# TEMA 19: SINGULARIDADES AISLADAS. TEOREMA DE CASORATTI-WEIERSTRAS. FUNCIONES MEROMORFAS.

## 1. SINGULARIDADES AISLADAS.

DEFINICIONES: Sea $f$ una función holomorfa en la bola sin su centro $0<|z-z_0|<r$, y sea $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ si $0<|z-z_0|<r$ su desarrollo de Laurent. Se dice que $z_0$ es un PUNTO REGULAR de $f$ si $a_n=0$, $\forall n\leq -1$ y $f(z_0)=a_0$ (lo que equivale a que $f$ sea holomorfa en $B(z_0,r)$).

Se dice que $z_0$ es una SINGULARIDAD EVITABLE si $a_n=0$, $\forall n<0$ y $f$ ó no está definida en $z_0$ ó $f(z_0)\neq a_0$. (*)

Se dice que $z_0$ es un **POLO** de orden $h\in\mathbb{N}^*$ si $a_n=0$, $\forall n<-h$ y $a_{-h}\neq 0$.

Se dice que $z_0$ es una SINGULARIDAD ESENCIAL si existen infinitos coeficientes $a_n$ no nulos con subíndice $n$ negativo.

Se dice que $z_0$ es una SINGULARIDAD AISLADA si es una singularidad evitable ó un polo ó una singularidad esencial de $f$.

Existen otros tipos de singularidades, además de las aisladas, como puede ser un punto de acumulación de singularidades aisladas.

DEFINICION: (Residuo de una función holomorfa en uno de sus polos o sing. esencial).
Si $f$ tiene un polo o una singularidad esencial en el punto $z_0$ entonces a $a_{-1}$ se le llama residuo de $f$ en $z_0$ y se denota $Re(f,z_0)$.

1.1. PROPOSICION: Sea $f\in H(B(z_0,r)\setminus\{z_0\})$. Entonces

① $f$ tiene un polo de orden $h$ en $z_0$ si, y solo si, la función $g(z)=(z-z_0)^h f(z)$ es holomorfa en un entorno reducido de $z_0$ y $\lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0$.

② Si $z_0$ es un polo de orden $h'$ de $f$ y un polo de orden $h''$ de $g$ entonces $f\cdot g$ tiene un polo de orden $h'+h''$ en $z_0$.

Demostr.: ① Del desarrollo de Laurent de $f$ se obtiene multiplicando por $(z-z_0)^h$ un desarrollo de Taylor de $g$ en un entorno reducido y además $\lim_{z\to z_0} g(z)=a_{-h}\neq 0$. El recíproco es análogo.

(*) En este caso $z_0$ se convierte en un punto regular sin más que definir (redefinir) $f(z_0)=a_0$.

② Trivial ▨

**1.2. PROPOSICION:** La función $f$ tiene un cero de orden $h$ en $z_0$ si, y solo si, $1/f$ tiene un polo de orden $h$ en $z_0$.

Demostr.: $f$ tiene un cero de orden $h$ en $z_0$ si y solo si existe una función $g$ holomorfa en un entorno de $z_0$ tal que $f(z)=(z-z_0)^h g(z)$ y $g(z_0)\neq 0$. Entonces en un entorno reducido de $z_0$ se puede escribir

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^h}\cdot\frac{1}{g(z)} \quad \text{y} \quad \lim_{z\to z_0}\frac{1}{g(z)}\neq 0,$$

lo que significa que $1/f$ tiene un polo de orden $h$ en $z_0$. csqd

**1.3. PROPOSICION:** Si $f$ tiene un polo de orden $h$ en $z_0$ entonces el residuo de $f$ en $z_0$ es

$$\mathrm{Re}(f,z_0)=\frac{1}{(h-1)!}\lim_{z\to z_0} D^{(h-1)}\left[(z-z_0)^h f(z)\right].$$

