TEMA 10°: HOMOTOPIA E INTEGRACION

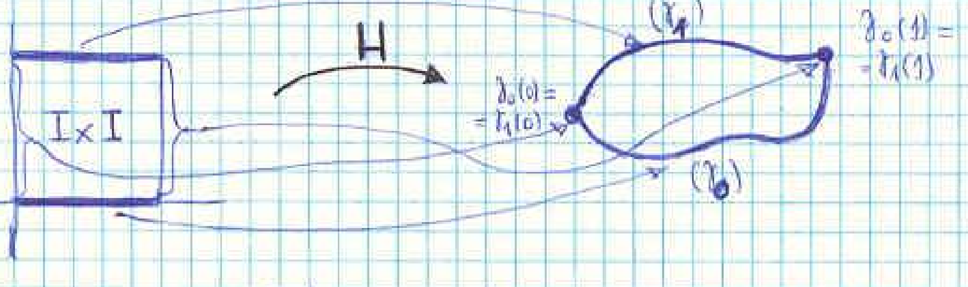
1. CURVAS HOMOTOPAS CON EXTREMOS FIJOS. CURVAS CERRADAS HOMOTOPAS.

Supondremos que las curvas que consideremos están parametrizadas en el intervalo $I=[0,1]$, lo cual no supone ninguna restricción, pues si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ es una curva, la aplicación $h: t\in[0,1]\mapsto h(t)=a+t(b-a)\in[a,b]$ es un homeomorfismo de $[0,1]$ en $[a,b]$ y la aplicación $\gamma\circ h: t\in[0,1]\mapsto \gamma(a+t(b-a))\in\mathbb{C}$ es una curva en $\mathbb{C}$ con la misma traza que γ y parametrizada en $[0,1]$.

DEFINICION: (curvas homótopas con extremos fijos)

Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y $\gamma_0: I\to D$ y $\gamma_1: I\to D$ curvas en D. Se dice que (γ_0) y (γ_1) son homótopas con extremos fijos en D si tienen los mismos extremos ($\gamma_0(0)=\gamma_1(0)$, $\gamma_0(1)=\gamma_1(1)$) y existe una aplicación $H: I\times I\to D$ continua verificando que

$$H(t,0)=\gamma_0(t),\ \forall t\in I$$
$$H(t,1)=\gamma_1(t),\ \forall t\in I$$
$$H(0,u)=\gamma_0(0)=\gamma_1(0),\ \forall u\in I$$
$$H(1,u)=\gamma_0(1)=\gamma_1(1),\ \forall u\in I$$



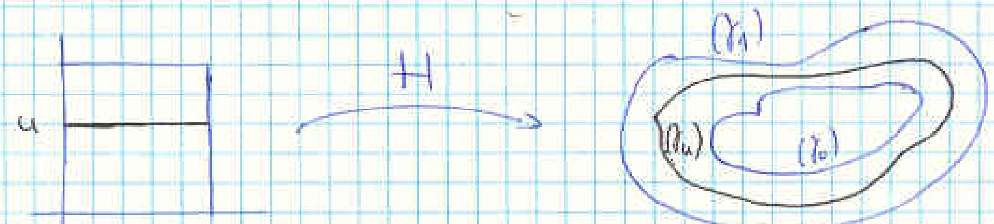
Dado $u\in I$, definimos $\gamma_u(t)=H(t,u)$, $\forall t\in I$.

Entonces (γ_u) es una curva en D con los mismos extremos que (γ_0) y (γ_1), pues $\gamma_u(0)=H(0,u)=\gamma_0(0)=\gamma_1(0)$, $\gamma_u(1)=H(1,u)=\gamma_0(1)=\gamma_1(1)$

Entonces $\{\gamma_u\}_{u\in I}$ es una familia de curvas con extremos fijos que constituye una "deformación continua" de γ_0 en γ_1, verificandose además $(\gamma_u)\subset D$, $\forall u\in I$ pues H toma valores en D.

DEFINICION: Sea D abierto y $(\gamma_0), (\gamma_1)\subset D$ curvas cerradas. Diremos que (γ_0) y (γ_1) son homótopas como curvas cerradas si existe una aplicación $H: I\times I\to D$ continua tal que

$$H(t,0)=\gamma_0(t),\ \forall t\in I$$
$$H(t,1)=\gamma_1(t),\ \forall t\in I$$
$$H(0,u)=H(1,u),\ \forall u\in I.$$



Si hacemos $\gamma_u(t)=H(t,u)$, $\forall t\in I$, para cada $u\in I$ obtenemos una curva cerrada en D, pues $\forall u\in I$, $\gamma_u(0)=\gamma_u(1)$.

