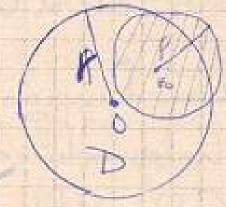
TEMA 28º. PROLONGACION ANALITICA. PRINCIPIO DE SIMETRIA DE SCHWARZ

1. PROLONGACION ANALITICA.

El problema es el siguiente: Dada una función holomorfa en un abierto, ¿cuándo se pueden encontrar abiertos "más grandes" y funciones holomorfas sobre los mismos que coincidan con la primera función sobre el abierto dado en principio? La respuesta a esto se encuentra en el principio de prolongación analítica.

EJEMPLO: Sea D un disco de centro 0 y $f \in H(D)$. Supongamos $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Si $z_0 \in D$ entonces $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{n\geq 0} b_n (z-z_0)^n$, por el método de reagrupamiento de potencias, y



esta serie tiene un radio de convergencia $\rho \geq r - |z_0|$, si r es el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Puede ocurrir que $\rho > r - |z_0|$, en cuyo caso f se puede prolongar a una función holomorfa en $B(0,r) \cup B(z_0, \rho)$, utilizando la serie $\sum_{n\geq 0} b_n (z-z_0)^n$.

DEFINICION: Sea D un disco abierto de $\mathbb{C}$, $\beta \in \partial D$ y $f \in H(D)$. Se dice que β es un punto regular de f si existe una bola abierta de centro β, $B(\beta)$, y una función $g \in H(B(\beta))$ tal que $f(z) = g(z)$, $\forall z \in D \cap B(\beta)$. Se dice que β es un punto singular para f si no es regular.

Consecuencia: El conjunto de los puntos regulares de f en ∂D es un abierto de ∂D (con la topología que induce $\mathbb{C}$ en ∂D), pues si β es regular y $B(\beta)$ es la bola de la definición, entonces $\partial D \cap B(\beta)$ es un conjunto de puntos regulares de f.

Supondremos en adelante que $D = \mathcal{U}$, es decir, que D es el disco unidad, pues en otro caso basta hacer una traslación y una homotecia para transformar D en $\mathcal{U}$.

1.1. TEOREMA: Sea $f \in H(\mathcal{U})$ tal que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entonces dicha serie tiene radio de convergencia 1. En estas hipótesis, f tiene al menos un punto singular en $\partial \mathcal{U}$.

Demostr.: Denotaremos $T = \partial \mathcal{U}$. Supongamos que cada punto de T es un punto regular para f. Entonces para cada $\beta \in T$ existe

una bola $B(\beta)$ y una función $g_\beta \in H(B(\beta))$ tal que $f(z)=g_\beta(z), \forall z\in B(\beta)\cap \mathcal{U}$.
Siendo T compacto, del recubrimiento abierto $\{B(\beta)\}_{\beta\in T}$ de T se puede extraer un subrecubrimiento finito $\{B(\beta_1),\dots,B(\beta_n)\}$. Denotemos $g_j = g_{\beta_j}$, $j=1,\dots,n$.

Si $j,h\in\{1,\dots,n\}$ son tales que $B(\beta_j)\cap B(\beta_h)\neq\emptyset$, denotemos
$$V_{j,h} = \mathcal{U}\cap B(\beta_j)\cap B(\beta_h) \neq \emptyset$$
Se tiene entonces $f(z)=g_j(z)=g_h(z)$, $\forall z\in V_{j,h}$.
Por tanto, por el principio de prolongación analítica, siendo $B(\beta_j)\cap B(\beta_h)$ abierto convexo (supuesto no vacío), se tiene que $g_j(z)=g_h(z)$, $\forall z\in B(\beta_j)\cap B(\beta_h)$.
Está bien definida, entonces, la aplicación
$$h: z\in \mathcal{U}\cup B(\beta_1)\cup\dots\cup B(\beta_n) \longmapsto h(z)= \begin{cases} = f(z) & \text{si } z\in\mathcal{U} \\ = g_j(z) & \text{si } z\in B(\beta_j).\end{cases}$$

La función h es holomorfa en $D=\mathcal{U}\cup B(\beta_1)\cup\dots\cup B(\beta_n)$, pues es holomorfa en un entorno abierto de cada punto de D.
Como D es abierto y contiene a $\overline{\mathcal{U}}$, existe $\varepsilon>0$ tal que $D\supset B(0,1+\varepsilon)$ y $h\in H(B(0,1+\varepsilon))$. Desarrollando h en serie de potencias en 0 se tiene que
$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z\in B(0,1+\varepsilon)$$
pues h coincide con f sobre $\mathcal{U}$ y, por tanto, todas las derivadas de h y f en 0 coinciden. Esto contradice a la hipótesis de que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia 1.
Existe, pues, un punto singular al menos en $T=\partial\mathcal{U}$. c.s.q.d.

