TEMA 8º: INTEGRACION EN EL CAMPO COMPLEJO. INTEGRALES CURVILINEAS. FORMAS DIFERENCIALES EXACTAS EN UN ABIERTO.

1. INTEGRACION DE FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE REAL. FORMAS DIFERENCIALES.

Sea $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ una función continua. Sean $u=\operatorname{Re} f$ y $v=\operatorname{Im} f$. Se define

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt.$$

A partir de la definición dada es trivial comprobar que si $f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ entonces

i) $\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$

ii) $\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$.

Se verifica además que, si $a\leq b$

iii) $\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b |f|$

▷ Si $\int_a^b f=0$ la desigualdad es evidente. Supongamos $\int_a^b f=re^{i\theta}\neq 0$. Entonces

$$\left|\int_a^b f\right|=r=e^{-i\theta}\int_a^b f=\int_a^b e^{-i\theta}f=\int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)+i\int_a^b \operatorname{Im}(e^{-i\theta}f).$$

Como $r\in\mathbb{R}$ ha de ser $\int_a^b \operatorname{Im}(e^{-i\theta}f)=0$. Luego

$$\left|\int_a^b f\right|=\int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)\overset{(1)}{\leq}\int_a^b |e^{-i\theta}f|=\int_a^b |f|\quad \text{pues } |e^{-i\theta}|=1.$$

(1) es cierta por ser $a\leq b$ y $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)$ una función real de variable real (se ha aplicado la monotonía de la integral para funciones reales de variable real). ◁

Otra consecuencia inmediata de la definición y del teorema de cambio de variables para funciones reales de variable real es

iv) (Teorema de cambio de variables)

Si $t: t' \in [a',b'] \longmapsto t(t') \in [a,b]$ es de clase C^1 y $t(a') = a$ y $t(b') = b$ entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a'}^{b'} f(t(t'))\,\frac{dt}{dt'}\cdot dt'$$

DEFINICION: (Camino o curva en $\mathbb{C}$).

Un camino en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua

$$\gamma: [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Cuando hablemos de un camino diferenciable debe entenderse que γ es derivable con continuidad.

Algunos autores llaman curva a lo que nosotros hemos definido como camino o curva y reservan la palabra camino para el caso en que éste sea diferenciable.

DEFINICION: (Forma diferencial en un abierto).

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$. Se llama forma diferencial en D a una expresión del tipo $p\,dx + q\,dy$ donde $p, q \in \mathcal{C}(D)$.

p y q son funciones continuas complejas en D.

OBSERVACION: Se puede decir que el conjunto de las formas diferenciales en D es el módulo libre generado por $e_1 = dx$, $e_2 = dy$ sobre el anillo $\mathcal{C}(D)$

DEFINICION: Sea $\omega = p\,dx + q\,dy$ una forma diferencial en D y γ un camino diferenciable en D. Se define

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (p\,dx + q\,dy) = \int_a^b [p(\gamma(t))\cdot x'(t) + q(\gamma(t))\cdot y'(t)]\,dt$$

siendo $\gamma: t \in [a,b] \longmapsto \gamma(t) = x(t) + i\,y(t) \in \mathbb{C}$.

Utilizaremos la siguiente notación

$$f(z)\,dz = f(z)\,dx + i\,f(z)\,dy$$

En este caso particular la definición anterior queda

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [f(\gamma(t))\,x'(t) + i\,f(\gamma(t))\,y'(t)]\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

pues $\gamma'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

Sería deseable que la definición dada sea independiente de la parametrización del camino γ

1.1. PROPOSICION: Sea $t : u \in [a_1, b_1] \longmapsto t(u) \in [a,b]$ diferenciable con continuidad tal que $t(a_1) = a$, $t(b_1) = b$. Consideremos el camino $\gamma_1 : u \in [a_1, b_1] \longmapsto \gamma_1(u) = \gamma(t(u)) \in \mathbb{C}$. Entonces
$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$
cualquiera que sea la forma diferencial $\omega = p\,dx + q\,dy$.

