TEMA 29: PROLONGACION ANALITICA A LO LARGO DE CURVAS. TEOREMA DE MONODROMIA

1. PROLONGACION ANALITICA A LO LARGO DE CURVAS.

Una función deberemos entenderla como una terna (f, D, D') donde D es el dominio de definición de f, y f una "regla" para asociar a un punto de D un punto de D'. Tomaremos siempre $D' = \mathbb{C}$.

DEFINICION: Se define un elemento de función como un par (f, D) donde D es una región de $\mathbb{C}$ y $f \in H(D)$

DEFINICION: Dado un elemento de función (f, D) se llama germen de f en $a \in D$, y lo denotaremos por $[f]_a$, el conjunto de todos los elementos de función (g, G) tales que $a \in G$ y $f(z) = g(z)$ para cada z en un cierto entorno de a.

OBSERVACION: ① Con las notaciones de la definición, observar que $D \cap G$ no tiene porqué ser una región, con lo cual de que $f(z) = g(z)$ en un entorno de a no se puede concluir que f coincida con g en $D \cap G$.

② Es obvio que $(g, G) \in [f]_a \Leftrightarrow (f, D) \in [g]_a$

③ Notar que no tiene sentido hablar de la igualdad de dos gérmenes $[f]_a$ y $[g]_b$ salvo si $a = b$. Incluso en el caso de que ~~si~~ (f, D) sea un elemento de función y $a, b \in D$ no tiene sentido hablar de la igualdad de los gérmenes $[f]_a$ y $[g]_b$ salvo si $a = b$.

DEFINICION (Prolongación analítica a lo largo de una curva).

Sea $\gamma : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva y supongamos que para cada $t \in I$ existe un elemento de función (f_t, D_t) de forma que

a) $\gamma(t) \in D_t, \ \forall t \in I$.

b) $\forall t \in I, \exists \delta = \delta(t) > 0 \ / \ \underset{s \in I}{|s - t|} < \delta \Rightarrow \gamma(s) \in D_t$ y $[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}$.

Entonces de (f_1, D_1) (correspondiente a $t=1$) se dice que es una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de γ.

¿Qué ocurre si prolongamos (f_0, D_0) de dos formas distintas a lo largo de la misma curva? La respuesta está en la proposición siguiente:

1.1. PROPOSICION: Sea $\gamma: I=[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva de "a" a "b" (i.e.: $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$), y sean $\{(f_t, D_t)/t\in I\}$ y $\{(g_t, B_t)/t\in I\}$ dos prolongaciones analíticas a lo largo de γ tales que $[f_0]_a=[g_0]_a$. Entonces $[f_1]_b=[g_1]_b$.

Demostr: Probaremos incluso que $[f_t]_{\gamma(t)}=[g_t]_{\gamma(t)}$, $\forall t\in I$.

Sea $T=\{t\in I / [f_t]_{\gamma(t)}=[g_t]_{\gamma(t)}\}$.

Por hipótesis $0\in T$. Luego $T\neq\emptyset$.

Veamos que T es abierto y cerrado en I, con lo cual siendo I conexo, será $T=I$ como queremos probar.

Dado $t\in I$, $\gamma(t)\in D_t\cap B_t$ y siendo $D_t\cap B_t$ abierto, existe $B(\gamma(t))\subset D_t\cap B_t$.

Puesto que γ es continua, $\exists \delta_1>0 / |\underset{s\in I}{s-t}|<\delta_1 \Rightarrow \gamma(s)\in B(\gamma(t))$.

Por la definición de prolongación analítica a lo largo de una curva γ

$\exists \delta_2=\delta_2(t)>0 / |\underset{s\in I}{s-t}|<\delta_2 \Rightarrow \gamma(s)\in D_t\cap B_t$ y $[f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)}$ y $[g_s]_{\gamma(s)}=[g_t]_{\gamma(s)}$ (I)

Sea $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$, y sea $s\in I$ tal que $|s-t|<\delta$.

Veamos que si $t\in T$ entonces $t\in \mathring{T}$, con lo cual T será abierto en I.

