TEMA 9º: FORMAS DIFERENCIALES CERRADAS. PRIMITIVAS NO UNIFORMES.

1. FORMAS DIFERENCIALES CERRADAS O LOCALMENTE EXACTAS.

DEFINICION: Una forma diferencial $\omega = p\,dx + q\,dy$ en el abierto D se dice cerrada en D si para cada punto $(x,y) \in D$ existe un entorno abierto U de (x,y) contenido en D tal que ω es exacta (i.e., tiene primitiva) en U.

Siempre se puede suponer U disco.

1.1. PROPOSICION: La forma diferencial ω es cerrada en el abierto D si y solo si para cada rectangulo R contenido en D de lados paralelos a los ejes y "suficientemente pequeño" se verifica que $\int_{\partial R} \omega = 0$.

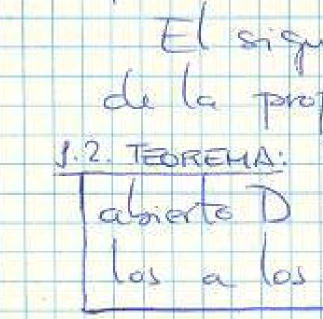
Decir un rectángulo suficientemente pequeño significa que para cualquier punto de D existe un disco abierto contenido en D de forma que la propiedad es cierta para cualquier rectángulo R contenido en el disco.

▷ La demostración es trivial consecuencia de la definición y del último teorema del tema anterior ▨

El siguiente teorema, con un enunciado "parecido" al de la proposición anterior, dice algo más que ésta.

1.2. TEOREMA: Si ω es una forma diferencial cerrada en el abierto D y R es un rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes contenido en D, entonces $\int_{\partial R} \omega = 0$.

Demostr.: Dividimos el rectángulo R en cuatro subrectángulos de lados paralelos a los ejes considerando la horizontal y vertical que pasan por su centro. Sean éstos R_{11}, R_{12}, R_{13} y R_{14}.



Observando el gráfico, es trivial comprobar que

$$\int_{\partial R} \omega = \int_{\partial R_{11}} \omega + \int_{\partial R_{12}} \omega + \int_{\partial R_{13}} \omega + \int_{\partial R_{14}} \omega$$

Sea R_1 el R_{1j} $(1\le j\le 4)$ tal que $\left|\int_{\partial R_{1j}}\omega\right| = \max\limits_{1\le i\le 4}\left|\int_{\partial R_{1i}}\omega\right|$

Entonces

$$\left|\int_{\partial R}\omega\right| \le 4\left|\int_{\partial R_{1j}}\omega\right|$$

Es trivial que $d(R_1)=\dfrac{d(R)}{2}$ donde $d(R_1)$ es el diámetro de R_1 y $d(R)$ el diámetro de R.

Se divide ahora R_1 en cuatro partes y se prueba de la misma forma que $\exists R_2$ rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes contenido en R_1 tal que

$$\left|\int_{\partial R_1}\omega\right| \le 4\left|\int_{\partial R_2}\omega\right| \quad y \quad d(R_2)=\frac{d(R_1)}{2}.$$

Procediendo de esta forma obtenemos una sucesión

$$R\supset R_1\supset R_2\supset \dots \supset R_n\supset \dots$$

de rectángulos cerrados de lados paralelos a los ejes tales que

$$d(R_n)=\frac{d(R)}{2^n} \quad y \quad \left|\int_{\partial R}\omega\right| \le 4^n\left|\int_{\partial R_n}\omega\right|$$

Siendo rectángulos cerrados encajados $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n\ne\emptyset$, aun más, se reduce a un punto pues $\{d(R_n)\}_n\to 0$.

Sea $z_0=(x_0,y_0)\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n$

Puesto que ω es cerrada en D, existe $r>0$ tal que $B(z_0,r)\subset D$ y ω es exacta en $B(z_0,r)$.

Por otra parte como $d(R_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dado $\varepsilon=r>0$ existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que $n\ge\nu \Rightarrow d(R_n)<r$.

Luego si $n\ge\nu$, $R_n\subset B(z_0,r)$ pues $z_0\in R_n$.

Entonces $\int_{\partial R_n}\omega=0$, $\forall n\ge\nu$.

En particular, $\left|\int_{\partial R}\omega\right|\le 4^\nu\left|\int_{\partial R_\nu}\omega\right|=0$

Luego $\int_{\partial R}\omega=0$. c.s.q.d.

1.3. COROLARIO: Una forma diferencial ω es cerrada en el abierto D si, y solo si, $\int_{\partial R}\omega=0$ para todo rectángulo cerrado R de lados paralelos a los ejes contenido en D.