En particular

DEFINICION: (curva cerrada homótopa a un punto).
Una curva (γ_0) cerrada en D se dice homótopa a un punto en D — también se dice homótopa a cero en D — si (γ_0) es homótopa a $(\gamma_1)\subset D$ donde $\gamma_1: I\to D$ es constante.

Observar que si $\gamma_1: I\to D$ es constante, entonces (γ_1) es un punto de D y es una curva cerrada.

EJEMPLO: Consideremos las curvas

$$\gamma_0(t)=r_0 e^{2\pi i t}$$
$$\gamma_1(t)=r_1 e^{2\pi i t},\ \forall t\in I$$

(γ_0) y (γ_1) son las circunferencias de centro cero y radios r_0 y r_1.
Consideremos la aplicación

$$H:(t,u)\in I\times I\longmapsto H(t,u)=[(1-u)r_0+ur_1]e^{2\pi i t}\in\mathbb{C}\ (*)$$

Es obvio que $H(t,0)=\gamma_0(t)$, $H(t,1)=\gamma_1(t)$, $\forall t\in I$, y que $H(0,u)=H(1,u)$, $\forall u\in I$. Además H es continua.

(*) Observar que no hemos hecho más que una combinación lineal convexa de γ_0 y γ_1.

Luego (γ_0) y (γ_1) son curvas homótopas cerradas en el abierto $D = \mathbb{C}$. Si fuese $r_1 = 0$, γ_1 sería constante: $\gamma_1(t) = 0$, $\forall t \in I$ y $H(t,u) = (1-u)\, r_0\, e^{2\pi i t}$ es una homotopía entre (γ_0) y 0.

OBSERVACION: Aunque γ_0 y γ_1 sean diferenciables con continuidad a trozos, tanto si (γ_0) y (γ_1) son homótopas con extremos fijos como si son homótopas como curvas cerradas, nada asegura que las curvas γ_u $(u \in I)$ sean diferenciables con continuidad a trozos; lo más que podemos asegurar de ellas es que son continuas, pues H lo es.

2. HOMOTOPIA E INTEGRACION. REGIONES SIMPLEMENTE CONEXAS.

El siguiente teorema generaliza un resultado ya conocido (TEOREMA 1.2, TEMA 9º) y la demostración es totalmente análoga a la de aquel.

2.1. TEOREMA: Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y $R = I_1 \times I_2$ un rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes y sea $H: R \to D$ una aplicación continua. Si ω es una forma cerrada en D entonces

$$\int_{H(\partial R)} \omega = 0.$$

Demostr.: Dividimos el rectángulo cerrado R en cuatro subrectángulos iguales R_{11}, R_{12}, R_{13} y R_{14}. Siendo H continua se verifica que

$$\int_{H(\partial R)} \omega = \sum_{j=1}^{4} \int_{H(\partial R_{1j})} \omega \qquad (*)$$

Sea R_1 el rectangulo R_{1j} tal que $\left| \int_{H(\partial R_{1j})} \omega \right| = \max_{1 \le i \le 4} \left| \int_{H(\partial R_{1i})} \omega \right|$

Entonces $d(R_1) = \frac{1}{2} d(R)$ y $\left| \int_{H(\partial R)} \omega \right| \le 4 \left| \int_{H(\partial R_1)} \omega \right|$

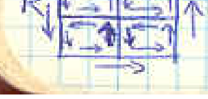
Reiterando el procedimiento obtenemos una sucesion decreciente

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots \qquad (I)$$

de rectángulos cerrados tales que

$$d(R_n) = \frac{d(R)}{2^n} \quad y \quad \left| \int_{H(\partial R)} \omega \right| \le 4^n \left| \int_{H(\partial R_n)} \omega \right|$$

Sea $(t_0, u_0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$, que existe pues la sucesión (I) es una sucesión decreciente de cerrados.



(*) La imagen por H de uno de los lados de cualquiera de los triangulos R_{1j} es una curva en D, y si el lado es interior, en (*) aparece una vez la integral de ω a lo largo de dicha curva en un sentido y otra vez la integral de ω a lo largo de dicha curva pero en sentido contrario, y por tanto se anulan.

