TEMA 21: EL TEOREMA DE RUNGE

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. RESULTADOS PREVIOS.

Sea D un disco y $f \in H(D)$. Existe entonces una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f en $H(D)$: basta considerar las sumas parciales del desarrollo de Taylor de f en el disco D.
¿Será cierto esto si D es un abierto cualquiera del plano?
La respuesta es que no es cierto, ni aún siendo D conexo
En efecto: la función $f(z)=\frac{1}{z}$ para $z\neq 0$ es holomorfa en el abierto conexo $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Supongamos que existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_n$ tales que $\{P_n\}_n$ converge a f en $H(\mathbb{C}\setminus\{0\})$
Si γ es la circunferencia unidad se verificaría que

$$\left\{\int_\gamma P_n(z)\,dz\right\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz$$

pero esto es absurdo pues $\int_\gamma P_n(z)\,dz = 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$.
Si D es simplemente conexo, sí es cierto el resultado anterior.

Supongamos ahora que f es holomorfa en la corona $D=\{z\in\mathbb{C} / 0<|z|<r\}$. Sea $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ el desarrollo de Laurent de f en D. Existe entonces una sucesión $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones racionales tales que $\{R_n\}_n$ converge a f en D. Además el único posible polo de R_n es 0. Nos planteamos ahora la siguiente cuestión: ¿en qué abiertos D es cierto que toda función holomorfa en D es límite uniforme sobre compactos de D de una sucesión de funciones racionales que tengan sus polos en un conjunto fijado de antemano? A esta pregunta responde el teorema de Runge.

Antes de probar dicho teorema, veremos una serie de resultados previos.

La siguiente proposición recuerda algo la fórmula integral de Cauchy.

1.1. PROPOSICION: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y K un compacto de D. Existen entonces segmentos rectilíneos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ con trazas contenidas en $D \setminus K$ tales que para cada $f \in H(D)$ se verifique

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \quad \forall z \in K.$$

Incluso se puede conseguir que los segmentos $(\gamma_1), \dots, (\gamma_n)$ sean paralelos a los ejes y formen ~~un número~~ un número finito de poligonales cerradas.

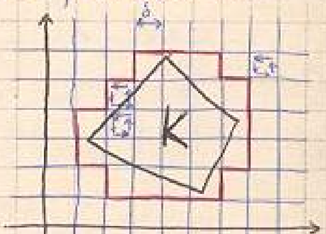
Demostr.: Puesto que K es compacto en D, $d(K, \mathbb{C}\setminus D) > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\setminus D)$.

Consideremos una malla de rectas paralelas a los ejes de forma que cada dos rectas paralelas consecutivas disten δ. Puesto que K es acotado, sólo un número finito de rectángulos (cuadrados) de la malla cortan a K. Sean $R_1, \dots, R_m$ dichos cuadrados de lado δ. Consideremos los bordes ∂R_j, $j=1,\dots,m$, de dichos cuadrados orientados positivamente. Puesto que el diámetro de R_j es $\sqrt{2}\,\delta$ se verifica que si $z \in R_j$ entonces $d(z,K) \le \sqrt{2}\,\delta$, pues $R_j \cap K \ne \emptyset$.

Luego $R_j \subset D$, $j=1,\dots,m$ pues $\sqrt{2}\,\delta < 2\delta < d(K, \mathbb{C}\setminus D)$.

Supongamos que dos cuadrados R_i y R_j tienen un lado común, es decir, sea σ_i un lado de R_i y σ_j un lado de R_j de forma que $(\sigma_i) = (\sigma_j)$. Entonces los caminos σ_i y σ_j tienen sentidos opuestos pues ∂R_i y ∂R_j están orientados positivamente. Luego si $\varphi \in \mathcal{C}((\sigma_i)) = \mathcal{C}((\sigma_j))$ se tiene que

$$\int_{\sigma_i} \varphi + \int_{\sigma_j} \varphi = 0.$$



Denotemos por $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ los lados de los cuadrados $R_1, \dots, R_m$ de forma que cada γ_i es lado de un único cuadrado R_j $(1 \le j \le m)$.

De lo dicho anteriormente se deduce que si $\varphi \in \mathcal{C}\left(\bigcup_{j=1}^{m} \partial R_j\right)$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \varphi = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_j} \varphi \qquad (\mathrm{I})$$

Veamos que $(\gamma_1), \dots, (\gamma_n) \subset D \setminus K$.

Puesto que $R_j \subset D$, $j=1,\dots,m$ se tiene que $(\gamma_1), \dots, (\gamma_n) \subset D$.

