TEMA 20°: RELACIONES TOPOLOGICAS ENTRE $H(D)$, $M(D)$ y $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$. FAMILIAS NORMALES.

1. RELACIONES $H(D) \subset M(D) \subset \mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$

En lo sucesivo D será una región (abierto y conexo) del plano complejo. Es trivial que toda función holomorfa en D es meromorfa en D, y que toda función meromorfa en D pertenece a $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$, es decir que $H(D) \subset M(D) \subset \mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$.

La topología natural en $H(D)$ es la que induce $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ en $H(D)$, y así $H(D)$ es un espacio métrico.

La topología natural en $M(D)$ es la que induce en $M(D)$ la topología de $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$ y por tanto $M(D)$ es un espacio métrico.

Recordemos que, denotando por d la métrica cordal en $\overline{\mathbb{C}}$, se verifica que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad d(z_1,z_2) = \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

y $\forall z \in \mathbb{C}$, $d(z,\infty) = \dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$

Es trivial comprobar que, si $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ entonces

$$d(z_1,z_2) = d\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right)$$

y si $z \neq 0$, $d(z,0) = d\left(\frac{1}{z}, \infty\right)$

La restricción de d a $\mathbb{C}$ y la métrica del módulo en $\mathbb{C}$ son métricas equivalentes en $\mathbb{C}$ y por tanto, si $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ entonces

$$\left[\{z_n\}_n \xrightarrow[d]{} z\right] \Leftrightarrow \left[\{z_n\}_n \xrightarrow[|\cdot|]{} z\right].$$

pero no son uniformemente equivalentes.

Si $a \in \mathbb{C}$ y $\rho > 0$ denotaremos por $B_\infty(a,\rho)$ la bola abierta de centro a y radio ρ respecto de la métrica d. Se verifica entonces, por ser d y $|\cdot|$ equivalentes, que si $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ existe $\rho > 0$ tal que $B_\infty(a,\rho) \subset B(a,r)$, y si $a \in \mathbb{C}$ y $\rho > 0$ existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset B_\infty(a,\rho)$.

Por la definición de los abiertos en $\overline{\mathbb{C}}$ que contienen a ∞ se verifica que dado $\rho > 0$ existe K compacto $\subset \mathbb{C}$ tal que

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus K \subset B_\infty(\infty,\rho)$$

y si K es un compacto de $\mathbb{C}$, existe $\rho>0$ tal que

$$B_\infty(\infty,\rho)\subset \overline{\mathbb{C}}\setminus K.$$

OBSERVACIÓN: Así como $H(D)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ y, por tanto, completo, $M(D)$ no es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$. Luego $M(D)$ no es completo. En efecto: si definimos $\{f_n\}_n$ por $f_n(z)=n$, $\forall n\in\mathbb{N}, \forall z\in D$, se verifica que $\{f_n\}_n\subset M(D)$ y $\{f_n\}_n$ es de Cauchy en $M(D)$ (es convergente en $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$) pero no converge en $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$, pues si $f(z)=\infty$, $\forall z\in D$ se tiene que $\{f_n\}_n \xrightarrow[\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})]{} f$; pero $f\notin M(D)$. Luego $M(D)$ no es completo. Sin embargo, $M(D)\cup\{f\}$ ya es cerrado en $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$ y por tanto completo, como prueba el siguiente

1.1. TEOREMA: 1) Supongamos que $\{f_n\}_n\subset M(D)$ y que $\{f_n\}_n\to f$ en $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$. Entonces o bien $f\in M(D)$ o bien $f\equiv\infty$.
2) Además si $f_n\in H(D)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\{f_n\}_n\to f$ en $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$, entonces o bien $f\in H(D)$ o bien $f\equiv\infty$.

(Observar que se supone que $\{f_n\}_n$ es esféricamente uniformemente convergente a f sobre compactos de D, es decir, $\{f_n\}_n$ converge a f en el espacio métrico $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$ respecto de la métrica cordal de $\overline{\mathbb{C}}$).

Demostr.: 1) Supongamos que $\exists a\in D$ tal que $f(a)\neq\infty$ y probemos que $f\in M(D)$. Sea $M>0$ tal que $|f(a)|<M$. Existe entonces $\rho>0$ tal que $B_\infty(f(a),\rho)\subset B(f(a),M)$.

