TEMA 22: FORMA GENERAL DEL TEOREMA DE CAUCHY. HOMOLOGIA. TEOREMA DE LOS RESIDUOS.

1. FORMA GENERAL DEL TEOREMA DE CAUCHY. HOMOLOGIA.

A) Sea D un abierto y $f \in H(D)$. Sabemos que si γ es una curva cerrada en D y D es simplemente conexo entonces $\int_\gamma f = 0$, es decir, se verifica el teorema de Cauchy. Nos preguntamos en qué abiertos es cierto el teorema de Cauchy, para cualquier curva cerrada γ en dicho abierto. Sabemos que en los simplemente conexos esto es cierto, y probaremos más adelante que solo es cierto en ellos.

Sabemos también que si f es holomorfa en un abierto D y γ es una curva cerrada homótopa a cero en D entonces $\int_\gamma f = 0$. Nos preguntamos ahora para qué curvas cerradas del un abierto dado es cierto el teorema de Cauchy. Probaremos que dichas curvas cerradas son las curvas "homólogas" a cero, entre las cuales están las homótopas a cero.

La cuestión a resolver es la siguiente: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$; ¿qué curvas γ cerradas en D verifican que $\int_\gamma f = 0$, $\forall f \in H(D)$?

Sea D abierto de $\mathbb{C}$ y γ una curva cerrada en D tal que $\int_\gamma f = 0$, $\forall f \in H(D)$. En particular, si $a \notin D$, la función $f(z) = \frac{1}{z-a}$ es holomorfa en D y $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0$, y por tanto $I(\gamma, a) = 0$, $\forall a \notin D$.

Esta es una condición necesaria para que la curva γ satisfaga el teorema de Cauchy. Probaremos que también es suficiente.

1.1. LEMA: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y γ una curva cerrada en D. Entonces existe un camino cerrado σ en D, que incluso se puede elegir poligonal de lados paralelos a los ejes, tal que, cualquiera que sea la forma diferencial cerrada ω en D, se verifica

$$\int_\gamma \omega = \int_\sigma \omega$$

Demostr.: Sea $\gamma: t \in [a,b] \longmapsto \gamma(t) \in D$ una curva cerrada en D. Siendo D abierto, $\forall t \in [a,b]$, existe una bola $B(\gamma(t))$ de centro $\gamma(t)$ contenida en D. Incluso se pueden tomar las bolas $B(\gamma(t))$ todas con el mismo radio $\rho > 0$, sin más que tomar $0 < \rho < d(\gamma^*, \partial D)$, aunque en este caso no es preciso que tengan el mismo radio.

En virtud del LEMA 2.1. (Tema 9º), existe una partición $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ de $[a,b]$ tal que $\gamma([t_{i-1},t_i])\subset B_i=B(\gamma(t_i))$, $i=1,\dots,n$.
Sea $\gamma_i=\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$, $i=1,2,\dots,n$.
Siendo B_i disco, es simplemente conexo, y podemos elegir una poligonal σ_i en B_i (si se quiere de lados paralelos a los ejes) con los mismos extremos que γ_i. Por tanto, γ_i y σ_i son homótopas con extremos fijos en B_i, y si ω es una forma diferencial cerrada en D, y por tanto en B_i, se verifica que $\int_{\gamma_i}\omega=\int_{\sigma_i}\omega$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.
Si σ es la poligonal obtenida por yuxtaposición de las poligonales $\sigma_1,\dots,\sigma_n$, en este orden, se tiene que

$$\int_\gamma \omega=\sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i}\omega=\sum_{i=1}^n\int_{\sigma_i}\omega=\int_\sigma\omega. \quad \text{csqd.}$$

1.2. LEMA: Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y γ una curva cerrada en D. Entonces existe un camino cerrado σ en D (si se quiere poligonal de lados paralelos a los ejes) tal que

$$\forall f\in H(D),\quad \int_\gamma f(z)\,dz=\int_\sigma f(z)\,dz$$

y, en particular, $I(\gamma,a)=I(\sigma,a)$, $\forall a\in\mathbb{C}\setminus D$.

