TEMA 16: EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS $H(D)$ (D abierto $\subset \mathbb{C}$)

1. $H(D)$ COMO SUBESPACIO DE $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$.

Sea D abierto en $\mathbb{C}$. Entonces $H(D)$ es un subconjunto del conjunto $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ de funciones complejas continuas definidas en D.
Recordemos que la topología natural en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ es la topología compacta-abierta (o topología de la convergencia uniforme sobre compactos). Consideremos en $H(D)$ la topología inducida por la topología compacta-abierta sobre $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$. Esta es la topología natural en $H(D)$ y, provisto de ella, $H(D)$ es un espacio metrizable.
Recordemos también (TEMA 2) que $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ es completo.
Probemos que $H(D)$ es cerrado en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ con lo cual $H(D)$ será también completo. Puesto que estamos en un espacio métrico basta probar que $H(D)$ contiene los límites de todas las sucesiones convergentes en $H(D)$. El siguiente teorema prueba algo más fuerte.

1.1 TEOREMA: Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H(D)$ y $f\in\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ tal que $\{f_n\}_n \xrightarrow[\mathcal{C}(D,\mathbb{C})]{} f$.
Entonces
i) $f\in H(D)$
ii) $\forall k\in\mathbb{N}$, $\{f_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\mathcal{C}(D,\mathbb{C})]{} f^{(k)}$.

Demostr.: i) Para probar que $f\in H(D)$ utilizaremos el teorema de Morera. Basta por dicho teorema probar que $f(z)dz$ es cerrada.
Sea $R\subset D$ un rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes. ∂R es compacto en D. Como $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre compactos de D se verifica que $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre ∂R. Por tanto

$$\left\{\int_{\partial R} f_n(z)\,dz\right\}_n \longrightarrow \int_{\partial R} f(z)\,dz.$$

Puesto que $f_n\in H(D)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ se tiene que $\int_{\partial R} f_n(z)dz=0$, $\forall n$ y, por tanto, $\int_{\partial R} f(z)dz=0$. Esto prueba que $f(z)dz$ es cerrada y, por tanto, que $f\in H(D)$.

ii) Sea $K \in \mathbb{N}$. Se trata de probar que $\{f_n^{(k)}\}_n \subset H(D)$ converge a $f^{(k)} \in H(D)$ en $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ o bien en $H(D)$ (por i)).

Basta para ello probar que $\{f_n^{(k)}\}_n$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente sobre compactos de D y para probar esto basta ver que $\{f_n^{(k)}\}_n$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente sobre bolas cerradas en D.

Consideremos entonces una bola cerrada $\overline{B}(a,r) \subset D$ y sea $r_0 > r$ tal que $\overline{B}(a,r_0) \subset D$.

Apliquemos la fórmula integral de Cauchy a la circunferencia $(\gamma) = \partial \overline{B}(a,r_0)$ recorrida una sola vez en sentido positivo.

Consideremos la función $f_n^{(k)} - f^{(k)} \in H(D)$.

Por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas (Teorema de Taylor) se tiene que

$$(f_n^{(k)} - f^{(k)})(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(f_n - f)(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi \;, \quad \forall z \in \overline{B}(a,r).$$

pues, $\forall z \in \overline{B}(a,r)$, $I(\gamma, z) = 1$.

Entonces

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{|\xi - z|^{k+1}} |d\xi| \qquad \forall z \in \overline{B}(a,r)$$

Pero $f_n(\xi) - f(\xi)$ está acotado sobre el compacto $(\gamma) = \partial \overline{B}(a,r_0)$ y $\forall \xi \in \partial(\overline{B}(a,r_0))$, $\forall z \in \overline{B}(a,r)$, $|\xi - z| \geq r_0 - r$.

Luego si $M_n = \sup\limits_{\xi \in \partial \overline{B}(a,r_0)} |f_n(\xi) - f(\xi)|$ se verifica que

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M_n}{(r_0 - r)^{k+1}} 2\pi r_0 = \frac{k!\, M_n\, r_0}{(r_0 - r)^{k+1}} \;, \quad \forall z \in \overline{B}(a,r).$$

Como $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre compactos (en particular sobre (γ)), se verifica que $\{M_n\}_n \longrightarrow 0$.

Luego $\{|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)|\}_n$ tiende a cero uniformemente en $\overline{B}(a,r)$. y por tanto $\{f_n^{(k)}\}_n$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente sobre bolas cerradas contenidas en D.

Veamos que hay convergencia uniforme sobre compactos de D. Sea K compacto $\subset D$ y sea $0 < r < d(K, \partial D)$.

Existen entonces puntos $a_1, \dots, a_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} \overline{B}(a_j, r)$

Sobre cada una de las bolas del recubrimiento finito de K anterior $\{f_n^{(k)}\}_n$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ y, por tanto, $\{f_n^{(k)}\}_n$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente sobre K. c.q.d.