Además debe ser $(\gamma_k) \cap K = \emptyset$, $k=1,\dots,n$ pues si existiera

$k \in \{1,\dots,n\}$ tal que $(\gamma_k) \cap K \neq \emptyset$ entonces (γ_k) sería lado de dos rectángulos de los $R_1,\dots,R_m$ contra la elección de γ_k.
Luego $(\gamma_k) \subset D \setminus K$, $k=1,\dots,n$.

Sea $f \in H(D)$ y $z \in \bigcup_{j=1}^{m} R_j$ tal que $z \notin \bigcup_{j=1}^{m} \partial R_j$.

Consideremos la función

$$\varphi : w \in \bigcup_{j=1}^{m} \partial R_j \longmapsto \varphi(w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w)}{w-z}$$

Entonces $\varphi \in \mathcal{C}\left(\bigcup_{j=1}^{m} \partial R_j\right)$. Por (I) se tiene que

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_j} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

En el caso considerado $z \in \left(\bigcup_{j=1}^{m} R_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} \partial R_j\right)$, z es punto interior de un único R_j y es obvio que si $z \in \mathring{R}_j$ entonces $I(\partial R_j, z) = 1$ y si $z \notin R_j$ entonces $I(\partial R_j, z) = 0$. Por la fórmula integral de Cauchy, si z es interior a algún R_j entonces

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad (\text{II})$$

Supongamos ahora que $z \in K$ y que existe $j \in \{1,\dots,m\}$ tal que $z \in \partial R_j$. Entonces $z \notin (\gamma_k)$, $k=1,\dots,n$ pues $(\gamma_k) \cap K = \emptyset$, $\forall k \in \{1,\dots,n\}$.
El lado de ∂R_j al que pertenece z es lado de dos cuadrados de la malla y (II) se cumple en los interiores de ambos cuadrados. La función f es holomorfa en D y por tanto continua. La función $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ es continua en $D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} (\gamma_k)$. Además ambas funciones coinciden en una sucesión de puntos que converge a $z \in K \cap \partial R_j$. Por tanto, también coinciden en z. Luego

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad \forall z \in K. \qquad \text{c.s.q.d.}$$

<u>1.2. LEMA</u>: Sea γ un camino diferenciable con continuidad a trozos en $\mathbb{C}$ y K un compacto en $\mathbb{C}$ que no corte a (γ). Si f es una función continua en (γ) y $\varepsilon > 0$, existe una función racional $R(z)$ con todos sus polos en (γ) tal que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - R(z) \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in K.$$

Demostr.: Puesto que K y (γ) son compactos disjuntos existe $r>0$

tal que $r < d(K, (\gamma))$, donde d es la métrica del módulo en $\mathbb{C}$.
Supongamos que γ está parametrizada en $I = [0,1]$. Entonces para cada $s, t \in I$ y cada $z \in K$ se verifica

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s)-z} \right| \leq \frac{1}{r^2} \left| f(\gamma(t))\cdot\gamma(s) - f(\gamma(s))\cdot\gamma(t) - z\left[f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))\right] \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{r^2}|f(\gamma(t))|\cdot|\gamma(s)-\gamma(t)| + \frac{1}{r^2}|\gamma(t)|\cdot|f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| + \frac{1}{r^2}|z|\cdot|f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))|$$

Consideremos un número positivo c tal que se verifiquen

- $|z| \leq c$, $\forall z \in K$.
- $|\gamma(t)| \leq c$, $\forall t \in [0,1]$
- $|f(\gamma(t))| \leq c$, $\forall t \in [0,1]$

Dicho número existe por ser K y $[0,1]$ compactos y f continua en (γ).
Entonces $\forall s,t \in I$, $\forall z \in K$

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s)-z} \right| \leq \frac{c}{r^2}|\gamma(s)-\gamma(t)| + \frac{2c}{r^2}|f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| .$$

Puesto que γ y $f\circ\gamma$ son continuas en el compacto $I = [0,1]$, son uniformemente continuas en I. Luego dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de I tal que

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1})-z} \right| < \frac{\varepsilon}{L(\gamma)} \quad \text{si } t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = 1,\dots,n,\ z \in K.$$

Consideremos la función racional

$$R(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\gamma(t_{j-1}))\left[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right]}{\gamma(t_{j-1}) - z}$$

R es una función racional cuyos posibles polos son $\gamma(t_{j-1})$, $j = 1,\dots,n$, y, por tanto, están en (γ). Además, si $z \in K$

$$\left| \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - R(z) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt - \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1})-z} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1})-z} \right] \gamma'(t)dt \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{L(\gamma)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|\,dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{L(\gamma)} L(\gamma) = \varepsilon . \quad \text{csqd.}$$

1.3. PROPOSICION: Sea D abierto de $\mathbb{C}$ y K compacto $\subset D$. Existen entonces segmentos rectilíneos $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ en $D \setminus K$ tales que para cada $f \in H(D)$ y cada $\varepsilon > 0$, existe una función racional $R(z)$ con todos sus posibles polos en $(\gamma_1) \cup \dots \cup (\gamma_n)$ de forma que $|f(z) - R(z)| \leq \varepsilon$, $\forall z \in K$.

