TEMA 30º: SUPERFICIES DE RIEMANN.

1. HAZ DE GERMENES. HOJAS.

DEFINICION: (Haz de gérmenes de funciones holomorfas en un abierto)
Sea G un abierto de $\mathbb{C}$. Definimos
$$\mathcal{S}(G)=\{(z,[f]_z)\,/\,z\in G,\ f\in H(B(z))\}$$
y consideremos la aplicación $\rho:\mathcal{S}(G)\longrightarrow G$ definida por
$$\rho(z,[f]_z)=z$$
El par $(\mathcal{S}(G),\rho)$ se llama haz de gérmenes de funciones holomorfas en G. A ρ se le llama proyección. Para cada $z\in G$, $\rho^{-1}(z)$ se llama fibra en (sobre) z. A G se le llama espacio base.

DEFINICION: (Hoja definida por un elemento de función)
Si (f,D) es un elemento de función, al conjunto $N(f,D)=\{(z,[f]_z)/z\in D\}$ se le llama hoja definida por el elemento de función (f,D).

Todo elemento de $\mathcal{S}(G)$ está en una hoja. Se puede pensar en $\mathcal{S}(G)$ como una reunión de hojas, las cuales no son necesariamente disjuntas.

Si $(a,[f]_a)\in\mathcal{S}(G)$ denotaremos
$$\mathcal{N}_{(a,[f]_a)}=\{N(g,B)\,/\,a\in B\subset G \text{ y } [g]_a=[f]_a\}$$

1.1. PROPOSICION: 1) Si $N(g,B)\in\mathcal{N}_{(a,[f]_a)}$ entonces $(a,[f]_a)\in N(g,B)$.
2) Si $N(g_1,B_1),N(g_2,B_2)\in\mathcal{N}_{(a,[f]_a)}$ y $(b,[h]_b)\in N(g_1,B_1)\cap N(g_2,B_2)$ entonces existe una hoja $N(K,W)\in\mathcal{N}_{(b,[h]_b)}$ tal que
$$N(K,W)\subset N(g_1,B_1)\cap N(g_2,B_2).$$
3) Si $(a,[f]_a)\neq(b,[g]_b)$ entonces existen $N(f,A)\in\mathcal{N}_{(a,[f]_a)}$ y $N(g,B)\in\mathcal{N}_{(b,[g]_b)}$ tales que $N(f,A)\cap N(g,B)=\phi$.

Demostr.: 1) $N(g,B)\in\mathcal{N}_{(a,[f]_a)}\Rightarrow a\in B\subset G$ y $[g]_a=[f]_a$. Entonces $(a,[f]_a)=(a,[g]_a)\in N(g,B)$.
2) $(b,[h]_b)\in N(g_1,B_1)\cap N(g_2,B_2)\Rightarrow b\in B_1\cap B_2$, $[h]_b=[g_1]_b$, $[h]_b=[g_2]_b$.
La función h está definida en un entorno de b. Consideremos una bola $B(b)\subset B_1\cap B_2$ tal que $h\in H(B(b))$. Entonces

$h(z)=g_1(z)=g_2(z)$, $\forall z \in B(b)$. Sea $W=B(b)$ y $K=h$.
Es obvio que $N(K,W) \in \mathcal{N}_{(b,[h]_b)}$ pues $b \in W \subset G$ y $[K]_b=[h]_b$.
Además $N(k,W) \subset N(g_1,B_1) \cap N(g_2,B_2)$, pues $B(b) \subset B_1 \cap B_2$ y $h(z)=g_1(z)=g_2(z)$, $\forall z \in W=B(b)$.