Como $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente esféricamente sobre compactos de D, en particular para el compacto $\{a\}\subset D$ se verifica que $\{f_n(a)\}_n \xrightarrow[\overline{\mathbb{C}}]{} f(a)$ y por tanto dado $\rho>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$ entonces $d(f_n(a),f(a))<\frac{1}{2}\rho$.

Por otra parte $\{f_n\}_n\cup\{f\}$ es un compacto en $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$ y, por el teorema de Ascoli-Arzela, $\{f_n\}_n\cup\{f\}$ es equicontinuo en cada punto de D y en particular lo es en $a\in D$. Existe entonces $r>0$ tal que $\underset{z\in D}{|z-a|\leq r} \Rightarrow d(f_n(z),f_n(a))\leq\frac{1}{2}\rho$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y $d(f(z),f(a))\leq\frac{1}{2}\rho$.

Entonces si $n\geq n_0$, $d(f_n(z),f(a))\leq d(f_n(z),f_n(a))+d(f_n(a),f(a))\leq\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\rho=\rho$ si $\underset{z\in D}{|z-a|\leq r}$. Luego $f_n(z)\in B_\infty(f(a),\rho)\subset B(f(a),M)$, $\forall n\geq n_0$ si $|z-a|\leq r$.

Luego si $n\geq n_0$ y $|z-a|\leq r$, $z\in D$ se tiene que $|f_n(z)|\leq|f_n(z)-f(a)|+|f(a)|\leq M+M=2M$.

Por un razonamiento análogo $|f(z)|\leq 2M$ si $|z-a|\leq r$, $z\in D$.

Sea $n \geq n_0$ y $|z-a| \leq r$. Entonces $|f_n(z)| \leq 2M$ y $|f(z)| \leq 2M$ y por tanto

$$d(f_n(z), f(z)) = \frac{2\,|f_n(z) - f(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}\sqrt{1+|f(z)|^2}} \geq \frac{2}{1+4M^2}\,|f_n(z) - f(z)| \qquad (1)$$

Como $\{d(f_n(z), f(z))\}_n$ converge a 0 uniformemente en el compacto $\overline{B}(a,r)$, se deduce de (1) que $\{|f_n(z) - f(z)|\}_n$ converge a 0 uniformemente en $\overline{B}(a,r)$. (*)

Como f_n es acotada en $B(a,r)$ si $n \geq n_0$ se verifica que f_n es holomorfa en $B(a,r)$, pues f_n es meromorfa y no puede tener polos en $B(a,r)$ (de tener un polo en un punto de $B(a,r)$, su límite en ese punto sería infinito y f_n no estaría acotada en $B(a,r)$).

Además f es límite uniforme (respecto de la métrica del módulo) de $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ en $B(a,r)$ y, por tanto, f es holomorfa en $B(a,r)$.

Se ha probado que si $a \in D$ es tal que $f(a) \neq \infty$ entonces f es holomorfa en una bola abierta de centro a.

Antes de continuar observemos que si $g \in \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$ y definimos $\frac{1}{g}(z) = \frac{1}{g(z)}$ si $g(z) \neq 0, g(z) \neq \infty$, y $\frac{1}{g}(z) = 0$ si $g(z) = \infty$ y $\frac{1}{g}(z) = \infty$ si $g(z) = 0$, entonces $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$.

Sea ahora $a \in D$ tal que $f(a) = \infty$ (si existe).

Puesto que $\{f_n\}_n \xrightarrow[\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})]{} f$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_n \not\equiv 0$ si $n \geq n_1$.

Puesto que D es conexo y $f_n \not\equiv 0$ si $n \geq n_1$ se tiene que $\frac{1}{f_n} \in M(D)$ si $n \geq n_1$, y además $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}_{n \geq n_1}$ converge a $\frac{1}{f}$ en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$: basta para ello utilizar que $d(f_n(z), f(z)) = d\left(\frac{1}{f_n(z)}, \frac{1}{f(z)}\right)$.

Como $\frac{1}{f_n} \in M(D)$ si $n \geq n_1$ y $\frac{1}{f}(a) = 0$ y $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}_{n \geq n_1} \xrightarrow[\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})]{} \frac{1}{f}$, por un razonamiento análogo al que se hizo en el caso $f(a) \neq \infty$ se deduce que existen $n_0 \geq n_1$ y $r > 0$ tales que $\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f} \in H(B(a,r))$ si $n \geq n_0$, y además $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}_n$ converge a $\frac{1}{f}$ uniformemente en $B(a,r)$ respecto de la métrica del módulo.