A la vista del resultado anterior surge la pregunta de si toda forma diferencial cerrada es exacta. La respuesta es negativa como prueba el siguiente

CONTRAEJEMPLO: Consideremos el abierto conexo $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y la forma diferencial $\omega = \frac{dz}{z}$ en D (observar que $1/z$ es continua en D).

Probemos que ω es cerrada en D pero no exacta.

Sea $z_0 \in D$ y supongamos que z_0 no es real negativo. Entonces $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ es un entorno abierto de z_0 en $\mathbb{C}$. La función $\operatorname{Log} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ y su derivada es $1/z$. Luego ω es cerrada en $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ pues admite primitiva en dicho abierto (aun más, es exacta en dicho abierto).

Supongamos ahora que $z_0 \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$ y sea $\rho > 0$ tal que $\rho < |z_0|$. Entonces $B(z_0, \rho) \subset D$ y la función $\operatorname{Log}(-z)$ es una primitiva de ω en $B(z_0, \rho)$, pues $D(\operatorname{Log}(-z)) = \frac{1}{-z}(-1) = \frac{1}{z}$; observar que si $z \in B(z_0, \rho)$ entonces $-z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ donde sabemos que la función logaritmo principal es holomorfa.

Por tanto, ω es cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{0\} = D$.

Veamos que no es exacta en D. Para ello probaremos que existe un camino γ_0 con traza contenida en D de forma que γ_0 es cerrado y $\int_{\gamma_0} \omega \neq 0$.

Sea (γ_0) la circunferencia unidad en $\mathbb{C}$, donde

$$\gamma_0 : t \in [0, 2\pi] \longmapsto \gamma_0(t) = e^{it} \in S^1$$

Entonces

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i \neq 0.$$

Por supuesto, toda forma diferencial exacta en un abierto es cerrada en dicho abierto.

Se plantea ahora la siguiente cuestión:

¿En qué tipo de abiertos es cierto que toda forma diferencial cerrada es exacta?

La respuesta es: en los abiertos simplemente conexos, como justificaremos en temas posteriores.

2. PRIMITIVAS NO UNIFORMES.

El siguiente lema se utiliza en la demostración del teorema de existencia de primitiva no uniforme para una forma diferencial cerrada en un abierto.

2.1. LEMA: Sea $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ una curva (continua) y $\mathcal{U}=(U_j)_{j\in I}$ un recubrimiento abierto de su traza $(\gamma)=\gamma([a,b])$. Existe entonces una partición $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ de $[a,b]$ tal que para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ existe $U_i\in\mathcal{U}$ tal que $\gamma([t_{i-1},t_i])\subset U_i$.

Demostr.: Consideremos el conjunto

$$A=\{t\in[a,b]\ /\ \text{el intervalo } [a,t] \text{ verifica el lema}\}$$

es decir, $t\in[a,b]$ pertenece a A si existe una partición de $[a,t]$ de forma que la imagen por γ de cada uno de los subintervalos está contenida en un cierto elemento de $\mathcal{U}$.

Desde luego $A\neq\emptyset$ pues $a\in A$ $(\exists U_i\in\mathcal{U}/\gamma(a)\in U_i)$, y A está acotado superiormente por b. Sea entonces $t'=\sup A$. Se verifica entonces que $a\leq t'\leq b$, pues b es cota superior de A.

1º) Probemos ahora que $a<t'$ (se supone $a<b$):

Sea $U_i\in\mathcal{U}$ tal que $\gamma(a)\in U_i$. Siendo γ continua, $\gamma^{-1}(U_i)$ es abierto en $[a,b]$ y $a\in\gamma^{-1}(U_i)$, y por tanto, existe $t\in\,]a,b]$ tal que $[a,t]\subset\gamma^{-1}(U_i)$.

Luego $\gamma([a,t])\subset U_i$ y, por tanto, $t\in A$.

Se tiene entonces $t'\geq t>a$, es decir, $t'>a$.

2º) Probemos que $t'=\sup A=b$: Supongamos para ello que $t'<b$.

Sea $U_K\in\mathcal{U}$ tal que $\gamma(t')\in U_K$.

Siendo γ continua existe $[t'',t''']\subset[a,b]$ tal que $t'\in\,]t'',t'''[$ y $\gamma([t'',t'''])\subset U_K$.

Observar que aquí se ha utilizado que $t'>a$ y $t'<b$.

Siendo $t'=\sup A$ y $t''<t'$ existe $t\in A$ tal que $t''<t\leq t'$.