3) Supongamos que $(a,[f]_a) \neq (b,[g]_b)$. Entonces ó $a \neq b$ ó $[f]_a \neq [g]_b$

Si $a \neq b$, entonces existen $A=B(a)$ y $B=B(b)$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $f \in H(A)$ y $g \in H(B)$. Es trivial ya que $N(f,A) \cap N(g,B) = \emptyset$.
Si $a=b$, entonces $[f]_a \neq [g]_a$. Luego existe $D=B(a)$ tal que $f,g \in H(D)$ y $f(z) \neq g(z)$ $\forall z \in D \setminus \{a\}$ (si no fuese así, f y g coincidirían sobre un conjunto de puntos con un punto de acumulación y, por tanto, coincidirían en un entorno abierto conexo de a y f y g definirían el mismo gérmen en a).
Veamos que $N(f,D) \cap N(g,D) = \emptyset$.
Si no fuese vacío, existiría $(z,[h]_z) \in N(f,D) \cap N(g,D)$ y, por tanto, $z \in D$ y $[h]_z=[f]_z$ y $[h]_z=[g]_z$. Luego sería $[f]_z=[g]_z$, es decir, f y g coinciden en un entorno de $z \in D$. Luego f y g coinciden en el abierto conexo D lo cual contradice que $f(z) \neq g(z)$, $\forall z \in D \setminus \{a\}$. csqd.

1.2. COROLARIO: Existe una única topología en $\mathcal{S}(G)$ para la cual $\mathcal{N}_{(a,[f]_a)}$ es una base de entornos abiertos de cada punto $(a,[f]_a) \in \mathcal{S}(G)$. Además dicha topología es separada y la proyección $p: \mathcal{S}(G) \to G$ es continua.

Demostr.: La 1ª parte es consecuencia inmediata de la proposición anterior (aptdos. 1) y 2)). Que la topología es separada se deduce de 3).
Probemos que p es continua.
Sea U abto en G. Entonces $p^{-1}(U)=\{(z,[f]_z) / z \in U\}$.
Sea $(z,[f]_z) \in p^{-1}(U)$. Sea D una bola abierta de centro z contenida en U tal que $f \in H(D)$, que existe por definición de $\mathcal{S}(G)$.
Entonces $(z,[f]_z) \in N(f,D) \subset p^{-1}(U)$ trivialmente.
Luego $p^{-1}(U)$ es abierto en $\mathcal{S}(G)$ y, por tanto, p es continua. csqd.

1.3. PROPOSICION: Sea G un abierto de $\mathbb{C}$, D una región tal que $D \subset G$ y sea $f \in H(D)$. Entonces $N(f,D)$ es conexo por arcos en $\mathcal{S}(G)$.

Demostr.: Sean $(a,[f]_a),(b,[f]_b) \in N(f,D)$.
Entonces $a,b \in D$. Siendo D abierto conexo, D es conexo por arcos en $\mathbb{C}$.

Existe entonces una curva $\gamma: I \to D$ tal que $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$.
Definimos $\sigma: I \to N(f,D)$ por $\sigma(t)=(\gamma(t), [f]_{\gamma(t)}) \in N(f,D)$, $\forall t \in I$.
De σ se dice que es un "levantamiento" de γ.
Se verifica que $\sigma(0)=(a,[f]_a)$ y $\sigma(1)=(b,[f]_b)$.
Veamos que σ es continua, con lo cual quedará probada la tesis.
Dado $t \in I$, sea $N(g,V)$ un entorno de $\sigma(t)=(\gamma(t), [f]_{\gamma(t)})$ –observar que las hojas forman una base de entornos–.
Entonces $\gamma(t) \in V$ y $[f]_{\gamma(t)}=[g]_{\gamma(t)}$. Existe entonces $r>0$ tal que $B(\gamma(t),r) \subset V \cap D$ y $f(z)=g(z)$, $\forall z \in B(\gamma(t),r)$.
Siendo γ continua en t, existe $\delta>0$ tal que si $s \in I$ y $|s-t|<\delta$ entonces $\gamma(s) \in B(\gamma(t),r)$. (1)
Sea $s \in I$ tal que $|s-t|<\delta$. Entonces
$\sigma(s)=(\gamma(s),[f]_{\gamma(s)}) \overset{(1)}{=} (\gamma(s),[g]_{\gamma(s)}) \in N(g,V)$ pues $\gamma(s) \in V$. c.s.q.d.

