TEMA 17: EL TEOREMA DE MONTEL.

1. INTRODUCCION: TEOREMA DE ASCOLI-ARZELA.

Recordemos que un subconjunto X de un espacio métrico es relativamente compacto si, y solo si, $\overline{X}$ es compacto, si y solo si toda sucesión en X posee una subsucesión convergente. Además, X es compacto si, y solo si, es completo y totalmente acotado.

En un espacio métrico completo, un conjunto es relativamente compacto si, y solo si, es totalmente acotado.

Si D es un abierto de $\mathbb{C}$ y M es un espacio métrico completo entonces $\mathcal{C}(D,M)$ es un espacio métrico completo, y se verifica

1) $[X\subset \mathcal{C}(D,M)$ es relativamente compacto$] \Leftrightarrow [$toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente$]$.

2) $[X\subset \mathcal{C}(D,M)$ es relativamente compacto$] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\forall K \text{ compacto} \subset D, \forall \delta>0, \exists f_1,\dots,f_n\in X / \forall f\in X, \exists j\in\{1,\dots,n\} / \sup\{d(f(z),f_j(z)) / z\in K\}<\delta]$

Nos proponemos estudiar los conjuntos relativamente compactos de $H(D)$, o con un lenguaje más clásico, las familias normales en $H(D)$. Siendo $H(D)$ un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$, $X\subset H(D)$ es relativamente compacto si, y solo si, lo es en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$.

DEFINICION: (Equicontinuidad)

i) Un conjunto $X\subset \mathcal{C}(D,M)$ es equicontinuo en un punto $z_0\in D$ si $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / \underset{z\in D}{|z-z_0|<\delta} \Rightarrow d(f(z),f(z_0))<\varepsilon, \forall f\in X$.

ii) Un conjunto $X\subset \mathcal{C}(D,M)$ es equicontinuo en un conjunto $C\subset D$ si $\forall \varepsilon>0, \exists\delta>0 / \underset{z,z'\in C}{|z-z'|<\delta} \Rightarrow d(f(z),f(z'))<\varepsilon, \forall f\in X$.

Es fácil comprobar que $X\subset\mathcal{C}(D,M)$ es equicontinuo en cada punto de D si, y solo si, lo es en cada compacto de D.

1.1. LEMA: Sea M un espacio métrico completo y $\{a_{h,k}\}_{h\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}}\subset M$. Supongamos que para cada $h\in\mathbb{N}$, $\{a_{h,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto. Existe entonces una sucesión en $\mathbb{N}$, $k_1<k_2<\dots<k_j<\dots$, de forma que $\forall h\in\mathbb{N}$, $\{a_{h,k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Demostr.: Sea $I_0 = \mathbb{N}$. Siendo $\{a_{1,k}\}_{k\in I_0}$ relativamente compacto existe una subsucesión convergente, es decir existe un conjunto infinito $I_1 \subset I_0$ tal que $\{a_{1,k}\}_{k\in I_1}$ es convergente.

La sucesión $\{a_{2,k}\}_{k\in I_1}$ es relativamente compacta como subconjunto de $\{a_{2,k}\}_{k\in I_0}$. Existe entonces un conjunto infinito $I_2 \subset I_1$ tal que $\{a_{2,k}\}_{k\in I_2}$ es convergente.

Procediendo de esta forma obtenemos una colección numerable de subconjuntos de $\mathbb{N}$

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

de forma que para cada $h\in\mathbb{N}$ la sucesión $\{a_{h,k}\}_{k\in I_h}$ es convergente.

Sea $k_1 \in I_1$, $k_2\in I_2$ tal que $k_2>k_1$, ..., $k_n\in I_n$ tal que $k_n > k_{n-1}$, ...

Para cada $h\in\mathbb{N}$ la sucesión

$$\{a_{h,k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \qquad (1)$$

es convergente pues fijo $h\in\mathbb{N}$ se verifica que $k_j\in I_h$, $\forall j\geq h$ y por tanto, a partir del término h (1) es una subsucesión de $\{a_{h,k}\}_{k\in I_h}$ que es convergente. csqd.