Demostr.: Por 1.3. PROPOSICION existen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ segmentos rectilíneos en $D \setminus K$ tal que si $f \in H(D)$ entonces
$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw \;, \forall z \in K.$$
Por el lema anterior, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ existe una función racional $R_k(z)$ con todos sus posibles polos en (γ_k) tal que
$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw - R_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{n} \;, \forall z \in K$$
La función racional $R(z) = \sum_{k=1}^{n} R_k(z)$ tiene sus posibles polos en $(\gamma_1) \cup \dots \cup (\gamma_n)$ y verifica que
$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon \;, \forall z \in K. \quad \text{csqd.}$$

OBSERVACION: Con esta proposición ya casi hemos obtenido el teorema de Runge. Interesa sin embargo que la función racional tenga sus polos fuera de D para que sea holomorfa en D. Los siguientes lemas nos enseñan como, en determinadas condiciones, podemos sustituir una función racional por otra suficientemente "próxima" a ella en un compacto fijado y tenga sus posibles polos en un conjunto fijado de antemano.

1.4. LEMA: Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ y a y b puntos distintos de $\mathbb{C} \setminus K$ tales que $|a-b| \le \frac{1}{2} d(b,K)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada función racional $R(z)$ que tenga su único polo en a existe una función racional $Q(z)$ con un único polo en b tal que $|R(z) - Q(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in K$.

Demostr.: Supongamos en primer lugar que $R(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ $(n \ge 1)$.
Por hipótesis $|a-b| \le \frac{1}{2} d(b,K)$ y, por tanto
$$|a-b| \le \frac{1}{2} |b-z| \;, \forall z \in K. \quad (*)$$
Luego $\frac{|a-b|}{|b-z|} \le \frac{1}{2}$, $\forall z \in K$.

Entonces $$\frac{1}{(z-a)^n} = \frac{1}{(z-b)^n \left[1 - \frac{a-b}{z-b}\right]^n} = \frac{1}{(z-b)^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k$$

donde $$A_k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{k+n-1}{k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left[\frac{1}{(1-z)^n}\right]_{z=0}$$

Puesto que $\frac{|a-b|}{|z-b|} \le \frac{1}{2}$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k$ está mayorada por la serie $\sum_{k \ge 0} A_k \left(\frac{1}{2}\right)^k$, y lo está uniformemente en K.
Por el criterio del cociente $\lim \frac{A_{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{A_k \left(\frac{1}{2}\right)^k} = \lim \frac{1}{2} \frac{k+n}{k+1} = \frac{1}{2} < 1$. Lue-

y $\sum_{k\geq 0} A_k \left(\frac{1}{2}\right)^k$ es convergente.

Por el criterio de Weierstrass $\sum_{k\geq 0} A_k \cdot \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k$ es uniformemente convergente en K y por tanto

$$\frac{1}{(z-b)^n} \sum_{k\geq 0} A_k \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k \text{ converge uniformemente en } K \text{ a } \frac{1}{(z-a)^n}.$$

Luego dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{1}{(z-a)^n} - \frac{1}{(z-b)^n} \sum_{k=0}^{N} A_k \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k \right| < \varepsilon \quad , \forall z\in K$$

Si $Q(z) = \frac{1}{(z-b)^n} \sum_{k=0}^{N} A_k \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k$ se tiene que

$|R(z) - Q(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in K$ y $Q(z)$ tiene su único polo en b.

Supongamos ahora que R es una función racional con único polo en a arbitraria. Entonces R admite la siguiente descomposición en fracciones simples

$$R(z) = p(z) + \sum_{j=1}^{m} r_j (z-a)^{-j}$$

donde $p(z)$ es un polinomio y $r_j \in \mathbb{C}$, $j=1,\dots,m$, y donde m es el orden del polo.

Si $j\in\{1,\dots,m\}$ es tal que $r_j\neq 0$, aproximamos $(z-a)^{-j}$ por una función $Q_j(z)$ racional con único polo en b tal que

$$\left| \frac{1}{(z-a)^j} - Q_j(z) \right| < \frac{\varepsilon}{m|r_j|} , \forall z\in K.$$

Si $r_j = 0$ tomamos $Q_j(z) = 0$.

