TEMA 26: EL TEOREMA DE FACTORIZACION DE WEIERSTRASS.

1. FACTORES ELEMENTALES

Sabemos que si D es una región y $f \in H(D)$ no es idénticamente nula, entonces el conjunto de los ceros de f en D es discreto, es decir, Z_f es discreto, y esto es lo más que se puede decir desde un punto de vista cualitativo. El problema que nos planteamos ahora es el siguiente: Sea A un subconjunto discreto de D; ¿existirá $f \in H(D)$ tal que $Z_f = A$? (*)

Si A es finito, el problema es trivial.

Por supuesto, si A es discreto en D es, a lo sumo, numerable.

DEFINICION: (Factores elementales).

Las siguientes funciones se denominan factores elementales:

$$E_0(z) = 1 - z \quad \text{y si } p \in \mathbb{N}, \quad E_p(z) = (1-z)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}}.$$

Los factores elementales son funciones enteras y tienen un único cero simple en el punto $z = 1$.

1.1. LEMA: Si $|z| \leq 1$ y $p \in \mathbb{N}_0$, entonces se verifica

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1} \quad (1)$$

Demostr.: El caso $p = 0$ es trivial: (1) se reduce a $|z| \leq |z|$.

Supongamos $p \geq 1$. La derivada de $-E_p$ es

$$-E_p'(z) = e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}} + (z-1)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}} (1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1}) =$$

$$= z^p e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}}$$

Luego $-E_p'$ tiene un cero de orden p en $z = 0$. Además es una función entera cuyo desarrollo de Taylor tiene coeficientes reales no negativos (teorema de sustitución de series).

Si denotamos por $[0,z]$ el segmento $\{\lambda z \,/\, \lambda \in [0,1]\}$ se tiene que

$$1 - E_p(z) = -\int_{[0,z]} E_p'(\xi)\, d\xi$$

Escribiendo el ~~desa~~ desarrollo de Taylor de $E_p'(\xi)$, la integral anterior se puede hacer término a término en dicho desarrollo y, por tanto, $1 - E_p(z)$ tiene un cero de orden $p+1$ en $z = 0$ (observar que el primer sumando en el desarrollo de $-E_p'$ es z^p).

(*) Observar que a veces denotamos por Z_f el número de ceros encerrados por una cierta curva cerrada y otras veces Z_f denota el conjunto de los ceros de una función dada.

Si hacemos $\varphi(z)=\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$, se tiene que φ poseen un desarrollo en serie de Taylor con coeficientes reales no negativos:

$$\varphi(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n, \ \forall z\in\mathbb{C}$$

con $a_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Entonces

$$|\varphi(z)|\leq \sum_{n\geq 0} a_n|z|^n \leq \sum_{n\geq 0} a_n = \varphi(1) = \frac{1-E_p(1)}{1^{p+1}} = 1, \text{ pues } |z|\leq 1.$$

Luego $|\varphi(z)|\leq 1$ si $|z|\leq 1$ y, por tanto, $|1-E_p(z)|\leq |z|^{p+1}$ si $|z|\leq 1$. ▨

1.2. TEOREMA: Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $z_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow +\infty$. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números naturales tales que $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}<+\infty$, $\forall r>0$ donde $r_n=|z_n|$, entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ define una función entera $P(z)$ que tiene un cero en cada z_n y no tiene otros ceros. (*)

Además, si $\alpha\in\mathbb{C}$ aparece repetido exactamente K veces en la sucesión $(z_n)_n$ entonces es un cero de orden K de $P(z)$.

Demostr.: Probaremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$, con lo cual definirá una función entera.

Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ y sea $r>0$ tal que $|z|\leq r$, $\forall z\in K$.

Puesto que $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ se verifica que $\exists \nu\in\mathbb{N} / r\leq |z_n|$, $\forall n\geq\nu$.

Luego $\forall n\geq \nu$, $|z|\leq r\leq |z_n|$, $\forall z\in K$, por tanto $\left|\frac{z}{z_n}\right|\leq 1$, $\forall n\geq\nu$, $\forall z\in K$.