Si $t\in T$, entonces $[f_t]_{\gamma(t)}=[g_t]_{\gamma(t)}$, es decir, $f_t(z)=g_t(z)$, para todo z en un entorno de $\gamma(t)$ y, por tanto, $f_t(z)=g_t(z)$, $\forall z\in B(\gamma(t))\subset D_t\cap B_t$.

Luego si $s\in I$ y $|s-t|<\delta$ entonces $\gamma(s)\in B(\gamma(t))$ y, por tanto, $f_t(\gamma(s))=g_t(\gamma(s))$, y f_t y g_t coinciden en un entorno de $\gamma(s)$.

De esto y de (I) se deduce que $[f_s]_{\gamma(s)}=[g_s]_{\gamma(s)}$, $\forall s\in I\cap]t-\delta,t+\delta[$ y, por tanto, $]t-\delta,t+\delta[\cap I\subset T$ lo que prueba que T es abierto en I.

Probemos ahora que T es cerrado, es decir que si $t\in T'$ (conjunto de los puntos de acumulación de T) entonces $t\in T$.

Si $t\in T'$ entonces $t\in I$ pues $[T\subset I, I \text{ cerrado} \Rightarrow T'\subset I]$.

$t\in T' \Rightarrow \exists s\in T / |s-t|<\delta$, donde $\delta>0$ es el de antes.

Se tiene que $\gamma(s)\in D_s\cap B_s$ y $\gamma(s)\in B(\gamma(t))$ por la elección de δ.

$D_s\cap B_s\cap B(\gamma(t))$ es abierto $\Rightarrow \exists B(\gamma(s))\subset D_s\cap B_s\cap B(\gamma(t))$.

Como $s\in T$ se tiene que $f_s(z)=g_s(z)$ en un entorno de $\gamma(s)$ y, siendo $B(\gamma(s))$ abierto conexo se tiene que $f_s(z)=g_s(z)$, $\forall z\in B(\gamma(s))$, pues $B(\gamma(s))\subset D_s\cap B_s\cap B(\gamma(t))$ y en esta intersección están definidas f_s y g_s.

Además de (I) se sigue que $[f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)}$ y, por tanto, $f_s(z)=f_t(z)$ para z en un entorno de $\gamma(s)$ y, por tanto, $f_s(z)=f_t(z)$, $\forall z\in B(\gamma(s))$.

Análogamente $g_s(z)=g_t(z)$, $\forall z\in B(\gamma(s))$.

Observar que $B(\gamma(s))\subset B(\gamma(t))\subset D_t\cap B_t$ y f_t está definida en D_t y g_t está definida en B_t.

De todo lo dicho se sigue que $f_t(z)=g_t(z)$, $\forall z\in B(\gamma(s))$ y, por tanto, $f_t(z)=g_t(z)$, $\forall z\in B(\gamma(t))$ pues $B(\gamma(s))\subset B(\gamma(t))$ y $B(\gamma(t))$ es abierto conexo. Luego $[f_t]_{\gamma(t)}=[g_t]_{\gamma(t)}$, lo que prueba que $t\in T$. Luego T es cerrado. En definitiva $T=I$ y, en particular, $[f_1]_b=[g_1]_b$. csqd.

DEFINICION: Sea $\gamma: I\longrightarrow \mathbb{C}$ una curva de "a" a "b" y $\{(f_t,D_t)/t\in I\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ. Diremos entonces que el germen $[f_1]_b$ es prolongación analítica de $[f_0]_a$ a lo largo de γ.

OBSERVACIONES: ① La definición anterior tiene sentido, pues no depende de la prolongación analítica $\{(f_t,D_t)\}_{t\in I}$ según se probó en la proposición anterior.

② Sea $\{(f_t,D_t)/t\in I\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ. Para cada $t\in I$ sea $B(\gamma(t))\subset D_t$. Entonces la prolongación analítica $\{(f_t, B(\gamma(t)))/t\in I\}$ (es trivial que es una prolongación analítica pues $\gamma(t)\in B(\gamma(t))$, $\forall t\in I$ y $\forall t\in I$, $\exists \delta>0$ / $s\in I$, $|s-t|<\delta \Rightarrow \gamma(s)\in B(\gamma(t))$ y $[f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)}$ por ser γ continua y $\{(f_t,D_t)\}_{t\in I}$ prolongación analítica) nos sirve también para afirmar que $[f_1]_b$ es prolongación analítica de $[f_0]_a$, y por tanto a efectos de prolongación analítica de gérmenes podemos suponer que los D_t son discos, lo cual presenta la siguiente ventaja: si $D_t\cap D_s\neq\emptyset$ entonces $D_t\cap D_s$ es conexo y f_t y f_s coincidirán en todo $D_t\cap D_s$.