Demostr.: Puesto que $f$ tiene un polo de orden $h$ en $z_0$, admite en un entorno reducido de $z_0$ un desarrollo de Laurent del tipo

$$f(z)=\frac{a_{-h}}{(z-z_0)^h}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad \text{y} \quad a_{-h}\neq 0.$$

Entonces, en dicho entorno reducido de $z_0$

$$(z-z_0)^h f(z)=a_{-h}+a_{-h+1}(z-z_0)+\dots+a_{-1}(z-z_0)^{h-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+h}$$

con lo cual

$$\mathrm{Re}(f,z_0)=a_{-1}=\frac{1}{(h-1)!}\lim_{z\to z_0}D^{h-1}\left[(z-z_0)^h f(z)\right]. \quad \text{csqd}$$

**OBSERVACIONES:** ① Para estudiar la singularidad $z_0$ de $f$ se desarrolla $f$ en el disco sin su centro $0<|z-z_0|<r$, sin que importe que $r$ elijamos en $]0,r_2[$

② (singularidad aislada en $\infty$). Supongamos que una función $f$ admite un desarrollo de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ en el exterior de una bola $0\leq r_1<|z-z_0|<r_2=+\infty$. Entonces la parte regular $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ converge en todo el plano (se trata, por tanto, de una función entera). Además la parte singular $\sum_{-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente sobre compactos de $r_1<|z-z_0|$, y define una función holomorfa en el exterior del disco $B(z_0,r_1)$. Por tanto, la serie de Laurent define una función holomorfa $f$ en un entorno reducido de $\infty$, con lo cual $\infty$ pasa a ser una singularidad aislada de $f$. Recíprocamente, si $\infty$ es una singularidad aislada de una función $f$, entonces admite un desarrollo de Laurent en el exterior de una cierta bola $\bar{B}(z_0, r_1)$. Para estudiar si $\infty$ es una singularidad aislada de $f$ no importa si $r_1$ es más grande o más pequeño. Se puede suponer entonces que la función admite en el exterior de una bola de centro $0$ un desarrollo de Laurent del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. A la vista de esto, ¿qué significará que $\infty$ sea un punto regular, o una singularidad aislada, para una función holomorfa en el exterior de una bola de centro cero? Desde luego carece de sentido hablar de derivada en $\infty$. Pero

DEFINICIONES: Sea $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ para $0 \le r < |z|$.

i) Se dice que $\infty$ es un punto regular para $f$ si $a_n = 0$, $\forall n > 0$ y $f(\infty) = a_0$.

ii) Se dice que $\infty$ es una singularidad evitable de $f$ si $a_n = 0$, $\forall n > 0$ y $f$ no está definida en $\infty$ ó $f(\infty) \neq a_0$.

iii) Se dice que $\infty$ es un polo de orden $h \in \mathbb{N}^*$ de $f$ si $a_n = 0$, $\forall n > h$ y $a_h \neq 0$.

iv) Se dice que $\infty$ es una singularidad esencial de $f$ si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} / a_n \neq 0\}$ es infinito.

Para el estudio de $f$ en el infinito, $\sum_{-\infty}^{0} a_n z^n$ pasa a ser la parte regular de la función, y $\sum_{1}^{\infty} a_n z^n$ la parte singular.

El residuo de $f$ en $\infty$ se define por

$$Re(f, \infty) = -a_{-1}$$

Ejemplo: La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa en $0 < |z|$. Se verifica que $\infty$ es una singularidad evitable de $f$ y $Re(f, \infty) = -1$. Observar que $Re(f, 0) = 1$.

