TEMA 18: SERIES DE LAURENT. DESARROLLO DE UNA FUNCION HOLOMORFA EN UNA CORONA. TEOREMA DE RIEMANN (DE LA SINGULARIDAD EVITABLE).

1. SERIES DE LAURENT.

Consideraremos series de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \quad , \quad a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Convendremos en que $\sum_{n=-\infty}^{m-1} a_n = \sum_{-m+1}^{+\infty} a_{-n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

DEFINICION: Diremos que la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n$ es convergente si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que son convergentes las series $\sum_{-\infty}^{m-1} a_n = \sum_{-m+1}^{+\infty} a_{-n}$ y $\sum_{m}^{+\infty} a_n$.

Es fácil comprobar que la definición anterior es independiente de m, es decir si existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que son convergentes las series $\sum_{-\infty}^{m_0-1} a_n$ y $\sum_{m_0}^{+\infty} a_n$, entonces para cada $m \in \mathbb{Z}$ son convergentes las series

$$\sum_{-\infty}^{m-1} a_n \quad y \quad \sum_{m}^{+\infty} a_n$$

Consideraremos siempre $m=0$.

Se utiliza a veces la notación $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n = \lim_{\substack{p \to +\infty \\ q \to +\infty}} \sum_{-q}^{p} a_n$.

Análogamente se pueden definir series de Laurent funcionales.

Nos interesa en particular el estudio de las series de potencia de Laurent:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{con } z, z_0 \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Para estudiar la convergencia de esta serie de potencias hemos de estudiar la convergencia de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad y \quad \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se le llama la parte regular de la serie y a $\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ se le llama la parte singular de la serie

Sea $r_2 = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ (entendiendo que $r_2 = 0$ si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ y $r_2 = +\infty$ si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$). Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge si $|z-z_0| < r_2$ y diverge si $|z-z_0| > r_2$.

La convergencia de la parte singular se estudiará para $z \neq z_0$.

La parte singular es

$$\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{1}^{+\infty} a_{-n}\xi^n$$

donde $\xi = \dfrac{1}{z-z_0}$.

Sea $r_1' = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_{-n}|}}$. Entonces $\sum_{1}^{+\infty} a_{-n}\xi^n$ converge si $|\xi| < r_1'$ y diverge si $|\xi| > r_1'$. Por tanto, $\sum_{1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ converge si $|z-z_0| > \dfrac{1}{r_1'}$ y diverge si $|z-z_0| < \dfrac{1}{r_1'}$.

Sea $r_1 = \dfrac{1}{r_1'}$. Se verifica entonces

i) Si $r_1 > r_2$ entonces $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ diverge, $\forall z \in \mathbb{C}$.

ii) Si $r_1 = r_2$, entonces la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ diverge si $|z-z_0| \neq r_1 = r_2$, y nada se puede asegurar en principio si $|z-z_0| = r_1 = r_2$.

iii) Si $r_1 < r_2$, la serie converge en la corona $\{z \in \mathbb{C} / r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ y la convergencia es uniforme sobre compactos, y es divergente en $\{z / |z-z_0| < r_1\}$ y $\{z / |z-z_0| > r_2\}$.

OBSERVACION: La demostración de i), ii) e iii) es trivial. Puede darse el caso de que $r_1 = 0$ y $r_2 = +\infty$; en este caso la corona de convergencia es todo el plano excepto un punto. Debe notarse que el cambio $\xi = \dfrac{1}{z-z_0}$ transforma compactos en compactos.

1.1. PROPOSICION: Si $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en la corona $r_1 < |z-z_0| < r_2$ entonces dicha serie define una función holomorfa en esta corona.

Demostr.: Basta observar que $a_n(z-z_0)^n$ es holomorfa en la corona, $\forall n \in \mathbb{Z}$ y que la convergencia de la serie es uniforme sobre compactos de dicha corona. ▨

1.2. COROLARIO: La serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ se puede derivar término a término en su corona de convergencia, es decir, si $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ en $r_1 < |z-z_0| < r_2$ entonces $f'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ si $r_1 < |z-z_0| < r_2$.

Demostr.: Denotemos $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ si $|z-z_0|<r_2$ y
$f_2(z)=\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ si $|z-z_0|>r_1$

Entonces $f_1'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ si $|z-z_0|<r_2$.

