TEMA 13°: FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY. DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR DE UNA FUNCION HOLOMORFA

1. FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

1.1. TEOREMA: (Fórmula integral de Cauchy).

Sea D un disco abierto y $f \in H(D)$, y γ una curva cerrada en D. Entonces para cada $a \in D$ tal que $a \notin (\gamma)$ se verifica

$$I(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Demostr.: La función g definida por

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z-a} \text{ si } z \neq a \quad \text{y } g(a) = f'(a)$$

es holomorfa en el abierto $D \setminus \{a\}$ y continua en D.

Además $\lim_{z \to a} (z-a) g(z) = 0$ pues f es continua en D.

La función g satisface las hipótesis de la PROPOSICION 2.3 (TEMA 12). Luego si $a \notin (\gamma)$ donde γ es una curva cerrada en D se verifica que

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 0. \quad (*)$$

Luego $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz = 0$

y por la linealidad de la integral

$$f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

Multiplicando por $\frac{1}{2\pi i}$ y recordando que $I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ queda probado que

$$I(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz \quad \text{csqd}$$

El siguiente teorema generaliza al anterior pues en un disco toda curva cerrada es homótopa a cero.

1.2 TEOREMA: (Fórmula integral de Cauchy)

Sea D abierto $\subset \mathbb{C}$, $f \in H(D)$ y γ una curva cerrada homótopa a cero en D. Entonces si $a \in D$ es tal que $a \notin (\gamma)$ se tiene que

$$I(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Demostr.: Consideremos la función

$$g: z\in D \longmapsto g(z) = \begin{cases} = \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z\neq a \\ = f'(a) & \text{si } z=a \end{cases}$$

Entonces g es continua en D y holomorfa en $D\setminus\{a\}$ (por tanto holomorfa en D excepto una cierta recta paralela al eje real).
En virtud de PROPOSICION 2.4 (TEMA 12), $g(z)dz$ es cerrada en D.
Puesto que γ es homótopa a cero en D se verifica que

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0$$

de lo que se concluye de la misma forma que en el teorema anterior que

$$I(\gamma,a)\cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \quad \text{csqd.}$$

1.3. COROLARIO: Sea D simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y $f\in H(D)$. Si γ es una curva cerrada en D, y $a\notin(\gamma)$ entonces

$$I(\gamma,a)\cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

▷ Basta observar que en un dominio simplemente conexo toda curva cerrada es homótopa a cero. ▨

OBSERVACION: En cualesquiera de las hipótesis de los resultados anteriores, cuando $I(\gamma,a)=1$ se escribe

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

y si z recorre los puntos de la componente conexa de $(\gamma)^c$ en la que el índice de γ vale 1, se puede escribir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

que es la expresión más conocida de la FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY.

2. DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR DE UNA FUNCION HOLOMORFA.

Veamos algunos resultados previos.

2.1. PROPOSICION: Sea γ un camino diferenciable con continuidad a trozos en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en (γ) que converge uniformemente a f. Entonces

$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Demostr.: Consideremos la función

$$g : z \in D \longmapsto g(z) = \begin{cases} = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{si } z \neq a \\ = f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$$

Entonces g es continua en D y holomorfa en $D \setminus \{a\}$ (por tanto holomorfa en D excepto una cierta recta paralela al eje real).
En virtud de PROPOSICION 2.4 (TEMA 12), $g(z)dz$ es cerrada en D.
Puesto que γ es homótopa a cero en D se verifica que

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0$$

de lo que se concluye de la misma forma que en el teorema anterior que

$$I(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \quad \text{csqd.}$$

1.3. COROLARIO: Sea D simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y $f \in H(D)$. Si γ es una curva cerrada en D y $a \notin (\gamma)$ entonces

$$I(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

▷ Basta observar que en un dominio simplemente conexo toda curva cerrada es homótopa a cero. ▨

OBSERVACION: En cualesquiera de las hipótesis de los resultados anteriores, cuando $I(\gamma, a) = 1$ se escribe

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

y si z recorre los puntos de la componente conexa de $(\gamma)^c$ en la que el índice de γ vale 1, se puede escribir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

que es la expresión más conocida de la FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY.

2. DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR DE UNA FUNCION HOLOMORFA.

Veamos algunos resultados previos.

2.1. PROPOSICION: Sea γ un camino diferenciable con continuidad a trozos en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en (γ) que converge uniformemente a f. Entonces

$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Demostr: Notamos en primer lugar que existe $\int_\gamma f(z)dz$ pues f es continua en (γ) como límite uniforme de funciones continuas en (γ).

