TEMA 24: CARACTERIZACION DE LAS REGIONES SIMPLEMENTE CONEXAS. EL TEOREMA DE LA APLICACION DE RIEMANN.

1. CARACTERIZACION DE LAS REGIONES SIMPLEMENTE CONEXAS. TH. DE LA APLICACION DE RIEMANN.

1.1. TEOREMA: (Caracterización de las regiones simplemente conexas).

Si D es una región de $\mathbb{C}$, son equivalentes las siguientes proposiciones:

1) D es homeomorfo al disco unidad $\mathcal{U}$.
2) D es simplemente conexo.
3) $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ es conexo.
4) Toda curva cerrada en D es homóloga a cero en D, es decir, $I(\gamma,a)=0$ para toda curva γ cerrada en D y todo $a \notin D$.
5) Para cada $f\in H(D)$ y cada curva cerrada γ en D se verifica el teorema de Cauchy, es decir, $\int_\gamma f=0$.
6) $\forall f\in H(D), \exists F\in H(D) / F'=f$.
7) Si $f\in H(D)$ y no tiene ceros en D, entonces existe $g\in H(D)$ tal que $f=e^g$, es decir, toda función holomorfa en D sin ceros en D admite un logaritmo holomorfo en D.
8) Si $f\in H(D)$ y no tiene ceros en D, entonces existe $\varphi\in H(D)$ tal que $f=\varphi^2$, es decir, toda función holomorfa en D sin ceros en D admite una raiz cuadrada holomorfa en D.

Demostr.: $1)\Rightarrow 2)$ Por hipótesis existe un homeomorfismo $\psi: D\to\mathcal{U}$. Sea γ una curva cerrada en D y probemos que es homótopa a cero en D, con lo cual D será simplemente conexo. Supongamos que γ está parametrizada en $I=[0,1]$. Para cada $(t,u)\in I\times I$ definimos

$$H(t,u)=\psi^{-1}(u\,\psi(\gamma(t)))\in D.$$

H es trivialmente continua. Además

- $H(0,u)=H(1,u), \forall u\in I$, pues $H(0,u)=\psi^{-1}(u\psi(\gamma(0)))=\psi^{-1}(u\psi(\gamma(1)))=H(1,u), \forall u\in I$.
- $H(t,0)=\psi^{-1}(0), \forall t\in I$ y $H(t,1)=\gamma(t), \forall t\in I$.

Luego H es una homotopía entre la curva γ y el punto $\psi^{-1}(0)$.

$2)\Rightarrow 3)$ Supongamos que D es simplemente conexo y probemos que $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ es conexo. Siendo D abierto, $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ es cerrado.

Si $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ no fuese conexo existirían cerrados A y B de $\overline{\mathbb{C}}$ no vacíos que $\overline{\mathbb{C}} \setminus D = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Puesto que $D \subset \mathbb{C}$, $\infty \notin D$ y, por tanto, $\infty \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Supongamos que $\infty \in B$.

A es cerrado en $\overline{\mathbb{C}}$ y $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto; luego A es compacto en $\overline{\mathbb{C}}$, e $\infty \notin A$. Por tanto, A es compacto en $\mathbb{C}$, pues $\overline{\mathbb{C}}$ induce en $\mathbb{C}$ su propia topología.

Sea $D_1 = D \cup A = \overline{\mathbb{C}} \setminus B$, que es un abierto de $\mathbb{C}$ pues $\overline{\mathbb{C}} \setminus B$ es abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ e $\infty \notin \overline{\mathbb{C}} \setminus B$.

D_1 es abierto y A compacto $\subset D_1$. En virtud de PROPOSICION 1.1. (TEMA 21) existen segmentos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ en $D_1 \setminus A$ formando un número finito de poligonales cerradas $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ tales que

$$\forall f \in H(D_1),\ f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\, dw,\ \forall z \in A$$

o bien $\forall f \in H(D_1)$, $f(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_j} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$, $\forall z \in A$.

Tomando $f(w) = 1$, $\forall w \in D_1$ se deduce que $1 = \sum_{j=1}^{m} I(\sigma_j, z)$, $\forall z \in A$.

Entonces, si $z \in A$ ($A \neq \emptyset$), $\exists j \in \{1, \dots, m\} / I(\sigma_j, z) \neq 0$.

Pero $(\sigma_j) \subset D_1 \setminus A = D$ y, puesto que $z \in A$ se tiene que $z \notin D$. Como $I(\sigma_j, z) \neq 0$ se verifica que σ_j no es homóloga a cero en D y, por tanto, no homótopa a cero en D, con lo cual D no sería simplemente conexo. Luego $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ debe ser conexo.