OBSERVACION: Escribir $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ para $r < |z|$ equivale a escribir $f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$ en $0 < |z| < \frac{1}{r}$. Si hacemos $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ para $0 < |z| < \frac{1}{r}$ y $b_n = a_{-n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, se puede escribir $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ en $0 < |z| < \frac{1}{r}$. Luego las definiciones dadas para $f$ en $\infty$ (excepto la de residuo) se han dado así para que el estudio de $f$ en $\infty$ sea equivalente al estudio de $g$ en $0$ ($\infty$ pto regular de $f \Leftrightarrow 0$ pto regular de $g$, etc). Observar que $f(z) = \frac{1}{z}$ tiene residuo $-1$ en $\infty$ pero $f\left(\frac{1}{z}\right) = z$ no tiene residuo en $0$.

## 2. TEOREMA DE CASORATTI–WEIERSTRASS

**2.1 TEOREMA:** (de Casoratti–Weierstrass)

Sea $D$ un abierto de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in D$. Supongamos que $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ y que $z_0$ es una singularidad esencial de $f$. Entonces la imagen de cualquier entorno reducido de $z_0$ en $D$ es densa en $\mathbb{C}$.

Demostr.: Se trata de probar que si $U$ es un entorno abierto de $z_0$, $U \subset D$, y $a \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ entonces $f(U \setminus \{z_0\}) \cap B(a,\varepsilon) \neq \emptyset$, es decir, que existe $z \in U \setminus \{z_0\}$ tal que $|f(z) - a| < \varepsilon$. Supongamos que no es cierto, es decir que existe $U$ entorno abierto de $z_0$ contenido en $D$ y existen $a \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall z \in U \setminus \{z_0\}, \quad |f(z) - a| \geq \varepsilon.$$

Podemos considerar entonces la función

$$g : z \in U \setminus \{z_0\} \longmapsto g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

pues $f(z) \neq a$, $\forall z \in U \setminus \{z_0\}$. Luego $g$ es holomorfa en el abierto $U \setminus \{z_0\}$.

Además

$$\forall z \in U \setminus \{z_0\}, \quad 0 < |g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Luego $g$ es acotada en $U \setminus \{z_0\}$ y, por tanto, $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) g(z) = 0$

En resumen: $g$ es holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$ y $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) g(z) = 0$.

Por el teorema de Riemann de la singularidad evitable se verifica que $g$ admite una extensión holomorfa a $U$, que seguiremos llamando $g$.

Entonces puede ocurrir que $z_0$ sea un cero de $g$ o no lo sea. Caso de que $g(z_0) = 0$, puesto que $g$ no es idénticamente nula en $U$, existirá $K \geq 1$ tal que $z_0$ es un cero de orden $K$ de $g$. Las dos posibilidades, es decir $g(z_0) \neq 0$ ó $g(z_0) = 0$, se recogen afirmando que $z_0$ es un cero de orden $K \geq 0$ de $g$, lo que significa que existe una función $g_0$ holomorfa en $U$ tal que

$$g(z) = (z - z_0)^K g_0(z), \ \forall z \in U \quad \text{y} \quad g_0(z_0) \neq 0.$$

Se verifica que $f(z) = a + [g(z)]^{-1}$, $\forall z \in U \setminus \{z_0\}$ y por tanto

$$f(z) = a + (z - z_0)^{-K} [g_0(z)]^{-1}, \ \forall z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Si $K = 0$, entonces $z_0$ es una singularidad evitable de $f$ pues en ese caso se tendría que $f(z) = a + [g_0(z)]^{-1}$, $\forall z \in U \setminus \{z_0\}$.

Pero $g_0$ no se anula en $U$, pues no se anula en $z_0$ y tampoco se anula en $U \setminus \{z_0\}$ pues $g$ no se anulaba en $U \setminus \{z_0\}$.

Luego $[g_0(z)]^{-1}$ es una función holomorfa en $U$. En definitiva $f$ es una función holomorfa en $U\setminus\{z_0\}$ y coincide sobre $U\setminus\{z_0\}$ con una función $(a+[g_0(z)]^{-1})$ que es holomorfa en $U$. Luego $z_0$ será una singularidad evitable de $f$.

