TEMA 12: EL TEOREMA DE CAUCHY.

1. Teorema de Goursat o teorema de Cauchy para rectángulos

1.1. TEOREMA: (de Goursat)

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en D y R un rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes contenido en D. Entonces

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

Demostr.: ∂R es un camino diferenciable con continuidad a trozos contenido en D. Además $f \in H(D)$ y, por tanto, $f \in \mathcal{C}(D)$. Existe pues $\int_{\partial R} f(z)\,dz$. Dividimos R en cuatro subrectángulos iguales R_{11}, R_{12}, R_{13} y R_{14}. Entonces

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial R_{11}} f(z)\,dz + \dots + \int_{\partial R_{14}} f(z)\,dz$$

Sea R_1 el subrectángulo de R tal que

$$\left|\int_{\partial R_1} f(z)\,dz\right| = \max_{1\le i\le 4} \left|\int_{\partial R_{1i}} f(z)\,dz\right|$$

Entonces $\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \le 4 \left|\int_{\partial R_1} f(z)\,dz\right|$.

Repitiendo el proceso obtenemos una sucesión de rectángulos cerrados

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$$

de forma que

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| \quad \text{y} \quad d(R_n) = \frac{d(R)}{2^n}$$

siendo $d(R_n)$ el diámetro de R_n. Entonces $\{d(R_n)\}_n \to 0$.
Se verifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n \neq \emptyset$. Sea $z_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$.

Puesto que $f \in H(D)$ existe una función continua $\varepsilon : D \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) & \text{si } z \in D\setminus\{z_0\} \\ = 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

de forma que $f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0)$, $\forall z\in D$.
Entonces

$$\int_{\partial R_n} f(z)dz=\int_{\partial R_n}[f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)]dz+\int_{\partial R_n}\varepsilon(z)\cdot(z-z_0)dz$$

Pero $\int_{\partial R_n}[f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)]dz=0$ pues $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ es un polinomio que, por tanto, admite primitiva y su integral a lo largo de un camino cerrado es nula. Luego

$$\int_{\partial R_n} f(z)dz=\int_{\partial R_n}\varepsilon(z)\cdot(z-z_0)dz.$$

Como $\lim\limits_{z\to z_0}\varepsilon(z)=0$ se verifica que

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / \underset{z\in D}{|z-z_0|}<\delta \Rightarrow |\varepsilon(z)|<\varepsilon$

Dado $\delta>0$, puesto que $\{d(R_n)\}_n=\{\frac{d(R)}{2^n}\}_n\to 0$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $d(R_n)<\delta$.

Como $z_0\in R_n$ se tiene que $\forall z\in R_n$, $|z-z_0|<\delta$, y por tanto $|\varepsilon(z)|<\varepsilon$, $\forall z\in R_n$.

Luego

$$\left|\int_{\partial R_n}\varepsilon(z)(z-z_0)dz\right|\le\int_{\partial R_n}|\varepsilon(z)|\cdot|z-z_0|\,|dz|\le\varepsilon\, d(R_n)\cdot L(\partial R_n)=$$
$$=\varepsilon\,\frac{d(R)}{2^n}\cdot\frac{L(\partial R)}{2^n}.$$

Se deduce de esto que

$$\left|\int_{\partial R}f(z)dz\right|\le 4^n\left|\int_{\partial R_n}f(z)dz\right|\le\varepsilon\, d(R)L(\partial R)$$

Puesto que ε es arbitrario debe ser $\int_{\partial R}f=0$. csqd.

12. COROLARIO: Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y $f\in H(D)$. Entonces la forma diferencial $f(z)dz$ es cerrada en D.

▷ Es consecuencia inmediata del teorema anterior y el COROLARIO 13 (TEMA 9°) ▨

OBSERVACION: Como consecuencia de este corolario, existe $\int_\gamma f(z)dz$ si f es holomorfa en el abierto D y γ una curva (continua) en D.

13. COROLARIO: Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y $f\in H(D)$. Entonces f es localmente la derivada de una función holomorfa.

▷ No es más que otra forma de enunciar el COROLARIO 12 (pues las formas cerradas son las formas localmente exactas).

2. El teorema de Cauchy: generalizaciones.

2.1. Corolario: (El teorema de Cauchy).

Sea D una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$ y $f \in H(D)$, y γ una curva cerrada en D. Entonces
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

▷ Siendo f holomorfa en D, $f(z)dz$ es cerrada en D y puesto que D es simplemente conexo, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ (Teorema 2.4, Tema 10). ■

Probaremos algunas generalizaciones del teorema de Cauchy.