Demostr.: La demostración es consecuencia inmediata del teorema de cambio de variables:
$$\int_\gamma \omega = \int_a^b [p(\gamma(t)) \cdot x'(t) + q(\gamma(t))\, y'(t)]\, dt =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} [p(\gamma(t(u)))\, x'(t(u)) + q(\gamma(t(u)))\, y'(t(u))] \frac{dt}{du} \cdot du =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \left[p(\gamma_1(u)) \cdot \frac{dx}{du} + q(\gamma_1(u)) \cdot \frac{dy}{du}\right] du = \int_{\gamma_1} \omega \ . \ \text{csqd.}$$

OBSERVACIONES: ① En las hipótesis de la proposición anterior, pero en el caso de que $t(a_1) = b$, $t(b_1) = a$ se verifica trivialmente que
$$\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma_1} \omega$$
En este caso los caminos γ y γ_1 "recorren en distinto sentido" la imagen $\gamma([a,b]) = \gamma_1([a_1, b_1])$ y se dice a veces que γ_1 es el camino opuesto de γ y se denota por $\gamma_1 = -\gamma$.

② Sea $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ una partición de $[a,b]$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino diferenciable con continuidad. Denotemos $\gamma_i = \gamma|[t_{i-1}, t_i]$. Es trivial comprobar que $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega$.

DEFINICION: Un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ (por tanto, continuo) se dice diferenciable a trozos con continuidad si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a,b]$ tal que las restricciones $\gamma_i = \gamma|[t_{i-1}, t_i]$ son diferenciables con continuidad. (*)

(*) En los extremos del intervalo consideramos siempre derivadas laterales.

DEFINICION: Si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ es un camino diferenciable con continuidad a trozos y ω es una forma diferencial en D entonces se define

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i}\omega$$

donde $\gamma_i = \gamma|[t_{i-1},t_i]$ es diferenciable con continuidad.

Observemos que la definición es consistente, es decir que cuando γ es un camino diferenciable con continuidad (y por tanto a trozos) $\int_\gamma \omega$ significa lo mismo que se definió anteriormente.

Además no depende de la elección de la partición $\{a=t_0<t_1<\dots<t_n=b\}$ para la que $\gamma_i=\gamma|[t_{i-1},t_i]$ es diferenciable, pues dadas dos particiones que verifiquen lo anterior, considerando una partición más fina que ambas (p.ej., la unión) se prueba que se obtiene el mismo valor para $\int_\gamma \omega$.

También para un camino diferenciable con continuidad a trozos $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ se verifica

1) $\int_\gamma(\omega_1+\omega_2)=\int_\gamma\omega_1+\int_\gamma\omega_2$

2) $\int_\gamma a\omega = a\int_\gamma\omega$, $\forall a\in\mathbb{C}$.

2. FORMAS DIFERENCIALES EXACTAS.

DEFINICION: (Integral respecto a la longitud de arco)

Sea D abierto $\subset\mathbb{C}$ y $f\in\mathcal{C}(D)$ y $\gamma:[a,b]\to D$ un camino diferenciable con continuidad. Se llama integral de f a lo largo de γ respecto a la longitud de arco, y se denota por $\int_\gamma f\,ds$ ó $\int_\gamma f\,|dz|$, a

$$\int_a^b f(\gamma(t))\cdot|\gamma'(t)|\,dt.$$

La extensión de esta definición al caso en que γ sea un camino diferenciable con continuidad a trozos es natural. Podría extenderse esta definición al caso más general de que γ sea un camino rectificable.

Recordemos que si γ es diferenciable con continuidad la longitud de γ es $L(\gamma)=\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

2.1. PROPOSICIÓN: En las condiciones de la definición ocurre que

$$\boxed{\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \qquad (\text{si } a\leq b)}$$

Demostr.: $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right| \overset{a\leq b}{\leq}$

$$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|. \quad \text{c.s.q.d.}$$

2.2. COROLARIO: Si $\exists M>0$ tal que $|f|\leq M$, o al menos $|f(\gamma(t))|\leq M$, $\forall t\in[a,b]$, entonces

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq M\cdot L(\gamma). \qquad (*)$$

El siguiente teorema da pie a la definición de forma diferencial exacta.