$3) \Rightarrow 4)$ | COROLARIO 1.4. iii), TEMA 22.

$4) \Rightarrow 5)$ | COROLARIO 1.4. i), TEMA 22.

$5) \Rightarrow 6)$ | COROLARIO 2.9., TEMA 8°.

$6) \Rightarrow 7)$ | Demostración análoga a la del COROLARIO 2.5., TEMA 13.

$7) \Rightarrow 8)$ | COROLARIO 2.6, TEMA 13.

$8) \Rightarrow 1)$ | Supongamos que si $f \in H(D)$ y $f(z) \neq 0$, $\forall z \in D$, entonces existe $\varphi \in H(D)$ tal que $f = \varphi^2$, y se trata de probar que D es homeomorfo al disco unidad $\mathcal{U}$. Distinguiremos dos casos:

a) $D = \mathbb{C}$: La aplicación $z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{z}{1+|z|} \in \mathcal{U}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{C}$ en $\mathcal{U}$, como se comprueba fácilmente. La aplicación inversa es $w \in \mathcal{U} \longmapsto \frac{w}{1-|w|} \in \mathbb{C}$.

b) $D \neq \mathbb{C}$: La demostración de este caso se recoge en el teorema de la aplicación de Riemann, que enunciamos y probamos a parte.

DEFINICION: (Regiones conformemente equivalentes)

Sean D_1 y D_2 regiones de $\mathbb{C}$. Se dice que D_1 y D_2 son conformemente equivalentes si existe una aplicación biyectiva $\varphi: D_1 \to D_2$ biholomorfa.

1.2. TEOREMA: (de la aplicación de Riemann)

Sea $D \neq \mathbb{C}$ una región con la siguiente propiedad: Si f es holomorfa en D sin ceros en D entonces existe $\varphi \in H(D)$ tal que $\varphi^2 = f$. Entonces D es conformemente equivalente a $\mathcal{U}$.

OBSERVACION: Probado este teorema quedará más que probada la implicación 8) $\Rightarrow$ 1) del teorema anterior.

Demostr.: Sea $w_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ y sea

$$\Sigma = \{\varphi \in H(D) / \varphi \text{ inyectiva y } \varphi(D) \subset \mathcal{U}\}.$$

Probaremos los siguientes pasos: 1º) $\Sigma \neq \emptyset$, 2º) Si $\varphi \in \Sigma$ es tal que $\varphi(D) \subsetneq \mathcal{U}$ y $z_0 \in D$, entonces existe $\varphi_1 \in \Sigma / |\varphi_1'(z_0)| > |\varphi'(z_0)|$ y 3º) Fijo $z_0 \in D$, $\exists h \in \Sigma / |h'(z_0)| = \max\{|\varphi'(z_0)| / \varphi \in \Sigma\}$.

1º) $\Sigma \neq \emptyset$: La aplicación $f(z) = z - w_0$ es holomorfa en D y no tiene ceros en D, pues $w_0 \in \mathbb{C} \setminus D$. Por hipótesis, existe $\varphi \in H(D)$ tal que $\varphi^2(z) = z - w_0$, $\forall z \in D$. Observar que $\varphi(z) \neq 0$, $\forall z \in D$, es decir, $0 \notin \varphi(D)$. Veamos que φ es inyectiva: si $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ entonces $\varphi^2(z_1) = \varphi^2(z_2)$, es decir, $z_1 - w_0 = z_2 - w_0$ y, por tanto, $z_1 = z_2$.

Probemos que en $\varphi(D)$ no están simultaneamente un número y su opuesto, es decir, que si $w \in \varphi(D)$ entonces $-w \notin \varphi(D)$. En efecto: si se verificase que $w, -w \in \varphi(D)$, existirían $z_1, z_2 \in D$ tales que $\varphi(z_1) = w$ y $\varphi(z_2) = -w$ y, por tanto, $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$; elevando al cuadrado se deduce que $z_1 - w_0 = z_2 - w_0$ y, por tanto, $z_1 = z_2$, de donde se seguiría que $w = -w$ y, tambien, $w = 0$, contradice que $0 \notin \varphi(D)$. Luego en $\varphi(D)$ no hay dos valores opuestos.