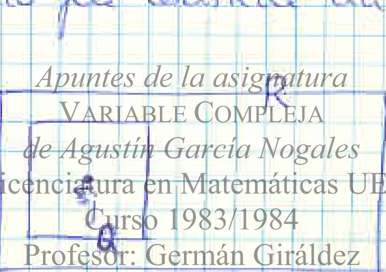
2.2. Proposición: Sea D abierto $\subset \mathbb{C}$ y $D' = D \setminus \{\xi_j \,/\, j=1,\dots,n\}$. Supongamos que $f \in H(D')$ y que $\lim_{z \to \xi_j} (z-\xi_j) f(z) = 0$, $j=1,\dots,n$. Entonces
$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$
siendo R un rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes contenido en D, de forma que $\xi_j \notin \partial R$, $(j=1,\dots,n)$.

Demostr.: Sea R un rectángulo en las condiciones del enunciado. Entonces R contiene a lo sumo un número finito de puntos ξ_j. Se pueden entonces trazar rectas verticales y horizontales determinando una partición de R por subrectángulos que contienen cada uno a lo sumo un punto de los ξ_j.

La integral de $f(z)dz$ a lo largo de ∂R es la suma de las integrales a lo largo de los bordes de cada uno de los subrectángulos formados.

Si uno de estos subrectángulos no contiene ningún punto ξ_j, por el teorema de Goursat, la integral de $f(z)dz$ a lo largo del borde de dicho subrectángulo es cero. Probemos que la integral a lo largo del borde de cada uno de los restantes subrectángulos es cero, con lo cual $\int_{\partial R} f(z)dz$ será cero.

Podemos suponer que R es un rectángulo que contiene un único punto ξ_j. Incluso más, se puede suponer que R es un cuadrado Q de centro el punto ξ_j, pues siempre existe un cuadrado Q de centro ξ_j de forma que ∂R y ∂Q son homótopos co-



... y, por tanto, $\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial Q} f(z)dz$.

Por hipótesis
$$\lim_{z \to \xi_j} (z-\xi_j) f(z) = 0$$

Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ / $|z-\xi_j| < \delta \Rightarrow |(z-\xi_j)\cdot f(z)| < \varepsilon$

Elijamos el cuadrado Q de forma que su diámetro sea menor que δ, con lo cual $Q \subset B(\xi_j, \delta)$.

Entonces el lado l de Q es menor que δ.

Además si $z \in \partial Q$, $|z-\xi_j| \geq \frac{l}{2}$ y $|(z-\xi_j) f(z)| < \varepsilon$.

Luego $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z-\xi_j|} \leq \frac{2\varepsilon}{l}$, $\forall z \in \partial Q$ y por tanto

$$\left|\int_{\partial Q} f(z)dz\right| \leq \int_{\partial Q} |f(z)|\,|dz| \leq \frac{2\varepsilon}{l} \cdot 4l = 8\varepsilon$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se tiene que $\int_{\partial Q} f(z)dz = 0$ y por tanto $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ si R está en las hipótesis del teorema c.q.d.

OBSERVACIONES: ① La hipótesis de que $\lim_{z \to \xi_j} |(z-\xi_j) f(z)| = 0$ se verifica si $f \in H(D')$ y f es localmente acotada en D.

② Se puede enunciar un teorema análogo poniendo, en lugar de un conjunto finito de puntos $\{\xi_j\}_{j=1}^{n}$, un conjunto de puntos de D sin puntos de acumulación (será forzosamente una sucesión de puntos de D), pues en ese caso en el compacto R habrá a lo sumo un número finito de puntos ξ_j, pues si hubiese un número infinito de puntos admitirían un punto de acumulación en el compacto, contra la hipótesis. A partir de ahí la demostración es idéntica a la anterior.

2.3. PROPOSICION: Sea D disco abierto $\subset \mathbb{C}$, $D' = D \setminus \{\xi_j \in D \,/\, j=1,\dots,n\}$ y $f \in H(D')$.

Si $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, $\lim_{z \to \xi_j} (z-\xi_j) f(z) = 0$ entonces
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$
cualquiera que sea el camino γ cerrado diferenciable con continuidad a trozos contenido en D'.

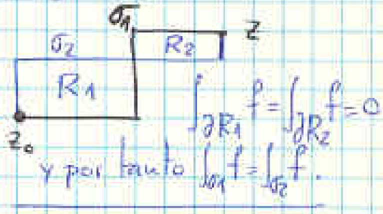
Demostr.: Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ el centro del disco D y supongamos en primer lugar que ningún ξ_j está en las rectas $x = x_0$, $y = y_0$. Entonces para cada punto $z \in D'$ podemos unir z_0 con z por una poligonal σ de lados paralelos a los ejes que no contenga ningún punto ξ_j y conste a lo sumo de tres lados. (*)

(*) Podemos elegir σ de forma que el último segmento sea vertical u horizontal, según nos interese.

Definimos para $z \in D'$

$$F(z) = \int_{\sigma} f(z)\,dz$$

La definición de $F(z)$ no depende de σ por la proposición anterior (ver figura al margen).



A partir de esto se prueba que F es una primitiva de $f(z)dz$ de la misma forma que se hizo en el teorema de existencia de primitivas no uniformes (TEOREMA 2.2, TEMA 9º).