Por hipótesis, dado $\varepsilon>0$ existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq\nu$ entonces $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$, $\forall z\in(\gamma)$.

Por la linealidad de la integral

$$\left|\int_\gamma f_n(z)dz-\int_\gamma f(z)dz\right|=\left|\int_\gamma (f_n(z)-f(z))dz\right|$$

y siendo γ diferenciable con continuidad a trozos

$$\left|\int_\gamma (f_n(z)-f(z))dz\right|\leq\int_\gamma |f_n(z)-f(z)|\,|dz|\leq\varepsilon L(\gamma) \quad \text{si } n\geq\nu.$$

Luego $\lim_n \int_\gamma f_n(z)dz=\int_\gamma f(z)dz$. csqd.

2.2. COROLARIO: Sea γ un camino diferenciable con continuidad a trozos en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones continuas en (γ) tal que la serie $\sum_{n\geq0} f_n$ converge uniformemente a f. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz=\sum_{n\geq0}\int_\gamma f_n(z)dz.$$

D Basta aplicar el teorema anterior y la linealidad de la integral. ▨

El teorema de Taylor para funciones holomorfas dice

2.3. TEOREMA: (de Taylor)

Si D es abierto en $\mathbb{C}$ y $f\in H(D)$, y $B(a,\rho)$ es una bola contenida en D entonces

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\quad \forall z\in B(a,\rho)$$

donde

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$$

siendo C_r la circunferencia de centro a y radio $r\in]0,\rho[$ arbitrario orientada positivamente.

Demostr.: Sea $z\in B(a,\rho)$ y $r_1\in]0,\rho[$ tal que $|z-a|<r_1$.

Consideremos la circunferencia C_{r_1} de traza

$$(C_{r_1})=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z-a|=r_1\}$$

y orientada positivamente (recorrida una sola vez).

Entonces $I(C_{r_1},z)=1$.

Por la fórmula integral de Cauchy se verifica

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi. \quad (I)$$

Si $\xi \in C_{r_1}$ entonces

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{f(\xi)}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} \quad (*)$$

Como $|\xi-a| = r_1$ y $|z-a| < r_1$ se tiene que $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$ y por tanto

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n. \text{ Luego}$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z} = \frac{f(\xi)}{\xi-a} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \quad (\mathrm{II})$$

Sea $M = \sup_{\xi \in (C_{r_1})} |f(\xi)|$ que existe pues (C_{r_1}) es compacto y f continua. Entonces $\sum_{n\geq 0} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$ está acotada uniformemente por la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{M}{r_1}\left(\frac{|z-a|}{r_1}\right)^n$ que es convergente pues $|z-a| < r_1$.
Luego la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$ es uniformemente convergente en $\xi \in (C_{r_1})$. De (I) y (II) se deduce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n\geq 0} \left(\int_{C_{r_1}} (z-a)^n \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n$$

donde $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$.

Sea ahora $r \in]0,\rho[$ arbitrario. Entonces C_{r_1} y C_r son homótopas como curvas cerradas en $D \setminus \{a\}$.
Además $\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ es holomorfa en $D\setminus\{a\}$ y por tanto la forma diferencial $\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$ es cerrada en $D\setminus\{a\}$. Luego

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \qquad \text{csqd.}$$

<u>CONSECUENCIAS</u>: ① Si f está en las hipótesis del teorema entonces dado $\rho > 0$ tal que $B(a,\rho) \subset D$ se verifica que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B(a,\rho)$$

Es sencillo deducir de esto que $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ y por tanto

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \ \forall r \in]0,\rho[. \quad (\mathrm{III})$$

Si hacemos $n=0$ obtenemos lo que hemos llamado la fórmula integral de Cauchy. A veces de (III) se dice que es la fórmula integral de Cauchy para la derivada n-ésima.

② Sea D abierto $\subset \mathbb{C}$ y $f \in H(D)$. Sea $z_0 \in D$ y $r>0$ tal que $\overline{B}(z_0,r) \subset D$. Entonces, parametrizando $C_r: \theta \in [0,2\pi] \longmapsto C_r(\theta)=z_0+re^{i\theta} \in \mathbb{C}$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

Se dice por ello que f cumple la propiedad del valor medio o propiedad de la media. Se comprueba que no sólo f cumple la propiedad de la media, sino que sus partes real e imaginaria también la satisfacen.

