y potencia R^2: $S(z) = \frac{R^2}{z}$.

(5) Traslación de vector a.

Se ha probado que $(z^*, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a, z_2, z_3, z_4\right)$ y por tanto $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a$.

Luego el simétrico de un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ respecto a C es

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a. \quad (IV)$$

Veamos qué interpretación geométrica tiene la simetría respecto a una circunferencia en el plano.

De (IV) se deduce que $(z^*-a)(\bar{z}-\bar{a}) = R^2$ y por tanto

$$\frac{z^*-a}{z-a}|z-a|^2 = R^2$$

de lo que se deduce que

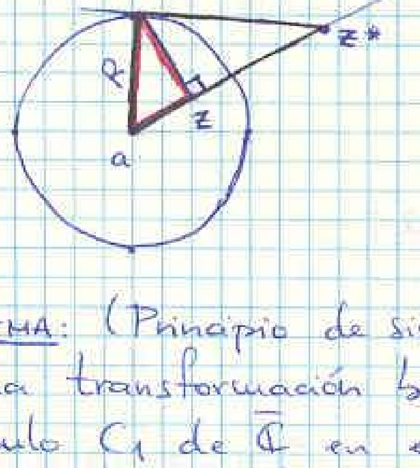
$$\frac{z^*-a}{z-a} = \frac{R^2}{|z-a|^2}$$

Observar que $\frac{R^2}{|z-a|^2} > 0$. Luego $z^* = a + \rho(z-a)$ donde $\rho > 0$ lo que prueba que z^* está en la semirrecta que comienza en a y pasa por z. Además se cumple que

$$|z^*-a| \cdot |\bar{z}-\bar{a}| = R^2$$

Por tanto, la simetría respecto a un círculo en $\mathbb{C}$ es una inversión de centro a y potencia R^2.

Geométricamente



Los triángulos rojo y negro son semejantes y, por tanto

$$\frac{|z^*-a|}{R} = \frac{R}{|z-a|}\left(= \frac{R}{|\bar{z}-\bar{a}|}\right)$$

3.6. TEOREMA: (Principio de simetría)

Si una transformación bilineal $T: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ transforma un círculo C_1 de $\overline{\mathbb{C}}$ en el círculo C_2 de $\overline{\mathbb{C}}$, entonces transforma puntos simétricos respecto de C_1 en puntos simétricos respecto de C_2.

Demostr.: Sean z_2, z_3, z_4 puntos de C_1 distintos dos a dos. Sean z y z^* puntos simétricos respecto de C_1. Entonces

$$(T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z, z_2, z_3, z_4) =$$

$$= \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)} = \overline{(T(z^*), T(z_2), T(z_3), T(z_4))}$$

que prueba que $T(z)$ y $T(z^*)$ son simétricos respecto de C_2, pues $T(z_2)$, $T(z_3)$, $T(z_4)$ son puntos distintos de C_2. c.s.q.d.

D) <u>ORIENTACION</u>:

<u>DEFINICION</u>: Sea C un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$. Una orientación en C es una terna ordenada (z_1, z_2, z_3) de puntos distintos sobre C.

Sería erróneo pensar que un par ordenado de puntos en una recta da una orientación a la misma en el sentido intuitivo que esta palabra tiene; no hay más que pensar como son las rectas en la esfera de Riemann.

<u>OBSERVACION</u>: Supongamos $C = \mathbb{R}$ y sean z_1, z_2, z_3 puntos distintos de $\mathbb{R}$. Consideremos la transformación bilineal

$$T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$$

$T(z)$ admite una expresión del tipo

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

pues T transforma $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Multiplicando y dividiendo por $\overline{cz+d} = c\bar{z} + d$ se tiene

$$T(z) = \frac{az+b}{|cz+d|^2}(c\bar{z}+d) = \frac{1}{|cz+d|^2}(ac|z|^2 + bd + adz + bc\bar{z})$$

Observemos que $\frac{1}{|cz+d|^2}$, $ac|z|^2$, $bd \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$\operatorname{Im} T(z) = \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \operatorname{Im} z$$

Observamos que $ad - bc \neq 0$ pues es el determinante de la transformación T. Se verifica entonces

$$\{z \in \overline{\mathbb{C}} \,/\, \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\} = \begin{cases} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \,/\, \operatorname{Im} z > 0\} & \text{si } ad-bc > 0 \\ = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \,/\, \operatorname{Im} z < 0\} & \text{si } ad-bc < 0 \end{cases}$$

Consideramos los dos semiplanos de $\mathbb{C}$ que determina $\mathbb{R}$. Entonces $\{z \,/\, \mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$ es el semiplano superior si $ad - bc > 0$ y el inferior si $ad - bc < 0$.

Tenemos así una manera de distinguir un semiplano de otro. Vamos a generalizar este resultado, lo que en el caso de una circunferencia en $\mathbb{C}$ nos permitirá distinguir el interior del exterior de la misma, aunque le daremos otro nombre.

Sea C un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ y (z_1, z_2, z_3) una orientación de C. Sea S una transformación bilineal en principio arbitraria. Entonces

$$\{z \,/\, \mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\} = \{z \,/\, \mathrm{Im}(S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)) > 0\} =$$

$$= \{S^{-1}(w) \,/\, \mathrm{Im}(w, S(z_1), S(z_2), S(z_3)) > 0\} =$$

$$= S^{-1}\Big(\{w \,/\, \mathrm{Im}(w, S(z_1), S(z_2), S(z_3)) > 0\}\Big) \qquad (V)$$

Supongamos ahora que S transforma C en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces

$$S(z_j) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad j = 1, 2, 3. \qquad (VI)$$

De acuerdo con (V)

$$\{z \,/\, \mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\} = S^{-1}\Big(\{w \,/\, \mathrm{Im}(w, S(z_1), S(z_2), S(z_3)) > 0\}\Big)$$

y por la OBSERVACION anterior y teniendo en cuenta (VI) se deduce que $\{w \,/\, \mathrm{Im}(w, S(z_1), S(z_2), S(z_3)) > 0\}$ es o bien el semiplano superior o el inferior que $\mathbb{R}$ determina en $\mathbb{C}$. Luego $\{z \,/\, \mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$ es la imagen por S^{-1} de uno de los semiplanos que $\mathbb{R}$ determina en $\mathbb{C}$. La imagen por S^{-1} del otro semiplano es $\{z \,/\, \mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}$.

<u>DEFINICION</u>: Sea C un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ y (z_1, z_2, z_3) una orientación en C. Llamamos la parte derecha de C respecto a dicha orientación al conjunto $\{z \,/\, \mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$. Llamamos parte izquierda de C respecto a esta orientación al conjunto $\{z \,/\, \mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}$.

<u>NOTA</u>: Sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se suele tomar la orientación $(1, 0, \infty)$ para que la parte derecha de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sea el semiplano

superior.

3.7. TEOREMA: (Principio de orientación).

Sean C_1 y C_2 círculos en $\overline{\mathbb{C}}$ y T una transformación bilineal tal que $T(C_1)=C_2$. Sea (z_1,z_2,z_3) una orientación en C_1. Entonces T transforma la parte derecha (resp. la parte izquierda) de C_1 respecto de la orientación (z_1,z_2,z_3) en la parte derecha (resp. parte izquierda) de C_2 respecto a la orientación $(T(z_1),T(z_2),T(z_3))$.

▷ La demostración es trivial pues

$$\operatorname{Im}(z,z_1,z_2,z_3)>0 \iff \operatorname{Im}(T(z),T(z_1),T(z_2),T(z_3))>0.$$ ▨