Si $\frac{1}{f} \equiv 0$ en $B(a,r)$ entonces $f \equiv \infty$ en $B(a,r)$.

Si a es un cero aislado de $\frac{1}{f}$, entonces existe $r' < r$ tal que $\frac{1}{f}(z) \neq 0$ si $0 < |z-a| < r'$, y por tanto f es meromorfa en $B(a,r')$, pues tiene a lo más un polo en $B(a,r')$.

(*) Lo que se ha probado hasta aquí es que $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$ induce en $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ su propia topología (sólo se ha utilizado de f_n y f que son continuas): Sabemos que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $d(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|$ y por tanto si

Consideremos los conjuntos

$A = \{a \in D \,/\, \exists B(a)$ tal que $B(a) \subset D$ y $f(z) = \infty, \forall z \in B(a)\}$

$B = \{a \in D \,/\, \exists B(a)$ tal que $B(a) \subset D$ y $f \in \mathcal{M}(B(a))\}$.

Entonces A y B son abiertos pues si $a \in B$, existe $B(a)$ tal que $B(a) \subset D$ y $f \in \mathcal{M}(B(a))$ y por tanto $B(a) \subset B$. Análogamente A es abierto.

Además $A \cap B = \emptyset$ trivialmente.

Por otra parte de todo lo probado anteriormente se deduce que $D = A \cup B$.

Siendo D conexo se verifica que o bien $D = A$ o bien $D = B$ y de ello se deduce que o bien $f \equiv \infty$ en D o bien $f \in \mathcal{M}(D)$.

2) Supongamos que además $f_n \in H(D), \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $a \in D$ tal que $f(a) = \infty$. Entonces existe una bola abierta de centro a, $B(a)$, tal que $\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f} \in H(B(a))$ para n mayor que un cierto natural n_0, y además $\{\frac{1}{f_n}\}_n$ converge a $\frac{1}{f}$ uniformemente en $B(a)$.

Como $f_n \in H(D), \forall n$ se tiene que $f_n \in H(B(a)), \forall n$. Además $\frac{1}{f_n} \in H(B(a))$ si $n \geq n_0$ y no tiene ceros en $B(a)$. Entonces, por el teorema de Hurwitz o bien $\frac{1}{f}$ no tiene ceros en $B(a)$ o bien $\frac{1}{f} \equiv 0$ en $B(a)$.

Pero $\frac{1}{f}(a) = 0$. Luego $\frac{1}{f} \equiv 0$ en $B(a)$ y, por tanto, $f \equiv \infty$ en $B(a)$.

Luego si $a \in D$ es tal que $f(a) = \infty$, entonces existe $B(a)$ tal que $f \equiv \infty$ en $B(a)$.

Consideremos los conjuntos

$A = \{a \in D \,/\, \exists B(a) \subset D : f \equiv \infty$ en $B(a)\}$

$B = \{a \in D \,/\, \exists B(a) \subset D : f \in H(B(a))\}$.

Se prueba que A y B son abiertos disjuntos que recubren D.

Siendo D conexo se verifica que $D = A$ ó $D = B$ y por tanto o $f \equiv \infty$ en D o bien $f \in H(D)$. csqd.

Consecuencias inmediatas de este teorema son los siguientes corolarios.

1.2. COROLARIO: $\mathcal{M}(D) \cup \{\infty\}$ es cerrado en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$ y por tanto completo en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$.

1.3. COROLARIO: $H(D) \cup \{\infty\}$ es cerrado en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$ y por tanto completo en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$.

2. FAMILIAS NORMALES DE FUNCIONES MEROMORFAS

A) Sabemos que $H(D) \subset \mathcal{C}(D,\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$ y $H(D) \subset M(D) \subset \mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$.
El teorema de Montel caracteriza los conjuntos relativamente compactos de $H(D)$ respecto de su topología natural (topología inducida en $H(D)$ por la de $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$). Nos proponemos ahora caracterizar los conjuntos relativamente compactos en $M(D)$ respecto de su topología natural (la inducida por la de $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$).
A pesar de que $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ y $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$ inducen en $H(D)$ la misma topología no es lo mismo que un conjunto $X \subset H(D)$ sea relativamente compacto respecto de la topología inducida por $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ que respecto de la topología inducida por la de $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$, pues $H(D)$ es cerrado en $\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ pero no en $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$.

