TEMA 25: PRODUCTOS INFINITOS

1. PRODUCTOS INFINITOS.

DEFINICIÓN: Sea $(u_n)_n$ una sucesión de números complejos y denotemos $p_n=(1+u_1)\cdots(1+u_n)$. Si existe $\lim_{n\to\infty} p_n = p\in\mathbb{C}$ diremos que p es el producto infinito de la sucesión $(1+u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y lo denotaremos: $p=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

Si $(u_n)_n$ es una sucesión de números positivos, estudiar el producto infinito de dicha sucesión equivale a estudiar la serie de los logaritmos de los u_n's. Se suele escribir la sucesión en la forma $1+u_n$ para que cuando u_n tienda a cero, $1+u_n$ tienda a 1 y, por tanto, la sucesión de logaritmos tiende a cero.

1.1. LEMA: Sean $u_1,\dots,u_N\in\mathbb{C}$ y $p_N=\prod_{n=1}^{N}(1+u_n)$ y $p_N^*=\prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|)$. Entonces

$$p_N^*\le e^{|u_1|+\cdots+|u_N|} \quad \text{y} \quad |p_N-1|\le p_N^*-1.$$

Demostr.: Recordemos que $e^x\ge 1+x$, $\forall x\ge 0$. Por tanto $1+|u_n|\le e^{|u_n|}$, $\forall n\in\{1,\dots,N\}$. Luego $p_N^*\le e^{|u_1|+\cdots+|u_N|}$.
Probemos ahora que $|p_N-1|\le p_N^*-1$.
Es trivial si $N=1$ pues quedaría $|u_1|\le|u_1|$.
Supongamos que es cierto para $N=K$ y probémoslo para $N=K+1$.

$$|p_{K+1}-1| = |p_K(1+u_{K+1})-1| = |(p_K-1)(1+u_{K+1})+u_{K+1}|\le$$
$$\le |p_K-1|(1+|u_{K+1}|)+|u_{K+1}|\le (p_K^*-1)(1+|u_{K+1}|)+|u_{K+1}| =$$
$$= p_K^*(1+|u_{K+1}|)-1 = p_{K+1}^*-1. \quad \text{csqd.}$$

1.2. TEOREMA: Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas acotadas, definidas en un conjunto S de forma que $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(s)|$ converge uniformemente en $s\in S$. Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$ converge uniformemente en S a una función $f:S\to\mathbb{C}$ y se verifica: $f(s_0)=0 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}/u_n(s_0)=-1$.
Además si $\{n_1,\dots,n_j,\dots\}$ es una permutación de $\mathbb{N}$ entonces $f(s)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_{n_k}(s))$, $\forall s\in S$ y la convergencia es uniforme en S.

Demostr.: Como $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ converge uniformemente en S y cada u_n es acotada en S se verifica que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ define una función acotada en S. Si $p_N(s)$ denota el N-ésimo producto parcial de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$, se verifica en virtud del lema anterior que

$$\exists\, c<+\infty \;/\; |p_N(s)| \le c, \ \forall N \in \mathbb{N}, \forall s \in S$$

pues $p_N^*(s)$ está uniformemente acotado en N y s.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < 1/2$. Existe entonces $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \varepsilon, \ \forall s \in S.$$

en virtud de la hipótesis de convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$.

Sea $\{n_1, \dots, n_j, \dots\}$ una permutación de $\mathbb{N}$.

Dado $N \ge N_0$, sea $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$\{1, \dots, N\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_M\} \quad (1)$$

Obviamente $M \ge N$. Sea $q_M(s) = \prod_{k=1}^{M}(1+u_{n_k}(s))$. Entonces

$$q_M(s) - p_N(s) = p_N(s)\Big[\prod_{\substack{1\le k\le M \\ n_k \ne 1,\dots,N}} (1+u_{n_k}(s)) - 1\Big]$$

Por el lema anterior

$$\Big|\prod_{\substack{1\le k\le M \\ n_k \ne 1,\dots,N}} (1+u_{n_k}(s)) - 1\Big| \le \prod_{\substack{1\le k\le M \\ n_k \ne 1,\dots,N}} (1+|u_{n_k}(s)|) - 1 \le e^{\sum_{\substack{1\le k\le M \\ n_k \ne 1,\dots,N}} |u_{n_k}(s)|} - 1 < e^{\varepsilon} - 1, \ \forall s \in S$$

pues si $1 \le k \le M$ y $n_k \ne 1, \dots, N$ se tiene que $n_k \ge N \ge N_0$ y, por tanto,

$$\sum_{\substack{1\le k\le M \\ n_k \ne 1,\dots,N}} |u_{n_k}(s)| \le \sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \varepsilon, \ \forall s \in S.$$

