TEMA 15: PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO. LEMA DE SCHWARTZ.

1. PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO.

1.1. TEOREMA: (Principio del módulo máximo)
Sea D abierto y conexo en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D y no constante. Entonces $|f|$ no tiene máximo absoluto ni máximo local en D.

Demostr.: 1) Supongamos que $|f|$ tiene máximo absoluto en D, es decir, que existe $z_0 \in D$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in D$.
Entonces se tendría que $f(D) \subset \overline{B}(0, |f(z_0)|)$
Puesto que $f \in H(D)$ es no constante y D es abierto conexo se verifica que $f(D)$ es abierto (COROLARIO 2.6, TEMA 14º).
Como $f(z_0) \in f(D)$ y $f(D)$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(z_0), \varepsilon) \subset f(D)$ y por tanto

$$B(f(z_0), \varepsilon) \subset f(D) \subset \overline{B}(0, |f(z_0)|)$$

lo cual representa ya un absurdo pues $f(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} e^{i \operatorname{Arg} f(z_0)} \in B(f(z_0), \varepsilon)$ y $\left| f(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} e^{i \operatorname{Arg} f(z_0)} \right| = |f(z_0)| + \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto $f(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} e^{i \operatorname{Arg} f(z_0)} \notin \overline{B}(0, |f(z_0)|)$.
Luego $|f|$ no tiene máximo absoluto en D.
2) Veamos que $|f|$ tampoco tiene ningún máximo relativo en D.
Si lo tuviese existirían $z_0 \in D$ y $\varepsilon > 0$ de forma que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad , \quad \forall z \in B(z_0, \varepsilon) \quad (\text{I})$$

La función $f|_{B(z_0,\varepsilon)}$ es holomorfa en el abierto conexo $B(z_0, \varepsilon)$.
Además $f|_{B(z_0,\varepsilon)}$ no es constante, pues si lo fuese sería constante en D (COROLARIO 1.5, TEMA 14º).
Luego $f|_{B(z_0,\varepsilon)}$ no alcanza el máximo absoluto en $B(z_0, \varepsilon)$ (1)) en contra de (I).
Por tanto, $|f|$ no tiene máximo relativo en D. c.q.d.

1.2. TEOREMA: Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y K compacto $\subset D$. Si f es holomorfa en D entonces $\max_{z \in K} |f(z)|$ se alcanza en la frontera de K (∂K) y por tanto

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in \partial K} |f(z)|$$

Demostr.: Puesto que f es holomorfa en D es continua en D y, por tanto, en K. Puesto que K es compacto existe $z_0 \in K$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in K$.

Supongamos que $z_0 \notin \partial K$. Entonces $z_0 \in \overset{\circ}{K}$.

Sea D_0 la componente conexa de z_0 en $\overset{\circ}{K}$.

Se verifica que $f \in H(D_0)$ y además $|f|$ alcanza el máximo absoluto en el abierto conexo D_0 (concretamente en z_0).

Por el principio del módulo máximo debe ser f constante en D_0.

Se verifica que D_0 está estrictamente contenido en $\overline{D_0}$, pues si fuese $D_0 = \overline{D_0}$ se tendría que D_0 es abierto y cerrado en el conexo $\mathbb{C}$ y en consecuencia sería $D_0 = \emptyset$, lo que es absurdo pues $z_0 \in D_0$, o bien sería $D_0 = \mathbb{C}$, lo cual también es absurdo pues $D_0 \subset K$ y K es acotado.

Existe entonces $z' \in \overline{D_0} \setminus D_0$. Como $D_0 \subset \overline{D_0} \subset K$ se tiene que $z' \in K$. Además, siendo f constante en D_0, por continuidad, f es constante en $\overline{D_0}$, y por tanto $f(z') = f(z_0)$. Luego $|f|$ alcanza su máximo sobre K en el punto $z' \in \overline{D_0} \subset K$.

Probemos ahora que $z' \in \partial K$, con lo cual quedará probada la tesis.

Supongamos que $z' \notin \partial K$. Entonces $z' \in \overset{\circ}{K}$ y por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z', \varepsilon) \subset \overset{\circ}{K}$.

El conjunto $D_0 \cup B(z', \varepsilon)$ es conexo, como unión de dos conexos con intersección no vacía, que contiene a z_0 y está contenido en $\overset{\circ}{K}$. Además $D_0 \neq D_0 \cup B(z', \varepsilon)$ pues $z' \notin D_0$, lo cual es absurdo si tenemos en cuenta que D_0 es la componente conexa de z_0 en $\overset{\circ}{K}$. Por tanto $z' \in \partial K$ y $|f|$ alcanza su máximo sobre K en la frontera de K. c.s.q.d.

