TEMA 23: PRINCIPIO DEL ARGUMENTO. TEOREMA DE ROUCHÉ.

1. PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

Comentario: Sea D abierto en $\mathbb{C}$. Sea $f \in H(D)$ y $a \in D$ un cero de orden m de f. Entonces existe una función $g \in H(D)$ tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$, $\forall z \in D$. La función g no se anula en un entorno $B(a)$ de a y, por tanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad \forall z \in B(a) \setminus \{a\}.$$

y $g'/g \in H(B(a))$.

Supongamos ahora que $f \in H(D \setminus \{a\})$ que a es un polo de orden m de f. Existe entonces una función $g \in H(D)$ tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^{-m} g(z)$, $\forall z \in D$. En una bola abierta de centro a, $B(a)$, ocurre

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad \forall z \in B(a) \setminus \{a\}.$$

y $g'/g \in H(B(a))$.

1.1. TEOREMA: (Principio del argumento)

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in M(D)$ con polos $p_1, \dots, p_m$ y ceros $z_1, \dots, z_n$, contados con sus órdenes de multiplicidad. Si γ es homólogo a cero en D (γ curva cerrada o ciclo en D) tal que $p_j \notin (\gamma)$ y $z_k \notin (\gamma)$, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} I(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^{m} I(\gamma, p_j)$$

Demostr.: Reiterando lo dicho en el comentario anterior podemos escribir que la función $g: z \in D \longmapsto g(z) = (z-z_1)^{-1} \cdots (z-z_n)^{-1} (z-p_1) \cdots (z-p_m) f(z) \in \mathbb{C}$ es holomorfa en D y no tiene ceros en D (supuesto que g se define por paso al límite en los ceros y en los polos de f).

Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-z_k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{z-p_j} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{si } z \notin \{z_1, \dots, z_n\} \cup \{p_1, \dots, p_m\}.$$

y $g'/g \in H(D)$. Por hipótesis, γ es homólogo a cero en D, se verifica por la forma general del teorema de Cauchy que $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$

Como $(\gamma) \cap [\{z_1,\dots,z_n\} \cup \{p_1,\dots,p_m\}] = \emptyset$ se verifica que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{n} I(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^{m} I(\gamma, p_j)$$

OBSERVACIONES: ① Si los índices de γ son 0 ó 1 entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z_f - P_f$$

donde Z_f es el número de ceros de f "encerrados" por γ y P_f el número de polos de f "encerrados" por γ (¡ojo! cuando γ sea un ciclo).

② Si γ es una curva cerrada

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \log_1 f(z_0) - \log_2 f(z_0) = i\,[\arg_1 f(z_0) - \arg_2 f(z_0)]$$

y, por tanto, $Z_f - P_f = \frac{1}{2\pi}[\arg_1 f(z_0) - \arg_2 f(z_0)]$.

1.2. TEOREMA: Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in M(D)$ con polos $p_1,\dots,p_m$ y ceros $z_1,\dots,z_n$ (contados con su orden). Sea $h \in H(D)$ y γ (curva cerrada o ciclo en D) homólogo a cero en D tal que $(\gamma)\cap[\{z_1,\dots,z_n\}\cup\{p_1,\dots,p_m\}] = \emptyset$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{n} h(z_k) I(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^{m} h(p_j) I(\gamma, p_j).$$

Demostr.: De la misma forma que en el teorema anterior se prueba que existe una función holomorfa g en D que no se anula en ningún punto de D tal que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k} - \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{z-p_j} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{si } z \notin \{z_1,\dots,z_n\}\cup\{p_1,\dots,p_m\}.$$

y, por tanto

$$h(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} h(z)\frac{1}{z-z_k} - \sum_{j=1}^{m} h(z)\frac{1}{z-p_j} + h(z)\frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{si } z\notin\{z_1,\dots,z_n\}\cup\{p_1,\dots,p_m\}$$

Integrando a lo largo de γ se deduce que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{n} h(z_k)\cdot I(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^{m} h(p_j) I(\gamma, p_j)$$

en virtud de la fórmula integral de Cauchy y por ser γ homólogo a cero. csqd.

