TEMA 14º: CEROS DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS. APLICACIONES LOCALES.

1. CEROS DE UNA FUNCION HOLOMORFA.

DEFINICION: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in H(D)$. Se dice que $z_0 \in D$ es un cero de orden $h \in \mathbb{N}$ de f si se cumple
$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(h-1)}(z_0) = 0 \quad y \quad f^{(h)}(z_0) \neq 0.$$
Por supuesto, el orden de un cero será al menos 1.

1.1. TEOREMA: (caracterización de los ceros)

Sea D abierto $\subset \mathbb{C}$ y $f \in H(D)$. Sea $z_0 \in D$. Las proposiciones siguientes son equivalentes

i) z_0 es un cero de orden h de f.

ii) $f(z) = \sum_{n=h}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ para z en un entorno de z_0 y $c_h \neq 0$.

iii) $f(z) = (z-z_0)^h f_h(z)$ donde f_h es holomorfa en un entorno de z_0 y $f_h(z_0) \neq 0$.

Demostr.: i) $\Rightarrow$ ii) En un entorno de z_0 f se escribe
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$
donde $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Por hipótesis z_0 es un cero de orden h de f. Entonces $f(z_0) = \dots = f^{(h-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(h)}(z_0) \neq 0$, y por tanto $c_0 = c_1 = \dots = c_{h-1} = 0$ y $c_h \neq 0$.
Luego $f(z) = \sum_{n=h}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ y $c_h \neq 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $f_h(z) = c_h + c_{h+1}(z-z_0) + c_{h+2}(z-z_0)^2 + \dots$
Si $\sum_{n=h}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ converge a $f(z)$ en un entorno de z_0, entonces f_h es holomorfa en un entorno de z_0 (las dos series convergen en el mismo entorno de z_0) y se verifica en este entorno que
$$f(z) = (z-z_0)^h f_h(z) \quad y \quad f_h(z_0) = c_h \neq 0.$$

iii) $\Rightarrow$ i) En un entorno de z_0 se verifica que
$$f'(z) = h(z-z_0)^{h-1} f_h(z) + (z-z_0)^h f_h'(z) =$$
$$= (z-z_0)^{h-1}\left[h f_h(z) + (z-z_0) f_h'(z)\right]$$

Definimos $f_{h-1}(z) = h f_h(z) + (z-z_0) f_h'(z)$ en un entorno de z_0.
Entonces f_{h-1} es holomorfa en dicho entorno y
$f_{h-1}(z_0) = h f_h(z_0) \neq 0$.
Luego f' está en las mismas condiciones que f:
$$f'(z) = (z-z_0)^{h-1} f_{h-1}(z)$$
con $f_{h-1}(z_0) \neq 0$, y f_{h-1} holomorfa en un entorno de z_0.
Análogamente
$$f''(z) = (z-z_0)^{h-2} f_{h-2}(z)$$
con $f_{h-2}(z_0) \neq 0$ y f_{h-2} holomorfa en un entorno de z_0.
Procediendo de esta forma se obtiene
$$f^{(h-1)}(z) = (z-z_0) f_1(z)$$
con $f_1(z_0) \neq 0$ y $f_{h-?}$ holomorfa en un entorno de z_0.
Por tanto, $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(h-1)}(z_0) = 0$
y $f^{(h)}(z) = f_1(z) + (z-z_0) f_1'(z)$ en el entorno de z_0 de partida
y por tanto $f^{(h)}(z_0) = f_1(z_0) \neq 0$.
Luego z_0 es un cero de orden h de f. c.q.d.

Los siguientes resultados son sorprendentes si tenemos en cuenta que no son ciertos en Análisis real.

1.2. PROPOSICIÓN: Sea D abierto y conexo y $f \in H(D)$. Si $z_0 \in D$ es tal que $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n \geq 0$ entonces f es idénticamente nula.