Si $K>0$, como $f(z)=a+\frac{[g_0(z)]^{-1}}{(z-z_0)^K}$ se verifica que $z_0$ es un polo de $f$ de orden $K$ pues, siendo $g_0(z_0)\neq 0$, la función $\frac{[g_0(z)]^{-1}}{(z-z_0)^K}$ tiene un polo de orden $K$ en $z_0$, y por tanto $f$ tiene un polo de orden $K$ en $z_0$.

En cualquier caso, $z_0$ no sería una singularidad esencial de $f$, en contra de la hipótesis.

Por tanto, $f(U\setminus\{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$. csqd.

OBSERVACION: Parece en principio sorprendente el teorema de Casoratti-Weierstrass (y lo es); sin embargo dice bastante menos de lo que ocurre en un punto que sea singularidad esencial de una función holomorfa en un entorno reducido de dicho punto: No solo ocurre que $f(U\setminus\{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ sino que coincide con $\mathbb{C}$ salvo, quizás, un punto (esto es lo que prueba el teorema "grande" de Picard, que no demostraremos); la función $f(z)=e^{1/z}$ $(z\neq 0)$ está en las hipótesis del teorema anterior para $z_0=0$: admite un desarrollo de Laurent de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$, y $f$ nunca toma el valor cero. Pero ocurre todavía más: cada punto de $\mathbb{C}$ (salvo uno a lo sumo) es imagen de infinitos puntos de cualquier entorno reducido de $z_0$ (en las hipótesis del teorema), e incluso más: todo punto de $\mathbb{C}$ salvo, quizás, uno es imagen de infinitos puntos de un sector de centro $z_0$ y radio y amplitud arbitrarios

2.2. COROLARIO: Si $f\in H(B(z_0,r)\setminus\{z_0\})$ se verifican

a) Si $z_0$ es una singularidad evitable o un punto regular de $f$ entonces existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$ y es finito.

b) Si $z_0$ es un polo de orden $h\in\mathbb{N}^*$ de $f$ entonces existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$ y es infinito.

c) Si $z_0$ es una singularidad esencial de $f$ entonces para cada $a\in\mathbb{C}$ $\liminf_{z\to z_0}|f(z)-a|=0$ en el sentido de que para cada $a\in\mathbb{C}$ existe una sucesión $\{z_n(a)\}_n\subset B(z_0)\setminus\{z_0\}$ que converge a $z_0$ y verifica que $\lim_{n\to\infty}|f(z_n(a))-a|=0$

Demostr.: a) En este caso $f$ admite un desarrollo de Taylor en

$B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ y $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0 \in \mathbb{C}$.

b) Si $z_0$ es un polo de orden $h\in\mathbb{N}^*$ de $f$ entonces existe una función $f_0$ holomorfa en $B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ verificando que $f(z)=\dfrac{f_0(z)}{(z-z_0)^h}$, $\forall z\in B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ y $\lim_{z\to z_0} f_0(z)\neq 0$. Luego $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

c) Es el teorema de Casoratti-Weierstrass enunciado de otra forma. ▨

OBSERVACION: Las proposiciones a), b) y c) son excluyentes, es decir si ocurre a) no ocurre ni b) ni c), si se da b) no son ciertas ni a) ni c), y lo mismo se puede decir de c). Por tanto, las implicaciones a), b) y c) son equivalencias, es decir: si $f$ es holomorfa en $B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ entonces

a) $z_0$ es un punto regular o una singularidad evitable de $f$ si, y solo si, existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$ y pertenece a $\mathbb{C}$.

b) $z_0$ es un polo de orden $h\in\mathbb{N}^*$ de $f$ si, y solo si, $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

c) $z_0$ es una singularidad esencial de $f$ si, y solo si, para cada $a\in\mathbb{C}$, $\liminf_{z\to z_0} |f(z)-a| = 0$.