En la terminología clásica se habla de familia normal de funciones holomorfas como de un subconjunto relativamente compacto de $H(D)$. Surge aquí la ambigüedad de saber si hablamos de familia normal en $H(D)$ respecto de su topología natural o respecto de la topología inducida por la de $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$.
Como ya se dijo, las familias normales en $H(D)$ respecto de su topología natural quedan estudiadas en el teorema de Montel.
Se estudiarán ahora las familias normales en $H(D)$ respecto de la topología inducida por $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$, o más general, estudiaremos las familias normales de funciones meromorfas, con lo cual ya desaparece la ambigüedad pues $M(D)$ va provisto de la topología que induce en él la topología de $\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})$.

B) Sea f una función meromorfa en D (abierto y conexo).
Si z no es un polo de f, entonces f es holomorfa en un entorno abierto de z y tiene sentido la expresión

$$\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

Supongamos ahora que a es un polo de f de orden $m \geq 1$.
Existe entonces una bola abierta $B(a)$ de centro a de forma que $\forall z \in B(a) \setminus \{a\}$, tiene sentido la expresión $\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$.
En ese caso existe una función g holomorfa en $B(a)$ tal que

$$f(z) = g(z) + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a}, \quad \forall z \in B(a) \setminus \{a\}.$$

Si $z \in B(a) \setminus \{a\}$ entonces f es derivable en z y

$$f'(z)=g'(z)-\left[\frac{m\,a_{-m}}{(z-a)^{m+1}}+\dots+\frac{a_{-1}}{(z-a)^2}\right]$$

y por tanto, si $z\in B(a)\setminus\{a\}$

$$\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{2\left|\frac{m a_{-m}}{(z-a)^{m+1}}+\dots+\frac{a_{-1}}{(z-a)^2}-g'(z)\right|}{1+\left|\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-a}+g(z)\right|^2}$$

y multiplicando numerador y denominador por $|z-a|^{2m}$

$$\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{2|z-a|^{m-1}\left|m a_{-m}+\dots+a_{-1}(z-a)^{m-1}-g'(z)(z-a)^{m+1}\right|}{|z-a|^{2m}+\left|a_{-m}+\dots+a_{-1}(z-a)^{m-1}+g(z)(z-a)^m\right|^2}$$

Es fácil probar que

- si $m\geq 2$ entonces $\lim_{z\to a}\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=0$
- si $m=1$ entonces $\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{2|a_{-1}-g'(z)(z-a)^2|}{|z-a|^2+|a_{-1}+g(z)(z-a)|^2}$ y por tanto

$$\lim_{z\to a}\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{2}{|a_{-1}|}$$ ($a_{-1}\neq 0$ pues a es un polo de orden 1).

Entonces, si $f\in M(D)$ se define la función

$$\mu(f): D\longrightarrow [0,+\infty[$$
$$a\in D\longmapsto \mu(f)(a)=\begin{cases}=\frac{2|f'(a)|}{1+|f(a)|^2} & \text{si } a \text{ no es un polo de } f\\ =\lim_{z\to a}\mu(f)(z) & \text{si } a \text{ es un polo de } f\end{cases}$$

Consecuencia inmediata de la definición es que $\mu(f)\in\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ si $f\in M(D)$; aun más: $\mu(f)\in\mathcal{C}(D,\mathbb{R})$, $\forall f\in M(D)$.

2.1. PROPOSICION: Si $f\in M(D)$ y $f\not\equiv 0$ entonces

$$\boxed{\mu(f)\equiv\mu\left(\frac{1}{f}\right).}$$

Demostr.: Supongamos que z no es un cero de f ni de $\frac{1}{f}$ (o bien z no es un polo de f ni de $1/f$). Entonces

$$\mu\left(\frac{1}{f}\right)(z)=\frac{2\left|\left(\frac{1}{f}\right)'(z)\right|}{1+\left|\frac{1}{f(z)}\right|^2}=\frac{2\left|\frac{f'(z)}{|f(z)|^2}\right|}{1+\frac{1}{|f(z)|^2}}=\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\mu(f)(z)$$

El conjunto de los ceros de f ó de $1/f$ es un conjunto de puntos aislados. Luego $\mu(f)$ y $\mu(1/f)$ son funciones continuas que coinciden en D salvo quizás en un conjunto de puntos aislados, y por tanto $\mu(f)\equiv\mu(1/f)$ en D. c.s.q.d.