Demostr.: Sea $A = \{z \in D \,/\, f^{(n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\}$.
Entonces: • $A \neq \emptyset$ pues $z_0 \in A$.
• A es cerrado en D como intersección de cerrados:
$$A = \bigcap_{n \geq 0} \{z \in D \,/\, f^{(n)}(z) = 0\} \qquad (f^{(n)} \text{ es continua})$$
• A es abierto (en D y por tanto en $\mathbb{C}$). En efecto: Sea $z_0' \in A$ y $B(z_0')$ una bola de centro z_0' contenida en D. Para cualquier $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ es holomorfa en D y, por tanto, desarrollable en serie de potencias en $B(z_0')$; concretamente
$$\forall p \geq 0, \quad f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(p+n)}(z_0')}{n!} (z-z_0')^n, \quad \forall z \in B(z_0').$$
Pero $z_0' \in A$ y, por tanto, $f^{(p+n)}(z_0') = 0$, $\forall n \geq 0$, $\forall p \geq 0$.
Luego $f^{(p)}(z) = 0$, $\forall z \in B(z_0')$ lo que prueba que $B(z_0') \subset A$ y por tanto que A es abierto.
Puesto que D es conexo, los únicos conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados en D son $\emptyset$ y D y siendo $A \neq \emptyset$ debe ser

$A = D$, lo que significa que $f \equiv 0$. c.s.q.d.

<u>OBSERVACIÓN</u>: La hipótesis de conexión de D es fundamental. No obstante, si D no fuese conexo, se puede asegurar que f es idénticamente nula en la componente conexa de z_0 en D.

<u>1.3. COROLARIO</u>: Si D es abierto y conexo, $f \in H(D)$ y f no es idénticamente nula, se verifica, si $z_0 \in D$ es tal que $f(z_0) = 0$, que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que z_0 es un cero de orden K de f.

Demostr.: Por la proposición anterior no todas las derivadas de f se anulan en z_0 pues $f \not\equiv 0$. Sea $K = \min\{n \in \mathbb{N} / f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. Entonces $K \geq 1$ pues $f(z_0) = 0$ y z_0 es un cero de orden K de f. c.s.q.d.

<u>1.4. COROLARIO</u>: Si D es abierto y conexo y $f \in H(D)$ y $f \not\equiv 0$ entonces el conjunto de los ceros de f es discreto, es decir, es un conjunto de puntos aislados.

Demostr.: Sea $A = \{z \in D / f(z) = 0\}$. Sea $z_0 \in A$ y K el orden de z_0. Entonces existe una función holomorfa f_K en un entorno de z_0 tal que $f(z) = (z - z_0)^K f_K(z)$ y $f_K(z_0) \neq 0$. Notar que se ha utilizado el corolario anterior para demostrar la existencia de $K \geq 1$. Siendo f_K continua, existe un entorno V de z_0 donde f_K no se anula.

Entonces f no se anula en $V \setminus \{z_0\}$ y por tanto $V \cap A = \{z_0\}$. c.s.q.d.

<u>1.5. COROLARIO</u>: (Principio de prolongación analítica).

Sea D abierto y conexo y $f, g \in H(D)$. Supongamos que f y g coinciden en los puntos de un conjunto $A \subset D$. Si A tiene un punto de acumulación en D, entonces $f \equiv g$ en D.

Demostr.: La función $h = f - g$ es holomorfa en el abierto conexo D y se anula en un conjunto que posee un punto de acumulación en D. Se deduce del corolario anterior que $h \equiv 0$ y por tanto $f \equiv g$. c.s.q.d.

<u>OBSERVACIONES</u>: El corolario anterior se suele utilizar cuando A es un abierto no vacío en D (que, por tanto, tiene puntos de acumulación), o bien cuando A es un arco de una curva en D. Este resultado está relacionado con el problema de prolongación analítica: dada una función holomorfa en una región se trata de encontrar regiones "más grandes" donde la función siga siendo holomorfa.

2) Una función holomorfa no nula en un abierto conexo tiene a lo sumo una cantidad numerable de ceros, pues dicho abierto se puede expresar como unión numerable de compactos, en cada uno de los cuales hay a lo sumo un número finito de ceros de la función, pues de haber infinitos ceros, dicho conjunto tendría un punto de acumulación en el compacto y la función sería idénticamente nula, contra lo supuesto.

2. FORMULA DE LA APLICACIÓN LOCAL. COMPORTAMIENTO LOCAL DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS.

2.1. TEOREMA: (Fórmula de la aplicación local)

Sea D un disco abierto y $f \in H(D)$ no idénticamente nula. Sean z_j's los ceros de f, que supondremos contados con su orden de multiplicidad. Si γ es una curva cerrada en D que no pasa por ningún z_j entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_j \in D} I(\gamma, z_j) \qquad (*)$$

Demostr.: Supongamos en primer lugar que el número de ceros de f en D es finito; sean estos $z_1, \dots, z_n$, contado cada cero con su orden de multiplicidad.