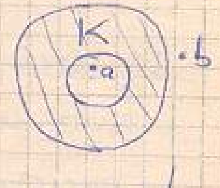
Sea $Q(z) = p(z) + \sum_{j=1}^{m} r_j \cdot Q_j(z)$. Entonces Q es una función racional con único polo en b y verifica trivialmente que

$$|R(z) - Q(z)| < \varepsilon , \forall z\in K. \quad \text{csqd.}$$

OBSERVACIONES: Dados $a,b\in\mathbb{C}\setminus K$ distintos si no verifican que $|a-b|\leq \frac{1}{2} d(b,K)$, puede ocurrir que existan puntos intermedios $b_1, b_2, \dots, b_n = b \in \mathbb{C}\setminus K$ tales que $|a-b_1|\leq \frac{1}{2} d(b_1,K)$, $|b_1-b_2|\leq\frac{1}{2} d(b_2,K)$, …, $|b_{n-1}-b_n|\leq \frac{1}{2} d(b_n,K)$. Entonces dado $\varepsilon>0$ existen funciones racionales $Q_1,\dots,Q_n$ con únicos posibles polos en $b_1,\dots,b_n$ respectivamente y tales que

$$|R(z)-Q_1(z)| < \frac{\varepsilon}{n} , |Q_1(z)-Q_2(z)| < \frac{\varepsilon}{n}, \dots, |Q_{n-1}(z)-Q_n(z)| < \frac{\varepsilon}{n} , \forall z\in K$$

Haciendo $Q_n = Q$ se obtiene que $|R(z)-Q(z)|<\varepsilon$, $\forall z\in K$, y Q tiene su único posible polo en $b_n = b$. ¿Cuándo existirán los puntos intermedios $b_1, \ldots, b_{n-1}$? Desde luego no siempre; por ejemplo: Sea $K = \{z / 0 < r_1 \leq |z| \leq r_2 < +\infty\}$; si a está en la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ y b en la no acotada no se pueden encontrar $b_1, \ldots, b_{n-1}$ como los descritos.



Veremos que eso es posible si a y b están en una misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$.

② Hemos cambiado una función racional con un único polo en $a \in \mathbb{C} \setminus K$ por otra con único polo en $b \in \mathbb{C} \setminus K$ y que está suficientemente próxima a ella en K. Veamos como podemos hacer un cambio del polo $a \in \mathbb{C} \setminus K$ al polo ∞. Recordemos que una función racional con único polo en ∞ es un polinomio. ~~Además~~ si una función entera tiene un polo en ∞ es un polinomio.

1.5. LEMA: Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ y denotemos por χ la métrica cordal en $\overline{\mathbb{C}}$. Si $a \in \mathbb{C} \setminus K$ es tal que $\chi(a, \infty) \leq \frac{1}{2} \chi(\infty, K)$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada función racional $R(z)$ que tenga un único polo en a existe un polinomio $Q(z)$ (función racional con único polo en ∞) tal que

$$|R(z) - Q(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in K.$$

Demostr.: Observemos que a no puede ser cero pues $\chi(0, \infty) = 2$ y no se puede verificar que $\chi(0, \infty) \leq \frac{1}{2} \chi(\infty, K)$.

Basta probar el lema para una función racional del tipo

$$R(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \quad (n \geq 1)$$

Por hipótesis se verifica

$$\frac{2}{(1+|a|^2)^{1/2}} \leq \frac{1}{(1+|z|^2)^{1/2}}, \quad \forall z \in K$$

y por tanto

$$3 + 4|z|^2 \leq |a|^2, \quad \forall z \in K.$$

Se verifica entonces que $4|z|^2 \leq |a|^2$, $\forall z \in K$, y por tanto

$$\left|\frac{z}{a}\right| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall z \in K.$$

Entonces

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \frac{(-1)^n}{a^n \left(1 - \frac{z}{a}\right)^n} = \frac{(-1)^n}{a^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{z}{a}\right)^k, \quad \forall z \in K$$

donde $A_k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\, k!}$. Por el criterio de Weierstrass, $\frac{(-1)^n}{a^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{z}{a}\right)^k$

converge [illegible]

mente grande y haciendo $Q(z) = \frac{(-1)^n}{a^n} \sum_{k=0}^{N} A_k \left(\frac{z}{a}\right)^k$ se obtiene que $Q(z)$ es un polinomio que verifica

$$|R(z) - Q(z)| < \epsilon, \ \forall z \in K. \quad \text{csqd.}$$

1.6. LEMA: Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C} \setminus K$ tal que $\chi(\infty, b) \leq \frac{1}{2}\chi(\infty, K)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada polinomio $R(z)$ existe una función racional $Q(z)$ con único polo en b tal que

$$|R(z) - Q(z)| < \epsilon, \ \forall z \in K.$$

Demostr.: Nuevamente b no puede ser cero.

Por hipótesis $\chi(\infty, b) \leq \frac{1}{2}\chi(\infty, K)$; se deduce de esto que

$$|z| \leq \frac{1}{2}|b|, \ \forall z \in K$$

Consideremos el disco $D_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \frac{1}{2}|b|\}$.