Demostr.: Basta observar que $\forall f\in H(D)$, $f(z)dz$ es cerrada en D y que si $a\notin D$, entonces la función $f(z)=\frac{1}{z-a}$ es holomorfa en D. ▨

1.3. TEOREMA: (Forma general del teorema de Cauchy).
Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y sean $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ curvas cerradas en D tales que $\sum_{k=1}^n I(\gamma_k,a)=0$, $\forall a\in\mathbb{C}\setminus D$. Entonces

$$\forall f\in H(D),\quad \sum_{k=1}^n\int_{\gamma_k}f=0.$$

Demostr.: Recordemos el teorema de los residuos para una función racional: Si R es una función racional con polos $a_1,\dots,a_m$ y γ es una curva cerrada en $\mathbb{C}$ tal que $(\gamma)\cap\{a_1,\dots,a_m\}=\emptyset$, entonces

$$\int_\gamma R(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^m Re(f,a_j)\,I(\gamma,a_j).$$

1) Supongamos en primer lugar que $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ son caminos cerrados (diferenciables con continuidad a trozos). Consideremos el compacto $K=(\gamma_1)\cup\dots\cup(\gamma_n)$ en D. Sea $\varepsilon>0$ arbitrario.
Sea $f\in H(D)$. En virtud del teorema de Runge (tomando, por ejemplo, $E=\overline{\mathbb{C}}\setminus D$) existe una función racional R con polos en

tal que $|f(z) - R(z)| < \frac{\epsilon}{nM}$, $\forall z \in K$, donde $M>0$ es una constante tal que $M > \max_{1\le i\le n} \text{long}(\gamma_i)$. Entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f\right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} |f(z) - R(z)| \cdot |dz| + \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} R(z)\,dz\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{nM} \text{long}(\gamma_k) + \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} R(z)dz\right| < \epsilon + \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} R(z)dz\right| \quad (\mathrm{I})$$

Sean $a_1, \dots, a_m \in E$ los polos de R. Por el teorema de los residuos para una función racional se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} R(z)dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \text{Re}(R, a_j) I(\gamma_k, a_j) =$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \text{Re}(R, a_j) \cdot \sum_{k=1}^{n} I(\gamma_k, a_j) = 0$$

pues, por hipótesis, $\sum_{k=1}^{n} I(\gamma_k, a) = 0$, $\forall a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D$. (II)

Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, se deduce de (I) y de (II) que $\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f = 0$

2) Consideremos ahora el caso general: $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curvas cerradas en D. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, por el lema anterior, existe un camino cerrado σ_k en D tal que $I(\gamma_k, a) = I(\sigma_k, a)$, $\forall a \notin D$, y $\int_{\gamma_k} f = \int_{\sigma_k} f$, $\forall f \in H(D)$.

Entonces $\sum_{k=1}^{n} I(\sigma_k, a) = \sum_{k=1}^{n} I(\gamma_k, a) = 0$, $\forall a \notin D$. De (1) se deduce entonces que $\sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} f = 0$ y, por tanto, $\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f = 0$, $\forall f \in H(D)$. c.q.d.

1.4. COROLARIO: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in H(D)$. Entonces

i) Si γ es una curva cerrada en D tal que $I(\gamma, a) = 0$, $\forall a \notin D$, entonces $\int_\gamma f = 0$.

ii) Si γ_0 y γ_1 son curvas cerradas en D tales que $I(\gamma_0, a) = I(\gamma_1, a)$, $\forall a \notin D$ entonces $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

iii) Si $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ es conexo, entonces para toda curva cerrada γ en D se verifica que $\int_\gamma f = 0$.

Demostr.: i) Basta hacer en el teorema anterior $n=1$.

ii) Las curvas cerradas γ_0 y $-\gamma_1$ satisfacen que $I(\gamma_0, a) + I(-\gamma_1, a) =$
$= I(\gamma_0, a) - I(\gamma_1, a) = 0$, $\forall a \notin D$ y, por tanto, $\int_{\gamma_0} f + \int_{-\gamma_1} f = 0$, es decir, $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

... conexo. Entonces, $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ es la componen-
te conexa de ∞ en $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$. Puesto que $(\gamma)\subset D$ se verifica que $\overline{\mathbb{C}}\setminus D\subset$ $\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus(\gamma)$ y, por tanto, $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ está contenido en la componente conexa no acotada de $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\gamma)$.

