TEMA 11°: INDICE DE UNA CURVA CERRADA.

1. DEFINICION. PRIMERAS PROPIEDADES.

DEFINICION: Sea $\gamma : I=[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada y sea $a \notin (\gamma)$. Se llama índice de (γ) respecto del punto a o en el punto a, y se denota por $I(\gamma, a)$ al valor

$$I(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

Observar que la definición tiene sentido pues $\frac{dz}{z-a}$ es cerrada en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ y $(\gamma)\subset \mathbb{C}\setminus\{a\}$.

OBSERVACION: Probemos que si $\gamma : I \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada y $a\notin(\gamma)$ entonces $I(\gamma,a)\in\mathbb{Z}$.

Notemos que, puesto que $a\notin(\gamma)$, $|a-\gamma(t)|>0$, $\forall t\in I$

Para cada $t\in I$ consideremos el disco de centro $\gamma(t)$

$$U_t=\{z\in\mathbb{C} \,/\, |z-\gamma(t)|<\tfrac{1}{2}|a-\gamma(t)|\}$$

Entonces $a\notin U_t$, $\forall t\in I$.

La familia $\mathcal{U}=\{U_t\}_{t\in I}$ es un recubrimiento abierto de (γ).

En virtud de LEMA 2.1 existe una partición de I

$$t_0=0<t_1<\dots<t_n=1$$

tal que para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ existe $U_i\in\mathcal{U}$ tal que

$$\gamma([t_{i-1},t_i])\subset U_i$$

Dado $i\in\{1,\dots,n\}$, para cada $z\in U_i$ consideremos el número complejo

$$\frac{z-a}{\gamma(t_{i-1})-a}$$

Observar que el denominador no se anula pues $a\notin(\gamma)$.

Además $\frac{z-a}{\gamma(t_{i-1})-a}\notin \mathbb{R}^-\cup\{0\}$.

En efecto: como $a\notin U_i$, $z\neq a$ y por tanto $\frac{z-a}{\gamma(t_{i-1})-a}\neq 0$.

Además $\frac{z-a}{\gamma(t_{i-1})-a}\in\mathbb{R}^-$ si, y solo si, $a\in[z,\gamma(t_{i-1})]$

lo cual no es posible pues $[z,\gamma(t_{i-1})]\subset U_i$ por ser

U_i es disco (por tanto, convexo) y sabemos que $a \notin U_i$.

Luego $\dfrac{z-a}{\gamma(t_{i-1})-a} \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$, $\forall z \in U_i$.

Pero en el abierto $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ la función logaritmo principal es holomorfa.

Por tanto, la función $z \in U_i \longmapsto \operatorname{Log} \dfrac{z-a}{\gamma(t_{i-1})-a}$ es holomorfa y su derivada es $\dfrac{dz}{z-a}$ en U_i.

Denotemos $\gamma_k = \gamma|[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$.

Entonces

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a}$$

Como $(\gamma_k) \subset U_k$ y en U_k $\operatorname{Log} \dfrac{z-a}{\gamma(t_{k-1})-a}$ es una primitiva de $\dfrac{dz}{z-a}$, y denotando $z_j = \gamma(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$ se tiene

$$I(\gamma, a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \left[\operatorname{Log} \frac{z_k - a}{z_{k-1} - a} - \operatorname{Log} \frac{z_{k-1} - a}{z_{k-1} - a} \right]$$

Pero $\operatorname{Log} \dfrac{z_{k-1} - a}{z_{k-1} - a} = \operatorname{Log} 1 = 0$ y $\operatorname{Log} \dfrac{z_k - a}{z_{k-1} - a} =$

$= \operatorname{Log}(z_k - a) - \operatorname{Log}(z_{k-1} - a) \pmod{2\pi i}$

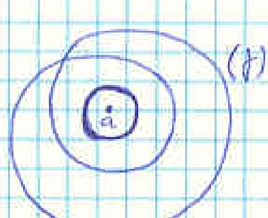
Entonces

$$I(\gamma, a) = \frac{\operatorname{Log}(\gamma(1) - a) - \operatorname{Log}(\gamma(0) - a)}{2\pi i} \pmod{1}$$

Puesto que $\gamma(0) = \gamma(1)$ por ser γ cerrada se tiene que

$$I(\gamma, a) = 0 \pmod{1}, \text{ o bien } I(\gamma, a) \in \mathbb{Z}.$$

<u>OBSERVACION</u>: No lo probaremos pero el índice de una curva cerrada γ en un punto a representa el "número de vueltas" que da la curva alrededor del punto. Se prueba que la curva (γ) es homótopa a una circunferencia de centro a que da $I(\gamma, a)$ vueltas alrededor de a.