DEFINICION: Si (f,D) es un elemento de función, se llama función analítica completa obtenida de (f,D) al conjunto $\mathcal{F}$ de todos los gérmenes $[g]_b$ tales que existe $a\in D$ y una curva $\gamma: I\to\mathbb{C}$ de "a" a "b" tal que $[g]_b$ es prolongación analítica de $[f]_a$ a lo largo de γ.

DEFINICION: Una colección de gérmenes $\mathcal{F}$ se dice una función analítica completa si existe un elemento de función (f,D) tal que $\mathcal{F}$ es la función analítica completa obtenida de (f,D).

OBSERVACIONES: ① En la definición de función analítica completa obtenida de (f,D) se puede poner "para todo $a\in D$" en lugar de "existe $a\in D$", pues siendo D conexo, si $\hat{a}\in D$ satisface lo dicho en la definición, también lo satisface cualquier $a'\in D$, pues a' se puede unir con a mediante una curva γ' en D y si $[g]_b$ es prolongación analítica de $[f]_a$ a lo largo de γ entonces $[g]_b$ es prolongación analítica de $[f]_{a'}$ a lo largo de $\gamma'+\gamma$, y recíprocamente.

② Es obvio que, si $\mathcal{F}$ es la función analítica completa obtenida de (f,D), entonces $[f]_z\in\mathcal{F}, \forall z\in D$, y que $\mathcal{F}$ puede ser obtenida de cualquier elemento de función de cualquier gérmen de $\mathcal{F}$.

③ ¿Podemos entender $\mathcal{F}$ como una función (en el sentido de aplicación)? Sí: Sea $\mathcal{R}=\{(z,[f]_z) / [f]_z\in\mathcal{F}\}$. Si definimos

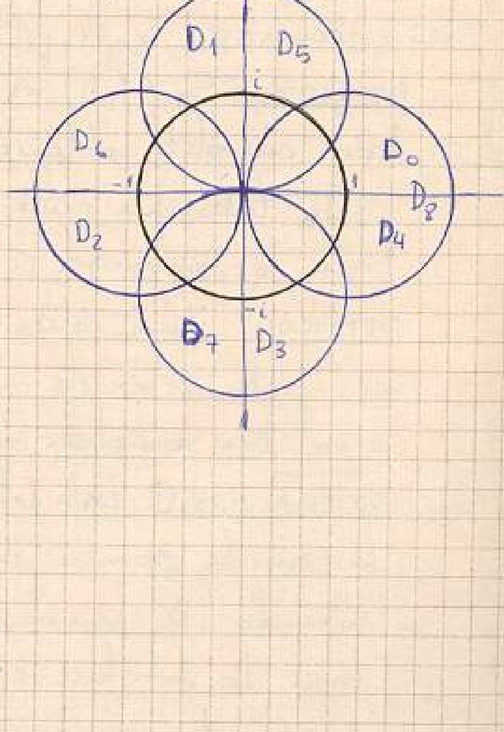
$$\mathcal{F}: (z,[f]_z)\in\mathcal{R}\longmapsto f(z)\in\mathbb{C}$$

ya obtenemos una función pues si $(z,[f]_z)=(z',[g]_{z'})$ entonces $z=z'$ y $[f]_z=[g]_z$ con lo cual $f(z)=g(z)$. Interesa de $\mathcal{F}$, no solo que sea aplicación, si no fue "en alguún sentido" sea continua, e incluso analítica. Para ello deberemos dotar a $\mathcal{R}$ de una estructura topológica adecuada. Esto se resuelve en el tema siguiente.