Sabemos que $I(\gamma,a)=0$ si a pertenece a la componente no acotada de $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\gamma)$. Por tanto, $I(\gamma,a)=0$, $\forall a\notin D$. De i) se sigue la tesis. ▨

B) DEFINICIONES: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$.

a) Sea γ una curva cerrada en D. Diremos que γ es D-homóloga a cero (u homóloga a cero en D u homológica a cero en D) si $I(\gamma,a)=0$, $\forall a\notin D$.

b) Si γ_0 y γ_1 son curvas cerradas en D tales que $I(\gamma_0,a)=I(\gamma_1,a)$, $\forall a\notin D$ se dice que γ_0 y γ_1 son D-homólogas o bien que γ_0 es homóloga a γ_1 en D.

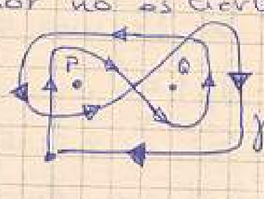
La homología en D es una relación de equivalencia en el conjunto de las curvas cerradas en D.

Si D y D' son abiertos de $\mathbb{C}$ tales que $D\subset D'$, entonces si γ es una curva en D D-homóloga a cero se verifica que es D'-homóloga a cero.

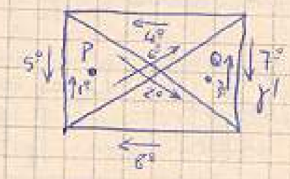
1.5. PROPOSICION: Si D es abierto en $\mathbb{C}$ y γ una curva cerrada homótopa a cero en D, entonces γ es homóloga a cero en D.

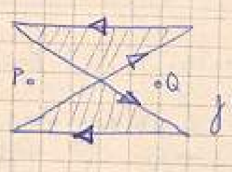
▷ Si $a\notin D$, $f(z)=\frac{1}{z-a}$ es holomorfa en D, y siendo γ homótopa a cero en D se verifica que $I(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=0$. ▨

OBSERVACION: El recíproco de la proposición anterior no es cierto.



La curva γ de la figura es homóloga a cero en $\mathbb{C}\setminus\{P,Q\}$, pero no homótopa a cero en dicho abierto. Notar que γ y γ' son homólogas en $\mathbb{C}\setminus\{P,Q\}$ y que, si $a=P$ ó $a=Q$, la integral de $\frac{1}{z-a}$ a lo largo de γ coincide con la integral de $1/z-a$ a lo largo de γ', la cual se reduce a calcular $\int_{\gamma''}\frac{dz}{z-a}$, que vale cero pues a está en la componente no acotada de $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\gamma'')$; luego $I(\gamma,P)=I(\gamma,Q)=0$ y, por tanto, γ es homóloga a cero en $\mathbb{C}\setminus\{P,Q\}$. Pero es claro que γ no se puede deformar continuamente en un punto sin pasar por P ó Q.





(*) No confundir que $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ sea conexo con que $\mathbb{C}\setminus D$ sea conexo. Si D es una banda (horizontal), p. ej. $D=\{x+iy\in\mathbb{C}/\ a<y<b\}$ con $a,b\in\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ es conexo pero $\mathbb{C}\setminus D$ no lo es.

1.6. COROLARIO: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ curvas cerradas en D.

a) Si γ es homóloga a cero en D, entonces $\int_\gamma f = 0$, $\forall f \in H(D)$.

b) Si γ_1 es homóloga a γ_2 en D entonces $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$, $\forall f \in H(D)$.

c) Si $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ es convexo, entonces para toda curva cerrada γ en D, γ es homóloga a cero en D.

▷ No es más que el COROLARIO 1.4. expresado en términos de homología. ▨

C) Nos proponemos definir una "suma" de arcos de forma que la proposición $\gamma_0 \sim \gamma_1 (D)$ (γ_0 homóloga a γ_1 en D) sea equivalente a decir que $\gamma_0 + (-\gamma_1) \sim 0 \, (D)$. Ya habíamos definido una suma de arcos en el sentido de yuxtaposición de arcos y se verificaba que

$$\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \dots + \int_{\gamma_n} \omega \qquad (\omega \text{ forma diferencial cerrada en } D)$$

supuesto que todas estas integrales tienen sentido.