Además, por COROLARIO 1.3. (TEMA 16), siendo $a_n(z-z_0)^n$, $\forall n\le -1$ holomorfa en $|z-z_0|>r_1$ se tiene que

$$f_2'(z)=\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\left[(z-z_0)^{-1}\right]^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}\left[(z-z_0)^{-1}\right]^{n-1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}(z-z_0)^{-n+1}\cdot\frac{-1}{(z-z_0)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-n)a_{-n}(z-z_0)^{-n-1}=\sum_{-\infty}^{-1} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

Luego $f'(z)=f_1'(z)+f_2'(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ csqd.

La serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ se llama serie de Laurent en su corona de convergencia $r_1<|z-z_0|<r_2$.

1.3. TEOREMA: (Desarrollo en serie de Laurent de una función holomorfa en una corona)

Sean r_1, r_2 números reales tales que $0\le r_1<r_2\le+\infty$ y supongamos que f es holomorfa en la corona $\{z\in\mathbb{C}/\ r_1<|z-z_0|<r_2\}$. Entonces f es desarrollable en serie de Laurent en dicha corona, es decir existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ de forma que

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{si } r_1<|z-z_0|<r_2$$

Además los coeficientes $a_n\in\mathbb{C}$ están unívocamente determinados.

Demostr: Basta probar que f es límite puntual de una serie de Laurent en la corona $r_1<|z-z_0|<r_2$, pues dicha serie ya convergerá uniformemente sobre compactos de la corona.

Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que $r_1<|z-z_0|<r_2$. Existen entonces r_1' y r_2' tales que $r_1<r_1'<|z-z_0|<r_2'<r_2$.

Sean C_1' y C_2' las circunferencias de centro z_0 y radios r_1' y r_2', recorridas una sola vez en sentido positivo. Consideremos un diámetro que no pase por el punto z.

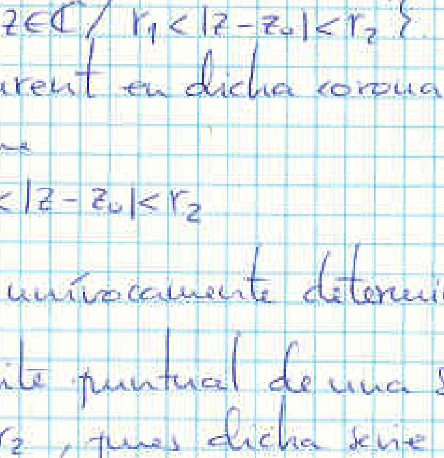


Fig. 1

Denotemos por γ_1 y γ_2 los caminos determinados por C_1', C_2' y los segmentos del diámetro anterior que están dentro de la corona que determinan C_1 y C_2', y orientados de forma que tengan la misma orientación que C_2 en el arco que tienen en común. (γ_1) y (γ_2) encierran dominios simplemente conexos D_1 y D_2. Supongamos que $z \in D_1$. Entonces $I(\gamma_1, z) = 1$, pues γ_1 es homótopa, como curva cerrada, a una circunferencia de centro z recorrida una sola vez en sentido positivo, y $I(\gamma_2, z) = 0$, pues z es un punto de la componente conexa no acotada de $(\gamma_2)^c$, que es $\complement \overline{D}_2$. Además γ_1 y γ_2 son homótopas como curvas cerradas a un punto en la corona $r_1 < |z - z_0| < r_2$. (*)

Por la fórmula integral de Cauchy

$$I(\gamma_1, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{y} \quad I(\gamma_2, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Pero $I(\gamma_1, z) = 1$, $I(\gamma_2, z) = 0$. Luego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{y} \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Teniendo en cuenta esto, y que las integrales de $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ a lo largo de los arcos de γ_1 y γ_2 correspondientes al diámetro se anulan (Fig. 1) se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Sea $M_2' > 0$ tal que $|f(\xi)| \leq M_2'$, $\forall \xi \in (C_2')$. Entonces como

$$\forall \xi \in (C_2'), \quad \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

y $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$ pues $|z - z_0| < r_2' = |\xi - z_0|$ se tiene que

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \quad \text{pues} \quad \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$$

Luego $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ está mayorado uniformemente en $\xi \in (C_2')$ por la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_2'}{r_2'} \left(\frac{|z - z_0|}{r_2'} \right)^n$, y esta serie es convergente pues M_2' y r_2' son constantes y $\frac{|z - z_0|}{r_2'} < 1$.