2. TEOREMA DE MONODROMIA.

Estudiaremos a continuación bajo qué condiciones la prolongación analítica de un germen a lo largo de distintas curvas es única, supuesto que existen dichas prolongaciones, es decir: Sean $a,b\in\mathbb{C}$ y sean γ,σ dos curvas de "a" a "b". Supongamos que $\{(f_t,D_t)/t\in I\}$ y $\{(g_t,B_t)/t\in I\}$ son prolongaciones analíticas a lo largo de γ y σ, respectivamente, tales que $[f_0]_a=[g_0]_a$. ¿Será cierto que $[f_1]_b=[g_1]_b$? En general, no es cierto.

Contraejemplo: Sean $\gamma: t\in[0,1]\mapsto\gamma(t)=e^{2\pi i t}$ y $\sigma: t\in[0,1]\mapsto\sigma(t)=e^{4\pi i t}$. (γ) y (σ) son la circunferencia unidad en $\mathbb{C}$, pero γ la recorre una sola vez y σ dos veces. Se verifica $\gamma(0)=\sigma(0)=1$ y $\gamma(1)=\sigma(1)=1$.



Sean

$D_0=D_4=B(1,1)=D_8$, $D_1=D_5=B(i,1)$, $D_2=D_6=B(-1,1)$

$D_3=D_7=B(-i,1)$.

Definimos

$g_0\equiv f_0: z\in B(1,1)\longmapsto \operatorname{Log} z$

$g_1\equiv f_1: z\in B(i,1)\longmapsto \operatorname{Log} z$

$g_2\equiv f_2: z\in B(-1,1)\longmapsto f_2(z)=\begin{cases}=\operatorname{Log} z & \text{si } \operatorname{Im} z>0\\ =\operatorname{Log} z+2\pi i & \text{si } \operatorname{Im} z\le 0\end{cases}$

$g_3\equiv f_3: z\in B(-i,1)\longmapsto f_3(z)=\operatorname{Log} z+2\pi i$

$g_4\equiv f_4: z\in B(1,1)\longmapsto f_4(z)=\operatorname{Log} z+2\pi i$

$g_5: z\in B(i,1)\longmapsto g_5(z)=\operatorname{Log} z+2\pi i$

$g_6: z\in B(-1,1)\longmapsto g_6(z)=\begin{cases}=\operatorname{Log} z+2\pi i & \text{si } \operatorname{Im} z>0\\ =\operatorname{Log} z+4\pi i & \text{si } \operatorname{Im} z\le 0\end{cases}$

$g_7: z\in B(-i,1)\longmapsto g_7(z)=\operatorname{Log} z+4\pi i$

$g_8: z\in B(1,1)\longmapsto g_8(z)=\operatorname{Log} z+4\pi i$

La función f_2 es holomorfa en $B(-1,1)\cap\{z/\operatorname{Im} z>0\}$ y en $B(-1,1)\cap\{z/\operatorname{Im} z\le 0\}$
y es continua en $B(-1,1)$. Luego $f_2\in H(B(-1,1))$ ...

Las demás son trivialmente holomorfas en sus respectivos dominios. Notar que aquí $a=b=1$ y que $[f_0]_1 = [g_0]_1$. Pero $[f_4]_1$ no coincide con $[g_8]_1$. Probaremos más adelante que esto ocurre por no ser γ y σ homótopas con extremos fijos.

2.1 LEMA: Sea $\gamma : I \to \mathbb{C}$ una curva y $\{(f_t, D_t) / t \in I\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ. Para cada $t \in I$ denotemos por $R(t)$ el radio de convergencia de la serie de potencias de f_t en el punto $\gamma(t)$. Entonces se verifica una y sólo una de las dos proposiciones siguientes:

i) $R(t) = +\infty$, $\forall t \in I$.

ii) $R : t \in I \longmapsto R(t) \in]0, +\infty[$ es una función continua.

Demostr.: Recordemos que podemos suponer los D_t discos: $D_t = B(\gamma(t))$, con lo cual $R(t)$ es mayor o igual que el radio de $B(\gamma(t))$.