Puesto que D es abierto conexo y φ inyectiva (por tanto, no constante) se verifica que $\varphi(D)$ es abierto. Sea $a \in \varphi(D)$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subset \varphi(D)$; elegiremos $r > 0$ de forma que $r < |a|$ (*)

Como $\varphi(D)$ no contiene valores opuestos se sigue que $\overline{B}(-a, r) \cap \varphi(D) = \emptyset$ pues si existiese $w \in \overline{B}(-a, r) \cap \varphi(D)$ se tendría que $-w \in \overline{B}(a, r) \subset \varphi(D)$ y se tendría que $w, -w \in \varphi(D)$, contra que $\varphi(D)$ no contiene valores opuestos.

En particular, $-a \notin \varphi(D)$. Entonces, la aplicación

$$\psi: z \in D \longmapsto \psi(z) = \frac{r}{\ldots}$$

es holomorfa en D, y es inyectiva por serlo φ.
Veamos que $\Psi(D) \subset \mathcal{U}$: Puesto que $\overline{B}(-a,r) \cap \varphi(D) = \emptyset$ se verifica que $|\varphi(z)+a| > r$, $\forall z \in D$ y, por tanto, $|\Psi(z)| < 1$, $\forall z \in D$.
Luego $\Psi \in \Sigma$ y, en consecuencia, $\Sigma \neq \emptyset$.

2º) Sean $\Psi \in \Sigma$ y $z_0 \in D$ tal que $\Psi(D) \subsetneq \mathcal{U}$. Probemos que existe $\Psi_1 \in \Sigma$ tal que $|\Psi_1'(z_0)| > |\Psi'(z_0)|$.

Por hipótesis, existe $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \notin \Psi(D)$. Recordemos (TEMA 15) que si $\xi \in \mathcal{U}$, se define $\varphi_\xi(z) = \dfrac{z-\xi}{1-\overline{\xi} z}$, y recordemos también las propiedades de esta aplicación recogidas en la PROPOSICIÓN 2.2. de dicho tema.

Entonces la aplicación $\varphi_\alpha \circ \Psi \in \Sigma$ (φ_α y Ψ son holomorfas e inyectivas en $\mathcal{U}$ y D, resp., y $\Psi(D) \subset \mathcal{U}$ y $\varphi_\alpha(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$).

Puesto que $\alpha \notin \Psi(D)$ y φ_α sólo se anula en α se verifica que $\varphi_\alpha \circ \Psi$ no tiene ceros en D. Por la hipótesis del teorema, existe $g \in H(D)$ tal que $g^2 = \varphi_\alpha \circ \Psi$. Además, trivialmente, $g(D) \subset \mathcal{U}$.
También g es inyectiva, pues si $g(z_1) = g(z_2)$ ($z_1, z_2 \in D$) se sigue que $g^2(z_1) = g^2(z_2)$ y, por tanto, $z_1 = z_2$ por ser g^2 inyectiva. Luego $g \in \Sigma$.
Sea $\beta = g(z_0)$ y $\Psi_1 = \varphi_\beta \circ g$. Entonces $\Psi_1 \in H(D)$, Ψ_1 es inyectiva y $\Psi_1(D) \subset \mathcal{U}$. Luego $\Psi_1 \in \Sigma$. Veamos que esta Ψ_1 es la que buscamos.

Denotemos por S la aplicación $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \mapsto w^2$. Entonces
$\Psi = \varphi_{-\alpha} \circ g^2 = \varphi_{-\alpha} \circ S \circ g = \varphi_{-\alpha} \circ S \circ \varphi_{-\beta} \circ \Psi_1 = F \circ \Psi_1$ donde
$F = \varphi_{-\alpha} \circ S \circ \varphi_{-\beta}$. Como $\Psi_1(z_0) = \varphi_\beta(g(z_0)) = \varphi_\beta(\beta) = 0$ se tiene que
$\Psi'(z_0) = F'(0) \cdot \Psi_1'(z_0)$, por la regla de la cadena.
Además es trivial que $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. (*)
Probemos que $|F'(0)| < 1$.
De lo probado en el tema 15 (aptdo. 2. LEMA DE SCHWARTZ) se deduce que $|F'(0)| \leq 1 - |F(0)|^2$ y la igualdad se da sii F es inyectiva. Puesto que F no es inyectiva se sigue que $|F'(0)| < 1 - |F(0)|^2 \leq 1$ y, por tanto, $|F'(0)| < 1$.