Puesto que ω es cerrada en D, existe un disco U abierto de centro $H(t_0,u_0)$ tal que ω tiene primitiva (es exacta) en U.

Puesto que $H(t_0,u_0)\in U$, H es continua, U es abierto y $\{d(R_n)\}_n \to 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \subset H^{-1}(U)$, $\forall n \geq \nu$.

En particular, $H(\partial R_\nu) \subset U$.

Siendo ω exacta en U y $H(\partial R_\nu)$ una ~~curva~~ curva cerrada en U se verifica que

$$\int_{H(\partial R_\nu)} \omega = 0$$

y por tanto $\int_{H(\partial R)} \omega = 0$ pues $\left|\int_{H(\partial R)} \omega\right| \leq 4^\nu \left|\int_{H(\partial R_\nu)} \omega\right|$. csqd.

2.2 TEOREMA: Si (γ_0), (γ_1) son curvas homótopas en el abierto D con extremos fijos y ω es una forma cerrada en D entonces

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Demostr.: Por hipótesis existe $H: I\times I \to D$ tal que

$H(t,0)=\gamma_0(t)$, $H(t,1)=\gamma_1(t)$, $\forall t\in I$

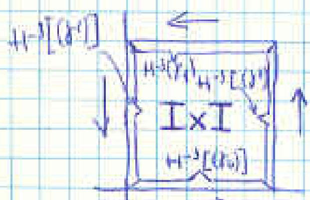
$H(0,u)=\gamma_0(0)=\gamma_1(0)$, $H(1,u)=\gamma_0(1)=\gamma_1(1)$, $\forall u\in I$.

Definimos las aplicaciones constantes

$$\gamma'(u)=H(0,u)=\gamma_0(0)=\gamma_1(0), \ \forall u\in I$$
$$\gamma''(u)=H(1,u)=\gamma_0(1)=\gamma_1(1)$$

Por tanto
$$\int_{\gamma'}\omega = \int_{\gamma''}\omega = 0.$$

Consideremos el rectangulo $R=I\times I$



Por el teorema anterior $\int_{H(\partial R)} \omega = 0$ (I)

Pero
$$\int_{H(\partial R)} \omega = \int_{\gamma_0}\omega + \int_{\gamma''}\omega + \int_{-\gamma_1}\omega + \int_{-\gamma'}\omega.$$

Como $\int_{\gamma''}\omega = 0$ y $\int_{-\gamma'}\omega = -\int_{\gamma'}\omega = 0$ se tiene que

$$\int_{H(\partial R)}\omega = \int_{\gamma_0}\omega + \int_{-\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_0}\omega - \int_{\gamma_1}\omega$$

y de (I) se deduce ya que

$$\int \omega = \int \omega. \qquad \text{csqd.}$$

2.3. TEOREMA: Si γ_0, γ_1 son curvas cerradas en el abierto D homótopas como curvas cerradas en D, y ω es una forma diferencial cerrada en D, entonces
$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega .$$

Demostr.: La demostración es totalmente análoga a la del teorema anterior, pero definiendo en este caso
$$\gamma'(u) = \gamma''(u) = H(0,u) = H(1,u), \ \forall u \in I,$$
con lo cual se verifica que
$$\int_{\gamma''} \omega + \int_{-\gamma'} \omega = 0$$
y por tanto
$$0 = \int_{H(\partial R)} \omega = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\gamma''} \omega + \int_{-\gamma_1} \omega + \int_{-\gamma'} \omega = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{-\gamma_1} \omega$$
de donde se deduce que $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$. csqd.

En lo sucesivo, cuando se hable de región en el plano complejo, entenderemos que nos referimos a un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$.

DEFINICION: (Región simplemente conexa)
Una región $D \subset \mathbb{C}$ se dice simplemente conexa si toda curva cerrada en D es homótopa a cero en D.

2.4. TEOREMA: Si $D \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo y ω es una forma diferencial cerrada en D entonces se cumplen
i) Si γ es una curva cerrada en D, entonces $\int_\gamma \omega = 0$
ii) Existe una primitiva de ω en D.

Demostr.: i) Puesto que D es simplemente conexo, γ es homótopa a cero ($\gamma \sim 0$) como curvas cerradas y por TEOREMA 2.3., $\int_\gamma \omega = 0$ pues la integral de ω a lo largo de un punto es cero.
ii) De i) se deduce que ω es exacta en D, es decir, tiene primitiva en D. csqd.