Luego $|q_M(s) - p_N(s)| \le |p_N(s)| \cdot (e^{\varepsilon} - 1) \le c\,2\varepsilon$, $\forall s \in S$

La última desigualdad es cierta por lo siguiente: la función $\varphi(x) = e^x - 1 - 2x$ verifica que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi'(x) = e^x - 2 < 0$ si $x < \frac{1}{2}$ y suponíamos $\varepsilon < \frac{1}{2}$; luego $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varphi(\varepsilon) < \varphi(0) = 0$, es decir $e^{\varepsilon} - 1 < 2\varepsilon$.

Luego $|q_M(s) - p_N(s)| \le c\,2\varepsilon$, $\forall s \in S$, si $N \ge N_0$ y M es tal que se verifica (1).

Si $n_k = k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ entonces $q_M = p_M$ y, por tanto, $(p_N(s))_N$ es uniformemente de Cauchy en S y, por tanto, converge uniformemente a una función $f: S \to \mathbb{C}$.

Además si $\exists n \in \mathbb{N} / u_n(s_0) = -1$ $(s_0 \in S)$ entonces $f(s_0) = 0$, pues los productos parciales se anulan a partir del n-ésimo. Veamos ahora que si $f(s_0) = 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n(s_0) = -1$

$\forall M > N_0$, $\forall s \in S$, $|p_M(s) - p_{N_0}(s)| \le |p_{N_0}(s)|\, 2\varepsilon$.

Entonces $|p_M(s)| \ge (1-2\varepsilon)|p_{N_0}(s)|$, $\forall s \in S$, $\forall M > N_0$ pues $|p_{N_0}(s)| - |p_M(s)| \le |p_{N_0}(s)|\, 2\varepsilon$

Luego $|f(s)| = \lim_{M\to\infty} |p_M(s)| \ge (1-2\varepsilon)|p_{N_0}(s)|$, $\forall s \in S$.

$p_{N_0}(s_0)=0$ y, siendo p_{N_0} un producto finito, existe $n\leq N_0$ tal que $u_n(s_0)=-1$.

Veamos ahora qué ocurre con la serie reordenada.

Para el $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<\frac{1}{2}$) elegido vimos que existe $N_0\in\mathbb{N}$ tal que si $N\geq N_0$ y $M\in\mathbb{N}$ es tal que se verifica (1) entonces $|q_M(s)-p_N(s)|<2c\varepsilon$. (I)

Dado $N_0\in\mathbb{N}$ sea $\nu\in\mathbb{N}$ tal que $\{1,\dots,N_0\}\subset\{n_1,\dots,n_\nu\}$. Si $M,M'\geq\nu$ entonces $|q_M(s)-q_{M'}(s)|\leq|q_M(s)-p_{N_0}(s)|+|p_{N_0}(s)-q_{M'}(s)|<4c\varepsilon$, $\forall s\in S$. Luego $\exists\nu\in\mathbb{N}\,/\,M,M'\geq\nu\Rightarrow|q_M(s)-q_{M'}(s)|<4c\varepsilon$, $\forall s\in S$.

Notar que N_0 depende de ε y ν depende de N_0; luego ν depende solo de ε.

Entonces $\{q_M(s)\}_M$ es uniformemente de Cauchy en S. Luego es uniformemente convergente a una función que es precisamente $f:S\to\mathbb{C}$ como se deduce de (I) sin más que tomar límite cuando N tiende a $+\infty$ (y por tanto, $M\to+\infty$). csqd.

1.3. PROPOSICION: Supongamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $0\leq u_n<1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)>0$ si, y solo si, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n<+\infty$.

Demostr.: Si denotamos $p_N=(1-u_1)\cdots(1-u_N)$ se verifica trivialmente que $p_1\geq p_2\geq\dots\geq p_N>0$, $\forall N\in\mathbb{N}$. Por tanto, existe $p=\lim_{N\to\infty}p_N$ y $p\geq 0$.