1.3. COROLARIO: Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga la bola cerrada $\overline{B}(a,R)$ y supongamos que f es inyectiva en la bola abierta $B(a,R)$. Si $\Omega = f(B(a,R))$ y γ es la frontera de la bola $\overline{B}(a,R)$ orientada positivamente, entonces para cada $w \in \Omega$ se tiene

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)-w}\,d\xi$$

Demostr.: Puesto que f no es constante, Ω es abierto (f es abierta) y f^{-1} es holomorfa en Ω (f es inyectiva en $B(a,R)$ y, por tanto, $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in B(a,R)$). Probemos que si $w \in \Omega$, entonces $f(\xi) - w \neq 0$, $\forall \xi \in (\gamma)$. Sea $\xi \in (\gamma)$ y supongamos que $f(\xi) \in \Omega$; existe entonces una sucesión $(\xi_n)_n$ en $B(a,R)$ tal que $(\xi_n)_n \to \xi$ y, por tanto, $(f(\xi_n))_n \to f(\xi) \in \Omega$. Pero $f: B(a,R) \to \Omega$ es un homeomorfismo y, por tanto, se verificaría que $(f^{-1}(f(\xi_n)))_n \to f^{-1}(f(\xi))$, es decir, $(\xi_n)_n \to f^{-1}(f(\xi))$; puesto que $\xi \in (\gamma)$ y $f^{-1}(f(\xi)) \in B(a,R)$, llegamos a una contradicción con la unicidad del límite de $(\xi_n)_n$. Luego si $w \in \Omega$, $f(\xi) - w \neq 0$, $\forall \xi \in (\gamma)$.

Sean $z \in B(a,R)$ y $w \in \Omega$ tales que $f(z) = w$. Entonces la función $f(\xi) - w$ tiene un único cero (z) en $\overline{B}(a,R)$ (sobre la frontera no se anula y f es inyectiva en $B(a,R)$); además $f(\xi) - w$ no tiene polos por ser f holomorfa en un abierto que contiene a $\overline{B}(a,R)$.

Aplicando el teorema anterior a la función $f(\xi) - w$ y la curva γ (observar que γ es homóloga a cero en D — aún más, es homótopa a cero en D) en cuya traza no hay ceros ni polos de $f(\xi) - w$, y para la función $h(\xi) = \xi$ se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi) - w}\, d\xi = h(z)\, I(\gamma, z) = z = f^{-1}(w), \ \forall w \in \Omega. \text{ csqd.}$$

2. Teorema de Rouché

2.1. Teorema: (de Rouché)

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y f y g funciones meromorfas en D. Supongamos que $\overline{B}(a,R) \subset D$ y que f y g no tienen ceros ni polos en $\partial B(a,R)$. Supongamos además que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$, $\forall z \in \partial B(a,R)$. Entonces

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g$$

siendo Z_f, Z_g (resp., P_f, P_g) el número de ceros (resp., de polos) de f, g en $B(a,R)$, contados con su orden de multiplicidad.

Demostr.: Denotaremos por γ la curva cuya traza es $\partial B(a,R)$, que la recorre una sola vez en sentido positivo.

f y g no son idénticamente nulas (no se anulan en (γ)). Podemos suponer que D es conexo, pues si no lo fuese consideraríamos la componente conexa de $\overline{B}(a,R)$ en D. Entonces f/g es meromorfa en D. En particular $f/g \in \mathcal{C}(D, \overline{\mathbb{C}})$. Además, por hipótesis,

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1, \ \forall z \in (\gamma).$$

Luego $\dfrac{f(z)}{g(z)} \in B(1,1)$, $\forall z \in (\gamma)$.

Sea $D' = \{ z \in D / \frac{f(z)}{g(z)} \in B(1,1) \}$. Entonces D' es abierto pues f/g es continua y D' es la imagen inversa de $B(1,1)$ por f/g.

Además $(\gamma) \subset D'$, y en D' f/g es una función holomorfa (no puede tener polos en D' pues es acotada en D'). Entonces $\dfrac{(f/g)'}{(f/g)} \in H(D')$ ← ($\frac{f}{g}$ no tiene ceros en D') y tiene una primitiva holomorfa en D': $\mathrm{Log}\,\dfrac{f}{g}$, pues f/g transforma D' en un subconjunto de $B(1,1)$ donde la función logaritmo principal es holomorfa.

Como $(\gamma) \subset D'$ se verifica entonces que

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(f/g)'}{(f/g)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g)$$

en virtud del principio del argumento, pues γ es homóloga a cero en D y es una circunferencia. c.q.d.

<u>OBSERVACIONES</u>: ① En las hipótesis del teorema de Rouché, si $f, g \in H(D)$, entonces $Z_f = Z_g$.

② El teorema sigue siendo cierto si γ es una curva cerrada simple de Jordan homóloga a cero en D, pues en el teorema sólo se utiliza de γ que los índices son cero ó 1 y que es homóloga a cero en D (además de las hipótesis de f y g sobre (γ)).