Una regla práctica interesante para calcular el residuo de una función en $\infty$ la da la siguiente

2.3. PROPOSICION: Supongamos que $f\in H(\{z / 0\le r<|z|<+\infty\})$ y que $\lim_{z\to\infty} z f(z)=0$. Entonces $Re(f,\infty)=0$.

Demostr.: Puesto que $\lim_{z\to\infty} z f(z)=0$ se verifica que $\lim_{z\to 0}\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)=0$.
Por lo dicho anteriormente la función $\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene una singularidad evitable en 0. Supongamos que en un entorno de cero

$$\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$$

Entonces $f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$ y por tanto $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$
desarrollo en el que solo aparecen potencias negativas de $z$ (en el entorno de ∞ una Solal).
Luego $\infty$ es una singularidad evitable o punto regular de $f$.
Veamos cual es el residuo de $f$ en $\infty$.
En un entorno de $\infty$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$ y por tanto
$z f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$. Como $\lim_{z\to\infty} z f(z) = a_0$ se tiene que $a_0=0$.
Pero $a_0$ es el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo de $f$ y por tanto
$Re(f,\infty) = -a_0 = 0$. c.q.d.

## 3. FUNCIONES MEROMORFAS

**DEFINICION:** (Función meromorfa en un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$)

Sea $D$ un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$. Una función $f$ se dice meromorfa en el abierto $D$ si existe un abierto $D' \subset D$ de forma que $f$ está definida y es holomorfa en $D'$ y $D \setminus D'$ es un conjunto aislado de puntos en cada uno de los cuales $f$ tiene un polo.

**3.1. PROPOSICION:** Si $f$ es meromorfa en el abierto $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, entonces en un entorno de cada punto de $D$ $f$ puede descomponerse como un cociente de dos funciones holomorfas no idénticamente nulas.

Demostr.: Si $z_0 \in D$ es un punto regular de $f$, entonces en un entorno de $z_0$ $f$ se expresa como el cociente $f/1$.

Supongamos que $z_0$ es un polo de orden $k$ de $f$. Entonces, en un entorno reducido de $z_0$ existe una función holomorfa $g$ tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ en dicho entorno reducido y $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$ lo que prueba que $g$ no es idénticamente nula. c.q.d.

**OBSERVACION:** 1) Si $f$ y $h$ son holomorfas y no idénticamente nulas en un abierto $D$ entonces $f/h$ es meromorfa en $D$, pues $f/h$ es holomorfa en $D$ salvo posiblemente en los ceros de $h$ que son posibles polos de $f/h$ (si no son singularidades evitables de $f/h$).

2) Es sencillo probar que, si $f$ es meromorfa en $D$, que representaremos por $f \in M(D)$, entonces $f \in \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$. Basta definir $f$ como $\infty$ en cada polo $z_0$ para que sea continua en $z_0$, pues en ese caso $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

3) También es sencillo comprobar que $M(D)$ es un espacio vectorial complejo con las operaciones usuales de suma de funciones complejas y producto por un escalar.

Veamos un resultado de topología general que utilizaremos después.

**3.2. PROPOSICION:** Si $D$ es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $D'$ coincide con $D$ salvo en los puntos de un conjunto de puntos aislados entonces $D'$ es también abierto y conexo.

Demostr.: Es trivial que $D'$ es abierto. Supongamos que no es conexo. Existen entonces abiertos $A$ y $B$ de $\mathbb{C}$ tales que $A \cap D' \neq \emptyset$, $B \cap D' \neq \emptyset$, $D' \subset A \cup B$ y $A \cap B \cap D' = \emptyset$.