$\Leftarrow$] Si $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ es convergente, por el teorema anterior aplicado a la sucesión de funciones constantes $(u_n)_n$, se verifica que $p\neq 0$ y, por tanto, $p>0$, pues $1-u_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$] Si fuese $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=+\infty$ se verificaría

$$p\leq p_N=\prod_{n=1}^{N}(1-u_n)\leq e^{-u_1-\dots-u_N}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$ y se tendría $p=0$. csqd.

1.4. TEOREMA: Sea D abierto de $\mathbb{C}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H(D)$ tal que cada f_n no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de D. Si $\sum_{n=1}^{\infty}|1-f_n(z)|$ converge uniformemente en compactos de D entonces $\prod_{n=1}^{\infty}f_n$ converge en $H(D)$, es decir, existe $f\in H(D)$ tal que $f=\prod_{n=1}^{\infty}f_n$ y la convergencia es uniforme sobre compactos.

Además, para cada $z\in D$, $m(f,z)=\sum_{n=1}^{\infty}m(f_n,z)$, donde $m(f,z)\in\mathbb{N}_0$ denota el orden del cero z para f.

Demostr.: Para cada n definimos $u_n=f_n-1$. Sea K compacto $\subset D$. Las funciones u_n son acotadas en K por serlo las f_n. Por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ converge uniformemente en K. Por TEOREMA 1.2, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=\prod_{n=1}^{\infty}f_n$ converge uniformemente en K. Si $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}f_n(z)$, $\forall z\in D$, entonces $f\in H(D)$.

Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty}m(f_n,z_0)$ es una suma finita, $\forall z_0\in D$.

Sea $z_0 \in D$ y $\overline{B}(z_0) \subset D$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |1-f_n(z)|$ converge uniformemente en $\overline{B}(z_0)$ se verifica que $(|1-f_n(z)|)_n \to 0$ uniformemente en $\overline{B}(z_0)$. Entonces $\exists \nu \in \mathbb{N}$ / f_n no se anula en $\overline{B}(z_0)$ si $n \geq \nu$ y, en particular, $m(f_n, z_0) = 0$, $\forall n \geq \nu$.

Por el teorema 1.2 para $S = \overline{B}(z_0)$ y la sucesión $(f_n)_{n \geq \nu}$ se verifica que $\prod_{n=\nu}^{\infty} f_n$ no tiene ceros en $\overline{B}(z_0)$.

Pero $f(z) = f_1(z) \cdots f_{\nu-1}(z) \cdot \prod_{n=\nu}^{\infty} f_n(z)$, $\forall z \in \overline{B}(z_0)$, y la función $\prod_{n=\nu}^{\infty} f_n$ es holomorfa en $B(z_0)$ y no tiene ceros en $B(z_0)$. Luego

$$m(f, z_0) = \sum_{n=1}^{\nu-1} m(f_n, z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z_0). \quad \text{csqd.}$$

OBSERVACIONES: ① Si $f(z) \neq 0$ entonces $m(f, z) = 0$ y, por tanto, será $m(f_n, z) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

② Si f_n no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de D, entonces $m(f_n, z) \in \mathbb{N}_0$, $\forall z \in D$ (el orden no es nunca infinito).

③ El hecho de que f_n no sea idénticamente nula en ninguna componente conexa no restringe nada, pues si alguna f_n fuese idénticamente nula en alguna componente conexa de D, también f sería idénticamente nula en dicha componente.

④ El teorema anterior es igualmente cierto si D es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$. En este caso habría que hablar de convergencia uniforme sobre compactos de D y, si $\infty \in D$, se entenderá que ∞ es un punto regular para cada f_n: de la misma forma que en el teorema se prueba que $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sobre compactos de $D \setminus \{\infty\}$ y, por tanto, $f \in H(D \setminus \{\infty\})$. Veamos que si $\infty \in D$ entonces es un punto regular de f: consideremos el compacto $\overline{B}_\chi(\infty, r) \subset D$ donde $\overline{B}_\chi(\infty, r)$ es la bola cerrada de centro ∞ y radio r respecto de la métrica cordal. Como $f_n \in H(D)$, $\forall n$ se sigue que f_n es acotada en $\overline{B}_\chi(\infty, r)$, $\forall n$. Sea $u_n = f_n - 1$, $\forall n$. Por el teorema anterior se tendrá que $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a una función f que es acotada en $\overline{B}_\chi(\infty, r)$, y por tanto, ∞ es un punto regular de f. Además se prueba igual que antes (tomando la bola $\overline{B}_\chi(\infty, r)$) que $m(f, \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, \infty)$.