1.4. COROLARIO: 1) $\mathcal{S}(G)$ es localmente conexo por arcos.
2) Cada componente conexa de $\mathcal{S}(G)$ es un conjunto abierto y conexo por arcos.

Demostr.: 1) Trivial: las hojas forman una base de entornos en $\mathcal{S}(G)$ y son conexas por arcos.
2) En los espacios localmente conexos las componentes conexas son conjuntos abiertos. c.s.q.d.

1.5. TEOREMA: Dos puntos $(a,[f]_a), (b,[g]_b) \in \mathcal{S}(G)$ se pueden unir por un arco en $\mathcal{S}(G)$ si, y solo si, existe una curva γ en G tal que $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$ y $[g]_b$ es prolongación analítica de $[f]_a$ a lo largo de γ.

Demostr.: $\Rightarrow$) Supongamos que existe una curva $\sigma: I \to \mathcal{S}(G)$ tal que $\sigma(0)=(a,[f]_a)$ y $\sigma(1)=(b,[g]_b)$. Si $\rho: \mathcal{S}(G) \to G$ es la proyección, sea $\gamma = \rho \circ \sigma$. Siendo ρ y σ continuas, $\gamma: I \to G$ es una curva, y $\gamma(0)=a$ y $\gamma(1)=b$.
Como $\forall t \in I$, $\sigma(t) \in \mathcal{S}(G)$, se verifica que para cada $t \in I$, existe un germen $[f_t]_{\gamma(t)}$ tal que $\sigma(t)=(\gamma(t),[f_t]_{\gamma(t)})$. Probemos que $\{[f_t]_{\gamma(t)} / t \in I\}$ es una prolongación analítica a lo largo de γ de "a" a "b".
Observar que $[f_0]_{\gamma(0)}=[f]_a$ pues $\sigma(0)=(a,[f_0]_a)$ y $\sigma(0)=(a,[f]_a)$.
Análogamente, $[f_1]_{\gamma(1)}=[g]_b$.
Para cada $t \in I$ sea $D_t = B(\gamma(t)) \subset G$ tal que $f_t \in H(D_t)$.
Veamos que $\{(f_t,D_t) / t \in I\}$ es una prolongación analítica

Sea $t \in I$. Como $N(f_t, D_t)$ es un entorno abierto de $\sigma(t) = (\gamma(t), [f_t]_{\gamma(t)})$ y siendo σ continua en t, existe $\delta > 0$ tal que si $s \in I$ y $|s-t| < \delta$ entonces $\sigma(s) = (\gamma(s), [f_s]_{\gamma(s)}) \in N(f_t, D_t)$.

Se sigue de esto que $\gamma(s) \in D_t$ y $[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}$, por la definición de hoja.

Luego (f_1, D_1) es prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de γ, o bien $[g]_b$ es prolongación analítica de $[f]_a$ a lo largo de γ.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que γ es una curva en G tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Sea $\{(f_t, D_t) / t \in I\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ tal que $[f_0]_a = [f]_a$ y $[f_1]_b = [g]_b$.

Consideremos el levantamiento de γ

$$\sigma : t \in I \longmapsto \sigma(t) = (\gamma(t), [f_t]_{\gamma(t)}) \in \mathcal{S}(G)$$

Es obvio que $\sigma(0) = (a, [f]_a)$ y $\sigma(1) = (b, [g]_b)$.

Veamos que σ es continua en I.

Sea $t \in I$ y consideremos un entorno de $\sigma(t) = (\gamma(t), [f_t]_{\gamma(t)})$ que contendrá una hoja $N(f_t, B_t)$ de forma que $B_t = B(\gamma(t)) \subset D_t$.

Siendo γ continua en t y $\{(f_t, D_t) / t \in I\}$ prolongación analítica a lo largo de γ, existe $\delta > 0$ tal que si $s \in I$ y $|s-t| < \delta$ entonces $\gamma(s) \in B_t$ y $[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}$.