Probemos en primer lugar que, si existe $t \in I$ tal que $R(t) = +\infty$, entonces $R(s) = +\infty$, $\forall s \in I$. Si $R(t) = +\infty$ o bien $D_t = \mathbb{C}$ o bien f_t se puede extender a una función entera. En cualquier caso podemos tomar $D_t = \mathbb{C}$. De la definición de prolongación analítica se deduce que existe $\delta(t) > 0$ tal que si $s \in I$ y $|s-t| \leq \delta$ entonces $f_s(z) = f_t(z)$, $\forall z \in D_t \cap D_s = D_s$. Luego f_s es una función entera (o se puede extender a una función entera) pues coincide con una función entera en un disco. Por tanto, $R(s) = +\infty$.

Dado el recubrimiento abierto $\{D_s\}_{s \in I}$ de (γ), existe una partición de I tal que la imagen de cada subintervalo de la partición está contenida en un abierto del recubrimiento; incluso podemos tomar una partición más fina que ésta si es preciso. De esta forma podemos asegurar que en todos los puntos s del subintervalo de I que contiene a t se verifica que $R(s) = +\infty$, incluso en los extremos de dicho subintervalo. Aplicando el mismo razonamiento que para t a dichos extremos se prueba que $R(s) = +\infty$ para los puntos s de los intervalos adyacentes y, de esta forma, $R(s) = +\infty$, $\forall s \in I$.

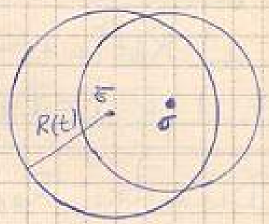
Supongamos ahora que $R(t) < +\infty$, $\forall t \in I$ y probemos que $R : t \in I \longmapsto R(t) \in]0, +\infty[$ es continua.

Sea $t \in I$ y $z = \gamma(t)$. f_t se desarrolla en serie de Taylor en un disco de centro z y el radio de convergencia de la serie es $R(t)$. Sea $\delta_1 > 0$ tal que $\underset{s \in I}{|s-t|} < \delta_1 \Rightarrow \gamma(s) \in B(z, R(t))$, y $[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}$. Existe este δ_1 por definición de prolongación analítica y porque $D_t \subset B(z, R(t))$.

Sea $s\in I$ tal que $|s-t|<\delta_1$ y sea $\sigma=\gamma(s)$.
f_t es holomorfa en $B(\tau,R(t))$ y coincide con f_s en un entorno de $\sigma=\gamma(s)\in B(\tau,R(t))$ y, por tanto, f_s y f_t coinciden en $B(\tau,R(t))\cap D_s$ pues, siendo D_s disco, $B(\tau,R(t))\cap D_s$ es convexo. Luego f_s puede extenderse a una función holomorfa en $B(\tau,R(t))\cup D_s$. Si f_s se desarrolla en serie de potencias en un entorno de σ, dicha serie tiene radio de convergencia $R(s)$ y, por tanto

$$R(s)\geq d(\sigma,\{z/|z-\tau|=R(t)\})=R(t)-|\tau-\sigma|$$

Luego $|\gamma(t)-\gamma(s)|=|\tau-\sigma|\geq R(t)-R(s)$.



Un razonamiento análogo prueba que
$|\gamma(t)-\gamma(s)|\geq R(s)-R(t)$.
Luego $|R(t)-R(s)|\leq|\gamma(t)-\gamma(s)|$. (1)
De la continuidad de γ en t se deduce que R es continua en t trivialmente a partir de (1). c.s.q.d.

2.2. LEMA: Sea $\gamma:I\to\mathbb{C}$ una curva de "a" a "b" y sea $\{(f_t,D_t)/t\in I\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ. Entonces existe $\varepsilon>0$ tal que si $\sigma:I\to\mathbb{C}$ es una curva de "a" a "b" de forma que $|\gamma(t)-\sigma(t)|<\varepsilon$, $\forall t\in I$ y si $\{(g_t,B_t)/t\in I\}$ es una prolongación analítica a lo largo de σ tal que $[g_0]_a=[f_0]_a$, entonces $[g_1]_b=[f_1]_b$.

Demostr.: Podemos suponer que D_t y B_t son discos abiertos de centros respectivos $\gamma(t)$ y $\sigma(t)$. Incluso se puede suponer que D_t es la bola abierta de centro $\gamma(t)$ y radio $R(t)$.