DEFINICION: Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curvas en D. Llamaremos una cadena a la suma formal $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$ y definimos la integral de una función holomorfa f a lo largo de la cadena por

$$\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$$

Existen infinitas representaciones formales de una misma cadena. Se identifican dos sumas formales que dan la misma integral para toda forma diferencial (siempre que las integrales tengan sentido), es decir, si $\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} f(z)dz = \int_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m} f(z)dz$ para toda forma diferencial $f(z)dz$ para la que las integrales anteriores tienen sentido, entonces $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = \sigma_1 + \dots + \sigma_m$.

Por ejemplo: permutando arcos de una cadena seguimos obteniendo la misma cadena (la suma formal definida es conmutativa); "subdividiendo" arcos de una misma cadena obtenemos la misma cadena; la fusión de arcos (cuando se pueda), en el sentido de yuxtaposición, de una misma cadena da la misma cadena; la cancelación de arcos en su caso (si aparece un arco y su opuesto se pueden suprimir ambos) da la misma cadena.

La definición de suma de cadenas es obvia; la suma de cadenas idénticas la escribiremos en forma de múltiplos, es decir, si γ es una cadena, denotaremos $\gamma + \overset{(n)}{\dots} + \gamma$ por $n \cdot \gamma$.

De lo dicho, una cadena se puede representar por

$$\alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_n \gamma_n$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{Z}, i=1,\dots,n$ y $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ son arcos. Es decir: el conjunto de las cadenas es el módulo libre del conjunto de los arcos en el anillo $\mathbb{Z}$.

DEFINICION: (Ciclo)

Un ciclo es una cadena que admite una representación como suma de curvas cerradas.

Un ciclo en un abierto D de $\mathbb{C}$ es un ciclo que admite una representación como suma de curvas cerradas en D.

Todo lo que se ha dicho para curvas cerradas en un abierto D se puede extender para ciclos en D.

Por ejemplo: Sea γ un ciclo que admite una representación a cuya traza no pertenece $a \in D$. Tiene entonces sentido definir el índice de γ en a y las propiedades que conocemos del índice se mantienen. Si $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ y $a \notin (\gamma_1) \cup \dots \cup (\gamma_n)$ entonces $I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \frac{dz}{z-a}$. Se verifica que el índice de γ permanece constante sobre cada componente de $(\gamma)^c$, etc...

DEFINICION: Un ciclo γ en un abierto D se dice homólogo a cero en D si $I(\gamma, a) = 0$, $\forall a \notin D$. Dos ciclos γ_1, γ_2 en D se dicen homólogos en D si $I(\gamma_1, a) = I(\gamma_2, a)$, $\forall a \notin D$.

Es obvio que $\gamma_1 \sim \gamma_2 (D) \Leftrightarrow \gamma_1 - \gamma_2 \sim 0 (D)$.

1.7. COROLARIO: (Forma general del teorema de Cauchy).

Si γ es un ciclo en D homólogo a cero en D, entonces

$$\int_\gamma f = 0 \quad , \forall f \in H(D).$$

1.8. TEOREMA: (Fórmula integral de Cauchy)

Sea γ un ciclo en D homólogo a cero en D y sea $f \in H(D)$. Entonces $I(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$, $\forall a \notin (\gamma)$.

La demostración es totalmente análoga a la que se hizo en el caso de que γ sea una curva cerrada.

2. TEOREMA DE LOS RESIDUOS.

2.1. TEOREMA: (de los residuos)

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$, A un subconjunto de D y f una función holomorfa en $D \setminus A$ con singularidades aisladas en los puntos de A. Si γ es un ciclo en D homólogo a cero en D tal que $(\gamma) \cap A = \emptyset$ (es decir, tal que γ admite una representación cuya traza no corta a A). Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a\in A} \mathrm{Re}(f,a) I(\gamma,a)$$

Demostr.: Veamos en primer lugar que la suma $\sum_{a\in A} \mathrm{Re}(f,a) I(\gamma,a)$ es finita. Sea $G = \{a \in \mathbb{C}\setminus(\gamma) / I(\gamma,a)=0\}$. Entonces G es abto pues si $a \in G$ se tiene que $a \notin (\gamma)$ y, por tanto, existe una bola de centro a tal que $B(a) \cap (\gamma) = \emptyset$; luego $\forall z \in B(a)$, $I(\gamma,z)=0$ pues $B(a)$ está en una componente conexa de $(\gamma)^c$, donde el índice permanece constante. Además (γ) es compacto, por tanto (γ) está contenida en un cierto círculo de centro cero, fuera del cual el índice de γ es nulo. Luego G contiene el exterior de un cierto círculo del plano, y por tanto G contiene a la componente conexa no acotada de $(\gamma)^c$.