13. COROLARIO: Sea D una región abierta y acotada de $\mathbb{C}$ y sea el compacto $K = \overline{D}$. Supongamos que f es continua en K y holomorfa en D. Entonces $\max_{z \in K} |f(z)|$ se alcanza en un punto de ∂K.

Demostr.: Es obvio que $\max_{z \in K} |f(z)| \geq \max_{z \in \partial K} |f(z)|$

Veamos que se da la igualdad.

Supongamos en primer lugar que existe $z_0 \in D = \overset{\circ}{K}$ tal que

$\max_{z\in K}|f(z)| = f(z_0)$. Entonces, por el principio del módulo máximo, f será constante en D y, por continuidad, será constante en $\overline{D}=K$, con lo cual $\max_{z\in K}|f(z)| = \max_{z\in\partial K}|f(z)|$.

Si no existe $z_0\in D$ tal que $\max_{z\in K}|f(z)| = f(z_0)$ entonces $\max_{z\in K}|f(z)| = \max_{z\in\partial K}|f(z)|$ pues $K=D\cup\partial K$.

En cualquier caso f alcanza el máximo en ∂K. csqd

OBSERVACION: Se ha exigido que D sea una región (por tanto, conexo). Si D no fuese conexo se podría aplicar el razonamiento a cada componente conexa de D.

2. LEMA DE SCHWARTZ.

2.1. TEOREMA: (Lema de Schwartz)

Sea $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C} / |z|<1\}$ y $f\in H(\mathcal{U})$. Supongamos que $|f(z)|\leq 1$ y que $f(0)=0$. Entonces $|f(z)|\leq|z|$, $\forall z\in\mathcal{U}$ y $|f'(0)|\leq 1$.
Estas desigualdades serán igualdades solo cuando exista $\lambda\in\mathbb{C}$ de módulo 1 tal que $f(z)=\lambda z$, $\forall z\in\mathcal{U}$.

Demostr.: Consideremos la función

$$f_1 : z\in\mathcal{U}\longmapsto f_1(z) = \begin{cases} = \frac{f(z)}{z} & \text{si } z\neq 0 \\ = f'(0) & \text{si } z=0 \end{cases}$$

Entonces f_1 es continua en $\mathcal{U}$ pues $f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$.

Además $f_1\in H(\mathcal{U}\setminus\{0\})$ y por tanto la forma diferencial $f_1(z)dz$ es cerrada, por ser f_1 continua en $\mathcal{U}$ y holomorfa en $\mathcal{U}$ salvo quizás en los puntos de una recta paralela al eje real (2.4. PROPOSICION: TEMA 12).
En virtud del teorema de Morera (TEOREMA 3.6. TEMA 13) f_1 es holomorfa en $\mathcal{U}$.

Puesto que $|f(z)|\leq 1$, $\forall z\in\mathcal{U}$ se verifica que $|f_1(z)|\leq\frac{1}{r}$ si $|z|=r$ con $0<r<1$.

Por el principio del módulo máximo se verifica que

$$|f_1(z)|\leq\frac{1}{r} \quad \text{si } |z|\leq r$$

Siendo f_1 continua, tomando límites cuando r tiende a 1, se tiene que $|f_1(z)|\leq 1$ si $|z|\leq 1$, y por tanto $|f(z)|\leq|z|$ si $z\neq 0$ y $|f'(0)|\leq 1$. Queda así probada la primera

parte del teorema. Probemos la segunda parte.
Supongamos que existe $z_0 \in \mathcal{U}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$. Entonces $|f_1(z_0)| = 1$, con lo cual $|f_1|$ alcanza el máximo absoluto en el abierto $\mathcal{U}$ y, por el principio del módulo máximo, f_1 será constante en $\mathcal{U}$, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f_1(z) = \lambda$, $\forall z \in \mathcal{U}$.
Como $|f_1(z_0)| = 1$ se verifica que $|\lambda| = 1$.
Por tanto, $f(z) = \lambda z$, $\forall z \in \mathcal{U}$. csqd.