Recordemos que $X\subset\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ es localmente acotado si para cada punto $z_0\in D$ existe $M>0$ y $r>0$ tal que $|f(z)|\leq M$, $\forall z\in B(z_0,r)$, $\forall f\in X$.
Recordemos también que $X\subset\mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ es localmente [illegible] si,

y solo si, X es una familia de funciones uniformemente acotadas sobre compactos de D, lo cual equivale a decir que X es un conjunto acotado en el espacio localmente convexo $\mathcal{C}(D, \mathbb{C})$.

2.2. TEOREMA: (de Ahlfors: caracterización de las familias normales en $M(D)$)

Una familia $\mathcal{F}$ en $M(D)$ es normal en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$ si, y solo si, $\mu(\mathcal{F}) = \{\mu(f) / f \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ es localmente acotada. (*)

Demostr.: $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\mu(\mathcal{F})$ es localmente acotada. Queremos probar que $\mathcal{F}$ es una familia normal en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$. Por el teorema de Ascoli-Arzela bastará probar que $\forall x \in D$, $\{f(x) / f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto en $\overline{\mathbb{C}}$ y que $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de D.

La primera condición es trivial, pues $\{f(x) / f \in \mathcal{F}\}$ es un subconjunto de $\overline{\mathbb{C}}$ y $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto.

Probemos que $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de D.

Sea K un disco cerrado contenido en D. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $\mu(f)(z) < M$, $\forall z \in K$, $\forall f \in \mathcal{F}$.

Sean $z, z' \in \overset{\circ}{K}$ y $f \in \mathcal{F}$. Sea también $\alpha > 0$ arbitrario.

Supongamos en primer lugar que z y z' no son polos de $\mathcal{F}$.

Probemos que podemos elegir puntos

$$w_0 = z, w_1, w_2, \ldots, w_n = z' \in \overset{\circ}{K}$$

verificando las siguientes proposiciones

1) Si $w \in [w_{k-1}, w_k]$ entonces w no es un polo de f.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |w_k - w_{k-1}| \leq 2|z - z'|$

3) $$\frac{1 + |f(w_{k-1})|^2}{\left[(1+|f(w_k)|^2)(1+|f(w_{k-1})|^2)\right]^{1/2}} - 1 < \alpha, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

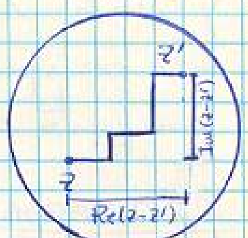
4) $$\left| \frac{f(w_k) - f(w_{k-1})}{w_k - w_{k-1}} - f'(w_{k-1}) \right| < \alpha, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

En efecto:

1) El número de polos de f en el compacto K es finito, pues el conjunto de los polos de f no puede tener puntos de acumulación. Se puede entonces encontrar una poligonal en $\overset{\circ}{K}$ que une z y z', y que no pase por ningún polo de f.

(*) Recordemos que $\mu(\mathcal{F})$ es localmente acotada si para cada punto de D existe un entorno [illegible]

2) Si elegimos la poligonal de 1) con lados paralelos a los ejes, la longitud de los segmentos horizontales es $|Re(z-z')|$ y, por tanto, menor o igual que $|z-z'|$, y la longitud de los segmentos verticales es $|Im(z-z')|$ y, por tanto, menor o igual que $|z-z'|$. Por tanto la longitud de la poligonal es menor o igual que $2|z-z'|$. Es decir, si $w'_0 = z, w'_1, \dots, w'_m = z'$ son los vértices de dicha poligonal, entonces $\sum_{k=1}^{m} |w'_k - w'_{k-1}| \leq 2|z-z'|$.