Por el lema anterior se verifica que

$$\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1}, \ \forall n\geq\nu.$$

Como $|z|\leq r$ y $|z_n|=r_n$, $\forall n$ se verifica que

$$\forall n\geq\nu, \ \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1}\leq \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}, \ \forall z\in K$$

Por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}$ es convergente.

Por el criterio de Weierstrass $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1}$ converge uniformemente en K y, por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ converge uniformemente en K.

Luego $\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. Por el teorema 1.4. (Tema 25) se verifica que $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ converge en $H(\mathbb{C})$ a una función entera $P(z)$.

Además $m(P,z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} m\left(E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right), z_0\right)$, $\forall z_0\in\mathbb{C}$.

$E_{p_n}(z)$ tiene un único cero simple en $z=1$ y, por tanto $E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ tiene un único cero simple en $z=z_n$. Luego $\forall K\in\mathbb{N}$, $m(P,z_K)=1$ y si $\alpha\notin\{z_K\}_{K\in\mathbb{N}}$ entonces $m(P,\alpha)=0$. c.s.q.d.

OBSERVACIONES: ① La hipótesis de que la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ verifique que $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}<+\infty, \forall r>0$ no es tan fuerte como pudiera parecer en principio. Incluso se puede encontrar una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ que sirve para toda sucesión $(r_n)_n \longrightarrow +\infty$. En efecto: sea $p_n = n-1, \forall n\in\mathbb{N}$. $\forall r>0, \exists \nu\in\mathbb{N} / r<\frac{1}{2} r_n$ si $n\geq \nu$ pues $(r_n)_n \to +\infty$. Luego

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} << \sum_{n=\nu}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}<+\infty$$

y, por tanto, $\forall r>0, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{n}<+\infty$.

Sin embargo, para sucesiones particulares $(z_n)_n$ tales que $(|z_n|)_n \to +\infty$ pueden existir sucesiones $(p_n)_n$ satisfaciendo la hipótesis del teorema que sirvan mejor a nuestros propósitos que la sucesión $(n-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

② Es interesante la siguiente cuestión: ¿cuándo existe, para una sucesión dada $(z_n)_n$ con $(|z_n|)_n \to +\infty$, una sucesión $(p_n)_n$ constante ($p_n=p, \forall n$) que satisfaga la hipótesis del teorema?; y en caso de existir, ¿cuál es el menor natural p que lo verifica?; si p es dicho natural al producto $\prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)$ se le llama un producto canónico.

2. TEOREMA DE FACTORIZACION DE WEIERSTRASS.

2.1 TEOREMA: (de factorización de Weierstrass)

Sea f una función entera tal que $f(0)\neq 0$ y sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el conjunto de los ceros de f contados con su orden de multiplicidad. Entonces existe una función entera g y una sucesión $(p_n)_n$ en $\mathbb{N}_0$ tales que $f(z)=e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right), \forall z\in\mathbb{C}$.

Demostr.: Suponemos que la función f tiene una cantidad numerable no finita de ceros. El conjunto de los ceros de f es discreto y, por tanto, f tiene a lo sumo un número finito de ceros en cada compacto de $\mathbb{C}$ y, por tanto, $(|z_n|)_n \to +\infty$.

Sea $(p_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{N}_0$ satisfaciendo la hipótesis del teorema 1.7; se sabe que, al menos, existe una. Sea P la función entera

$$P(z)=\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

Las funciones f y P tienen exactamente los mismos ceros con los mismos órdenes. Por tanto, f/P es una función entera, pues cada z_n es una singularidad evitable de f/P. Además la función f/P no se anula en ningún punto de $\mathbb{C}$.

Siendo $\mathbb{C}$ simplemente conexo, existe $g\in H(\mathbb{C})$ tal que $\frac{f}{P}=e^{g}$.