Entonces $K \subset D_1$. Consideremos la transformación bilineal $\mathcal{T}(z) = \frac{1}{z-b}$. Veamos que $\mathcal{T}$ transforma el disco D_1 en un disco: $\mathcal{T}(\partial D_1)$ no es una recta pues $b \notin D_1$ y $\mathcal{T}(b) = \infty$; luego $\mathcal{T}(\partial D_1)$ es un círculo y además b, que es un punto exterior a D_1 se transforma en ∞ que es exterior al disco que encierra $\mathcal{T}(\partial D_1)$. Luego existen $c \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tales que

$$\mathcal{T}(D_1) = D_2 = \{z \in \mathbb{C} / |z - c| \leq r\}$$

Además $\mathcal{T}(\infty) = 0$ y siendo ∞ exterior a D_1 se verifica que 0 es exterior a D_2, lo que significa que $|c| > r$.

Dado el polinomio $R(z)$ siempre es posible encontrar un polinomio P tal que $R(z) = P(z-b)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Consideremos el cambio $u = \frac{1}{z-b}$. Entonces si $z \in D_1$, $u \in D_2$.

Luego para cada $z \in D_1$

$$R(z) = P\left(\frac{1}{u}\right) \text{ tal que } u = \frac{1}{z-b} \in D_2.$$

Notar que $u \neq 0$ pues $0 \notin D_2$.

Probemos que $\forall \delta > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ existe un polinomio $q(u)$ de forma que $\left|\frac{1}{u^n} - q(u)\right| < \delta$, $\forall u \in D_2$, de donde se seguirá fácilmente la tesis.

Sean $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}^*$.

Para cada $u \in D_2$ se tiene que $|u - c| \leq r$ y siendo $r < |c|$ se verifica que

$$\left|\frac{u-c}{c}\right| \leq \frac{r}{|c|} < 1, \ \forall u \in D_2.$$

Luego para cada $u \in D_2$

$$\frac{1}{\ldots} = \frac{1}{\ldots} = \frac{1}{\ldots} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{c-u}{\ldots}\right)^k \quad \ldots \quad (k+n-1)!$$

Además, siendo $\left|\frac{c-u}{c}\right| \leq \frac{r}{|c|} < 1$, $\forall u \in D_2$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{c-u}{c}\right)^k$ está mayorada por $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{r}{|c|}\right)^k$ la cual es convergente.

Luego $\frac{1}{c^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{c-u}{c}\right)^k$ converge uniformemente en D_2 a $\frac{1}{u^n}$.

Por tanto, dado $\delta > 0$ el polinomio $q(u) = \frac{1}{c^n} \sum_{k=0}^{N} A_k \left(\frac{c-u}{c}\right)^k$ verifica que $\left|\frac{1}{u^n} - q(u)\right| < \delta$, $\forall u \in D_2$ (N suficientemente grande)

Probemos ya la tesis. Aplicando lo anterior a cada sumando de $P(\frac{1}{u})$, podemos encontrar un polinomio $Q_1(u)$ tal que

$$\left|P\left(\frac{1}{u}\right) - Q_1(u)\right| < \varepsilon, \ \forall u \in D_2$$

con lo cual

$$\left|R(z) - Q_1\left(\frac{1}{z-b}\right)\right| < \varepsilon, \ \forall z \in D_1$$

Haciendo $Q(z) = Q_1\left(\frac{1}{z-b}\right)$ obtenemos una función racional cuyo único posible polo es b y se verifica que

$$|R(z) - Q(z)| < \varepsilon, \ \forall z \in K$$

pues $K \subset D_1$. c.s.q.d.

1.7. LEMA: Sea (X,d) un espacio métrico conexo. Entonces para cada $\delta > 0$ y cada $z, z' \in X$ existen $x_0 = z, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p = z' \in X$ tales que $d(x_{k-1}, x_k) < \delta$, $k = 1, \ldots, p$.

Demostr.: Basta probar que dado $z_0 \in X$ y dados $\delta > 0$ y $z \in X$ existen $x_0 = z_0, x_1, \ldots, x_n = z \in X$ tales que $d(x_{k-1}, x_k) < \delta$, $k = 1, \ldots, n$.

Consideremos el conjunto

$$A = \{z \in X \,/\, \exists\, x_0, x_1, \ldots, x_n \in X : x_0 = z_0, x_n = z \text{ y } d(x_{k-1}, x_k) < \delta, k = 1, \ldots, n\}.$$

A es no vacío pues $z_0 \in A$.

Además A es abierto, pues si $z \in A$ entonces $B(z, \delta) \subset A$ trivialmente. También A es cerrado: si $z \notin A$ es trivial probar que $B(z, \frac{\delta}{2}) \cap A = \emptyset$.