Si $R(t)=\infty$, $\forall t\in I$ entonces f_t es entera $\forall t\in I$, y además $f_t\equiv f_0$, $\forall t\in I$ (ver demostración del lema anterior). En este caso, como g_0 coincide con f_0 en un entorno de a se verifica que $g_0\in H(\mathbb{C})$ y $g_0\equiv f_0$ (si se quiere, g_0 se puede extender a una función entera que coincide con f_0). Por el lema anterior, $g_t\in H(\mathbb{C})$, $\forall t\in I$ y $g_t\equiv g_0$, $\forall t\in I$. En este caso las dos prolongaciones analíticas coinciden y, en particular, $[g_1]_b=[f_1]_b$.

Supongamos ahora que $R(t)<+\infty$, $\forall t\in I$. Entonces $R:t\in I\mapsto R(t)$ es continua. Siendo R continua en I e I compacto y $R(t)>0$, $\forall t\in I$ se deduce que existe $\varepsilon>0$ tal que $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\min_{t\in I}R(t)$.

Sea $\sigma:I\to\mathbb{C}$ una curva de "a" a "b" tal que $|\gamma(t)-\sigma(t)|<\varepsilon$, $\forall t\in I$ y sea $\{(g_t,B_t)/t\in I\}$ una prolongación analítica a lo largo de σ de forma que $[g_0]_a=[f_0]_a$.

Como $|\sigma(t)-\gamma(t)|<\varepsilon \leq R(t)$, $\forall t\in I$ se deduce que $\sigma(t)\in B_t\cap D_t$, $\forall t\in I$.
Probaremos que $g_t(z)=f_t(z)$, $\forall z\in B_t\cap D_t$, $\forall t\in I$, con lo cual se verificará en particular que $[g_1]_b=[f_1]_b$ como queríamos probar.
Sea $T=\{t\in I / f_t(z)=g_t(z), \forall z\in B_t\cap D_t\}$.
Por hipótesis ($[g_0]_a=[f_0]_a$) se tiene que $0\in T$ y, por tanto, $T\neq\emptyset$.
Veamos ahora que T es abierto y cerrado en I.
Sea $t\in I$ y sea $\delta>0$ tal que si $s\in I$ y $|s-t|<\delta$ se verifique que $|\gamma(s)-\gamma(t)|<\varepsilon$, $[f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)}$ y $|\sigma(s)-\sigma(t)|<\varepsilon$ y $[g_s]_{\sigma(s)}=[g_t]_{\sigma(s)}$, y cumpliendo también que $\sigma(s)\in B_t$. Existe un δ como el descrito por ser $\{(f_t,D_t)/t\in I\}$ y $\{(g_t,B_t)/t\in I\}$ prolongaciones analíticas a lo largo de γ y σ respectivamente, y por ser γ y σ continuas en t.
Sea $G=B_s\cap B_t\cap D_s\cap D_t$. Veamos que si $s\in I$ y $|s-t|<\delta$ se verifica que $\sigma(s)\in G$, con lo cual G será abierto conexo no vacío por ser B_s, B_t, D_s y D_t discos.
$\sigma(s)\in B_s\cap B_t$ por ser $\sigma(s)$ el centro de B_s y por la elección de δ.
Además, $|\sigma(s)-\gamma(s)|<\varepsilon<R(s)$ y, por tanto, $\sigma(s)\in B(\gamma(s),R(s))=D_s$.
También $|\sigma(s)-\gamma(t)|\leq|\sigma(s)-\sigma(t)|+|\sigma(t)-\gamma(t)|<2\varepsilon<R(t)$, por la elección de δ y de ε. Luego $\sigma(s)\in B(\gamma(t),R(t))=D_t$.
Por tanto, $\sigma(s)\in G$ y G es abierto conexo no vacío.