1.2 LEMA: Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(D,M)$ y supongamos que es equicontinua en cada punto de D. Sea $G\subset D$ una parte densa de D. Si $\forall z\in G$, $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces $\{f_n(z)\}_n$ converge para todo $z\in D$.

Demostr.: Sea $z_0\in D$ y probemos que $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Fijo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $z\in B(z_0,\delta)$ entonces $d(f_n(z), f_n(z_0)) < \varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$ por ser $\{f_n\}_n$ equicontinua en cada punto de D.

Siendo G denso en D, $G\cap B(z_0,\delta)\neq\emptyset$. Sea $z\in G\cap B(z_0,\delta)$.

Puesto que $\{f_n(z)\}_n$ converge (pues $z\in G$), $\{f_n(z)\}_n$ es de Cauchy y por tanto existe $n'\in\mathbb{N}$ tal que $d(f_{n_1}(z), f_{n_2}(z))<\varepsilon$ si $n_1,n_2\geq n'$.

Entonces si $n_1,n_2\geq n'$

$$d(f_{n_1}(z_0), f_{n_2}(z_0)) \leq d(f_{n_1}(z_0), f_{n_1}(z)) + d(f_{n_1}(z), f_{n_2}(z)) + d(f_{n_2}(z), f_{n_2}(z_0)) \leq 3\varepsilon$$

Luego $\{f_n(z_0)\}_n$ es una sucesión de Cauchy en M y, por tanto, convergente por ser M completo. csqd.

1.3 LEMA: Sea $\{z_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en D y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(D,M)$ una sucesión equicontinua en cada punto de D. Si para cada $h\in\mathbb{N}$ la sucesión $\{f_n(z_h)\}_n$ es relativamente compacta entonces existen $n_1<n_2<\ldots<n_j<\ldots$ tal que para cada $z\in D$ la sucesión $\{f_{n_j}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Demostr.: En virtud del 1.1 LEMA para $\{f_n(z_h)\}_{n,h\in\mathbb{N}} \subset M$, existen $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$ tal que $\forall h\in\mathbb{N}$, $\{f_{n_j}(z_h)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Como $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en cada punto de D.

Por el 1.2. LEMA se verifica que $\{f_{n_j}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, $\forall z\in D$. c.s.q.d.

1.4. TEOREMA: (de Ascoli-Arzela).

Un subconjunto X de $\mathcal{C}(D,M)$ es relativamente compacto si, y solo si, son ciertas las proposiciones

i) $\forall z\in D$, $\{f(z) / f\in X\}$ es relativamente compacto en M.

ii) X es equicontinuo en cada punto de D.

Demostr.: $\Rightarrow$ i) Sea $z\in D$. Consideremos la aplicación

$$\varphi_z = f\in \mathcal{C}(D,M) \longmapsto \varphi_z(f) = f(z)\in M$$

Veamos que φ_z es continua.

Basta ver que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(D,M)$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{C}(D,M)$, entonces $\{\varphi_z(f_n)\}_n$ converge a $\varphi_z(f)$ en M.

En estas hipótesis, $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre compactos de D, y en particular, converge a f puntualmente. Luego $\{f_n(z)\}_n$ converge a $f(z)$ en M.

En definitiva, φ_z es continua.

Como $\overline{X}$ es compacto en $\mathcal{C}(D,M)$, $\varphi_z(\overline{X})$ es compacto en M por ser φ_z continua, es decir $\{f(z) / f\in\overline{X}\}$ es compacto en M.

Puesto que $\{f(z) / f\in X\} \subset \{f(z) / f\in\overline{X}\}$, se deduce que $\{f(z), f\in X\}$ es relativamente compacto.

ii) Sea $z_0\in D$ y probemos que X es equicontinuo en z_0.