Entre otras cosas el teorema de Taylor dice que

2.4. COROLARIO: i) Si D es abierto de $\mathbb{C}$ y f es holomorfa en D entonces f es analítica en D.
ii) Si $f \in H(D)$, entonces $f' \in H(D)$.

Por tanto, una función holomorfa en un abierto D tiene todas las derivadas en D, y f y sus derivadas son analíticas en D.

2.5. COROLARIO Sea D simplemente conexo y $f \in H(D)$. Si $f(z)\neq 0$, $\forall z \in D$ entonces existe una función holomorfa g en D tal que $f(z)=e^{g(z)}$, $\forall z \in D$, es decir f tiene un logaritmo holomorfo en D.

Demostr.: Como $f \in H(D)$ se tiene que $f' \in H(D)$ y siendo $f(z)\neq 0$, $\forall z \in D$ se verifica que $\frac{f'}{f} \in H(D)$.

Siendo D simplemente conexo, f'/f es la derivada de una función holomorfa en D, es decir, existe $g \in H(D)$ tal que $g'=\frac{f'}{f}$.
Consideremos la función $h=fe^{-g}$.
Se verifica que $h \in H(D)$ y

$$h'=f'e^{-g}-fg'e^{-g}=f'e^{-g}-f\frac{f'}{f}e^{-g}=0$$

Como $h \in H(D)$, D es conexo y $h'=0$ se deduce que h es constante: $\exists \lambda \in \mathbb{C} / h(z)=\lambda$, $\forall z \in D$.
Debe ser $\lambda \neq 0$ pues $f(z)\neq 0$, $\forall z \in D$ y $e^{-g(z)}\neq 0$, $\forall z \in D$.
Sumando una constante apropiada a g podemos suponer que $\lambda=1$ y por tanto $f(z)=e^{g(z)}$, $\forall z \in D$. c.s.q.d.

2.6 Corolario: Si $f\in H(D)$, D simplemente conexo y $f(z)\neq 0$, $\forall z\in D$ entonces existe una función holomorfa φ en D tal que $f=\varphi^2$, es decir, f tiene raiz cuadrada holomorfa.

Demostr.: Por el corolario anterior existe $g\in H(D)$ tal que $f=e^g$. Sea $\varphi=e^{\frac{1}{2}g}\in H(D)$.
φ verifica que $\varphi^2=f$. c.s.q.d. (*)

3. Funciones enteras: Teorema de Liouville. Teorema fundamental del algebra. Teorema de Morera.

3.1. Proposicion: (Desigualdades de Cauchy).

Sea D abierto y $f\in H(D)$ y sea $\rho>0$ tal que $\overline{B}(a,\rho)\subset D$. Si $f(z)=\sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ para $|z-a|<\rho$ entonces

$$|c_n|\leq\frac{M(r)}{r^n}\quad \text{siendo } M(r)=\sup_{|z-a|=r}|f(z)| \text{ para } 0<r<\rho.$$

Demostr.: Sabemos que

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi \quad \forall r\in\,]0,\rho[.$$

Entonces

$$|c_n|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-a|^{n+1}}|d\xi|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{M(r)}{r^n}.\ \text{c.s.q.d.}$$

Definicion: (Función entera)

Se llama función entera a una función holomorfa en todo el plano complejo, es decir, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es entera si $f\in H(\mathbb{C})$.

3.2. Teorema: (de Liouville)

Si f es una función entera acotada entonces f es constante.

Demostr.: Puesto que f es entera es analítica en todo el plano. Sea

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}c_n z^n,\quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Puesto que el radio de convergencia de esta serie es infinito, por la desigualdad de Cauchy se verifica que

$$|c_n|\leq\frac{M(r)}{r^n},\quad \forall n\geq 0,\ \forall r>0.$$

Puesto que f es acotada, existe $M>0$ tal que $|f(z)|\leq M$, $\forall z\in\mathbb{C}$ y por tanto $|M(r)|\leq M$, $\forall r>0$.

(*) Los corolarios 2.5 y 2.6 solo son ciertos si D es simplemente conexo: Estos resultados [illegible] zan las regiones simplemente conexas.

Luego $|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$, $\forall n \geq 1$, $\forall r > 0$.

y también $|c_n| \leq \lim_{r \to \infty} \frac{M}{r^n} = 0$, $\forall n \geq 1$.

Luego $c_n = 0$, $\forall n \geq 1$ y por tanto $f(z) = c_0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. c.s.q.d.

