TEMA 27: EL TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. OTRA VERSION DEL TEOREMA DE RUNGE.

El problema que pretendemos resolver es el siguiente: Encontrar una función meromorfa que tenga como únicos polos los elementos de un conjunto discreto dado, de forma que dichos polos sean de órdenes también fijados de antemano y que tenga en dichos polos partes singulares también prefijadas.

Se puede pensar en un problema más general, que no resolveremos: dadas las singularidades aisladas y las partes singulares en cada una de ellas, encontrar una función que tenga esas, y solo esas, singularidades aisladas y en cada una de ellas las partes singulares dadas.

Para resolver el primer problema necesitamos el siguiente

1.1. LEMA: (2ª versión del teorema de Runge).

> Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y K un compacto de D. Sea $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que E corta cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Si $f \in H(D)$ y $\varepsilon > 0$, existe una función racional R con polos en E tal que
> $$|f(z) - R(z)| < \varepsilon, \ \forall z \in K.$$

OBSERVACION: En la 1ª versión se suponía que E cortase cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Es fácil probar que ésta segunda versión implica la primera.

Demostr.: Sea $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Por el teorema de Runge (1ª versión) existe una función racional Q con polos en E_0 tal que $|f(z) - Q(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall z \in K$, pues E_0 corta cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$.

Probemos que si G es abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $G \cap K = \emptyset$ y $a \in G$ entonces $\forall b \in G$, $\exists x_0, x_1, \dots, x_p \in G \,/\, a = x_0$ y $x_p = b$ y
$$|x_j - x_{j+1}| \leq \frac{1}{2} d(x_{j+1}, K) \qquad j = 0, \dots, p-1$$
Cuando esto ocurra diremos que b está relacionado con a.

Sea $A = \{b \in G \,/\, b \text{ está relacionado con } a\}$.

Entonces $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$.

Veamos que A es abierto y cerrado en G, con lo cual, siendo G conexo, será $A = G$, como queremos probar.

- A es abierto: Sea $x \in A$. Como $A \subset G$ se tiene que $x \in G$ y siendo $G \cap K = \emptyset$ se deduce que $d(x, K) > 0$. Sea $r > 0$ tal que $0 < r < \frac{1}{3} d(x, K)$ y $B(x, r) \subset G$

Probemos que $B(x,r) \subset A$. Basta ver que si $y \in G \setminus A$ entonces $y \notin B(x,r)$.
Sea $y \notin A$ ($y \in G$). Entonces $d(y,x) > \frac{1}{2} d(y,K)$ pues si fuese $d(y,x) \leq \frac{1}{2} d(y,K)$, como existe una cadena $x_0 = a, x_1, \ldots, x_p \in G$ tal que $x_p = x$ y $|x_j - x_{j+1}| \leq \frac{1}{2} d(x_{j+1}, K)$ haciendo $x_{p+1} = y$ se verificaría que $y \in A$, contra lo supuesto.
Luego $d(y,x) > \frac{1}{2} d(y,K)$. Pero
$$d(x,K) \leq d(x,y) + d(y,K) < d(x,y) + 2d(x,y) = 3d(x,y) \quad (1)$$
y si $y \in B(x,r)$ se tendría que $d(x,y) < r$ y de (1) se deduciría que $d(x,K) < 3r$, es decir $\frac{1}{3} d(x,K) < r$, contra la elección de r.
Luego $B(x,r) \subset A$ y, por tanto, A es abierto.

- A es cerrado en G: Sea $x \in G \setminus A$; entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset G$ y $0 < r < \frac{1}{3} d(x,K)$. Veamos que $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Si no fuese así existiría $y \in A$ tal que $d(y,x) < r$, de lo cual se deduce fácilmente que $x \in A$, contra la elección de x (notar que $d(y,x) < r < \frac{1}{3} d(x,K) < \frac{1}{2} d(x,K)$).
Luego A es cerrado en G.