Por hipótesis $C = D \setminus D'$ es un conjunto de puntos aislados.
Entonces para cada $x \in C$ existe una bola abierta de centro $x$, $B(x)$, tal que $B(x)\setminus\{x\} \subset D'$. Luego $B(x)\setminus\{x\} \subset A \cup B$.
Como $B(x)\setminus\{x\}$ es conexo y $A \cap B \cap D' = \emptyset$ se verifica que $B(x)\setminus\{x\} \subset A$ ó $B(x)\setminus\{x\} \subset B$.
Sean $A' = A \cup \{x \in C \,/\, \exists B(x)$ tal que $B(x)\setminus\{x\} \subset A\}$ y
$B' = B \cup \{x \in C \,/\, \exists B(x)$ tal que $B(x)\setminus\{x\} \subset B\}$
Es trivial comprobar que $A'$ y $B'$ son abiertos. Además $A' \cap D \neq \emptyset$ y $B' \cap D \neq \emptyset$ pues $A \cap D \neq \emptyset$ y $B \cap D \neq \emptyset$.
También $D \subset A' \cup B'$ pues $D' \subset A \cup B$ y
$C \subset \{x \in C / \exists B(x) : B(x)\setminus\{x\} \subset A\} \cup \{x \in C / \exists B(x) : B(x)\setminus\{x\} \subset B\}$.
Además $A' \cap B' \cap D = \emptyset$ trivialmente.
Por tanto, $D$ no sería conexo, contra la hipótesis.
Luego, $D'$ es conexo. csqd.

<u>3.3. PROPOSICION</u>: Si $D$ es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ entonces $M(D)$ tiene estructura de cuerpo.

Demostr. Probaremos que si $f \in M(D)\setminus\{0\}$ entonces $1/f \in M(D)$. Los restantes axiomas que definen la estructura de cuerpo se comprueban fácilmente.
Sea pues $f \in M(D)$ no idénticamente nula. Sea $D'$ abierto $\subset D$ tal que $f \in H(D')$ y de forma que $C = D \setminus D'$ es un conjunto de puntos aislados que son polos de $f$. Entonces $D'$ es conexo.
Además $f$ no es indénticamente nula en $D'$, pues si lo fuese se tendría que $\forall z_0 \in C$, $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ en contra de que $z_0$ es un polo de $f$ y debe ser $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Siendo $f \in H(D')$ y no idénticamente nula en $D'$, los ceros de $f$ en $D'$ son de orden finito, por ser $D'$ conexo, y además los ceros de $f$ en $D'$ son puntos aislados. Por tanto, $1/f$ admite un conjunto de puntos aislados que son polos de $1/f$ en $D'$. Luego $1/f \in M(D')$.
Además si $z_0$ es un polo de $f$ hacemos $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ con lo cual $1/f \in M(D)$. csqd.

<u>OBSERVACION</u>: Sea $D$ abierto conexo $\subset \mathbb{C}$ y $f, g \in H(D)$. Supongamos que $f, g$ no son idénticamente nulas en $D$. Entonces los ceros de $f$ y $g$ son aislados. Para cada $z_0 \in D$, existen $K, K' \in \mathbb{N}$ y funciones $f_1, g_1$ holomorfas en un entorno de $z_0$ tales que
$f(z) = (z-z_0)^K f_1(z)$, $g(z) = (z-z_0)^{K'} g_1(z)$ y $f_1(z_0) \neq 0$, $g_1(z_0) \neq 0$

Entonces la función $\frac{f_1}{g_1}$ es analítica en un entorno de $z_0$ y no se anula en $z_0$. Consideremos los casos siguientes:

a) $K \geq K'$: En un entorno reducido de $z_0$ se puede escribir $\frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{K-K'}\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$, y por tanto, siendo $K \geq K'$ $f/g$ admite una prolongación holomorfa en un entorno de $z_0$ sin más que definir $\frac{f(z_0)}{g(z_0)} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^{K-K'}\frac{f_1(z)}{g_1(z)} \in \mathbb{C}$.

b) $K < K'$: Se comprueba de la misma forma que en este caso $f/g$ tiene un polo de orden $K'-K$ en el punto $z_0$.

En adelante, podemos suponer que en un cociente de dos funciones holomorfas en un abierto conexo el numerador y el denominador no tienen ceros comunes, pues si tienen alguno en común se puede simplificar teniendo en cuenta la observación precedente.