OBSERVACIONES: ① Suponer que $f(0)\neq 0$ no es restrictivo, pues si fuese 0 un cero de orden K de f, se aplicaría el teorema a la función $f(z)/z^K$. Se supuso $f(0)\neq 0$ para que $z_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

② La factorización de f en la forma que indica el teorema no es única necesariamente: pueden existir más de una sucesión $(p_n)_n$ satisfaciendo la hipótesis del teorema 1.7. Se puede pensar en la unicidad en el caso de que la sucesión $(p_n)_n$ sea constante y elijamos la menor de las constantes que satisfagan la hipótesis del th. 1.7. y aun así tampoco se puede hablar propiamente de unicidad pues si p es la menor de las ctes y g es holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z)=e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)$ entonces también $f(z)=e^{g(z)+2\pi i}\prod_{n=1}^{\infty}E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)$, pero esto ya es buscarle tres pies al gato y realmente no conduce a ninguna parte.

③ ¿Qué se puede decir de una función, no ya entera, sino holomorfa en un abierto? A esto responde el siguiente

2.2. TEOREMA: Sea D un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$, $D\neq\overline{\mathbb{C}}$. Sea A un subconjunto de D sin puntos límite en D. Sea, para cada $\alpha\in A$, un entero positivo $m(\alpha)$. Entonces existe una función $f\in H(D)$ tal que $Z_f=A$ y, además, cada $\alpha\in A$ es un cero de orden $m(\alpha)$ de f.

Demostr.: • Podemos suponer que $\infty\notin A$: Si $\infty\in A$, consideremos $A'=A\setminus\{\infty\}$ y probaríamos la tesis para el conjunto A'; obtenida la función para A' se multiplica por una función que tenga un cero de orden $m(\infty)$ en ∞ y que sea holomorfa en $D\setminus\{\infty\}$: por ejemplo, podemos multiplicar por $\frac{1}{(z-\beta)^{m(\infty)}}$ donde $\beta\notin D$. La función producto satisface la tesis para A.

Supongamos pues que $\infty\notin A$.

• Veamos ahora que podemos suponer que $\infty\in D$: En el caso de que $\infty\notin D$, podemos considerar un punto $z_0\in D\setminus A$ y la transformación bilineal $\phi(z)=\frac{1}{z-z_0}$. Entonces $\phi\in H(D\setminus\{z_0\})$ y no es constante en ninguna componente conexa de $D\setminus\{z_0\}$, es más, ϕ es inyectiva en el abierto $D\setminus\{z_0\}$. Entonces $\phi(D\setminus\{z_0\})$ es un abierto de $\mathbb{C}$. Además $\phi(D)=\phi(D\setminus\{z_0\})\cup\{\phi(z_0)\}=\phi(D\setminus\{z_0\})\cup\{\infty\}$. Es trivial que ∞ es un punto interior de $\phi(D)$, pues ϕ transforma una bola de centro z_0 contenida en D en un entorno de ∞. Luego $\phi(D)$ es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$. Si hacemos $D'=\phi(D)$ se verifica que D' es abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ y $\infty\in D'$. Sea $A'=\phi(A)\subset D'$. Entonces $\infty\notin A'$ pues z_0...