Se verifica entonces que existe una función holomorfa g en D tal que $g(z) \neq 0$, $\forall z \in D$ y (I)

$$f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_n)\,g(z). \quad \text{(II)}$$

Recordemos el TEOREMA 1.1 de caracterización de los ceros (apartado iii)): se decía allí que f_n era holomorfa en un entorno de z_0, pero $f_n(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ es holomorfa en $D\setminus\{z_0\}$ y también en un entorno de z_0. Luego f_n es holomorfa en D. Además f_n no tiene ceros distintos de los de f en D. Por un proceso de inducción finita es sencillo concluir la existencia de $g \in H(D)$ verificando (I) y (II).

Derivando (II) y dividiendo por $f(z)$ se obtiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \dots + \frac{1}{z-z_n} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{si } z \in D\setminus\{z_1,\dots,z_n\}. \quad \text{(III)}$$

Luego como $f'/f \in H(D\setminus\{z_1,\dots,z_n\})$ y $(\gamma) \subset D\setminus\{z_1,\dots,z_n\}$ existe la integral de f'/f a lo largo de γ y, según (III), se puede escribir

(*) $\sum I(\gamma, z_j)$ [illegible]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{n} I(\gamma, z_i) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz$$

Como $g \in H(D)$ y g no se anula en D se tiene que $\frac{g'}{g} \in H(D)$. Siendo D disco (por tanto, simplemente conexo) se verifica que

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = 0$$

y por tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{n} I(\gamma, z_i).$$

Consideremos el caso general. Dado el compacto $(\gamma) \subset D$ existe un disco D' con el mismo centro que D de forma que $(\gamma) \subset D' \subset \overline{D'} \subset D$.

Puesto que $\overline{D'}$ es compacto, f tiene un número finito de ceros en $\overline{D'}$ (por ser $f \not\equiv 0$), y por tanto tiene un número finito de ceros en D'. Por la primera parte aplicada a f en D' se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z_j \in D'} I(\gamma, z_j) \qquad (IV)$$

pues $(\gamma) \subset D'$.

Pero si z_j es un cero de f en D que no pertenece a D' entonces $I(\gamma, z_j) = 0$, por ser z_j un punto exterior a un disco que contiene a (γ). Luego (IV) se puede escribir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z_j \in D} I(\gamma, z_j). \qquad \text{csqd.}$$

2.2. COROLARIO: En las hipótesis del teorema anterior, si $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow D$ es un camino cerrado (diferenciable con continuidad a trozos) y $\Gamma = f \circ \gamma$ (camino en $f(D)$) entonces

$$I(\Gamma, 0) = \sum_{z_j \in D} I(\gamma, z_j).$$

Demostr.: Puesto que

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\,\gamma'(t), \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

se verifica que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\alpha^\beta \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\,\gamma'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\,dt = \int_\Gamma \frac{dw}{w} = 2\pi i\, I(\Gamma, 0)$$

y por el teorema anterior $I(\Gamma, 0) = \sum_{z_j \in D} I(\gamma, z_j)$. csqd.

2.3. COROLARIO: (Fórmula clásica de la aplicación local)

Supongamos, además de las hipótesis del teorema 2.1, que $I(\gamma, z_j)$ vale cero ó uno. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0$$

donde N_0 es el número de ceros de f "interiores" a (γ), contados con su orden de multiplicidad.

Si además γ fuese un camino, entonces $I(\Gamma, 0) = N_0$ donde $\Gamma = f\circ\gamma$

OBSERVACION: La hipótesis de que $I(\gamma, z_j)$ sea 0 ó 1 se cumple por ejemplo si γ es una circunferencia recorrida una sola vez en sentido positivo.

DEFINICION: Dada una función f y un punto $a\in\mathbb{C}$, se dice que $z_0\in\mathbb{C}$ es un a-valor de f si z_0 es un cero de la función $f-a$, es decir, si $f(z_0)=a$.

2.4. COROLARIO: 1) Sea D un disco abierto, $f\in H(D)$. Supongamos que $f\not\equiv a$ y que $f(z)\neq a$, $\forall z\in(\gamma)$ siendo γ una curva cerrada en D. Sean $z_j(a)$'s los a-valores contados con su orden de multiplicidad. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = \sum_{z_j(a)\in D} I(\gamma, z_j(a))$$

2) Si además γ es un camino (diferenciable con continuidad a trozos) cerrado y $\Gamma = f\circ\gamma$, entonces

$$I(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-a} = \sum_{z_j(a)\in D} I(\gamma, z_j(a)).$$

3) Si además $I(\gamma, z_j(a))$ es 0 ó 1 entonces

$$I(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = N_a$$

siendo N_a el número de a-valores de f encerrados por la curva γ contados con su orden de multiplicidad.