1.2 COROLARIO: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$. Entonces $H(D)$ es un espacio métrico completo.

1.3. COROLARIO: Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H(D)$ y que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente sobre compactos a $f \in \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$. Entonces $f \in H(D)$ y para cada $K \in \mathbb{N}$ se verifica

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}(z), \ \forall z \in D.$$

OBSERVACION: De nuevo en este punto se observa la gran diferencia que existe entre las funciones complejas de variable compleja derivables y las funciones reales de variable real derivables. Para estas últimas no siempre es cierto que el límite uniforme de funciones derivables sea derivable (basta recordar el teorema de aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios de Weierstrass).

2. TEOREMA DE HURWITZ

2.1. TEOREMA: (de Hurwitz)

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones holomorfas en D que converge en $H(D)$ a f. Supongamos que existe una bola cerrada $\overline{B}(a,R) \subset D$ tal que $f(z) \neq 0$ si $|z-a| = R$. Entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ se verifica que f y f_n tienen el mismo número de ceros (contados con su orden de multiplicidad) en la bola abierta $B(a,R)$.

Demostr.: Siendo f holomorfa en D (como límite de una sucesión de funciones holomorfas en D) es continua en D y por tanto $|f|$ alcanza el ínfimo en el compacto $\partial\overline{B}(a,R)$. Sea

$$\delta = \min\{|f(z)| \,/\, |z-a| = R\}$$

Como $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \partial\overline{B}(a,R)$ se verifica que $\delta > 0$.

Como $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre compactos, converge en particular sobre el compacto $\partial\overline{B}(a,R)$ y por tanto si $|z-a| = R$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ entonces

$|f(z)| - |f_n(z)| \leq |f(z) - f_n(z)| < \frac{1}{2}\delta$ y por tanto $|f_n(z)| > |f(z)| - \frac{1}{2}\delta \geq \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$

y esto para cada $z \in \partial\overline{B}(a,R)$ (ν no depende de z).

Entonces si $n \geq \nu$ y $|z-a| = R$

$$\left|\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f_n(z)}\right| = \left|\frac{f_n(z) - f(z)}{f(z)\cdot f_n(z)}\right| \leq \frac{|f_n(z) - f(z)|}{\delta \cdot \frac{1}{2}\delta} = \left(\frac{1}{2}\delta^2\right)^{-1} |f_n(z) - f(z)|$$

y por tanto $\left\{\frac{1}{f_n(z)}\right\}_{n\geq\nu}$ converge a $\frac{1}{f}$ uniformemente en $\partial\overline{B}(a,R)$

Puesto que $\{f_n\}_n$ converge a f en $H(D)$ y por tanto $\{f'_n\}_n$ converge a f' en $H(D)$, es decir uniformemente sobre compactos de D y en particular en el compacto $\partial\overline{B}(a,R)$. Luego

$$\left\{\frac{f'_n}{f_n}\right\}_{n\geq\nu} \text{ converge uniformemente a } \frac{f'}{f} \text{ en } \partial\overline{B}(a,R). \quad (\mathrm{I})$$

Sea γ el camino cuya traza es $(\gamma)=\partial\overline{B}(a,R)$ y que recorre dicha traza una sola vez en sentido positivo. Entonces por (I)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz$$

Por el teorema de las aplicaciones locales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0(f)$$

donde $N_0(f)$ es el número de ceros de f encerrados por la curva (γ) contados con su orden de multiplicidad.

Luego $N_0(f)=\lim_{n\to\infty} N_0(f_n)$

Pero $N_0(f)\in\mathbb{N}$ y $N_0(f_n)\in\mathbb{N}$, $\forall n$. Luego existe $\nu'\geq\nu$ tal que $N_0(f_n)=N_0(f)$, $\forall n\geq\nu'$. csqd.

Sin embargo, se suele denominar teorema de Hurwitz al siguiente

22. COROLARIO: Sea D una región (abierto y conexo) de $\mathbb{C}$. Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset H(D)$ converge a f en $H(D)$. Entonces si f_n no tiene ceros en D, $\forall n\in\mathbb{N}$, se verifica que o f es idénticamente nula o f no tiene ceros en D.

Demostr.: Supongamos que existe $a\in D$ tal que $f(a)=0$ y probemos que $f\equiv 0$, con lo cual quedará probada la tesis.

Si fuese $f\not\equiv 0$, siendo D un abierto conexo, los ceros de f son aislados. En particular, a es aislado.

Existe entonces $R>0$ tal que $\overline{B}(a,R)\subset D$ y $f(z)\neq 0$ si $|z-a|=R$.

Por el teorema anterior existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que $N_0(f)=N_0(f_n)$, $\forall n\geq\nu$ donde $N_0(f)$ es el número de ceros en $B(a,R)$.

Hemos llegado ya a una contradicción pues $N_0(f)\geq 1$ (a es un cero de f) y por hipótesis $N_0(f_n)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Luego si f tiene un cero en D es idénticamente nula. csqd.