<u>1.1. PROPOSICION</u>: 1) Sea $a \in \mathbb{C}$ y γ y γ' curvas cerradas homótopas en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Entonces $I(\gamma, a) = I(\gamma', a)$. (*)

2) Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$. Entonces $I(\gamma, a)$ se mantiene constante para todos los puntos a en **cada** componente conexa de $C_{\mathbb{C}}(\gamma)$.

Demostr.: 1) La forma diferencial $\dfrac{dz}{z-a}$ es cerrada

(*) Decir que γ y γ' son homótopas en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ equivale a decir que γ se deforma continuamente en γ' sin pasar por a.

el abierto $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Puesto que γ y γ' son curvas cerradas homótopas en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ se verifica (TEOREMA 2.3, TEMA 10º) que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z-a}$$

y, multiplicando por $\frac{1}{2\pi i}$, se obtiene $I(\gamma,a) = I(\gamma',a)$.

2) Siendo γ una curva cerrada, (γ) es un compacto en $\mathbb{C}$ y por tanto, el complementario de (γ) en $\mathbb{C}$ es abierto, es decir, $(\gamma)^c$ es abierto. Por tanto, las componentes conexas de $(\gamma)^c$ son conjuntos abiertos y conexos.

Supongamos, en primer lugar, que a y b son puntos de una misma componente conexa de $(\gamma)^c$ y verifican que

$$[a,b]\cap(\gamma) = \emptyset \quad (1)$$

Se verifica que

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus[a,b], \quad \frac{z-a}{z-b}\notin \mathbb{R}^-\cup\{0\}$$

pues $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{R}^-\cup\{0\}$ si, y solo si, $z\in[a,b[$.

Luego $\frac{z-a}{z-b}$ está en la región donde la función Log es holomorfa siempre que $z\in\mathbb{C}\setminus[a,b]$.

Luego la función $\mathrm{Log}\,\frac{z-a}{z-b}$ está definida y es holomorfa en el abierto $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ y su derivada es $\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}$. Por tanto, la forma diferencial

$$\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz$$

es exacta en el abierto $\mathbb{C}\setminus[a,b]$.

Puesto que suponemos que se verifica (1) se tiene que $(\gamma)\subset\mathbb{C}\setminus[a,b]$, y siendo (γ) cerrado

$$\int_\gamma\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz = 0$$

y por tanto $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z-a} = \int_\gamma\frac{dz}{z-b}$

y, multiplicando por $(2\pi i)^{-1}$, se tiene $I(\gamma,a) = I(\gamma,b)$.

Consideremos ya el caso general: sean a y b puntos arbitrarios de una componente conexa de $(\gamma)^c$. Dicha componente es conexa y abierta y, por tanto, conexa por poligonales. Existe entonces una poligonal de vértices $a_0=a, a_1, \dots, a_n=b$ en dicha componente, de forma que

$[a_{j-1}, a_j] \cap (\gamma) = \phi$, $j = 1, \dots, n$.

De lo probado anteriormente se deduce

$$I(\gamma,a) = I(\gamma,a_1) = \dots = I(\gamma,a_n) = I(\gamma,b). \text{ csqd.}$$

<u>OBSERVACION</u>: Una demostración quizás más elegante, y menos intuitiva, del apartado 2) consistiría en demostrar que la función $g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ es continua, y por tanto transforma cada componente conexa de $(\gamma)^c$ en un conexo de $\mathbb{Z}$, es decir, en un punto de $\mathbb{Z}$, de lo que se concluye que g es constante sobre cada componente conexa de $(\gamma)^c$.

<u>1.2. PROPOSICION:</u> Si $D \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo y $a \notin D$, y γ es una curva cerrada tal que $(\gamma) \subset D$, entonces

$$I(\gamma,a) = 0.$$

Demostr.: Siendo D simplemente conexo y $(\gamma) \subset D$ se tiene que (γ) es homótopa a cero en D y, por la proposición anterior (1)) se tiene

$$I(\gamma,a) = I(0,a) = 0. \text{ csqd.}$$

Esta proposición se suele aplicar en el caso particular de que D sea un disco abierto.

<u>1.3. PROPOSICION:</u> Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$. Entonces, para cada punto a sobre la componente conexa no acotada de $(\gamma)^c$ se verifica $I(\gamma,a) = 0$.

Demostr.: Observar que siendo (γ) compacto, $(\gamma)^c$ tiene una y solo una componente no acotada.