▷ La demostración es consecuencia inmediata de la definición de a-valor de f, y los resultados anteriores ▨

OBSERVACION: Supuesto que γ es un camino, y en las hipótesis habituales, si a y b son puntos de la misma componente conexa de $(\Gamma)^c$ sabemos que $I(\Gamma, a) = I(\Gamma, b)$, y por tanto

$$\sum_{z_j(a)\in D} I(\gamma, z_j(a)) = \sum_{z_j(b)\in D} I(\gamma, z_j(b))$$

Si además los índices de γ valen cero ó 1, entonces $N_a = N_b$, es decir el número de puntos en el "interior" de (γ) [illegible] toma el valor a coincide con el número de puntos encerrados por (γ) en los que f toma el valor b (contados con su orden de multiplicidad).

Estudiemos ahora algo sobre el comportamiento local de las funciones holomorfas.

25. TEOREMA: Sea D abierto conexo, $f \in H(D)$ no constante. Sea $z_0 \in D$ un cero de orden n de $f(z) - w_0$. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, en sentido a precisar, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $a \in \mathbb{C}$ verifica que $|a - w_0| < \delta$, la ecuación $f(z) = a$ tiene exactamente n raíces en $B(z_0, \varepsilon)$. Incluso se puede conseguir que las raíces sean simples, excepto z_0.

Demostr.: Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $f(z) - w_0 \neq 0$ si $0 < |z - z_0| < \varepsilon_0$ y tal que $B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$. Dicho ε_0 existe pues $f(z) - w_0$ tiene un cero en z_0 y siendo f no constante sus ceros son aislados ($f \in H(D)$, D abierto y conexo).

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \varepsilon_0$: este es el sentido de ε suficientemente pequeño. Sea γ la circunferencia frontera de la bola $B(z_0, \varepsilon)$ recorrida una sola vez en sentido positivo. Sea $\Gamma = f \circ \gamma$.

Entonces $w_0 = f(z_0) \notin (\Gamma)$ pues $f(z) \neq w_0$, $\forall z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Puesto que (Γ) es compacto y $w_0 \notin (\Gamma)$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $B(w_0, \delta) \cap (\Gamma) = \emptyset$.

Por tanto, si $a \in B(w_0, \delta)$, a y w_0 están en la misma componente conexa de $(\Gamma)^c$, pues están en una misma bola (convexa) que no corta a (Γ).

Como z_0 es una raíz de multiplicidad n de $f(z) = w_0$, por la observación anterior la ecuación $f(z) = a$ tiene n raíces contadas con su orden de multiplicidad encerradas por (γ) es decir en $B(z_0, \varepsilon)$. Queda así probada la primera parte del enunciado. Veamos que las raíces se pueden elegir simples, excepto z_0.

Supondremos que además de lo anterior ε_0 verifica que $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in B(z_0, \varepsilon_0) \setminus \{z_0\}$. Esto se puede conseguir pues D es abierto conexo, $f' \in H(D)$ y no es idénticamente nula (si lo fuese f sería constante y suponemos que no lo es). Si z_0 no es un cero de f' entonces f' no se anula en un entorno de z_0. Si z_0 es un cero de f' es aislado. En cualquier caso se puede exigir que ε_0 verifique que $f'(z)\neq 0$, $\forall z\in B(z_0,\varepsilon_0)\setminus\{z_0\}$, además de lo exigido anteriormente.

Sea $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_0[$ y sea $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que $B(w_0,\varepsilon)\cap(T')=\emptyset$.

f' no se anula en $B(z_0,\varepsilon)$ salvo, posiblemente, en z_0.

Si $a\in B(w_0,\delta)\setminus\{w_0\}$, entonces los ceros de $f(z)-a$ en $B(z_0,\varepsilon)$ son simples pues si $z_a\in B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$ es tal que $f(z_a)=a$ es necesariamente simple pues $f'(z_a)\neq 0$. csqd.