Por tanto $\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$ se puede integrar término a término a lo largo de C_2', y en consecuencia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2'} \left(\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right) d\xi = \sum a_n (z - z_0)^n$$

(*) Ver la observación al final de la demostración.

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2'} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, $\forall n \geq 0$.

Por otra parte, si $\xi \in (C_1')$ se tiene que $z \neq \xi$ pues $|z-z_0| > r_1' = |\xi - z_0|$ y también

$$-\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(z-z_0)-(\xi - z_0)} = \frac{f(\xi)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi - z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(z-z_0)^{n+1}}(\xi - z_0)^n$$

Si $M_1' = \sup_{\xi\in(C_1')}|f(\xi)|$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(z-z_0)^{n+1}}(\xi-z_0)^n$ está mayorada por $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_1'}{r_1'}\left(\frac{r_1'}{|z-z_0|}\right)^{n+1}$, serie que es convergente pues $r_1' < |z-z_0|$ y no depende de ξ. Luego $-\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ está uniformemente acotada en (C_1') (respecto de ξ).

Por tanto, integrando término a término

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1'}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1'} f(\xi)(\xi - z_0)^n (z-z_0)^{-n-1} d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n-1}$$

donde $b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1'} f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi$, $\forall n \geq 0$.

Definimos $a_{-n-1} = b_n$ si $n \geq 0$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2'}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1'}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{-\infty}^{-1} a_m (z-z_0)^m = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ si } r_1' < |z-z_0| < r_2',$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2'}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi \text{ si } n \geq 0 \quad \text{y} \quad a_n = b_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1'}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi \text{ si } n \leq -1$$

En principio, los coeficientes a_n dependen de r_1' y r_2'. Veamos que realmente no es así.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ la función $\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ es holomorfa en la corona $\{\xi \in \mathbb{C} / r_1 < |\xi - z_0| < r_2\}$ como cociente de funciones holomorfas en dicha corona. Por el teorema de Morera la forma diferencial $f(\xi)/(\xi - z_0)^{n+1} d\xi$ es cerrada en dicha corona. Además, si $r \in]r_1, r_2[$ las circunferencias C_1', C_2', C_r son homótopas como curvas cerradas en dicha corona y por tanto

$$\int_{C_1'}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi = \int_{C_2'}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi = \int_{C_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi, \quad \forall r \in]r_1, r_2[$$

Luego los coeficientes a_n no dependen ni de r_1', ni de r_2'.

la construcción que se ha hecho de ellos (no depende del diámetro elegido).

Hemos visto que f es desarrollable en serie de Laurent en la corona $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Veamos que dicho desarrollo es único. Supongamos que

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \quad \text{si } r_1 < |z - z_0| < r_2 \qquad (1)$$

Entonces dicha serie converge a f uniformemente sobre compactos de la corona. Sabemos que si $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre compactos en un cierto abierto y g es acotada en compactos de dicho abierto, entonces $\{g \cdot f_n\}_n$ converge a $g \cdot f$ uniformemente sobre compactos de ese abierto.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, la función $\frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}$ es acotada sobre cada compacto de la corona $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Luego se deduce de esto y de (1) que $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu (z - z_0)^{\nu - n - 1}$ converge a $\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ uniformemente sobre compactos de la corona $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Por tanto si $r \in]r_1, r_2[$

$$\int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{C_r} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu (\xi - z_0)^{\nu - n - 1} d\xi = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu \int_{C_r} (\xi - z_0)^{\nu - n - 1} d\xi$$

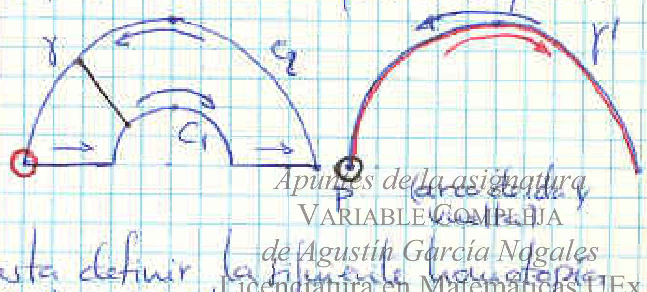
Pero $\int_{C_r} (\xi - z_0)^{\nu - n - 1} d\xi = \begin{cases} = 0 & \text{si } \nu \neq n \\ = 2\pi i & \text{si } \nu = n \end{cases}$