Como $t\in A$, $[a,t]$ se puede dividir mediante puntos

$$a=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}=t$$

de forma que para cada $i\in\{1,\dots,n-1\}$, existe $U_i\in\mathcal{U}$ tal que $\gamma([t_{i-1},t_i])\subset U_i$.

Sea entonces $t_n = t'''$. Se verifica que
$\gamma([t_{n-1}, t_n]) \subset \gamma([t'', t''']) \subset U_k$.
Si denotamos $U_n = U_k$ se tiene una partición
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} = t'' < t_n = t'''$$
de $[a, t''']$ de forma que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$
y por tanto $t''' \in A$ en contra de que $t' = \sup A$ y $t' < t'''$.
Debe ser, pues, $t' = b$.

3º) Probemos ahora que $t' = b \in A$ con lo cual quedará probado el lema.

Sea $U_k \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(b) \in U_k$. Siendo γ continua, existe $t'' \in [a, b[$ tal que $\gamma([t'', b]) \subset U_k$.
Siendo $t' = b = \sup A$ y $t'' < t'$ existe $t \in A$ tal que $t'' < t < t'$. Puesto que $t \in A$, existe una partición
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} = t$$
de $[a, t]$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ existe $U_i \in \mathcal{U}$ de forma que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$.
Sea $t_n = t' = b$. Entonces
$$\gamma([t_{n-1}, t_n]) = \gamma([t, b]) \subset \gamma([t'', b]) \subset U_k.$$
Denotando $U_n = U_k$ queda probado que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que
$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$$
Luego $t' = b \in A$. c.s.q.d.

<u>DEFINICION</u>: (Primitiva no uniforme).
Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ una curva en el abierto $D \subset \mathbb{C}$, y sea ω una forma diferencial cerrada en D. Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice una primitiva de ω a lo largo de γ si f es <u>continua</u> y para cada punto $\tau \in [a, b]$ existe un entorno abierto (que incluso podemos elegir disco) $U(\gamma(\tau))$ de $\gamma(\tau)$ y una primitiva F de ω en $U(\gamma(\tau))$ tales que $f(t) = F(\gamma(t))$, para cada t en un cierto entorno de τ en $[a, b]$.

<u>OBSERVACION</u>: Notemos que se ha definido lo que se entiende por primitiva no uniforme para una forma diferencial cerrada en

..., y caso de que exista alguna primitiva, es una función compleja de variable real. Consideremos el siguiente razonamiento: Si ω es una forma diferencial cerrada en D, entonces para cada $\tau\in[a,b]$ existe un disco abierto $U(\gamma(\tau))\subset D$ tal que ω es **exacta** en $U(\gamma(\tau))$, es decir, existe una primitiva F de ω en $U(\gamma(\tau))$. Como γ es continua, existirá $\delta>0$ tal que si $|t-\tau|<\delta$, $t\in[a,b]$ entonces $\gamma(t)\in U(\gamma(\tau))$. ¿Bastará entonces definir $f(t)=F(\gamma(t))$, $\forall t\in\,]\tau-\delta,\tau+\delta[\,\cap[a,b]$? No basta, pues en este caso lo más que se puede decir de f es que es "localmente continua", pero no se puede asegurar la continuidad como se pide en la definición y que, realmente, es lo que interesa.(*) En cualquier caso, hay que mejorar el razonamiento.

2.2. **TEOREMA**: (de existencia de primitiva no uniforme).

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$, $\gamma:[a,b]\longrightarrow D$ una curva en D y ω una forma diferencial cerrada en D. Entonces existe una primitiva f de ω a lo largo de γ. Además, dicha primitiva es única salvo constantes aditivas.

Demostr.: UNICIDAD: Supongamos que f_1, f_2 son dos primitivas de ω a lo largo de γ. Sea $f=f_1-f_2$. Entonces f es continua en $[a,b]$. Veamos que es localmente constante.

Dado $\tau\in[a,b]$, existen $\delta_1,\delta_2>0$, discos abiertos $U_1(\gamma(\tau))$, $U_2(\gamma(\tau))$ y F_1, F_2 primitivas de ω en U_1 y U_2, respectivamente, tales que

$$f_1(t)=F_1(\gamma(t)),\quad \forall t\in\{t\in[a,b]\,/\,|t-\tau|<\delta_1\}$$
$$f_2(t)=F_2(\gamma(t)),\quad \forall t\in\{t\in[a,b]\,/\,|t-\tau|<\delta_2\}$$

Sea $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$ y $U=U_1\cap U_2$. Entonces $\gamma(\tau)\in U$ y U es abierto conexo en D, como intersección de dos discos abiertos (abiertos absolutamente convexos).