De la proposición 1.1 (2)) se deduce que el índice de γ permanece constante sobre los puntos de la componente no acotada de $(\gamma)^c$. Basta entonces probar que en un punto de dicha componente el índice de γ es cero.

Puesto que (γ) es compacto, existe $M > 0$ tal que $(\gamma) \subset B(0,M)$. Por tanto, $[B(0,M)]^c \subset (\gamma)^c$ y puesto que $[B(0,M)]^c$ es conexo y corta a la componente no acotada de $(\gamma)^c$ y está contenido en $(\gamma)^c$ se verifica que $[B(0,M)]^c$ está totalmente contenido en la componente no acotada de $(\gamma)^c$. Luego si $a \in [B(0,M)]^c$

a está en la componente no acotada de $(\gamma)^c$. Además de la proposición 1.2., para el disco abierto $D = B(0,M)$, se deduce que $I(\gamma, a) = 0$. csqd.

1.4. PROPOSICIÓN: Si γ es una circunferencia en $\mathbb{C}$ recorrida en sentido positivo, entonces $I(\gamma,a)=0$ para cualquier punto a exterior a la circunferencia e $I(\gamma,a)=1$ para cualquier punto a interior a la circunferencia.

Demostr.: El exterior de la circunferencia es la componente no acotada de $(\gamma)^c$. Luego por la proposición 1.3, $I(\gamma,a)=0$ si a es exterior a la circunferencia.

El interior de la circunferencia es una componente conexa de $(\gamma)^c$ (la acotada). Basta pues probar que el índice de γ en el centro de la circunferencia es 1. Sea a el centro de la circunferencia y r el radio. Una parametrización de dicha circunferencia es

$$\gamma : t \in [0,2\pi] \longmapsto \gamma(t) = re^{it} + a$$

Entonces

$$I(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,2\pi i = 1. \text{ csqd.}$$

1.5. PROPOSICIÓN: Si γ_1, γ_2 son caminos cerrados diferenciables con continuidad tales que $0 \notin (\gamma_1)$, $0 \notin (\gamma_2)$ entonces

$$I(\gamma_1\cdot\gamma_2, 0) = I(\gamma_1,0) + I(\gamma_2,0).$$

Demostr.: Podemos suponer γ_1 y γ_2 parametrizados en el intervalo $[0,1]$. Sea $\gamma(t) = (\gamma_1\cdot\gamma_2)(t) = \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)$, $\forall t \in [0,1]$.

Entonces

$$2\pi i\cdot I(\gamma,0) = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \int_0^1 \frac{\gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_1'(t)\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)\,\gamma_2(t)}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}\,dt + \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)}\,dt = \int_{\gamma_2}\frac{dz}{z} + \int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} = 2\pi i\,(I(\gamma_1,0) + I(\gamma_2,0))$$

y por tanto $I(\gamma,0) = I(\gamma_1,0) + I(\gamma_2,0)$. csqd.

1.6. PROPOSICIÓN: Si γ_1 y γ_2 son caminos cerrados diferenciables con continuidad tales que $|\gamma_1(t)| < |\gamma_2(t)|$, $\forall t$, y $0 \notin (\gamma_2)$ entonces si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$, se tiene que $0 \notin (\gamma)$ e $I(\gamma,0) = I(\gamma_2,0)$.

Demostr.: Suponemos otra vez γ_1 y γ_2 parametrizados en $[0,1]$. Entonces,

$\forall t\in[0,1]$, $|\gamma(t)| \geq |\gamma_2(t)| - |\gamma_1(t)| > 0$, con lo cual queda visto que $0 \notin (\gamma)$. Además, puesto que $0\notin(\gamma_2)$ se puede escribir

$$\gamma(t) = \gamma_2(t)\left[1+\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}\right] = \gamma_2(t)\cdot\gamma^*(t)$$

siendo $\gamma^*(t) = 1+\dfrac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}$, $\forall t\in[0,1]$.

γ^* es entonces un camino cerrado diferenciable con continuidad. Además se verifica

$$|\gamma^*(t)-1| = \left|\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}\right| < 1 \ , \forall t\in[0,1]$$

Luego $(\gamma^*)\subset B(1,1)$ y, en particular, $0\notin(\gamma^*)$.

Como $0\notin(\gamma^*)$ y $0\notin(\gamma_2)$, por la proposición anterior se verifica que

$$I(\gamma,0) = I(\gamma_2,0) + I(\gamma^*,0).$$

Pero $I(\gamma^*,0)=0$, pues $(\gamma^*)\subset B(1,1)$ y $0\notin B(1,1)$, (PROPOSICION 1.2).

Luego $I(\gamma,0) = I(\gamma_2,0)$. c.s.q.d.