y A' no tiene puntos límite en D' pues A no los tiene en D y $\phi: \mathbb{C}\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ es biyectiva y biholomorfa. Hagamos, para cada $\alpha\in A$, $\alpha' = \phi(\alpha)$ y $m(\alpha') = m(\alpha)$. Supongamos que existe $g\in H(D')$ (*) tal que $Z_g = A'$ y que cada $\alpha'\in A'$ es un cero de orden $m(\alpha')$ de g. Consideremos entonces $f(z) = g\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ si $z\in D\setminus\{z_0\}$ y $f(z_0) = g(\infty)$. Entonces $f\in H(D)$ y $Z_f = A$ y cada $\alpha\in A$ es un cero de orden $m(\alpha)$ de f; en efecto: es trivial que $f\in H(D\setminus\{z_0\})$. Veamos que f es también holomorfa en un entorno de z_0; puesto que $g\in H(D')$ e $\infty\in D'$ se tiene que $\exists M>0$ tal que $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$ si $|z|>M$. Sea $r>0$ tal que $B(z_0,r)\subset D$ y $r<\frac{1}{M}$; entonces si $|z-z_0|<r<\frac{1}{M}$ se verifica (si $z\neq z_0$) que $\left|\frac{1}{z-z_0}\right|>M$ y por tanto $f(z) = g\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$, $\forall z\in B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$, es decir, f es desarrollable en serie de Taylor en una bola reducida de centro z_0, y siendo $f(z_0) = g(\infty) = a_0$ se tiene que z_0 es una singularidad evitable de f y, por tanto, $f\in H(D)$. También es sencillo probar que $Z_f = A$ y que cada $\alpha\in A$ es un cero de orden $m(\alpha)$ de f.

En definitiva, se puede suponer que $\infty\in D$.

- Suponemos entonces que $\infty\notin A$ y que $\infty\in D$.

Si A es finito, p. ej. $A = \{z_1,\dots,z_n\}$, el teorema es inmediato: basta tomar la función $f(z) = \frac{(z-z_1)^{m(z_1)}\cdots(z-z_n)^{m(z_n)}}{(z-z_0)^{m(z_1)+\cdots+m(z_n)}}$ donde $z_0\notin D$ (que existe pues $D\neq\overline{\mathbb{C}}$ e $\infty\in D$). La función f es holomorfa en $D\setminus\{\infty\}$ e ∞ es un punto regular para f y el resto es trivial.

Puesto que $\infty\in D$ y D es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ distinto de $\overline{\mathbb{C}}$ se tiene que $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ es un compacto no vacío de $\mathbb{C}$, y además ∞ no es un punto límite de A pues A no tiene puntos límite en D.

Supongamos ahora que A es infinito; entonces, A es numerable pues A es discreto y, por tanto, en cada compacto de D hay a lo sumo un número finito de puntos de A, y D se puede escribir como unión numerable de compactos.

Sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $A = \{\alpha_n / n\in\mathbb{N}\}$ y de forma que cada $\alpha\in A$ aparezca escrito $m(\alpha)$ veces en la sucesión. Denotemos con d la métrica del módulo en $\mathbb{C}$. Entonces, siendo $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ compacto de $\mathbb{C}$ se verifica que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists \beta_n\in\overline{\mathbb{C}}\setminus D \,/\, |\beta_n-\alpha_n| = d(\overline{\mathbb{C}}\setminus D, \alpha_n)\leq|\beta-\alpha_n|,\ \forall\beta\in\overline{\mathbb{C}}\setminus D.$$

Probemos que $(|\beta_n-\alpha_n|)_n \longrightarrow 0$, es decir, que $(d(\overline{\mathbb{C}}\setminus D,\alpha_n))_n \longrightarrow 0$.

Si no fuese cierto, existirían $\varepsilon>0$ y una subsucesión $(d(\alpha_{n_k}, \dots(\alpha_{n_k}))_n$

tal que $d(\overline{\mathbb{C}}\setminus D, \alpha_{n_k}) \geq \varepsilon$, $\forall k\in\mathbb{N}$.
Como ∞ no es punto límite de A, ∞ no es punto límite (de acumulación) de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y, por tanto, $\exists M>0 / |\alpha_n|\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Luego $\forall k\in\mathbb{N}$, $|\alpha_{n_k}|\leq M$. Como $\{\alpha_{n_k} / k\in\mathbb{N}\}$ es un subconjunto infinito del compacto $\overline{B}(0,M)$, existe $\alpha\in\overline{B}(0,M)$ que es punto de acumulación de $\{\alpha_{n_k}/k\in\mathbb{N}\}$.
Entonces $d(\overline{\mathbb{C}}\setminus D, \alpha)\geq\varepsilon$, por ser α límite de una subsucesión de $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Luego $\alpha\in D$. Entonces, α es un punto límite de A en D, en contra de que A es discreto en D.
Luego $(|\beta_n-\alpha_n|)_n \longrightarrow 0$.
Consideremos la función