Veamos ya que $|\Psi'(z_0)| < |\Psi_1'(z_0)|$.
Siendo Ψ_1 inyectiva, si $w = \Psi_1(z_0)$, la ecuación $\Psi_1(z) = w$ tiene una única raíz (z_0) que es necesariamente simple, pues de ser lo contrario llegaríamos a un absurdo con que Ψ_1 es inyectiva utilizando TEOREMA 2.5 (Tema 14º).
Siendo z_0 raíz simple de $\Psi_1(z) = w$ se verifica que $\Psi_1'(z_0) \neq 0$ y, por tanto $|\Psi'(z_0)| = |F'(0)| \cdot |\Psi_1'(z_0)| < |\Psi_1'(z_0)|$.

3º) Sea $z_0 \in D$ y, probemos que $\exists h \in \Sigma / |h'(z_0)| = \max\{|\Psi'(z_0)| / \Psi \in \Sigma\}$.

Sea $z_0 \in D$. Siendo $\Sigma \neq \emptyset$ podemos considerar

$$\eta = \sup\{|\Psi'(z_0)| / \Psi \in \Sigma\} \in]0, +\infty]$$

Buscamos $h \in \Sigma$ tal que $|h'(z_0)| = \eta$.

Por definición de Σ se tiene que $|\Psi(z)| < 1$, $\forall \Psi \in \Sigma$, $\forall z \in D$ y, en particular, para todo compacto $K \subset D$ se tiene que $\sup_{\substack{z \in K \\ \Psi \in \Sigma}} |\Psi(z)| < +\infty$.

Por el teorema de Montel, Σ es relativamente compacto en $H(D)$.

De la definición de η se deduce que existe una sucesión $\{\Psi_n\}_n$ en Σ tal que $\{|\Psi_n'(z_0)|\}_n \longrightarrow \eta$. Siendo Σ relativamente compacto, la sucesión $\{\Psi_n\}_n$ admite una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{\Psi_n\}_n$, convergente en $H(D)$, es decir, existe $h \in H(D)$ tal que $\{\Psi_n\}_n \xrightarrow[H(D)]{} h$. Por tanto, $\{|\Psi_n'(z_0)|\}_n \longrightarrow |h'(z_0)|$.

Luego $\exists h \in H(D)$ tal que $|h'(z_0)| = \eta > 0$. Se deduce de esto que $\eta < +\infty$ y que h no es constante.

Siendo h holomorfa no constante en la región D, se verifica que es abierta y, portanto, $h(D)$ es abierto. Como $\Psi_n(D) \subset \mathcal{U}$ se verifica que $h(D) \subset \overline{\mathcal{U}}$ y siendo $h(D)$ abierto, se tiene que $h(D) \subset \mathcal{U}$.

Probemos que h es inyectiva, con lo cual $h \in \Sigma$, como queramos probar.

Sean $z_1, z_2 \in D$ tales que $z_1 \neq z_2$. Sea $\alpha = h(z_1)$ y probemos que $h(z_2) \neq \alpha$.

Sea $\alpha_n = \Psi_n(z_1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Siendo $z_1 \neq z_2$ existe una bola $\overline{B}(z_2)$ de centro z_2 contenida en D tal que $z_1 \notin \overline{B}(z_2)$.

Puesto que cada Ψ_n es inyectiva, la ecuación $\Psi_n(z) - \alpha_n = 0$ no tiene ceros en $B(z_2)$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

Además $\{\Psi_n - \alpha_n\}_n$ converge a $h - \alpha$ uniformemente en $\overline{B}(z_2)$.

Por el teorema de Hurwitz aplicado a la bola $B(z_2)$ se verifica que ó $h - \alpha \equiv 0$ en $B(z_2)$ ó $h - \alpha$ no tiene ceros en $B(z_2)$.

Si fuese $h(z) = \alpha$, $\forall z \in B(z_2)$ siendo $h \in H(D)$ y D región se tendría que $h(z) = \alpha$, $\forall z \in D$, en contra de que h no es constante.

Luego $h(z) - \alpha = 0$ no tiene ninguna raiz en $B(z_2)$ y, en particular, $h(z_2) \neq \alpha = h(z_1)$.

Luego h es inyectiva y, por tanto, $h \in \Sigma$ satisface 3º).