DEFINICION: Si D es un disco y $f\in H(D)$ y todo punto de ∂D es singular para f, entonces de ∂D se dice que es la frontera natural de f y de D se dice que es el dominio natural o dominio de holomorfía de f.

OBSERVACION: Existen funciones $f\in H(\mathcal{U})$ para las que $\mathcal{U}$ es su dominio natural. Sea $A\subset\mathcal{U}$ que no tenga puntos límites en $\mathcal{U}$ y tal que todo punto de $\partial\mathcal{U}$ sea límite de una sucesión de puntos de A. Veamos que existe A: Para cada $n\in\mathbb{N}$ del recubrimiento $\{B(t,\frac{1}{n})\}_{t\in\partial\mathcal{U}}$ se puede extraer un subrecubrimiento finito $\{B(t_k,\frac{1}{n})\}_{k=1}^{m_n}$ y en cada una de estas bolas tomemos un punto $x_{n,k}\in\mathcal{U}$ y sea $A=\{x_{n,k}\}_{\substack{k=1,\dots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$. Es fácil ver que A satisface lo pedido.
Por el teorema de factorización de Weierstrass existe $f\in H(\mathcal{U})$ tal que $A=Z_f$. Si existiese una región $D\supsetneq\mathcal{U}$ y $g\in H(D)$ tal

sobre los puntos de A y A tiene un punto de acumulación en el abierto conexo $D \supset \partial \mathcal{U}$) con lo cual sería $f \equiv 0$ en contra de que f no tiene más ceros que los de A. Rudin prueba que la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ tiene $\mathcal{U}$ como dominio natural.

2. PRINCIPIO DE SIMETRIA DE SCHWARZ.

DEFINICION: Sea D un subconjunto de $\mathbb{C}$. Se dice que D es un conjunto simétrico si $\forall z \in D$, $\bar{z} \in D$.

Denotaremos, si $D \subset \mathbb{C}$

$D_0 = D \cap \mathbb{R}$, $D^+ = D \cap \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0\}$, $D^- = D \cap \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z < 0\}$.

2.1. TEOREMA: (Principio de Simetría de Schwarz).

Sea D una región de $\mathbb{C}$ simétrica. Sea $f : D^+ \cup D_0 \to \mathbb{C}$ continua tal que $f \in H(D^+)$ y $f(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D_0$. Entonces existe $g \in H(D)$ tal que $g(z) = f(z)$, $\forall z \in D^+ \cup D_0$. Además $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$, $\forall z \in D$.

Demostr.: Sea $h : D^- \cup D_0 \to \mathbb{C}$ definida por $h(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\forall z \in D^- \cup D_0$.
Entonces $h \in \mathcal{C}(D^- \cup D_0)$, como composición de funciones continuas.
Es fácil ver que $h \in H(D^-)$ (comprobar que en cada punto es derivable y satisface las ecs. de C-R.)
Además $h(x) = f(x)$, $\forall x \in D_0$, pues $f(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D_0$.
Definimos

$$g : z \in D \longmapsto \begin{cases} = f(z) & \text{si } z \in D^+ \cup D_0 \\ = h(z) & \text{si } z \in D^- \cup D_0 \end{cases}$$

Notar que g está bien definida, y es continua en D.
Además $g \in H(D^+ \cup D^-)$.

Luego g es continua en el abierto conexo D y holomorfa en D salvo quizás en los puntos de una recta paralela al eje real y, por tanto, $g \in H(D)$.

Es fácil comprobar que $\overline{g(\bar{z})} = g(z)$, $\forall z \in D$, es decir $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$, $\forall z \in D$. csqd.

OBSERVACION: Recordar que esto ya lo habíamos probado en el caso de que g sea una transformación bilineal tal que $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

2.2. COROLARIO: Sea D una región simétrica de $\mathbb{C}$. Si $f \in H(D)$ y $f(D_0) \subset \mathbb{R}$ entonces $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $\forall z \in D$.

Demostr.: Definimos $g(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$, $\forall z \in D$.
Entonces $g \in H(D)$ y $g(z) = 0$, $\forall z \in D_0$. Observar que $D_0 \neq \emptyset$ por ser D conexo. Puesto que a D_0 todos sus puntos son de acumulación (D_0 tiene, por tanto, un punto de acumulación en D) se sigue que $g \equiv 0$ y por tanto

$f(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\forall z \in D$. csqd.

<u>OBSERVACION</u>: Sea C un círculo de $\overline{\mathbb{C}}$ (recta o circunferencia en $\mathbb{C}$). Recordar la definición de simetría respecto de C. ¿Se puede generalizar el resultado anterior para regiones simétricas respecto de C?