Los polinomios son funciones enteras. La siguiente proposición caracteriza los polinomios entre las funciones enteras.

3.3. PROPOSICION: 1) Si f es una función entera y existen $A \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ y $r_0 > 0$ tales que $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq A r^\alpha$, $\forall r \geq r_0$, entonces f es un polinomio de grado menor o igual que α.
2) Recíprocamente, si f es un polinomio existen $A \geq 0$ y $r_0 > 0$ tal que $M(r) \leq A r^\alpha$, $\forall r \geq r_0$ siendo α el grado del polinomio.

Demostr.: 1) Puesto que f es entera se puede escribir

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

En las hipótesis dadas se tiene que si $n > \alpha$

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{A r^\alpha}{r^n} = A/r^{n-\alpha} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

Luego $c_n = 0$, $\forall n > \alpha$ y por tanto f es un polinomio de grado $\leq \alpha$.

2) Sea $f(z) = a_0 z^\alpha + a_1 z^{\alpha-1} + \dots + a_\alpha$

Entonces

$$\lim_{z \to \infty} \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha} = |a_0|$$

Sea $A > |a_0|$. Existe entonces $r_0 > 0$ tal que $\frac{|f(z)|}{|z|^\alpha} < A$, $\forall |z| > r_0$

Luego $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq A r^\alpha$, $\forall r > r_0$. c.s.q.d.

3.4. TEOREMA: (fundamental del Algebra).
Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Demostr.: Supongamos que $P(z)$ no tiene raíces en $\mathbb{C}$.
Entonces la función $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es entera.

Además $\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{\frac{1}{z^n}}{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}} = 0$ $(a_0 \neq 0)$

Existe entonces $r_0 > 0$ tal que $|f(z)| < 1$ si $|z| \geq r_0$.
Además f es acotada en $B(0, r_0)$ pues es continua en el

compacto $\overline{B}(0,r_0)$. Luego f es acotada en $\mathbb{C}$.
Por el teorema de Liouville, f será constante en $\mathbb{C}$ y, por tanto, $P(z)$ sería constante, lo cual es absurdo pues $n \geq 1$.

Luego $P(z)$ tiene al menos una raíz. c.q.d.

A partir de esto es sencillo concluir que

3.5. COROLARIO: Todo polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$.

OBSERVACIÓN: Si f es una función entera no constante, por el teorema de Liouville f no puede ser acotada, es decir $f(\mathbb{C})$ no puede estar contenido en una bola (tampoco $f(\mathbb{C})$ puede estar contenido en un semiplano: bastaría componer f con una transformación bilineal que transforme el semiplano en un disco). Por un razonamiento análogo tampoco puede estar contenido en el exterior de un disco. Entonces $f(\mathbb{C})$ debe ser denso en $\mathbb{C}$, es decir, $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$ pues si $\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$ existiría $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ y, por tanto, existirá $\rho > 0$ tal que $B(z,\rho) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$ y $f(\mathbb{C})$ estaría contenido en el exterior de una bola. Luego $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. ¿Se verificará que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, si f es una función entera? El teorema fundamental del Álgebra asegura que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ si P es un polinomio de grado ≥ 1 (dado $c \in \mathbb{C}$, el polinomio $P(z)-c$ tiene al menos una raíz y, por tanto, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z)=c$). Sin embargo, la respuesta es negativa pues la función exponencial nunca toma el valor cero. Sí es cierto, y no lo probaremos, que si f es entera entonces $f(\mathbb{C})$ es $\mathbb{C}$ o bien $\mathbb{C}$ excepto un punto.

El teorema de Morera es una especie de recíproco del teorema de Goursat (o teorema de Cauchy para rectángulos)

3.6. TEOREMA: (de Morera).

Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y f continua en D. Si $f(z)dz$ es una forma cerrada en D entonces f es holomorfa en D.

Demostr.: Probaremos que $\forall a \in D$, si $B(a,r) \subset D$ entonces f es holomorfa en $B(a,r)$. Por hipótesis $f(z)dz$ es cerrada en D y en particular en $B(a,r)$. Pero $B(a,r)$ es simplemente conexo y por tanto $f(z)dz$ es exacta en $B(a,r)$. Existe entonces una función holomorfa F en $B(a,r)$ tal que $F'=f$ en $B(a,r)$. Por tanto, f es holomorfa en $B(a,r)$, como derivada de una función holomorfa. c.s.q.d.