2.3. TEOREMA: Sea $D\subset\mathbb{C}$ abierto y conexo, y $\omega = p\,dx+q\,dy$ una forma diferencial en D, y $\gamma:[a,b]\longrightarrow D$ un camino diferenciable con continuidad a trozos. Entonces $\int_\gamma \omega$ depende únicamente de los extremos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ (y no del camino que los une) si, y solo si, existe una función de clase C^1 $U: D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que

$$U_x = p \quad , \quad U_y = q.$$

Demostr.: $\Leftarrow$ (*) Supongamos que existe $U\in C^1(D,\mathbb{C})$ tal que $U_x=p$ y $U_y=q$. Entonces si $\gamma(t)=x(t)+i\,y(t)$

$$\int_\gamma p\,dx+q\,dy = \int_a^b \left[p(\gamma(t))\,x'(t)+q(\gamma(t))\,y'(t)\right]dt =$$

$$= \int_a^b \left[U_x(x(t),y(t))\,x'(t) + U_y(x(t),y(t))\,y'(t)\right]dt =$$

$$= \int_a^b \frac{dU}{dt}(x(t),y(t))\,dt = \int_a^b \frac{dU}{dt}(\gamma(t))\,dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

con lo que $\int_\gamma \omega$ solo depende del valor que toma U en los puntos $\gamma(b)$ y $\gamma(a)$, y no del camino que une dichos puntos.

(*) Supondremos aquí que γ es diferenciable con continuidad. Si lo fuese a trozos sería análogo.

(*) Se suele llamar traza de γ a $(\gamma)=\{\gamma(t)/t\in[a,b]\}\subset\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$) Siendo D abierto y conexo en $\mathbb{R}^2$ es conexo por poligonales que incluso podemos tomar de lados paralelos a los ejes.

Sea $z_0 \in D$. Entonces, para cualquier $z=(x,y)\in D$ existe una poligonal γ de lados paralelos a los ejes que une z_0 con z.

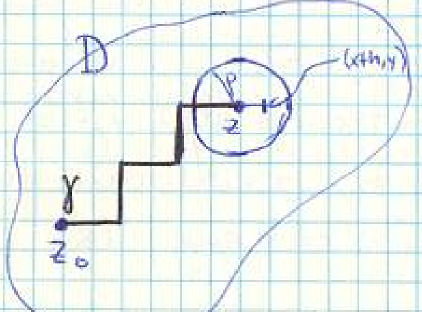
Sea $U : (x,y)\in D \longmapsto U(x,y) = \int_\gamma p\,dx + q\,dy \in \mathbb{C}$.

Observemos en primer lugar que $U(x,y)$ está bien definido, pues, por hipótesis, $\int_\gamma p\,dx+q\,dy$ solo depende de z_0 y de (x,y), y no del camino γ que los une.

Veamos que $U_x = p$ y $U_y = q$ con lo cual quedará probado que U es de clase C^1 en D, pues existen las derivadas parciales y son continuas.

Sea $z=(x,y)\in D$ y $\rho>0$ tal que $B(z,\rho)\subset D$. Entonces para $0<|h|<\rho$ se verifica que $(x+h,y)\in B(z,\rho)\subset D$.

Si el último segmento de γ es horizontal y lo ampliamos (o reducimos según sea $h>0$ ó $h<0$) con el segmento determinado por (x,y) y $(x+h,y)$, que denotaremos por $[(x,y),(x+h,y)]$, se tiene



$$U(x+h,y)-U(x,y)=\int_x^{x+h} p(\xi,y)\,d\xi$$

según la definición de integral de una forma diferencial a lo largo de un camino (*)

Entonces

$$\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} - p(x,y) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[p(\xi,y)-p(x,y)]\,d\xi$$

pues $\int_x^{x+h} p(x,y)\,d\xi = p(x,y)\int_x^{x+h} d\xi = h\,p(x,y)$.

De la continuidad de p se deduce que

$\forall \varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0 \,/\, |\xi-x|<\delta \Rightarrow |p(\xi,y)-p(x,y)|<\varepsilon$.