Se sigue de esto que, si $s \in I$ y $|s-t| < \delta$ entonces $\sigma(s) = (\gamma(s), [f_s]_{\gamma(s)}) = (\gamma(s), [f_t]_{\gamma(s)}) \in N(f_t, B_t)$ pues $\gamma(s) \in B_t$.

Luego σ es continua en cada $t \in I$. c.s.q.d.

El siguiente teorema caracteriza las componentes conexas de $\mathcal{S}(G)$.

<u>1.6. TEOREMA</u>: Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de $\mathcal{S}(G)$ y sea $(a, [f]_a) \in \mathcal{C}$.

Entonces $\mathcal{C}$ es una componente conexa de $\mathcal{S}(G)$ si, y solo si,

$\mathcal{C} = \{(b, [g]_b) \in \mathcal{S}(G) / [g]_b$ es prolongación analítica de $[f]_a$ a lo largo de una curva γ en $G\}$

Demostr.: $\Rightarrow$] Supongamos que $\mathcal{C}$ es una componente conexa de $\mathcal{S}(G)$. Entonces $\mathcal{C}$ es abierto y conexo por arcos en $\mathcal{S}(G)$. Luego cualquier punto de $\mathcal{C}$ se puede unir por un arco contenido en $\mathcal{C}$ con $(a, [f]_a)$.

Por el teorema anterior se tiene que

$\mathcal{C} \subset \{(b, [g]_b) \in \mathcal{S}(G) / [g]_b$ es prolongación analítica de $[f]_a$ a lo largo de una curva γ en $G\}$

También se da la inclusión en sentido contrario por el teorema anterior.

$\Leftarrow$] Sea $\mathcal{C} = \{(b, [g]_b) \in \mathcal{S}(G) / [g]_b$ prolong. analítica de $[f]_a$ a lo largo de una curva γ en $G\}$

Veamos que es una componente conexa de $\mathcal{S}(G)$.

Sea $\mathcal{C}_1$ la componente conexa de $(a, [f]_a)$ en $\mathcal{S}(G)$. Por $\Rightarrow$] se tiene entonces que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, lo que prueba que $\mathcal{C}$ es una componente conexa. c.s.q.d.

2. SUPERFICIES DE RIEMANN.

Recordemos que, si (f, D) es un elemento de función, se define la función analítica completa $\mathcal{F}$ obtenida de (f,D) como el conjunto de los gérmenes $[g]_z$ para los cuales existe $a \in D$ y una curva γ de "a" a "z" tal que $[g]_z$ es prolongación analítica de $[f]_a$ a lo largo de γ.

Dada la función analítica completa $\mathcal{F}$ definimos

$$G = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \text{existe un germen } [g]_z \in \mathcal{F} \}.$$

G es entonces un abierto de $\mathbb{C}$: si $z \in G$, existe $[g]_z \in \mathcal{F}$, por tanto, existe una bola $B(z)$ tal que $g \in H(B(z))$ y, por tanto, $B(z) \subset G$.

Sea $\mathcal{R} = \{ (z, [g]_z) \,/\, [g]_z \in \mathcal{F} \}$.

Del teorema 1.6 se deduce que, si $a \in D$ (por tanto, $[f]_a \in \mathcal{F}$), entonces la componente conexa de $(a, [f]_a)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ es, precisamente, $\mathcal{R}$.

Es obvio que $\rho(\mathcal{R}) = G$.

DEFINICION: Con las notaciones anteriores, si $\rho : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ es la proyección, entonces el par $(\mathcal{R}, \rho)$ se llama superficie de Riemann de la función analítica completa $\mathcal{F}$. A G se le llama espacio base de $\mathcal{F}$.

2.1. TEOREMA: Sea $\mathcal{F}$ una función analítica completa con espacio base G y superficie de Riemann $(\mathcal{R}, \rho)$. Entonces $\rho|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to G$ es continua y abierta. Además si $(a, [f]_a) \in \mathcal{R}$ entonces existe un entorno $N(f, D)$ de $(a, [f]_a)$ tal que ρ es un homeomorfismo de $N(f,D)$ sobre un disco abierto del plano (que, obviamente, será D).