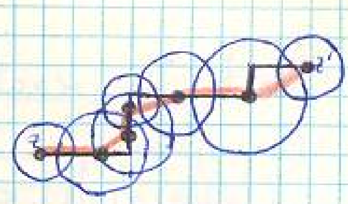
3) y 4) Denotemos por P la poligonal anterior y (P) su traza. Para cada punto $w \in (P)$ existe un disco abierto centrado en w y contenido en D en el que no existen polos de f (sólo hay un número finito de polos de f en K y ninguno de ellos está en (P)). Además, eligiendo el disco más pequeño si es preciso, se puede conseguir que para cada punto z del mismo se verifiquen las desigualdades

$$\frac{1+|f(z)|^2}{[(1+|f(z)|^2)(1+|f(w)|^2)]^{1/2}} - 1 < \alpha \quad (I) \qquad \frac{1+|f(w)|^2}{[(1+|f(z)|^2)(1+|f(w)|^2)]^{1/2}} - 1 < \alpha \quad (II)$$

$$\left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w) \right| < \alpha \quad (III) \qquad \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z) \right| < \alpha \quad (IV)$$

En efecto: w es un punto regular de f y la función $\varphi_w : z \longrightarrow \frac{1+|f(z)|^2}{[(1+|f(z)|^2)(1+|f(w)|^2)]^{1/2}} - 1$ es continua en un entorno abierto de w y $\varphi_w(w) = 0$; luego en un entorno de w, φ_w se puede hacer menor que α. Por un razonamiento análogo se prueba (II). Además f es holomorfa en un entorno de w y por tanto $\lim_{z \to w} \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w) \right| = 0$ y, por tanto, en un entorno de w se verifica (III). (IV) es análogo pues cuando z tiende a w $\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ tiende a $f'(w)$ y $f'(z)$ tiende a $f(w)$.

El conjunto de las bolas anteriores es un recubrimiento abierto de (P) del cual, por ser (P) compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito. Incluiremos en dicho subrecubrimiento finito las bolas correspondientes a los extremos de la poligonal (P), z y z'. Los centros de dichas bolas están sobre la poligonal (P) y, uniendo cada dos centros consecutivos de dichas bolas, obtenemos una nueva



poligonal cuya traza está contenida en la unión de las bolas del subrecubrimiento, y, por tanto, dicha poligonal no contiene polos de f, y además su longitud es trivialmente menor o igual que la de (P). Luego dicha poligonal, que llamaremos P_1 sigue verificando 1) y 2).

Para cada dos bolas consecutivas del subrecubrimiento elijamos un punto de (P_1) y que esté en la intersección de ambas bolas. Con esto conseguimos que cada segmento de la poligonal esté contenido en una bola del subrecubrimiento manteniendo la longitud de la poligonal. Sean $w_0 = z, w_1, \dots, w_n = z'$ los vértices de dicha polinohal. Por supuesto se siguen verificando 1) y 2). De la construcción hecha se deduce que en cada segmento $[w_{k-1}, w_k]$ de la poligonal, o bien w_{k-1} o bien w_k es el centro de un disco del subrecubrimiento.

Sea $k \in \{1, \dots, n\}$ y supongamos que w_{k-1} es el centro del disco $B(w_{k-1})$ del subrecubrimiento. De (II), para $w = w_{k-1}$ y $z = w_k \in B(w_{k-1})$ se deduce 3). Análogamente se prueba 4). (*)

Existe entonces una poligonal de vértices

$$z = w_0, w_1, \dots, w_n = z' \text{ en } \overset{\circ}{K}$$

satisfaciendo 1), 2), 3) y 4).

Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ denotaremos $\beta_k = \left[(1+|f(w_{k-1})|^2)(1+|f(w_k)|^2)\right]^{1/2}$.

De la definición de la métrica cordal d se deduce que

$$d(f(z), f(z')) \leq \sum_{k=1}^{n} d(f(w_{k-1}), f(w_k)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2|f(w_{k-1}) - f(w_k)|}{\beta_k} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\beta_k} \left| \frac{f(w_k) - f(w_{k-1})}{w_k - w_{k-1}} - f'(w_{k-1}) \right| \cdot |w_k - w_{k-1}| + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\beta_k} |f'(w_{k-1})| \cdot |w_k - w_{k-1}|$$

De esto, de 4) y de que $\dfrac{2|f'(w_k)|}{1+|f(w_k)|^2} \leq M$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ por ser $\mu(f)(z) \leq M, \forall f \in \mathcal{F}, \forall z \in K$ (por hipótesis), se deduce que

$$d(f(z), f(z')) \leq 2\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\beta_k} |w_k - w_{k-1}| + M \sum_{k=1}^{n} \frac{1+|f(w_{k-1})|^2}{\beta_k} |w_k - w_{k-1}|$$

Pero $\beta_k \geq 1$ y por tanto $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\beta_k} |w_k - w_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |w_k - w_{k-1}| \leq 2|z - z'|$ por 2).