CONSECUENCIAS: 1) Sea $R>0$ y $f \in H(\{z / |z|<R\})$. Consideremos la función $g : \xi \in \mathcal{U} \longmapsto g(\xi) = f(R\cdot\xi)$. Si $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in B(0,R)$ y $f(0)=0$ entonces $|g(\xi)| \leq 1$, $\forall \xi \in \mathcal{U}$ y $g(0)=0$, y aplicando el lema de Schwarz a g se tiene que $|g(\xi)| \leq |\xi|$, $\forall \xi \in \mathcal{U}$ y por tanto $|f(R\cdot\xi)| \leq |\xi|$, $\forall \xi \in \mathcal{U}$, o bien $|f(z)| \leq \frac{|z|}{R}$, $\forall z \in B(0,R)$.
2) Supongamos que $f \in H(B(0,R))$ y que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in B(0,R)$ y $f(0)=0$.
La función $\frac{f}{M}$ está en las condiciones de 1) y por tanto

$$\left|\frac{f(z)}{M}\right| \leq \frac{|z|}{R} \text{ si } |z|<R \text{ y también } |f(z)| \leq \frac{M\cdot|z|}{R}, \ \forall z \in B(0,R).$$

3) Supongamos que $f \in H(\{z/|z|<R\})$ y que $f(B(0,R)) \subset \{w / |w|<M\}$.
Sea $z_0 \in B(0,R)$ y $f(z_0) = w_0 \in B(0,M)$.
Consideremos la transformación bilineal $\tau(z) = \dfrac{R(z-z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$

Se verifica que $\tau(z_0)=0$ y además, si $|z|=R$ entonces

$$|\tau(z)| = \frac{R|z-z_0|}{|R^2-\bar{z}_0 z|} = \frac{R|\bar{z}||z-z_0|}{|R^2\bar{z} - \bar{z}_0|z|^2|} = \frac{R^2|z-z_0|}{R^2|\bar{z}-\bar{z}_0|} = 1$$

pues $|z| = |\bar{z}| = R$.
Por tanto, τ transforma la bola abierta de centro cero y radio R en $\mathcal{U}$ y z_0 lo transforma en 0.
Consideremos la transformación bilineal

$$\tau_1(w) = \frac{M(w-w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 w}$$

Entonces τ_1 transforma $B(0,M)$ en $\mathcal{U}$ y $\tau_1(w_0)=0$.
Por tanto, la función $g = \tau_1 \circ f \circ \tau^{-1}$ está en las hipótesis del lema de Schwartz pues $g \in H(\mathcal{U})$, $g(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ y $g(0)=0$.
Luego $|g(\xi)| \leq |\xi|$, si $|\xi|<1$ y por tanto

$|(\tau_1 \circ f \circ \tau^{-1})(\xi)| \leq |\xi|$ si $|\xi|<1$ y también
$|(\tau_1 \circ f)(z)| \leq |\tau(z)|$ si $|z|<R$, es decir

$$\left|\frac{M(f(z)-f(z_0))}{M^2 - \overline{f(z_0)} f(z)}\right| \leq \left|\frac{R(z-z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}\right| \quad \text{si } |z|<R$$

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z} \quad \text{para } z \neq \frac{1}{\bar\alpha} \qquad (*)$$

2.2. PROPOSICION: Se verifican las siguientes proposiciones

1) φ_α es inyectiva.
2) $\varphi_\alpha(\partial \mathcal{U}) = \partial \mathcal{U}$.
3) $\varphi_\alpha(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.
4) $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$
5) La inversa de φ_α es $\varphi_{-\alpha}$.
6) $\varphi_\alpha'(0) = 1-|\alpha|^2$, $\varphi_\alpha'(\alpha) = \dfrac{1}{1-|\alpha|^2}$

Demostr.: 1) Es inyectiva por ser una transformación bilineal de Moebius.

2) Si $z \in \partial\mathcal{U}$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $z = e^{it}$ y

$$|\varphi_\alpha(z)| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\bar\alpha e^{it}}\right| = \frac{1}{|e^{-it}|}\left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\bar\alpha e^{it}}\right| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{e^{-it}-\bar\alpha}\right| = 1$$

Luego $\varphi_\alpha(\partial\mathcal{U}) \subset \partial\mathcal{U}$.

Aplicando el mismo razonamiento a $\varphi_{-\alpha} = (\varphi_\alpha)^{-1}$ (esta igualdad se comprueba trivialmente), se prueba que $\partial\mathcal{U} \subset \varphi_\alpha(\partial\mathcal{U})$ y por tanto $\varphi_\alpha(\partial\mathcal{U}) = \partial\mathcal{U}$.