Además F_1 y F_2 son primitivas de ω en U, y por tanto se diferencian en una constante en U, es decir,

$$\exists\lambda\,/\,F_1(z)-F_2(z)=\lambda,\ \forall z\in U.$$

Por tanto, si $t\in\{t\in[a,b]\,/\,|t-\tau|<\delta\}$ entonces

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t)=F_1(\gamma(t))+F_2(\gamma(t))=\lambda.$$

Luego f es continua y localmente constante (constante en un entorno de cada punto $\tau\in[a,b]$).

(*) La última frase no tiene sentido. Lo que se quiere decir es que hay que asegurarse de que f está bien definida; conseguido esto será trivialmente continua.

Sea $t_0 \in [a,b]$ y $A = \{t \in [a,b] / f(t) = f(t_0)\}$.
A es no vacío ($t_0 \in A$) y cerrado, por ser f continua.
Además A es abierto en $[a,b]$, pues si $t' \in A$ ($f(t') = f(t_0)$) en un entorno de t' en $[a,b]$ se tiene $f(t) = f(t') = f(t_0)$ y por tanto A es entorno de cada uno de sus puntos.
Puesto que $[a,b]$ es conexo debe ser $A = [a,b]$, pues en un conexo los únicos conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados son el vacío y el total y $A \neq \emptyset$.

<u>EXISTENCIA</u>: Siendo ω cerrada, para cada $\tau \in [a,b]$ existe un disco abierto $U(\gamma(\tau))$ y una primitiva F de ω en $U(\gamma(\tau))$.
Sea $\mathcal{U} = \{U(\gamma(\tau))\}_{\tau \in [a,b]}$.
$\mathcal{U}$ es entonces un recubrimiento abierto de (γ).
Por LEMA 2.1, existe una partición de $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe $U_i \in \mathcal{U}$ de forma que

$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i \qquad (1)$$

Sea F_1 una primitiva de ω en U_1.
Definimos $f(t) = F_1(\gamma(t))$, $\forall t \in [t_0, t_1]$.
De (1) se deduce que $\gamma(t_1) \in U_1 \cap U_2$, y $U_1 \cap U_2$ es un abierto conexo como intersección de dos discos abiertos.
Sea F_2 una primitiva de ω en U_2 tal que

$$F_2(\gamma(t_1)) = F_1(\gamma(t_1)) \qquad (2)$$

Observar que existe dicha primitiva, pues partiendo de una primitiva cualquiera de ω en U_2, sumando una constante apropiada se obtiene una primitiva F_2 de ω en U_2 satisfaciendo (2). Entonces, F_1 y F_2 son dos primitivas de ω en el abierto conexo $U_1 \cap U_2$ que coinciden en un punto, en $\gamma(t_1)$. Luego $F_1(z) = F_2(z)$, $\forall z \in U_1 \cap U_2$.
Se define $f(t) = F_2(\gamma(t))$, $\forall t \in [t_1, t_2[$, con lo cual f es continua en $[t_0, t_2]$ pues lo es en $[t_0, t_1[$ por ser $f = F_1 \circ \gamma$ en $[t_0, t_1[$, también es continua en $]t_1, t_2[$ pues $f = F_2 \circ \gamma$ en $]t_1, t_2[$ y también es continua en t_1 pues se verifica (2). Análogamente se define

$$f(t) = F_i(\gamma(t)), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$$

donde F_i es primitiva de ω en U_i, y dichas primitivas satisfacen $F_i(z) = F_{i-1}(z)$, $\forall z \in U_i \cap U_{i-1}$.

De la construcción de f se deduce que f es continua en $[a,b]$.

Probemos que f es una primitiva de ω a lo largo de γ. Falta probar que para cada $\tau \in [a,b]$ existe un entorno de τ en $[a,b]$ y un disco abierto $U(\gamma(\tau))$ entorno de $\gamma(\tau)$ y una primitiva F de ω en $U(\gamma(\tau))$ tal que $f(t) = F(\gamma(t))$ si t está en el entorno de τ en $[a,b]$.