Además de 3) se deduce que $\dfrac{1+|f(w_{k-1})|^2}{\beta_k} \leq 1 + \alpha$. Luego

$$d(f(z), f(z')) \leq 4\alpha |z - z'| + M(1+\alpha) \sum_{k=1}^{n} |w_k - w_{k-1}| \leq (4\alpha + 2M + 2M\alpha)|z - z'|$$

Puesto que $\alpha>0$ es arbitrario, tomando límite cuando $\alpha \to 0$ se tiene que

$$d(f(z), f(z')) \leq 2M|z-z'|$$

y esto se ha probado supuesto que z y z' no son polos de f.

Veamos qué ocurre si z' es un polo de f y z no lo es.

Sea $w \in \mathring{K}$ tal que w no es polo de f. Como $f(z')=\infty$ se tiene
$d(f(z), f(z')) = d(f(z), \infty) \leq d(f(z), f(w)) + d(f(w), \infty) \leq 2M|z-w| + d(f(w), \infty)$. Puesto que z' es un polo aislado de f existe un entorno de z' donde no hay más polos de f que el propio z' y si w está en dicho entorno y $w \neq z'$ entonces w no es un polo de f. Haciendo tender w a z' se obtiene que $f(w)$ tiende a $f(z')=\infty$ y por tanto $d(f(w), \infty)$ tiende a cero.

Luego en este caso también $d(f(z), f(z')) \leq \lim_{w \to z'} 2M|z-w| + \lim_{w\to z'} d(f(w), \infty) = 2M|z-z'|$.

Solo falta ver qué ocurre si z y z' son ambos polos de f. En este caso $d(f(z), f(z')) = d(\infty, \infty) = 0 \leq 2M|z-z'|$.

Luego $\forall z, z' \in \mathring{K}$, $d(f(z), f(z')) \leq 2M|z-z'|$

y esta acotación es válida para cada $f \in \mathcal{F}$, pues M no depende de la función $f \in \mathcal{F}$ elegida

De esto es ya trivial deducir que $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de D. En efecto: Sea $a \in D$ y sea $r>0$ tal que si $K = \overline{B}(a,r)$ entonces $K \subset D$. Dado $\varepsilon>0$ sea $\delta = \min\{r, \frac{\varepsilon}{2M}\}$.

Entonces si $|z-a|<\delta$ se tiene que $z \in K \subset D$ y

$$d(f(z), f(a)) \leq 2M|z-a| < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad , \forall f \in \mathcal{F}.$$

Luego $\mathcal{F}$ es equicontinua en a.

Queda con esto probado que $\mathcal{F}$ es una familia normal en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es una familia normal de funciones meromorfas en D y probemos que $\mu(\mathcal{F})$ es localmente acotada.

Si no fuese localmente acotada existirían $a \in D$ y una sucesión $\{r_n\}_n$ de números reales positivos convergente a cero y una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}$ tal que

$$B(a, r_n) \subset D, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \sup_{z \in B(a,r_n)} \mu(f_n)(z) \geq n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (V)$$

Siendo $\mathcal{F}$ relativamente compacto en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$, $\{f_n\}_n$ admite una subsucesión convergente en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$, que seguiremos denotando por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea pues $f \in \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$ tal que $\{f_n\} \xrightarrow{\mathcal{C}(D,\overline{\mathbb{C}})} f$.

Supongamos que $f(a) \neq \infty$. De la misma forma que se probó en la demostración del teorema 1.1 se prueba aquí que existen $r>0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f_n, f \in H(B(a,r))$, $\forall n \geq n_0$ y $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ converge a f uniformemente en $B(a,r)$ y, por tanto, uniformemente sobre compactos de $B(a,r)$. Por ello se verifica que $\{f'_n\}_{n\geq n_0}$ converge uniformemente sobre compactos de $B(a,r)$ a f'. Por tanto, $\{\mu(f_n)\}_{n\geq n_0}$ converge a $\mu(f)$ uniformemente sobre compactos de $B(a,r)$, y en particular, en cualquier bola cerrada $\overline{B}(a) \subset B(a,r)$. Para $n \geq n_0$, $\mu(f_n)$ es continua en el compacto $\overline{B}(a) \subset B(a,r)$ y, por tanto, es acotada sobre $\overline{B}(a)$; también $\mu(f)$ es continua en $\overline{B}(a)$ y, por tanto, acotada en $\overline{B}(a)$; además $\{\mu(f_n)\}_{n\geq n_0}$ converge a f uniformemente en $\overline{B}(a)$. Se deduce de ello que la sucesión $\{\mu(f_n)\}_{n\geq n_0}$ está acotada en $\overline{B}(a)$ lo cual contradice (V). Luego si $f(a) \neq \infty$ se llega a un absurdo.