OBSERVACIONES: Nótese que las proposiciones i) e ii) son equivalentes con sólo exigir que D sea abierto y conexo. Del teorema anterior se deduce que las formas cerradas en un simplemente conexo son exactas y, por tanto, las formas cerradas y las exactas son las mismas en una región simplemente conexa. Se verifica además que esto es suficiente para que D sea simplemente conexo, como probaremos más adelante.

2.5. COROLARIO: Si $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y es simplemente conexo, entonces existe una determinación del logaritmo en D.

Demostr.: La forma diferencial $\frac{dz}{z}$ es cerrada en D, pues lo era en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Puesto que D es simplemente conexo, $\frac{dz}{z}$ es exacta en D y, por tanto, existe una función F holomorfa en D tal que $F'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in D$.

Consideremos la función

$$G : z \in D \longrightarrow G(z) = z e^{-F(z)}$$

Entonces G es holomorfa en D y su derivada es

$$G'(z) = e^{-F(z)} - z e^{-F(z)} \cdot F'(z) = 0 \quad , \forall z \in D$$

pues $F'(z) = \frac{1}{z}$.

Puesto que D es conexo y $G'(z) = 0$, $\forall z \in D$ se verifica que G es constante en D, y además G es no nula en D pues G no se anula en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Sea $z_0 \in D$. Se puede suponer que

$$z_0 e^{-F(z_0)} = 1 \quad (1)$$

pues de lo contrario bastaría sumar a F una constante apropiada para que se verifique (1).

Entonces $G(z) = z e^{-F(z)} = 1$, $\forall z \in D$.

Por tanto $z = e^{F(z)}$, $\forall z \in D$.

Como F es además continua, es una determinación del logaritmo en D. c.s.q.d.

3. Conjuntos estrellados.

Vamos a estudiar en este apartado un tipo particular de regiones simplemente conexas: los conjuntos abiertos estrellados. Veamos antes la definición de conjunto estrellado.

En lo sucesivo denotaremos por $[z,z']$ el segmento cerrado que une los puntos $z,z'\in\mathbb{C}$, i.e.: $[z,z']=\{tz+(1-t)z'/\,0\le t\le 1\}$.

DEFINICION: Un conjunto $D\subset\mathbb{C}$ se dice estrellado respecto a un punto $a\in D$ si $\forall z\in D$, $[z,a]\subset D$.

Observar que un conjunto convexo en $\mathbb{C}$ es estrellado respecto de cada uno de sus puntos.

3.1. PROPOSICION: Si $D\subset\mathbb{C}$ es abierto y estrellado respecto al punto $a\in D$, entonces D es simplemente conexo.

Demostr.: Puesto que D es estrellado es conexo por arcos (dados $z,z'\in D$, $[z,a]\cup[a,z']$ es un arco que une z con z' y está contenido en D). Luego D es abierto y conexo.

Falta probar que toda curva cerrada en D es homótopa a cero. Sea $\gamma: I\to D$ una curva cerrada en D. Se define

$$H: (t,u)\in I\times I \longmapsto H(t,u)=ua+(1-u)\gamma(t)\in D.$$

La definición es correcta, pues $\forall t,u\in I$, $ua+(1-u)\gamma(t)\in[a,\gamma(t)]$ y $[a,\gamma(t)]\subset D$.

Además H es trivialmente continua, y se verifica

$H(t,0)=\gamma(t)$, $H(t,1)=a$, $\forall t\in I$

$H(0,u)=ua+(1-u)\gamma(0)=ua+(1-u)\gamma(1)=H(1,u)$, $\forall u\in I$, pues $\gamma(0)=\gamma(1)$ por ser γ cerrada. Luego γ es homótopa a cero (a "a"). c.q.d.

EJEMPLOS: ① $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}^-\cup\{0\})$ es simplemente conexo, pues es abierto y estrellado (respecto a cualquier número real positivo).

② $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ no es simplemente conexo, pues $\frac{dz}{z}$ es una forma diferencial cerrada en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ pero no exacta en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Observar, por ejemplo, que la circunferencia unidad S^1 no es homótopa a cero en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, pues de serlo debería ser $\int_{S^1}\frac{dz}{z}=0$ y sabemos que $\int_{S_1}\frac{dz}{z}=2\pi i$.

Observar que $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ no es estrellado respecto a ninguno de sus puntos (dado $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ observar que existe $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ sobre la recta que pasa por a y por 0 tal que $0\in[a,z]$) ¡$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tiene un agujero!