Por tanto, $A = G$, es decir,
$$\forall a, b \in G, \ \exists x_0, x_1, \ldots, x_p \in G \ / \ x_0 = a, \ x_p = b \ \text{ y } \ |x_j - x_{j+1}| \leq \tfrac{1}{2} d(x_{j+1}, K), \ j = 0, \ldots, p-1$$
A partir de este resultado se continúa la demostración igual que se hizo en el teorema de Runge, y se sigue la tesis. ▨

2. TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER.

2.1. TEOREMA: (de Mittag-Leffler)

Sean D un abierto de $\mathbb{C}$, A un subconjunto de D sin puntos de acumulación en D. Para cada $\alpha \in A$ consideremos $m(\alpha) \in \mathbb{N}$ y una función racional $P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha} (z-\alpha)^{-j}$. Entonces existe una función meromorfa en D cuya parte singular en cada $\alpha \in A$ es P_α, y que no tiene otros polos en D que los elementos de A.

Demostr.: Sea $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de compactos en D tales que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{K}_n$ y de forma que cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ contenga una componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Sean $A_1 = A \cap K_1$ y $A_n = A \cap (K_n \setminus K_{n-1})$ si $n \geq 2$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A \cap K_n$ y, por tanto, A_n es un conjunto finito pues A es discreto en D y K_n compacto $\subset D$.
Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función racional $Q_n(z) = \sum_{\alpha \in A_n} P_\alpha(z)$ (es una suma finita). La función racional Q_n tiene como únicos polos los puntos de A_n.
Si $n \geq 2$, Q_n tiene sus polos en $A_n \subset K_n \setminus K_{n-1}$. Luego Q_n es holo-

morfa en un abierto que contiene a K_{n-1} (p. ej: $\mathring{K}_n \setminus A_n$).

Como cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_{n-1}$ contiene una componente conexa de $E = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, por LEMA 1.1 aplicado al abierto $\mathring{K}_n \setminus A_n$ donde Q_n es holomorfa y al compacto $K_{n-1} \subset \mathring{K}_n \setminus A_n$ (observar que E corta cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_{n-1}$), existe una función racional R_n $(n \geq 2)$ con polos en $E = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ tal que

$$|Q_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{2^n}, \quad \forall z \in K_{n-1}$$

y, por tanto, $|Q_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{2^n}$ si $z \in K_p$ con $p \leq n-1$. (1)

Consideramos la función

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} [Q_n(z) - R_n(z)], \quad z \in D$$

Veamos que f cumple la tesis.

Sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Sobre K_N escribimos f en la forma

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{N} [Q_n(z) - R_n(z)] + \sum_{n=N+1}^{\infty} [Q_n(z) - R_n(z)].$$

Si $n \geq N+1$ se tiene que $n-1 \geq N$ y, por tanto, $|Q_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{2^n}$, $\forall z \in K_N$ $\forall n \geq N+1$. Luego $\sum_{n=N+1}^{\infty} [Q_n(z) - R_n(z)]$ converge uniformemente en K_N, y en particular, en $\mathring{K}_N$.

Como las R_n $(n \geq 2)$ tienen sus polos en $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$, se verifica que R_n es holomorfa en D si $n \geq 2$. Además si $n \geq N+1$, Q_n tiene sus polos en $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_N$. Luego $Q_n - R_n \in H(\mathring{K}_N)$ si $n \geq N+1$, y por tanto $\sum_{n=N+1}^{\infty} [Q_n(z) - R_n(z)]$ es holomorfa en $\mathring{K}_N$.

Luego $f - [Q_1 + \dots + Q_N] = \sum_{n=2}^{N} (-R_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} [Q_n - R_n] \in H(\mathring{K}_N)$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

A partir de esto y de que $D = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathring{K}_N$ es sencillo probar que f tiene un polo de orden $m(\alpha)$ en cada $\alpha \in A$ y no tiene otros polos que esos y que la parte singular de f en $\alpha \in A$ es P_α. ▨