Siendo X conexo y A abierto y cerrado no vacío debe ser $A = X$. c.s.q.d.

2. TEOREMA DE RUNGE.

2.1. TEOREMA: (de Runge)

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y E un subconjunto de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ tal que E corta cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Sea K compacto $\subset D$ y $\varepsilon > 0$. Entonces para cada $f \in H(D)$ existe una función racional $R(z)$ cuyos polos están en E y se verifica $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in K$.

Demostr.: En el TEMA 2º se demostró que, dado un abierto D de $\mathbb{C}$, existe una sucesión $\{K_n\}_n$ de compactos de D tal que $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y de forma que cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ contiene una componente conexa de $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$, para cada $n\in\mathbb{N}$.

Si K es compacto en D, entonces

$$\exists n\in\mathbb{N} \,/\, K\subset \mathring{K}_n. \quad (1)$$

Denotando por d la métrica del módulo en $\mathbb{C}$, definimos

$$H = \{z\in\mathbb{C} \,/\, d(z,\mathbb{C}\setminus K_n) \geq \tfrac{1}{2} d(z,K)\} \cup \{z\in\mathbb{C}\,/\, d(z,\mathbb{C}\setminus K_n) \geq \tfrac{1}{2} d(K,\mathbb{C}\setminus K_n)\} \ (*)$$

donde n es el natural de (1), y lo será de aquí en adelante.

Observar que $d(K,\mathbb{C}\setminus K_n) > 0$ pues $K\subset \mathring{K}_n$.

Es trivial que H es cerrado, pues la distancia es continua.

Además $H \supset K$ pues si $z\in K$ entonces

$$d(z,\mathbb{C}\setminus K_n) \geq d(K,\mathbb{C}\setminus K_n) > \tfrac{1}{2} d(K,\mathbb{C}\setminus K_n).$$

Veamos que $H\subset \mathring{K}_n$: Si $z\notin \mathring{K}_n$ entonces $z\in \partial K_n$ o bien $z\in \complement K_n$. En ambos casos $d(z,\mathbb{C}\setminus K_n) = 0$ y no se verificará que $d(z,\mathbb{C}\setminus K_n) \geq \frac{1}{2} d(z,K)$ ni que $d(z,\mathbb{C}\setminus K_n)\geq \frac{1}{2} d(K,\mathbb{C}\setminus K_n)$, con lo cual $z\notin H$. Luego $H\subset \mathring{K}_n$.

Puesto que H es cerrado y $H\subset \mathring{K}_n \subset K_n$ se verifica que H es compacto.

Dado $\varepsilon>0$ y $f\in H(D)$ tratamos de encontrar una función racional $R(z)$ con polos en E tal que $|f(z)-R(z)|<\varepsilon$, $\forall z\in K$.

Si $f\in H(D)$ entonces $f\in H(\mathring{K}_n)$. Aplicando la PROPOSICION 1.3. al abierto $\mathring{K}_n$ y el compacto $H\subset \mathring{K}_n$, podemos garantizar la existencia de una función racional $Q(z)$ con polos en $\mathring{K}_n\setminus H$ tal que $|f(z)-Q(z)| < \varepsilon/2$, $\forall z\in H$ y, en particular, $|f(z)-Q(z)|<\varepsilon/2$ si $z\in K$, pues $K\subset H$.

Supongamos que Q tiene m polos en $\mathring{K}_n\setminus H$. Entonces se puede escribir

$$Q(z) = Q_1(z) + \dots + Q_m(z)$$

donde Q_j es una función racional con un único polo en $\mathring{K}_n\setminus H$.

Consideremos la función racional $Q_1(z)$ y supongamos que $a\in \mathring{K}_n\setminus H$ es su único polo.

Como ∂K_n es compacto, existe $b\in\partial K_n$ tal que $|a-b| = d(a,\partial K_n) = d(a,\mathbb{C}\setminus K_n)$.

Puesto que $a \notin H$ se verifica que $d(a, \mathbb{C}\setminus K_n) < \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\setminus K_n)$ por definición de H.

Además K compacto $\subset \mathring{K}_n$ y, por tanto, $d(K, \mathbb{C}\setminus K_n) = d(K, \partial K_n) \leq$
$\leq d(K, b)$ pues $b \in \partial K_n$.

Por tanto $d(a, \mathbb{C}\setminus K_n) < \frac{1}{2} d(K,b)$ y también

$$|a-b| < \frac{1}{2} d(K,b). \qquad (2)$$

Puesto que $b \in \partial K_n$ se verifica que

$$\exists\, b' \in \mathbb{C}\setminus K_n \;/\; |b-b'| < \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\setminus K_n) \leq \frac{1}{2} d(K, b') \qquad (3)$$

Sea G la componente conexa de b' en $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$.