Supongamos que $f(a) = \infty$. Existe entonces $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_n \not\equiv 0$ en D si $n \geq n_1$, y, por tanto, $\frac{1}{f_n} \in M(D)$ si $n \geq n_1$. Además $\{\frac{1}{f_n}\}_{n\geq n_1}$ converge a $\frac{1}{f}$ en $\mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$ y $\frac{1}{f}(a) = 0 \neq \infty$.

Por el mismo razonamiento hecho en el caso $f(a) \neq \infty$, existe una bola $\overline{B}(a)$ tal que la sucesión $\{\mu(\frac{1}{f_n})\}_{n\geq n_0}$ (para un cierto $n_0 \geq n_1$) es acotada en la bola cerrada $\overline{B}(a)$.

Siendo $\mu(\frac{1}{f_n}) = \mu(f_n)$ para $n \geq n_0$ se tiene que $\{\mu(f_n)\}_{n\geq n_0}$ es acotada en $\overline{B}(a)$ lo cual de nuevo contradice a (V).

En cualquier caso se llega a un absurdo.

Luego $\mu(\mathcal{F})$ debe ser localmente acotada. c.q.d.

APENDICE

A.1. TEOREMA DE LA INVERSA LOCAL (COROLARIO 2.9. TEMA 14)

TEOREMA: Sea D abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f \in H(D)$. Si $z_0 \in D$ es tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces f transforma homeomórficamente y conformemente un entorno abierto de z_0 en una bola de centro $f(z_0)$.

Demostr.: Sea $w_0 = f(z_0)$. Entonces z_0 es un cero de orden 1 de $f(z) - w_0$ pues $f'(z_0) \neq 0$.

Por teorema 2.5. (TEMA 14) existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $a \in B(w_0, \delta)$ entonces existe un único $z \in B(z_0, \varepsilon)$ tal que $f(z) = a$. Podemos elegir ε de forma que $f'(z) \neq 0$ si $z \in B(z_0, \varepsilon)$.

Sea $D_0 = f^{-1}(B(w_0, \delta)) \cap B(z_0, \varepsilon)$.

Entonces D_0 es un entorno abierto de z_0.

Se verifica que $f(D_0) = B(w_0, \delta)$ pues

$$f(D_0) = f[f^{-1}(B(w_0, \delta)) \cap B(z_0, \varepsilon)] \subset f[f^{-1}(B(w_0, \delta))] \cap f(B(z_0, \varepsilon)) \subset$$

$$\subset B(w_0, \delta) \cap f(B(z_0, \varepsilon)) = B(w_0, \delta)$$

y si $w \in B(w_0, \delta)$ entonces $\exists z \in B(z_0, \varepsilon) \,/\, f(z) = w$ y por tanto $z \in f^{-1}(B(w_0, \delta)) \cap B(z_0, \varepsilon) = D_0$ con lo cual $B(w_0, \delta) \subset f(D_0)$.

Luego $f(D_0) = B(w_0, \delta)$

Veamos que $f|_{D_0} : D_0 \longrightarrow B(w_0, \delta)$ es un homeomorfismo.

- $f|_{D_0}$ es continua por ser holomorfa.
- Es sobre pues $f(D_0) = B(w_0, \delta)$
- Es inyectiva, pues $\forall w \in B(w_0, \delta)$, $\dot{\exists} z \in D_0 \,/\, f(z) = w$.
- Es abierta pues la derivada de f no se anula en $B(z_0, \varepsilon)$ y por tanto no se anula en ningún punto de D_0.

Luego es un homeomorfismo.

Además es una transformación conforme pues es holomorfa en D_0 con derivada no nula en ningún punto de D_0. ▨

Se ha probado que si una función holomorfa tiene derivada no nula en un punto, entonces existen entornos del punto de su imagen entre los cuales la función es un homeomorfismo y, por tanto, tiene inversa local. Dicha inversa es holomorfa y se verifica:

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f^{-1}(w)-f^{-1}(w_0)}{w-w_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$ (pues f es continua