Resumiendo: hemos probado 1º) $\Sigma \neq \emptyset$, 2º) Si $\Psi \in \Sigma$ es tal que $\Psi(D) \subsetneq \mathcal{U}$ y $z_0 \in D$ entonces existe $\Psi_1 \in \Sigma / |\Psi_1'(z_0)| > |\Psi'(z_0)|$ y 3º) Si $z_0 \in D$, existe $h \in \Sigma / |h'(z_0)| = \max\{|\Psi'(z_0)| / \Psi \in \Sigma\}$.

aplicación h obtenida en 3º) es necesariamente sobre (por tanto, biyectiva)(*) pues si no lo fuese, en virtud de 2º) existiría $\varphi_1 \in \Sigma$ tal que $|\varphi_1'(z_0)| > |h'(z_0)|$ en contra de que $|h'(z_0)| = \max\{|\varphi'(z_0)| / \varphi \in \Sigma\}$ ▨

<u>OBSERVACIONES:</u>

a) Se puede exigir que h verifique que $h'(z_0) = \sup_{\varphi\in\Sigma} |\varphi'(z_0)| > 0$, pues si la h obtenida no lo verificase bastará multiplicar h por $e^{i\theta}$, para un θ adecuado de forma que $e^{i\theta} h'(z_0) = |h'(z_0)|$.

b) Veamos también que $h(z_0) = 0$. Si fuese $h(z_0) = \beta \in \mathcal{U}\setminus\{0\}$ se tendría que $\varphi_\beta \circ h \in \Sigma$ (trivial) y

$$|(\varphi_\beta \circ h)'(z_0)| = |\varphi_\beta'(\beta)\cdot h'(z_0)| = \frac{|h'(z_0)|}{1-|\beta|^2} > |h'(z_0)|$$

contra que h satisface 3º).

c) h verifica, no solo que $|h'(z_0)| = \max\{|\varphi'(z_0)| / \varphi \in \Sigma\}$, sino

$$|h'(z_0)| = \max\{|\varphi'(z_0)| / \varphi \in H(D),\ \varphi(D) \subset \mathcal{U}\}.$$

En efecto: De la misma forma que se hizo en 3º) se prueba que existe $f \in H(D)$ tal que $f(D) \subset \mathcal{U}$ y $|f'(z_0)| = \max\{|\varphi'(z_0)| / \varphi \in H(D), \varphi(D) \subset \mathcal{U}\}$

Igual que en **b)** se prueba que $f(z_0) = 0$. Sea $g = f \circ h^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

Puesto que h es biholomorfa y $f \in H(D)$ se verifica que $g \in H(\mathcal{U})$.

También $g(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. Además $g(0) = 0$. Luego g está en las hipótesis del lema de Schwartz.

Se verifica entonces que $|g'(0)| \le 1$. Pero

$$|g'(0)| = \frac{|f'(z_0)|}{|h'(z_0)|}$$

Luego $|f'(z_0)| \le |h'(z_0)|$, es decir, $|h'(z_0)| \ge \max\{|\varphi'(z_0)| / \varphi \in H(D), \varphi(D) \subset \mathcal{U}\}$ y, por tanto, $|h'(z_0)| = \max\{|\varphi'(z_0)| / \varphi \in H(D), \varphi(D) \subset \mathcal{U}\} = |f'(z_0)|$.

Del lema de Schwartz se deduce también que, puesto que $|g'(0)| = 1$, g es una rotación, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$ y $g(\xi) = \lambda\xi$, $\forall \xi \in \mathcal{U}$. Luego $f(z) = \lambda h(z)$, $\forall z \in D$.

Puesto que h es inyectiva, también lo es f, que por tanto es conforme.

d) Probemos que h es la única aplicación biyectiva biholomorfa de D en $\mathcal{U}$ que verifica $h'(z_0) = \sup_{\varphi\in\Sigma} |\varphi'(z_0)|$. Supongamos que existen dos: h_1 y h_2.

Entonces $h_1(z_0) = h_2(z_0) = 0$. Las funciones $h_1 \circ h_2^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ y $h_2 \circ h_1^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ están en las hipótesis del lema de Schwartz (son holomorfas en $\mathcal{U}$ y $(h_1 \circ h_2^{-1})(0) = 0$ y $(h_2 \circ h_1^{-1})(0) = 0$. Se concluye de dicho lema que $|h_1'(z_0)| \le |h_2'(z_0)|$ y $|h_2'(z_0)| \le |h_1'(z_0)|$ y, por tanto, se da la igualdad.

El lema de Schwartz asegura también que $\exists \lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| = 1$ y $h_2 = \lambda h_1$. Si exigimos que $h_1'(z_0) = h_2'(z_0) = \eta$, se sigue que $h_1 \equiv h_2$.

(*) La aplicación h encontrada es biyectiva y holomorfa y, por tanto, biholomorfa. Luego D y $\mathcal{U}$ son conformemente equivalentes. Con esto acaba la demostración del teorema.