## 4. Funciones racionales.

Una función $f$ se dice racional si se puede expresar como cociente de dos polinomios: $f = \frac{P}{Q}$, donde $P$ y $Q$ son polinomios que, podemos suponer, no tienen ceros comunes: si lo tuvieran, bastaría aplicar el teorema fundamental del Algebra y "simplificar" en el sentido de la última observación del apartado anterior. En estas hipótesis, cada cero de orden $K$ de $Q$ es un polo de orden $K$ de $f$.

Supongamos que $Q(z) = \lambda(z-a_1)^{k_1}\cdots(z-a_n)^{k_n}$. Entonces $a_i$ es un polo de orden $k_i$ de $f$. La parte singular de $f$ en $a_i$ es

$$A_i((z-a_i)^{-1}) = \frac{b^{(i)}_{-k_i}}{(z-a_i)^{k_i}} + \cdots + \frac{b^{(i)}_{-1}}{(z-a_i)}$$

que es una función racional. Si restamos a $f$ las partes singulares de $f$ en cada polo $a_i$ obtenemos una función racional $A_0(z)$ cuya única posible singularidad es $\infty$, y $A_0(z)$ tiene singularidades evitables en cada uno de los polos de $f$. Por tanto, $A_0(z)$ es un polinomio, pues el denominador de $A_0(z)$ no tiene ceros (pues $A_0$ no tiene polos). En definitiva una función racional $f = \frac{P}{Q}$ tiene una representación de la forma

$$f(z) = A_0(z) + \sum_{j=1}^{n} A_j((z-a_j)^{-1})$$

donde $A_0(z)$ es un polinomio, y $A_j$ $(j=1,\ldots,n)$ son polinomios que no tienen término independiente (la parte singular de $f$ en $a_j$

no tiene término independiente), y donde $a_1, \ldots, a_n$ son los ceros de $Q$ (que no son ceros de $P$).

Acabamos de ver como se puede descomponer una función racional compleja en suma de fracciones simples.

**4.1. TEOREMA:** (Teorema de los residuos para una función racional).

Sea $f$ una función racional con polos $a_1, \ldots, a_n$ y sea $\gamma$ una curva cerrada tal que $(\gamma) \cap \{a_1, \ldots, a_n\} = \emptyset$. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Re(f, a_j) \cdot I(\gamma, a_j)$$

Demostr.: Observar que existe $\int_\gamma f(z)\,dz$ pues $f$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $\gamma$ es una curva cerrada tal que $(\gamma) \subset \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Consideremos la descomposición en fracciones simples de $f$:

$$f(z) = A_0(z) + \sum_{j=1}^{n} A_j\left((z-a_j)^{-1}\right)$$

donde $A_0(z)$ es un polinomio y $A_j\left((z-a_j)^{-1}\right) = \dfrac{a_1^{(j)}}{z-a_j} + \cdots + \dfrac{a_{h_j}^{(j)}}{(z-a_j)^{h_j}}$

Se verifica que $\int_\gamma A_0(z)\,dz = 0$ pues $A_0(z)\,dz$ es exacta ($A_0$ tiene primitiva) y $\gamma$ es cerrada. Por la misma razón, si $k > 1$ se verifica que $\int_\gamma \dfrac{a_k^{(j)}}{(z-a_j)^k}\,dz = 0$. Luego

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{a_1^{(1)}}{(z-a_1)}\,dz + \int_\gamma \frac{a_1^{(2)}}{(z-a_2)}\,dz + \cdots + \int_\gamma \frac{a_1^{(n)}}{(z-a_n)}\,dz$$

Pero $a_1^{(j)} = Re(f, a_j)$ y $\int_\gamma \dfrac{dz}{z-a_j} = 2\pi i\, I(\gamma, a_j)$.

Luego

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Re(f, a_j) \cdot I(\gamma, a_j) \quad \text{csqd.}$$