Por la elección de la sucesión de compactos $\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, G contiene una componente conexa de $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$, la cual por hipótesis corta a $\overline{E}$. Por tanto $G \cap \overline{E} \neq \emptyset$.

Sea $c \in G \cap \overline{E}$.

Distinguiremos dos casos:

i) Supongamos que $c \neq \infty$. Puede ocurrir que $\infty \in G$ o que $\infty \notin G$. En cualquier caso $b', c \in G\setminus\{\infty\}$. Puesto que G es conexo en $\overline{\mathbb{C}}$, $G\setminus\{\infty\}$ es conexo en $\mathbb{C}$.

Por LEMA 1.7. aplicado al conexo $G\setminus\{\infty\}$ provisto de la métrica del módulo, existen puntos $s_2, \ldots, s_p \in G\setminus\{\infty\}$ tales que

$$s_2 = b',\; s_p = c \;\text{ y }\; |s_k - s_{k+1}| < \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\setminus K_n),\; 2 \leq k \leq p-1. \qquad (4)$$

Sea $s_0 = a$ y $s_1 = b$.

Puesto que $c \in \overline{E}$, $\exists\, s_{p+1} \in E \;/\; |c - s_{p+1}| < \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\setminus K_n)$. (5)

Reuniendo (2), (3), (4) y (5) podemos escribir que

$$|s_k - s_{k+1}| < \frac{1}{2} d(s_{k+1}, K), \quad 0 \leq k \leq p \qquad (6)$$

En efecto: Si $k=0$ (resp $k=1$), (6) se reduce a (2) (resp. (3)).

Si $k=p$, (6) se deduce de (5) pues $|c - s_{p+1}| < \frac{1}{2} d(K, \mathbb{C}\setminus K_n) \leq \frac{1}{2} d(K, s_{p+1})$ pues $s_{p+1} \in \mathbb{C}\setminus K_n$, ya que $s_{p+1} \in E \subset \overline{\mathbb{C}}\setminus D \subset \overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ y $s_{p+1} \neq \infty$.

Si $2 \leq k \leq p-1$, (6) es consecuencia inmediata de (4) pues $s_{k+1} \in \mathbb{C}\setminus K_n$.

Aplicando reiteradamente el LEMA 1.4, podemos garantizar la existencia de funciones racionales $S_1(z), S_2(z), \ldots, S_{p+1}(z)$ de forma que $S_k(z)$ tiene un único polo en s_k $(1 \leq k \leq p+1)$ y tal que

$$|S_k(z) - S_{k+1}(z)| < \frac{\varepsilon}{2m(p+1)}, \quad \forall z \in K,\; \forall k \in \{0, 1, \ldots, p\}.$$

donde se ha definido $S_0(z) = Q_1(z)$.

Sea $R_1(z) = S_{p+1}(z)$. Entonces R_1 es una función racional con único polo $s_{p+1} \in E$ y verifica que

$$|Q_1(z) - R_1(z)| \leq \sum_{k=0}^{p} |S_k(z) - S_{k+1}(z)| < \frac{\varepsilon}{\ldots}, \quad \forall z \in K.$$

ii) Supongamos que $c=\infty$. G es entonces la componente conexa no acotada de $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ pues $\infty\in G$.
Puesto que $\infty\in G$, $\exists c'\in G\setminus\{\infty\}$ / $\chi(\infty,c')\leq\frac{1}{2}\chi(\infty,K)$ pues $\chi(\infty,K)>0$ por ser K compacto $\subset\mathbb{C}$ y G abierto y conexo.
Entonces $G\setminus\{\infty\}$ es la componente conexa de c' en $\mathbb{C}\setminus K_n$.
Recordemos que G es la componente conexa de b' en $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$; como $b'\neq\infty$ se verifica que $G\setminus\{\infty\}$ es la componente conexa de b' en $\mathbb{C}\setminus K_n$. Luego b' y c' están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}\setminus K_n$ ($G\setminus\{\infty\}$).
Por LEMA 1.7 existen puntos $s_2,\dots,s_p\in G\setminus\{\infty\}$ tales que

$$s_2=b',\ s_p=c' \text{ y } |s_k-s_{k+1}|\leq\frac{1}{2}d(K,\mathbb{C}\setminus K_n)\quad(2\leq k\leq p-1)$$