- T es abierto en I: Sea $t\in T$ y probemos que $t\in \mathring{T}$. Basta para ello probar que $\exists\delta>0 /]t-\delta,t+\delta[\cap I\subset T$. Sea $\delta>0$ el elegido anteriormente (que depende de t). Sea $s\in I$ tal que $|s-t|<\delta$.
$t\in T \Rightarrow f_t(z)=g_t(z)$, $\forall z\in B_t\cap D_t$ y, en particular, $\forall z\in G\subset B_t\cap D_t$.
$[f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)} \Rightarrow f_s(z)=f_t(z)$, $\forall z\in D_s\cap D_t$ y, en particular, $\forall z\in G$.
$[g_s]_{\sigma(s)}=[g_t]_{\sigma(s)} \Rightarrow g_s(z)=g_t(z)$, $\forall z\in B_s\cap B_t$ y, en particular, $\forall z\in G$.
De todo esto se sigue que $f_s(z)=g_s(z)$, $\forall z\in G$ y siendo G abierto conexo contenido en el abierto conexo $D_s\cap B_s$ se deduce que $f_s(z)=g_s(z)$, $\forall z\in D_s\cap B_s$. Luego $s\in T$ y, por tanto, $t\in\mathring{T}$. Luego T es abierto en I.
- T es cerrado: Sea $t\in T'$. Dado $\delta>0$ (el de antes), existe $s\in T$ tal que $|s-t|<\delta$, por ser t punto de acumulación de T.
Entonces $f_s(z)=g_s(z)$, $\forall z\in G\subset B_s\cap D_s$.
También $f_s(z)=f_t(z)$, $\forall z\in G\subset D_s\cap D_t$ y $g_s(z)=g_t(z)$, $\forall z\in G\subset B_s\cap B_t$.
Luego $f_t(z)=g_t(z)$, $\forall z\in G$ y siendo $D_t\cap B_t$ abierto conexo que contiene al abierto no vacío G se deduce que $f_t(z)=g_t(z)$, $\forall z\in D_t\cap B_t$.
Luego $t\in T$ y, por tanto, T es cerrado.

En definitiva T es un abierto y cerrado no vacío en el conexo I y, por tanto, $T=I$. c.q.d.

DEFINICION: Si (f,D) es un elemento de función y G es una región tal que $G \supset D$, se dice que (f,D) admite prolongación analítica sin restricción en G si para cualquier curva γ en G con punto inicial en D existe una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de γ.

2.3. TEOREMA: (de Monodromía).

Sea (f,D) un elemento de función y sea G una región de $\mathbb{C}$ tal que $G \supset D$ y (f,D) admite prolongación analítica sin restricción en G. Sean $a \in D$, $b \in G$ y γ_0 y γ_1 curvas en G de "a" a "b". Sean $\{(f_t, D_t)/t \in I\}$ y $\{(g_t, B_t)/t \in I\}$ prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de γ_0 y γ_1 respectivamente. Si γ_0 es homótopa a γ_1 con extremos fijos entonces $[f_1]_b = [g_1]_b$.

Demostr.: Siendo γ_0 y γ_1 homótopas en G con extremos fijos existe una aplicación continua $H: I \times I \longrightarrow G$ tal que

$H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$, $\forall t \in I$.

$H(0,u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $H(1,u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$, $\forall u \in I$.

Dado $u \in I$, $\gamma_u : t \in I \longmapsto \gamma_u(t) = H(t,u) \in G$ es una curva en G de "a" a "b". Por la hipótesis de existencia de prolongación analítica sin restricción en G, existe para cada $u \in I$ una prolongación analítica $\{(h_{t,u}, D_{t,u})/t \in I\}$ de (f,D) a lo largo de γ_u.

Se verifica lo siguiente:

1) $[f_1]_b = [h_{1,0}]_b$ pues, para $u=0$, tenemos dos prolongaciones analíticas a lo largo de γ_0 de un mismo elemento de función (PROPOSICION 1.1.)

2) $[g_1]_b = [h_{1,1}]_b$ análogo.

Se trata pues de probar que $[h_{1,0}]_b = [h_{1,1}]_b$.

Sea $U = \{u \in I / [h_{1,u}]_b = [h_{1,0}]_b\}$.

Puesto que $0 \in U$ se verifica que $U \neq \emptyset$. Queremos probar que $1 \in U$. Probaremos incluso que $U = I$, para lo cual basta ver que U es abierto y cerrado en I.