3) Por el principio del módulo máximo se deduce que $\varphi_\alpha(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. También $\varphi_{-\alpha}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ y, por tanto, $\varphi_\alpha(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

4), 5) y 6) se comprueban fácilmente. ▨

CONSECUENCIA: Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ nos proponemos estudiar si existe una cota para el conjunto

$$A = \{ |f'(\alpha)| \;/\; f \in H(\mathcal{U}),\ |f(z)| \le 1\ \forall z \in \mathcal{U} \text{ y } f(\alpha) = \beta \}.$$

Sea $f \in H(\mathcal{U})$ tal que $|f(z)| \le 1$, $\forall z \in \mathcal{U}$ y $f(\alpha) = \beta$.

Sea $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$. Entonces $g \in H(\mathcal{U})$, $|g(z)| \le 1$ si $|z| < 1$ y $g(0) = 0$.

Por el lema de Schwartz se verifica que $|g'(0)| \le 1$ (I)

Pero, por la regla de la cadena

$$|g'(0)| = |\varphi_\beta'(\beta) \cdot f'(\alpha) \cdot \varphi_{-\alpha}'(0)| \quad \text{y por tanto}$$

$$|g'(0)| = \frac{1}{|1-|\beta|^2|} \cdot |f'(\alpha)| \cdot |1-|\alpha|^2|.$$

De (I) y de que $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ se deduce que $|f'(\alpha)| \le \dfrac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$

(*) Observar que $\frac{1}{\bar\alpha} \notin \mathcal{U}$ pues si $\alpha \in \mathcal{U}$ entonces $|\alpha| < 1$ y por tanto $\left|\frac{1}{\bar\alpha}\right| > 1$.

Luego $\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$ es una cota superior de A. Veamos si la cota es alcanzable, es decir, si existe $f\in H(\mathcal{U})$ tal que $|f(z)|\leq 1, \forall z\in\mathcal{U}$ y $f(\alpha)=\beta$ de forma que $|f'(\alpha)|=\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$ (II).

Si existiese f verificando (II) se tendría que $|g'(0)|=1$ y, por el lema de Schwartz, g sería una rotación y por tanto existe $\lambda\in\mathbb{C}$ de módulo 1 tal que $g(z)=\lambda z, \forall z\in\mathcal{U}$.

Luego $f(z)=\varphi_{-\beta}(\lambda\varphi_\alpha(z))$, si $|z|<1$. Esta función es holomorfa en $\mathcal{U}$, verifica que $|f(z)|\leq 1, \forall z\in\mathcal{U}$ y que $f(\alpha)=\beta$, y además $f'(\alpha)=\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$.

Luego $\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$ es el extremo superior de A, y es accesible.

Se verifica que esta función f es racional y biyectiva del disco unidad en él mismo y transforma conformemente $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$.

2.3. TEOREMA: Sea $f\in H(\mathcal{U})$ tal que $f(\mathcal{U})=\mathcal{U}$. Supongamos que f es inyectiva y sea $\alpha\in\mathcal{U}$ tal que $f(\alpha)=0$. Entonces existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $|\lambda|=1$ y $f(z)=\lambda\varphi_\alpha(z), \forall z\in\mathcal{U}$.

Demostr. Sea $g=f^{-1}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$. Siendo f inyectiva, f' no tiene ceros pues si $z_0\in\mathcal{U}$ verificase que $f'(z_0)=0$ existirían sendos entornos, uno de z_0 y otro de $f(z_0)$, tal que todo punto del entorno de $f(z_0)$ es imagen de, al menos dos puntos del entorno de z_0, en contra de que f es inyectiva. Luego f' no tiene ceros.

Además $g\in H(\mathcal{U})$ (por no tener ceros f').

Por la regla de la cadena, siendo $(g\circ f)(z)=z, \forall z$ se tiene que $(g\circ f)'(\alpha)=g'(f(\alpha))\cdot f'(\alpha)=g'(0)\cdot f'(\alpha)=1$.

Según lo probado anteriormente (para $\beta=0$) se verifica que

$$|f'(\alpha)|\leq\frac{1}{1-|\alpha|^2} \quad \text{y} \quad |g'(0)|\leq 1-|\alpha|^2.$$

Como $|g'(0)\cdot f'(\alpha)|=1$ debe ser

$$|f'(\alpha)|=\frac{1}{1-|\alpha|^2} \quad \text{y} \quad |g'(0)|=1-|\alpha|^2.$$

Puesto que f es la función para la que se alcanza la cota máxima debe ser $f=\lambda\varphi_\alpha$ con $|\lambda|=1$. c.s.q.d.