Luego $\int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = 2\pi i \cdot a_n$, y por tanto

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi. \qquad \text{csqd.}$$

<u>OBSERVACIONES</u>: ① Una función holomorfa en un disco es desarrollable en serie de Taylor, y en una corona es desarrollable en serie de Laurent. Observar la analogía de forma de los coeficientes de los desarrollos de Taylor y de Laurent.

② En la demostración se dijo que γ_1 y γ_2 son homótopas a un punto en la corona. Las curvas γ y γ' son homótopas como curvas cerradas sin más que hacer una combinación lineal convexa entre las semicircunferencias C_1 y C_2 (punto a punto). Luego basta definir la siguiente homotopía entre (γ') y el punto P:



$$H(t, u) = \begin{cases} \gamma'(t(1-u)) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma'((1-t)(1-u)) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$u \in I$ lo que

geométricamente equivale a considerar arcos de circunferencia de ida y vuelta de la forma

14. COROLARIO: Supongamos que f es holomorfa en la corona $r_1<|z-z_0|<r_2$. Sea, para cada $r\in]r_1,r_2[$, $M(r)=\max\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)|$. Entonces los coeficientes del desarrollo de Laurent verifican que

$$|a_n|\leq \frac{M(r)}{r^n}\quad , \ \forall n\in\mathbb{Z}$$

Demostr.: $\forall n\in\mathbb{Z}$, $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$. Luego

$$|a_n|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z_0|^{n+1}}|d\xi|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{M(r)}{r^n}\ ,\ \forall r\in]r_1,r_2[\ \text{c.q.d.}$$

2. TEOREMA DE RIEMANN DE LA SINGULARIDAD EVITABLE.

2.1. TEOREMA: (de Riemann)

Supongamos que f es una función holomorfa en $B(z_0,r_2)\setminus\{z_0\}$ y que $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$. Entonces f admite un desarrollo de Taylor de la forma $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ para $0<|z-z_0|<r_2$, y por tanto se puede prolongar f a una función holomorfa en $B(z_0,r_2)$ definiendo $f(z_0)=a_0$.

Demostr.: Sabemos que f admite en $0<|z-z_0|<r_2$ un desarrollo de Laurent $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$. Probemos que $a_n=0$ si $n\leq -1$.

Por hipótesis $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$ y, por tanto, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / \underset{z\in B(z_0,\delta)}{0<|z-z_0|<\delta}\Rightarrow |(z-z_0)f(z)|<\varepsilon$.

y por tanto $|f(z)|<\frac{\varepsilon}{|z-z_0|}$ si $0<|z-z_0|<\delta$.

Si $r\in]0,\delta[$ entonces $M(r)=\sup\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)|\leq\frac{\varepsilon}{r}$.

Del corolario 1.14 se deduce que $|a_n|\leq\frac{M(r)}{r^n}\leq\frac{\varepsilon}{r^{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\forall r\in]0,\delta[$.

Si $n=-1$ entonces $|a_{-1}|\leq\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$ y por tanto $a_{-1}=0$.

Si $n<-1$, se deduce que $|a_n|\leq\varepsilon\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{r^{n+1}}=0$, y por tanto $a_n=0$, $\forall n\leq -1$. ■

2.2. COROLARIO: Sea D abierto y $D'=D\setminus\{z_j/j=1,\dots,n\}$. Si $f\in H(D')$ entonces f admite una extensión holomorfa a D si, y sólo si, se verifica que $\lim\limits_{z\to z_j}(z-z_j)f(z)=0$, $\forall j\in\{1,\dots,n\}$.

OBSERVACIONES: ① El teorema de Riemann no dice más que z_0 es una singularidad evitable para f. En el siguiente tema se estudian las singularidades.

② El corolario 2.2. sigue siendo cierto si D' es D excepto un conjunto de puntos sin punto de acumulación.