Se deduce ya de ello que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ si γ es un camino diferenciable con continuidad a trozos tal que $(\gamma) \subset D'$.

El teorema queda probado en el caso de que ningún punto ξ_j esté en las rectas $x = x_0$ e $y = y_0$.

Veamos ahora el caso general. Sea ρ el radio del disco D. Existe entonces $\rho' \in]0,\rho[$ tal que $\rho' > \max_{t \in I} |\gamma(t) - z_0| \geq 0$, supuesto que γ está parametrizado en el intervalo I.

Sea $z_0' \in D$ tal que $|z_0' - z_0| < \frac{1}{2}(\rho - \rho')$. Entonces

$(\gamma) \subset B(z_0', \rho' + |z_0 - z_0'|) \subset B(z_0, \rho) = D$.

En efecto: $\forall t \in I$, $|\gamma(t) - z_0'| \leq |\gamma(t) - z_0| + |z_0 - z_0'| < \rho' + |z_0 - z_0'|$

y si $z \in B(z_0', \rho' + |z_0 - z_0'|)$ entonces

$$|z - z_0| \leq |z - z_0'| + |z_0' - z_0| < \rho' + |z_0 - z_0'| + |z_0' - z_0| < \rho' + \frac{1}{2}(\rho - \rho') + \frac{1}{2}(\rho - \rho') = \rho.$$

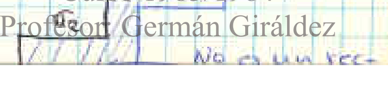
Puesto que $\{\xi_j\}_{j=1}^{n}$ es finito se puede elegir $z_0' = x_0' + iy_0'$ tal que $0 < |z_0' - z_0| < \frac{1}{2}(\rho - \rho')$ y de forma que ningún ξ_j esté en las rectas $x = x_0'$, $y = y_0'$.

Aplicando la primera parte de la demostración a la bola $B(z_0', \rho' + |z_0 - z_0'|)$ queda probado que $\int_\gamma f(z)dz = 0$. csqd.

OBSERVACIONES: ① La suposición de que los ξ_j no estén (ninguno de ellos) en las rectas $x = x_0$, $y = y_0$ parece que se puede evitar como se ve al margen, pero así no tenemos la libertad para elegir vertical u horizontal el último segmento de σ

② Se pueden escribir aquí las mismas observaciones ① y ② hechas para la PROPOSICION 2.2.

③ La hipótesis de que D sea disco sólo se ha utilizado para garantizar la existencia de poligonales con a lo sumo tres lados como las descritas en la demostración, y se pide que tengan a lo sumo tres lados para que no se den casos como el de la figura



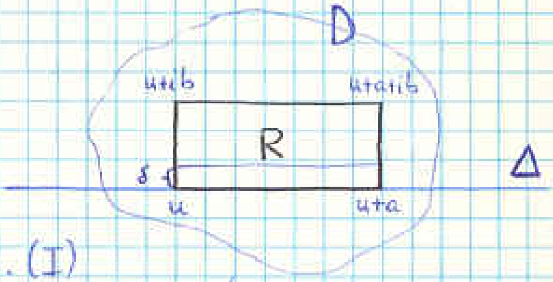
2.4. PROPOSICION: Sea D abierto y $f \in \mathcal{C}(D)$. Sea Δ una recta paralela al eje real y supongamos que $f \in H(D \setminus \Delta)$. Entonces $f(z)dz$ es una forma diferencial cerrada en D.

Demostr.: Hemos de probar que si R es un rectángulo cerrado contenido en D entonces $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$.

i) Si $R \cap \Delta = \emptyset$, la tesis es trivial por el teorema de Goursat.

ii) Supongamos ahora que R tiene un lado sobre Δ.

Sean $u, u+a, u+ib, u+a+ib$ los vértices de R $(a, b > 0)$, y que $u, u+a \in \Delta$. Para cada $\delta > 0$ consideremos el rectángulo $R(\delta)$ de vértices $u+i\delta, u+a+i\delta, u+ib, u+a+ib$. Entonces por i), $\int_{\partial R(\delta)} f(z)dz = 0$. (I)



Puesto que f es continua en D, es uniformemente continua en el compacto R y por tanto la integral de f a lo largo de $\partial R(\delta)$ tiende a $\int_{\partial R} f(z)dz$ cuando δ tiende a cero, es decir

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\partial R(\delta)} f(z)dz = \int_{\partial R} f(z)dz$$

De (I) se deduce que $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$.

iii) Si $R \cap \Delta \neq \emptyset$ y Δ no es un lado de R, se puede escribir R como unión de dos rectángulos R' y R'' que están en las condiciones de ii) y por tanto

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial R'} f(z)dz + \int_{\partial R''} f(z)dz = 0 \quad \text{csqd.}$$