2.6. COROLARIO: Sea $f\in H(D)$ siendo D abierto conexo y f no constante. Entonces f es abierta, es decir, transforma abiertos en abiertos.

Demostr.: Sea A abierto no vacío en D. Entonces

$\forall w_0\in f(A)$, $\exists z_0\in A\,/\,f(z_0)=w_0$.

Sea $n\geq 1$ el orden del cero z_0 de $f(z)-w_0$. Notar que n no es infinito pues $f\in H(D)$, D abierto conexo y f no constante.

Por el teorema anterior existen $\varepsilon>0$ y $\delta(\varepsilon)>0$ tales que si $|w-w_0|<\delta$, $\exists z\in B(z_0,\varepsilon)\,/\,f(z)=w$.

Incluso se puede suponer que $B(z_0,\varepsilon)\subset A$, por ser A abierto, y $z_0\in A$. Por tanto, $B(w_0,\delta)\subset f(A)$, lo que prueba que $f(A)$ es abierto. csqd

OBSERVACION: La hipótesis de conexión de D es fundamental; para comprobarlo basta tomar D como la unión de dos bolas abiertas disjuntas, y f constante sobre cada una de ellas pero no constante en D.

2.7. COROLARIO: Toda función holomorfa en un abierto D y no constante en ninguna componente conexa de D, es abierta.

▷ Basta aplicar el corolario anterior a cada componente conexa de D. ▨

2.8. COROLARIO: Si f es holomorfa en un abierto D y en cada punto $z_0\in D$ existe $n=n(z_0)\in\mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z_0)\neq 0$, entonces f es abierta.

▷ En estas hipótesis f no puede ser constante en ninguna componente conexa de D y bastará aplicar el corolario anterior. ▨

2.9. COROLARIO: Sea D abierto conexo y $f\in H(D)$. Si $z_0\in D$ y $f'(z_0)\neq 0$ entonces f transforma conforme y homeomórficamente un entorno abierto de z_0 en un abierto.

Demostr.: (Ver APENDICE A.1 (pg. 93)). ▨

TEMA 15: PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO. LEMA DE SCHWARTZ.

1. PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO.

1.1. TEOREMA: (Principio del módulo máximo)

Sea D abierto y conexo en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D y no constante. Entonces $|f|$ no tiene máximo absoluto ni máximo local en D.

Demostr.: 1) Supongamos que $|f|$ tiene máximo absoluto en D, es decir, que existe $z_0 \in D$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in D$.
Entonces se tendría que $f(D) \subset \overline{B}(0, |f(z_0)|)$
Puesto que $f \in H(D)$ es no constante y D es abierto conexo se verifica que $f(D)$ es abierto (COROLARIO 2.6, TEMA 14°).
Como $f(z_0) \in f(D)$ y $f(D)$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(z_0), \varepsilon) \subset f(D)$ y por tanto

$$B(f(z_0), \varepsilon) \subset f(D) \subset \overline{B}(0, |f(z_0)|)$$

lo cual representa ya un absurdo pues $f(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} e^{i \operatorname{Arg} f(z_0)} \in B(f(z_0), \varepsilon)$ y $\left| f(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} e^{i \operatorname{Arg} f(z_0)} \right| = |f(z_0)| + \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto $f(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} e^{i \operatorname{Arg} f(z_0)} \notin \overline{B}(0, |f(z_0)|)$.
Luego $|f|$ no tiene máximo absoluto en D.

2) Veamos que $|f|$ tampoco tiene ningún máximo relativo en D.
Si lo tuviese existirían $z_0 \in D$ y $\varepsilon > 0$ de forma que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad , \quad \forall z \in B(z_0, \varepsilon). \quad (I)$$

La función $f|_{B(z_0,\varepsilon)}$ es holomorfa en el abierto conexo $B(z_0, \varepsilon)$.
Además $f|_{B(z_0,\varepsilon)}$ no es constante, pues si lo fuese sería constante en D (COROLARIO 1.5, TEMA 14°).
Luego $f|_{B(z_0,\varepsilon)}$ no alcanza el máximo absoluto en $B(z_0, \varepsilon)$ (1)) en contra de (I).
Por tanto, $|f|$ no tiene máximo relativo en D. c.s.q.d.

1.2. TEOREMA: Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y K compacto $\subset D$. Si f es holomorfa en D entonces $\max_{z \in K} |f(z)|$ se alcanza en la frontera de K (∂K) y por tanto

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in \partial K} |f(z)|$$