Se deduce que G^c es compacto, pues G es abto y G contiene al exterior de un cierto círculo.

Siendo $\gamma \sim 0\ (D)$, se verifica que $I(\gamma,a)=0$, $\forall a \notin D$. Luego $G^c \subset D$, pues si $a \notin D$ entonces $a \in G$.

Entonces G^c es un compacto en D.

Además A no posee puntos de acumulación en D (los puntos de A son singularidades aisladas de f). Entonces $G^c \cap A$ es finito pues en caso contrario existirían infinitos elementos de A en el compacto G^c y A tendría algún punto de acumulación en el compacto. Por tanto, la suma del enunciado es finita.

Además trivialmente

$$\sum_{a\in A} \mathrm{Re}(f,a)\cdot I(\gamma,a) = \sum_{a\in A\cap G^c} \mathrm{Re}(f,a) I(\gamma,a)$$

pues $I(\gamma,a)=0$ si $a\in G$.

Supongamos que $A \cap G^c = \{a_1,\dots,a_n\}$.

Para cada $j \in \{1,\dots,n\}$ podemos elegir una bola cerrada $\overline{B}(a_j,\delta_j)$ satisfaciendo lo siguiente:

i) $\overline{B}(a_j, \delta_j) \subset D \setminus (\gamma)$, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$.

ii) $\overline{B}(a_j, \delta_j) \cap A = \{a_j\}$ (por ser los puntos de A aislados)

iii) $\overline{B}(a_j, \delta_j) \cap \overline{B}(a_h, \delta_h) = \emptyset$ si $j \neq h$.

Puesto que A es discreto y D abierto, $D' = D \setminus A$ es abierto; sea C_j la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} / |z-a_j| = \delta_j\}$ orientada positivamente, para cada $j \in \{1,\dots,n\}$.

Probemos que γ es homólogo al ciclo $\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) \cdot C_j$ en D'.

Se trata de probar que si $a \notin D'$ entonces coinciden los índices de γ y de $\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) C_j$ en a.

Si $a \notin D$ entonces $I(\gamma, a) = 0$ e $I(C_j, a) = 0$, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ y, por tanto, en este caso es cierto.

Supongamos ahora que $a \in A \cap G$. Entonces $I(\gamma, a) = 0$, pues $a \in G$, y $a \neq a_j$, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$; entonces por ii), $a \notin \overline{B}(a_j, \delta_j)$, $\forall j$ y, por tanto, $I(C_j, a) = 0$, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$

Luego también $I(\gamma, a) = I(\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) C_j, a)$ si $a \in A \cap G$.

Supongamos ahora que $a \in A \cap G^c$; sea $h \in \{1,\dots,n\}$ tal que $a = a_h$. En este caso

$$I\left(\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) C_j, a_h\right) = I(\gamma, a_h) I(C_h, a_h) = I(\gamma, a_h)$$

pues $I(C_h, a_h) = 1$ e $I(C_j, a_h) = 0$ si $j \neq h$ por iii).

En virtud del teorema general de Cauchy

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) \int_{C_j} f(z)dz \qquad (I)$$

Puesto que f es holomorfa en una bola de centro a_j excepto en a_j, admite un desarrollo de Laurent en esa corona: $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n (z-a_j)^n$ y esta serie es uniformemente convergente sobre compactos de la corona y, en particular, sobre (C_j). Luego

$$\int_{C_j} f(z)dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n \int_{C_j} (z-a_j)^n dz = b_{-1} \int_{C_j} \frac{dz}{z-a_j} = 2\pi i \operatorname{Re}(f, a_j) I(C_j, a_j) =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Re}(f, a_j)$$

De esto y de (I) se deduce que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Re}(f, a_j) I(\gamma, a_j) = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Re}(f, a) I(\gamma, a) \quad \blacksquare$$