Consideremos una bola cerrada $\overline{B}(z_0,R)\subset D$. Entonces $K=\overline{B}(z_0,R)$ es compacto. Dado $\varepsilon>0$, siendo X relativamente compacto en $\mathcal{C}(D,M)$ existen $f_1,\dots,f_n\in X$ tal que para cada $f\in X$ existe $j\in\{1,\dots,n\}$ de forma que

$$\sup\{d(f(z), f_j(z)) / z\in K\} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Siendo $f_1,\dots,f_n$ continuas en z_0, $\{f_1,\dots,f_n\}$ es equicontinua en z_0 y por tanto

$$\exists\delta>0\ (\delta<R) / |z-z_0|<\delta \Rightarrow d(f_j(z), f_j(z_0)) \le \frac{\varepsilon}{3}, \forall j\in\{1,\dots,n\}.$$

Entonces dado $f\in X$, sea $j\in\{1,\dots,n\}$ tal que

$$\sup\{d(f(z), f_j(z)) / z\in K\} \le \varepsilon/3$$

Si $|z-z_0|<\delta$ entonces $z\in K$ y por tanto

$$d(f(z),f(z_0)) \le d(f(z),f_j(z)) + d(f_j(z),f_j(z_0)) + d(f_j(z_0),f(z_0)) \le \varepsilon$$

lo que prueba que X es equicontinuo en z_0 (δ no depende de f).

$\Leftarrow$| Supongamos que $X \subset \mathcal{C}(D,M)$ verifica i) e ii). Veamos que X es relativamente compacto. Basta probar que si $\{f_n\}_n$ es una sucesión en X entonces admite una subsucesión convergente.

Puesto que $\mathbb{C}$ es separable (admite un subconjunto denso numerable) también lo es D. Existe entonces una sucesión $\{z_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ densa en D.

Por i), $\forall h\in\mathbb{N}$, $\{f_n(z_h)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto en M. Siendo X equicontinuo en cada punto de D (ii)) $\{f_n\}_n$ es equicontinua en cada punto de D. Por el LEMA 1.3 existe una sucesión $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$ tal que para cada $z\in D$ $\{f_{n_j}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge en M. Definimos para cada $z\in D$

$$f(z) = \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(z).$$

Veamos que $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente sobre compactos de D. Denotaremos por $\{f_n\}_n$ la subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Sean K compacto $\subset D$ y $\varepsilon>0$. Por equicontinuidad de $\{f_n\}_n$, para cada $z\in K$ existe una bola de centro z, $B(z)\subset D$ de forma que $d(f_n(\xi), f_n(z)) < \varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall \xi\in B(z)$.

$\{B(z)\}_{z\in K}$ es un recubrimiento abierto de K. Siendo K compacto existen $z_1,\dots,z_n\in K$ tales que $K\subset B(z_1)\cup\dots\cup B(z_n)$.

Se verifica entonces que

$$d(f_n(z), f_n(z_j)) < \varepsilon, \ \forall n\in\mathbb{N}, \ \forall z\in B(z_j) \ (j=1,\dots,n) \quad (\mathrm{I})$$

Por otra parte, para cada $j\in\{1,\dots,n\}$ existe $n'(j)$ tal que $n\ge n'(j)$ entonces $d(f_n(z_j), f(z_j)) < \varepsilon$

Sea $n' = \max_{j=1,\dots,n} n'(j)$. Entonces si $n\ge n'$ y $z\in K$, existe $j\in\{1,\dots,n\}$ tal que $z\in B(z_j)$ y por tanto

$$d(f_n(z), f(z)) \le d(f_n(z), f_n(z_j)) + d(f_n(z_j), f(z_j)) + d(f(z_j), f(z)) \le 3\varepsilon$$

pues si en (I) tomamos límite (puntual) cuando $n\to\infty$ se deduce que

$$d(f(z), f(z_j)) < \varepsilon, \ \forall z\in B(z_j).$$

Luego $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre compactos de D.

2. TEOREMA DE MONTEL

2.1. TEOREMA: (de Montel)

Sea D abierto de $\mathbb{C}$. Entonces $X \subset H(D)$ es relativamente compacto si, y sólo si, para cada compacto $K \subset D$ se verifica que
$$\sup_{\substack{z\in K\\ f\in X}} |f(z)| < +\infty .$$

Demostr.: $\Rightarrow$| Para probar esta implicación no es necesario utilizar que los elementos de X son funciones holomorfas en D. Basta considerar $X \subset \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$.