Sea $u \in I$. Probemos que $\exists \delta > 0 / |u - v| < \delta \Rightarrow [h_{1,u}]_b = [h_{1,v}]_b$, $v \in I$.

Por el lema 2.2., dado $u \in I$, existe $\varepsilon > 0$ tal que si σ es una curva de "a" a "b" tal que $|\gamma_u(t) - \sigma(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in I$ y si $\{(K_t, E_t)/t \in I\}$ es una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de σ, entonces $[h_{1,u}]_b = [K_1]_b$ (I)

Como H es continua en el compacto $I \times I$, es uniformemente continua en el mismo; luego dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 / |u-v| < \delta \Rightarrow |\gamma_u(t) - \gamma_v(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in I$, $v \in I$.

- $\mathcal{U}$ abierto en I: Sea $u\in\mathcal{U}$ y sea $\delta>0$ el de antes. Si $v\in I$ y $|u-v|<\delta$ entonces $|\gamma_u(t)-\gamma_v(t)|<\varepsilon, \forall t\in I$. Consideramos la prolongación analítica $\{(h_{t,v}, D_{t,v})/t\in I\}$ de (f,D) a lo largo de γ_v. De (I) se deduce que $[h_{1,v}]_b=[h_{1,u}]_b=[h_{1,0}]_b$ pues $u\in\mathcal{U}$ y, por tanto, $v\in\mathcal{U}$. Luego $I\cap\,]u-\delta,u+\delta[\,\subset\mathcal{U}$, lo que prueba que $\mathcal{U}$ es abierto en I.
- $\mathcal{U}$ cerrado en I: Sea $u\in\mathcal{U}'$. Entonces $\exists v\in\mathcal{U}/|u-v|<\delta$. Como $v\in\mathcal{U}$ se tiene que $[h_{1,v}]_b=[h_{1,0}]_b$. De la elección de δ se deduce que $[h_{1,v}]_b=[h_{1,u}]_b$. Luego $[h_{1,u}]_b=[h_{1,0}]_b$, es decir, $u\in\mathcal{U}$.

De lo dicho se sigue la tesis. ▨

2.4. COROLARIO: Sea (f,D) un elemento de función que admite prolongación analítica sin restricción en una región simplemente conexa $G\supset D$. Entonces existe una función analítica F en G tal que $F(z)=f(z), \forall z\in D$.

Demostr.: Sea $a\in D$ fijo. Sea $z\in G$ y γ una curva en G de "a" a "z" y sea $\{(f_t,D_t)/t\in I\}$ una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de γ, que existe por hipótesis. Definimos

$$F(z,\gamma)=f_1(z).$$

Probemos que realmente $F(z,\gamma)$ no depende de la curva γ elegida.
En efecto: supongamos que σ es otra curva en G de "a" a "z". Veamos que, siendo G simplemente conexo, γ y σ son homótopas con extremos fijos. Sea $\phi: G\to\mathcal{U}$ un homeomorfismo (existe pues G es simplemente conexo). Consideramos la aplicación

$$H:(t,u)\in I\times I\longmapsto H(t,u)=u[\phi(\sigma(t))]+(1-u)[\phi(\gamma(t))]\in\mathcal{U}$$

H es una homotopía con extremos fijos entre $\phi\circ\sigma$ y $\phi\circ\gamma$ en $\mathcal{U}$.
Entonces $\phi^{-1}\circ H$ es una homotopía en G con extremos fijos entre σ y γ.
Por el teorema de monodromía se verifica que $F(z,\gamma)=F(z,\sigma)$; sabemos incluso que F no depende tampoco de las prolongaciones analíticas elegidas a lo largo de las curvas γ. Sea $F(z)=F(z,\gamma)$.
Entonces $F(z)=f(z), \forall z\in D$.
Veamos que F es holomorfa en G: Para cada $z\in G$, existe un entorno de z tal que $F(w)=f_1(w)$, para cada w de dicho entorno. Como f_1 es holomorfa en una bola de centro z se deduce que F es holomorfa en una bola de centro z, para cada $z\in G$ y, por tanto, $F\in H(G)$ c.q.d.