Entonces, si $|h|<\delta$ se verifica que $|\xi-x|<\delta$ y por tanto

$$\left|\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} - p(x,y)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}[p(\xi,y)-p(x,y)]\,d\xi\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\,\varepsilon\,|h| = \varepsilon \quad \text{si } 0<|h|<\delta.$$

(*) Observar que el camino sobre el que se está integrando es $\xi\in[x,x+h]\longmapsto(\xi,y)\in D$ de forma que $x(\xi)=\xi$ y $y(\xi)=y$ con lo cual $x'(\xi)=1$, $y'(\xi)=0$

Se ha probado así que existe $\lim_{h\to 0} \frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h}$ y coincide con $p(x,y)$.

Luego $U_x(x,y)=p(x,y)$.

Por un razonamiento análogo, suponiendo que el último segmento de la poligonal es vertical y ampliando dicha poligonal con un cierto segmento $[(x,y),(x,y+h)]$, se prueba que $U_y(x,y)=q(x,y)$. csqd.

OBSERVACION: La suposición hecha en el teorema anterior de que el último segmento de la poligonal es horizontal, o vertical, no es restrictiva, pues siempre se podrá encontrar una poligonal que lo verifique.

DEFINICION: (Forma diferencial exacta).

Sea $\omega=p\,dx+q\,dy$ una forma diferencial en el abierto conexo $D\subset\mathbb{C}$. Se dice que ω es exacta si verifica alguna de las condiciones equivalentes del teorema anterior.

En este caso de la función U se dice que es una primitiva de ω en D, y se escribe

$$dU=\omega$$

2.4. COROLARIO: Sea D abierto y conexo y ω una forma diferencial en D. La condición necesaria y suficiente para que ω sea exacta en D es que la integral de ω a lo largo de cualquier camino diferenciable con continuidad a trozos dependa solo de los extremos del camino.

OBSERVACION: El corolario anterior es otra forma de enunciar el teorema 2.3. De la demostración de dicho teorema se deduce que para comprobar si ω es exacta basta considerar solo caminos que sean poligonales de lados paralelos a los ejes.

2.5. COROLARIO: Si D es abierto y conexo y $\omega=dF=0$ en D entonces F es constante en D, es decir, la forma diferencial cero tiene por primitiva las constantes.

Demostr: Sea $z_0\in D$. Entonces para cualquier $z\in D$

existe una poligonal γ que une z_0 con z. Entonces

$$0 = \int_\gamma \omega = F(z) - F(z_0)$$

y, por tanto, $F(z) = F(z_0)$, lo que prueba que F es constante. csqd.

Nuestro principal objetivo son las formas diferenciales del tipo $f(z)dz = f(x,y)dx + if(x,y)dy$. Se verifica

2.6. COROLARIO: Sea D abierto y conexo y $f \in \mathcal{C}(D)$. Entonces la forma diferencial $f(z)dz$ es exacta (i.e.: admite primitiva) en D si, y solo si, f es la derivada de una función holomorfa en D.

Demostr.: $\Rightarrow$) Si $f(z)dz$ es exacta, existe F de clase C^1 en D tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = if$$

Luego F es holomorfa en D pues tiene derivadas parciales continuas en D y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $F_x = \frac{1}{i} F_y$.

$\Leftarrow$) Sea $F \in H(D)$ tal que $F' = f$.
Puesto que F es holomorfa en D se verifica que
$F' = F_x = \frac{1}{i} F_y$.
Por tanto $F_x = f$ y $F_y = if$
lo que prueba que $f(z)dz$ es exacta. csqd.

2.7. COROLARIO: La condición necesaria y suficiente para que $\int_\gamma f(z)dz$ dependa solo de los extremos del camino γ diferenciable con continuidad a trozos (o mejor, poligonal de lados paralelos a los ejes) es que f sea la derivada de una función holomorfa en D.

DEFINICION: (Camino cerrado)
Un camino $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice cerrado si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

CONSECUENCIA: Sea $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado diferenciable con continuidad a trozos, y sea $c \in \gamma[a,b]$

Denotaremos $\gamma' = \gamma|_{[a,c]}$ y $\gamma'' = \gamma|_{[c,a]}$. La "yuxtaposición" de γ' y γ'' la denotaremos por $\gamma' \cup \gamma''$ (o $\gamma' + \gamma''$) en este orden y se tiene $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$.