y por tanto $|s_k-s_{k+1}|\leq\frac{1}{2}d(K,s_{k+1})$ si $2\leq k\leq p-1$, pues $s_{k+1}\in\mathbb{C}\setminus K_n$ si $2\leq k\leq p-1$.
Sea $s_{p+1}=c=\infty\in\overline{E}$, pues $c\in G\cap\overline{E}$.
Existe entonces $s_{p+2}\in E$ tal que $\chi(\infty,s_{p+2})\leq\frac{1}{2}\chi(\infty,K)$.
Sean también $s_0=a$ y $s_1=b$.
Por LEMA 1.4 existen funciones racionales $S_1(z),\dots,S_p(z)$ tales que para cada $k\in\{1,\dots,p\}$, $S_k(z)$ tiene por único polo s_k y

$$|S_{k-1}(z)-S_k(z)|<\frac{\varepsilon}{2m(p+2)}\quad,\forall z\in K$$

donde $S_0(z)=Q_1(z)$.
Por LEMA 1.5, existe un polinomio $S_{p+1}(z)$ tal que

$$|S_p(z)-S_{p+1}(z)|<\frac{\varepsilon}{2m(p+2)}\quad,\forall z\in K.$$

Por LEMA 1.6. existe una función racional $S_{p+2}(z)$ con único polo en s_{p+2} tal que

$$|S_{p+1}(z)-S_{p+2}(z)|<\frac{\varepsilon}{2m(p+2)}\quad,\forall z\in K$$

Sea $R_1(z)=S_{p+2}(z)$. Entonces R_1 es una función racional con un único polo en $s_{p+2}\in E$ tal que

$$|Q_1(z)-R_1(z)|\leq\sum_{k=0}^{p+1}|S_k(z)-S_{k+1}(z)|<\frac{\varepsilon}{2m}\quad,\forall z\in K.$$

En cualquiera de los casos i) e ii) dada la función racional $Q_1(z)$ con un único polo en a, hemos encontrado una función racional $R_1(z)$ con un único polo en E tal que

$$|Q_1(z)-R_1(z)|<\frac{\varepsilon}{2m}\quad,\forall z\in K.$$

De la misma forma se prueba que dado $j \in \{2, \dots, m\}$ existe una función racional $R_j(z)$ con un único polo en E tal que

$$|Q_j(z) - R_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2m} \quad , \forall z \in K$$

Sea entonces $R(z) = R_1(z) + \dots + R_m(z)$.

R es una funcion racional con polos en E tal que

$$|Q(z) - R(z)| \leq \sum_{j=1}^{m} |Q_j(z) - R_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \forall z \in K.$$

Puesto que además $|f(z) - Q(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall z \in K$, se tiene que

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon, \ \forall z \in K. \quad \text{csqd.}$$

Si E es un subconjunto de $\overline{\mathbb{C}}$, denotaremos por $\mathcal{R}(E)$ el conjunto de las funciones racionales cuyos polos están en E.

2.2. COROLARIO: Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y $E \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ tal que $\overline{E}$ corta cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Entonces $\mathcal{R}(E)$ es denso en $H(D)$.

Demostr.: Puesto que $E \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ se verifica trivialmente que $\mathcal{R}(E) \subset H(D)$ en el sentido de que toda función racional que tenga sus polos en E es holomorfa en D.

Se trata de probar que

$$\forall f \in H(D), \exists (R_n)_n \subset \mathcal{R}(E) \ / \ (R_n)_n \xrightarrow[H(D)]{} f.$$

Sea $\{K_n\}_n$ una sucesión de compactos en D tales que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Por el teorema de Runge

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists R_n \in \mathcal{R}(E) \ / \ |R_n(z) - f(z)| < \frac{1}{n}, \ \forall z \in K_n.$$

Es sencillo probar que $(R_n)_n$ converge a f uniformemente sobre compactos de D. ▨

OBSERVACIONES: En la práctica, al aplicar el teorema de Runge se suele exigir que E corte cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Generalmente se toma como E un conjunto que contiene un punto y solo uno de cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Otras veces se toma $E = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$: cuando solo interesa que las funciones racionales que aproximan a las funciones holomorfas en D tengan sus polos fuera de D. Un caso particular interesante se obtiene cuando $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ solo tiene una componente conexa (la de ∞); en este caso se verifica

2.3. COROLARIO: Sea D abierto en $\mathbb{C}$ tal que $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ es conexo. Entonces, para cada $f \in H(D)$ existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_n$ que converge a f en $H(D)$.

Demostr.: Si $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ es conexo, entonces solo existe una componente conexa en $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$: la componente de ∞.

Si $E = \{\infty\}$ entonces E corta cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$.

Puesto que toda función racional con un único polo en ∞ es un polinomio, se sigue la tesis sin más que aplicar a este caso el COROLARIO 2.2. ▨

OBSERVACION: La importancia del teorema de Runge radica en que, al aproximar funciones holomorfas en un abierto uniformemente sobre compactos por funciones racionales holomorfas en dicho abierto, los teoremas de integración probados para funciones racionales siguen siendo ciertos para funciones holomorfas.