Si X es relativamente compacto, es totalmente acotado y, por tanto, para cada compacto $K \subset D$ y cada $\varepsilon > 0$ existen $f_1, \dots, f_n \in X$ tales que $\forall f \in X$, $\exists j \in \{1, \dots, n\} / \sup_{z\in K} |f(z) - f_j(z)| < \varepsilon$.

Puesto que f_j es continua, $M_j = \sup_{z\in K} |f_j(z)| < +\infty$.

Sea $M = \max\{M_j + \varepsilon / j = 1, \dots, n\}$. Entonces
$$\sup_{\substack{z\in K\\ f\in X}} |f(z)| \leq M < +\infty$$
pues dado $f \in X$, $\exists j \in \{1, \dots, n\} / |f(z)| \leq |f(z) - f_j(z)| + |f_j(z)| \leq \varepsilon + M_j \leq M$ y esto para todo $z \in K$.

$\Leftarrow$| Veamos que se cumplen las proposiciones i) e ii) del teorema de Ascoli-Arzela, con lo cual X será relativamente compacto.

i) Si $z \in D$, $\{f(z) / f \in X\}$ es acotado en $\mathbb{C}$ y, por tanto, relativamente compacto en $\mathbb{C}$: basta aplicar la hipótesis al compacto $K = \{z\}$.

ii) Veamos que X es equicontinuo en cada punto de D.

Sean $z_0 \in D$ y $\varepsilon > 0$.

Sea $r > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, r) \subset D$. Aplicando la hipótesis al compacto $\overline{B}(z_0, r)$ se tiene que
$$\exists M > 0 / |f(z)| \leq M, \ \forall z \in \overline{B}(z_0, r), \ \forall f \in X$$
Consideremos la curva $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi[$ ((γ) es la frontera de $\overline{B}(z_0, r)$). Entonces si $z \in \overline{B}(z_0, \frac{r}{2})$, por la fórmula integral de Cauchy (*)
$$|f(z_0) - f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{(z_0 - z) f(\xi)}{(\xi - z_0)(\xi - z)} d\xi \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|z - z_0| \cdot |f(\xi)|}{|\xi - z_0| \cdot |\xi - z|} |d\xi|. \quad (I)$$

La última desigualdad es cierta por ser γ un camino rectificable.

Pero si $\xi \in (\gamma)$, $|\xi - z_0| = r$ y para $z \in \overline{B}(z_0, \frac{r}{2})$, $|\xi - z| \geq \frac{r}{2}$

Luego

$$|f(z_0) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{2|f(\xi)| \cdot |z - z_0|}{r^2} |d\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2M \, 2\pi r \, |z - z_0|}{r^2} = \frac{2M|z - z_0|}{r}$$

Elegimos $\delta > 0$ de forma que $\delta < \min\{\frac{r}{2}, \frac{r\varepsilon}{2M}\}$. Entonces si $|z - z_0| < \delta$ se tiene que $z \in \overline{B}(z_0, \frac{r}{2})$ y además

$$|f(z_0) - f(z)| \leq \frac{2M\delta}{r} \leq \frac{2M \frac{r\varepsilon}{2M}}{r} = \varepsilon.$$

Luego X es equicontinuo.

En definitiva, X es relativamente compacto. c.s.q.d.

OBSERVACION: El teorema de Montel asegura que $H(D)$ es un espacio semi-Montel. Puesto que además $H(D)$ es un espacio de Fréchet, es tonelado y, por tanto, $H(D)$ es un espacio de Montel. En $H(D)$, los compactos son los conjuntos cerrados y acotados.

DEFINICION: Se dice que $X \subset H(D)$ es localmente acotado si para cada $z_0 \in D$ existen $M > 0$ y $r > 0$ de forma que

$$|f(z)| \leq M, \; \forall z \in B(z_0, r), \; \forall f \in X.$$

Es fácil probar que $X \subset H(D)$ es localmente acotado si, y sólo si, para cada compacto $K \subset D$ existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in K$, $\forall f \in X$.

Entonces el teorema de Montel se puede enunciar en un lenguaje más clásico como sigue

2.2. COROLARIO: $X \subset H(D)$ es relativamente compacto, si y sólo si, X es localmente acotado.