Sea $\tau \in [a,b]$ y supongamos en primer lugar $\tau \neq t_i$, $i = 0,1,\dots,n$. Entonces $\exists j \in \{1,\dots,n\}$ tal que $\tau \in]t_{j-1}, t_j[$. Tenemos entonces un entorno de τ, $]t_{j-1}, t_j[$, un disco abierto entorno de $\gamma(\tau)$, U_j, y una primitiva de ω en U_j, F_j, tales que

$$f(t) = F_j(\gamma(t)), \ \forall t \in]t_{j-1}, t_j[.$$

Supongamos $\tau = a$. Entonces $[a, t_1[$ es entorno de τ en $[a,b]$, U_1 disco abierto tal que $\gamma(a) \in U_1$, y F_1 una primitiva de ω en U_1 tales que $f(t) = F_1(\gamma(t))$, $\forall t \in [a, t_1]$.

Si $\tau = b$, es análogo.

Supongamos $\tau = t_{i-1}$ $(i = 2,\dots,n)$, es decir $\tau \neq a$, $\tau \neq b$, $\tau \in \{t_i\}_{i=0}^{n}$.

Entonces $\gamma(\tau) = \gamma(t_{i-1}) \in U_{i-1} \cap U_i = U$, donde U es abierto y conexo.

Se verifica $F_{i-1}(z) = F_i(z)$, $\forall z \in U$. Sea $F(z) = F_i(z) = F_{i-1}(z)$, $\forall z \in U$. El entorno de $\gamma(\tau)$ que tomaremos es U, y la primitiva de ω en U será F. Busquemos el entorno de $\tau = t_{i-1}$.

Puesto que γ es continua, dado U entorno de $\gamma(\tau)$, existe $]t', t''[\subset [t_{i-2}, t_i]$ tal que $\tau \in]t', t''[$ y $\gamma([t', t'']) \subset U$. Se tiene entonces $t' \in [t_{i-2}, t_{i-1}]$ y $t'' \in [t_{i-1}, t_i]$ y por tanto $\gamma([t', \tau]) \subset U$ y $\gamma([\tau, t'']) \subset U$

Luego $\forall t \in [t', \tau]$, $f(t) = F_{i-1}(\gamma(t)) = F(\gamma(t))$

y $\forall t \in [\tau, t'']$, $f(t) = F_i(\gamma(t)) = F(\gamma(t))$, pues en ambos casos $\gamma(t) \in U$.

Queda así probado que f es una primitiva de ω a lo largo de γ. c.s.q.d.

La siguiente proposición nos dice cual es el valor de la integral de una forma cerrada a lo largo de un camino diferenciable con continuidad a trozos.

2.3. PROPOSICION: Sea ω una forma diferencial cerrada en un abierto D de $\mathbb{C}$ y $\gamma:[a,b]\to D$ un camino diferenciable con continuidad a trozos. Si f es una primitiva de ω a lo largo de γ entonces $\int_\gamma \omega = f(b)-f(a)$.

Demostr.: Podemos suponer que f es la primitiva de ω a lo largo de γ encontrada en la demostración del teorema anterior, pues cualquier otra primitiva de ω a lo largo de γ se diferencia de f en una constante.

Utilizaremos todas las notaciones del teorema anterior, teniendo en cuenta ahora que γ es diferenciable con continuidad a trozos.

Denotemos $\gamma_i = \gamma|[t_{i-1},t_i]$. Entonces $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega$.

γ_i es un camino diferenciable con continuidad a trozos en U_i, pues $\gamma([t_{i-1},t_i])\subset U_i$. Además F_i es una primitiva de ω en U_i. Entonces

$$\int_{\gamma_i}\omega = F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1})) = f(t_i)-f(t_{i-1})$$

Luego $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n [f(t_i)-f(t_{i-1})] = f(b)-f(a)$. c.s.q.d.

DEFINICION: Sea ω una forma diferencial cerrada en D y γ una curva (continua) en D, $\gamma:[a,b]\to D$. Definimos

$$\int_\gamma \omega = f(b)-f(a)$$

siendo f una primitiva de ω a lo largo de γ.

OBSERVACIONES: 1) La definición anterior no depende de la primitiva f, pues dos primitivas se diferencian en una constante.
2) La definición es consistente pues, por la proposición anterior, si γ es diferenciable con continuidad a trozos la definición de $\int_\gamma \omega$ coincide con el valor que tiene realmente.
3) Si D es abierto y conexo y ω es exacta en D entonces para cualquier curva (continua) cerrada γ en D se verifica $\int_\gamma \omega = 0$. ▷ En efecto, siendo ω exacta en D, existe una primitiva F de ω en D. Con las notaciones anteriores se tiene $F_i = F$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ y $\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ pues γ es cerrada ($\gamma(a)=\gamma(b)$) y $f(t)=F(\gamma(t))$ $\forall t\in[a,b]$ ▨