Sea $\gamma^* = \gamma'' \cup \gamma'$. Entonces γ^* es un camino cerrado cuya traza coincide con la de γ, pero γ^* "recorre" dicha traza empezando en $\gamma(c)$. Sería deseable que, si ω es una forma diferencial, $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma^*} \omega$.
Pero esto es trivialmente cierto pues

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega + \int_{\gamma''} \omega = \int_{\gamma''} \omega + \int_{\gamma'} \omega = \int_{\gamma^*} \omega .$$

El siguiente teorema da otra caracterización de las formas diferenciales exactas.

2.8. TEOREMA: Sea D abierto y conexo en $\mathbb{C}$. La condición necesaria y suficiente para que una forma diferencial ω sea exacta en D es que la integral de ω a lo largo de cualquier camino cerrado diferenciable con continuidad a trozos sea cero. (*)

Demostr.: $\Rightarrow$) Supongamos que ω es exacta y que γ_0 es un ~~es un~~ camino cerrado diferenciable con continuidad a trozos.
Sean $\gamma' = \gamma_0|_{[a,c]}$, $\gamma'' = \gamma_0|_{[c,b]}$ donde $c \in]a,b[$.
Los caminos γ' y $-\gamma''$ tienen los mismos extremos.
Por tanto

$$\int_{\gamma'} \omega = \int_{-\gamma''} \omega = -\int_{\gamma''} \omega$$

de lo que se deduce que $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega + \int_{\gamma''} \omega = 0$.

$\Leftarrow$) Sean γ_1 y γ_2 caminos con los mismos extremos.
Sea $\gamma_0 = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$. γ_0 es un camino cerrado diferenciable con continuidad a trozos. Por tanto $\int_{\gamma_0} \omega = 0$.
Luego $\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0$. Por tanto, ω es exacta. c.s.q.d.

2.9. COROLARIO: Si $f \in \mathcal{C}(D)$, la condición necesaria y suficiente para que $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 0$ para todo camino cerrado γ_0 diferenciable con continuidad a trozos en D es que f sea la derivada de una función holomorfa en D.

▷ Relacionar el TEOREMA 2.8 y el COROLARIO 2.7. ▨

(*) Enunciados análogos, igualmente ciertos, se obtienen si se sustituye "camino diferenciable a trozos" por poligonal, o poligonal de lados paralelos a los ejes.

CONSECUENCIA: Se verifica que $\int_{\gamma_0} (z-a)^n dz = 0$, $\forall n \geq 0$ para todo camino cerrado γ_0 diferenciable con continuidad a trozos, pues $(z-a)^n$ es la derivada de la función holomorfa $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$

Analogamente $\int_{\gamma_0} (z-a)^n dz = 0$, $\forall n < -1$ si γ_0 es un camino cerrado diferenciable con continuidad a trozos si $(\gamma_0) \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

2.10. TEOREMA: Sea D un disco abierto en $\mathbb{C}$. La condición necesaria y suficiente para que la forma diferencial ω sea exacta en D es que $\int_\gamma \omega = 0$ para todo γ que sea frontera de un rectángulo R cerrado de lados paralelos a los ejes contenido en D.

Demostr.: La necesidad es evidente pues $\gamma = \partial R$ es una poligonal cerrada en D.

Suficiencia: Sea $z_0 = x_0 + i y_0$ el centro del disco D y $z = x + iy$ un punto arbitrario de D. Siendo D un disco es posible encontrar una poligonal γ_z de lados paralelos a los ejes con, a lo sumo, dos lados, y que una z_0 con z. Definimos entonces

$$U(x,y) = \int_{\gamma_z} \omega$$

La definición es correcta, pues de la hipótesis se deduce que $\int_{\gamma_z} \omega$ es independiente de la poligonal de lados paralelos a los ejes γ_z con a lo sumo dos lados.

A partir de aquí se prueba la tesis de la misma forma que se hizo en la demostración del TEOREMA 2.3. ▨