$$f: z\in D \longmapsto f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)$$

entendiendo que si $z=\infty$ entonces $E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)=E_n(0)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, con lo cual $f(\infty)=1$.
Recordemos que $\alpha_n\neq\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$ pues $\infty\notin A$, y que $\beta_n\notin D$, $\forall n$.
Probemos que la función f cumple la tesis. Utilizaremos para ello la OBSERVACION ④ al TEOREMA 1.4 (TEXTO...). Notemos que $E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)\in H(D\setminus\{\infty\})$ y que ∞ es una singularidad evitable de $E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)$, pues deja de ser singularidad en cuanto se le da el valor 1 para $z=\infty$.
Luego $E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)\in H(D)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Sea $r_n = 2|\alpha_n-\beta_n|$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y sea K un compacto de D. Puesto que K y $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ son compactos disjuntos en $\overline{\mathbb{C}}$ se verifica que
$0<\frac{1}{2}\chi(K,\overline{\mathbb{C}}\setminus D)\leq\frac{1}{2}\chi(z,\beta_n)$, $\forall z\in K$, $\forall n\in\mathbb{N}$
Además, de la definición de χ se deduce que

$$\frac{1}{2}\chi(z,\beta_n)\leq|z-\beta_n|, \ \forall z\in K\setminus\{\infty\}, \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Como $(r_n)_n\to 0$, $\exists \nu\in\mathbb{N} / n\geq\nu \Rightarrow r_n<\frac{1}{2}\chi(K,\overline{\mathbb{C}}\setminus D)$.
Luego $r_n<|z-\beta_n|$, $\forall z\in K\setminus\{\infty\}$, $\forall n\geq\nu$, y también

$$\frac{|\alpha_n-\beta_n|}{|z-\beta_n|}\leq\frac{1}{2} \quad \forall z\in K\setminus\{\infty\}, \forall n\geq\nu.$$

Por LEMA 1.1. se tiene que

$$\left|1-E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)\right|\leq\left|\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right|^{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \forall n\geq\nu, \forall z\in K\setminus\{\infty\}.$$

Si $z=\infty\in K$, trivialmente $\left|1-E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ pues $E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)=1$ si $z=\infty$. Luego

$$\left|1-E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \forall z\in K, \forall n\geq\nu.$$

Por el criterio de Weierstrass, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right) \right|$ es uniformemente convergente en K.

Por la OBSERVACION ④ del TEOREMA 1.4 (TEMA 25) se deduce que $f \in H(D)$.

Además como cada $E_n(z)$ tiene un único cero simple en $z = 1$ se verifica que cada $E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$ tiene un único cero simple en $z = \alpha_n$. Luego cada $\alpha \in A$ es un cero de orden $m(\alpha)$ de f, por la elección de la sucesión $(\alpha_n)_n$, y f no tiene otros ceros que estos. csqd.

2.3. TEOREMA: Sea D un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$, $D \neq \overline{\mathbb{C}}$. Entonces cada función meromorfa en D es un cociente de dos funciones holomorfas en D.

Demostr.: Sea $f \in M(D)$. Sea A el conjunto de los polos de f en D y sea, para cada $\alpha \in A$, $m(\alpha)$ el orden del polo α de f. Por el teorema anterior, existe $h \in H(D)$ que tiene un cero en cada $\alpha \in A$ con multiplicidad $m(\alpha)$, y no tiene otros ceros que esos.

Entonces la función $g = f \cdot h$ tiene singularidades evitables en los puntos de A y no tiene otras singularidades. Luego $g \in H(D)$ (es decir, g se puede extender a una función holomorfa en D sin más que definirla por paso al límite en los puntos de A).

Entonces, en $D \setminus A$, f se puede expresar como el cociente g/h. csqd