Demostr.: Siendo $\mathcal{R}$ una componente conexa de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$, es un abierto conexo de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$. Ya sabemos que $\rho : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ es continua y que $\rho(\mathcal{R}) \subset G$ y, por tanto, $\rho|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to G$ es continua.

Veamos que $\rho|_{\mathcal{R}}$ es abierta. Puesto que las hojas constituyen una base de abiertos de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ y $\mathcal{R}$ es un abierto de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ basta ver que ρ transforma hojas en abiertos, pero esto es trivial pues si consideramos una hoja $N(f, \mathcal{U})$ entonces $\rho(N(f, \mathcal{U})) = \mathcal{U}$ que es un abierto por definición de hoja.

Veamos que ρ es un homeomorfismo local.

Sea $(a, [f]_a) \in \mathcal{R}$. Sea D un disco abierto tal que $(f, D) \in [f]_a$.

Consideremos $\rho : N(f,D) \to D$. ρ es continua y abierta. Es obvio que es sobre (definición de ρ). Veamos que es inyectiva.

Sean $(b, [f]_b), (c, [f]_c) \in N(f,D)$ tales que $(b, [f]_b) \neq (c, [f]_c)$.

Entonces, necesariamente será $b \neq c$. c.q.d.

DEFINICION: Si X es un espacio topológico, se define una carta coordenada sobre X como un par (U,φ) donde U es un abierto de X y φ un homeomorfismo de U sobre un abierto de $\mathbb{C}$. Si $a \in U$ se dirá que la carta (U,φ) contiene a "a".

DEFINICION: Se define una variedad analítica como un par (X,Φ) donde X es un espacio topológico conexo y Φ una colección de cartas coordenadas tales que se verifican las siguientes condiciones:

i) Para cada $a \in X$ existe una carta en Φ que contiene a "a".

ii) Si $(U_a,\varphi_a),(U_b,\varphi_b) \in \Phi$ son tales que $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, entonces la aplicación $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$ definida en $\varphi_b(U_a \cap U_b)$ y valorada "sobre" $\varphi_a(U_a \cap U_b)$ es analítica.

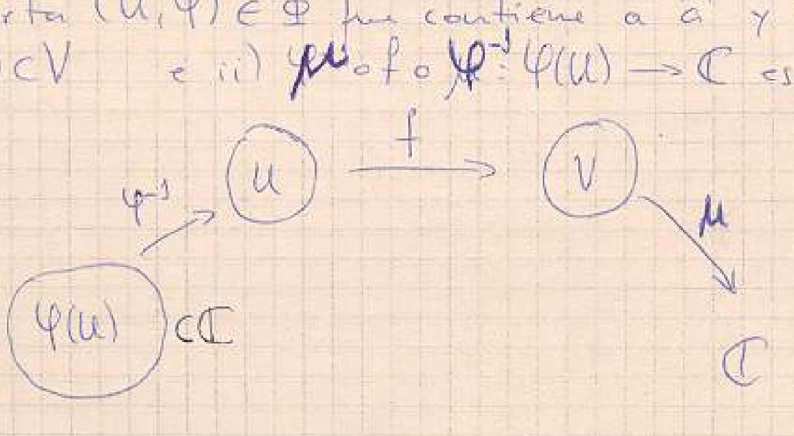
7.7. TEOREMA: Si (R,ρ) es la superficie de Riemann de una función analítica completa y $\Phi = \{(U,\rho) / U$ abierto de R y ρ inyectiva en $U\}$, entonces (R,Φ) es una variedad analítica.

Demostr.: En el teorema anterior se prueba que para todo punto de R existe un abierto U (una hoja) de R tal que la restricción de ρ a U, valorada en $\rho(U)$, es un homeomorfismo y tal que el punto dado pertenece a U. Luego Φ es un "recubrimiento" de R (se verifica i)).

Sean $(U,\rho),(V,\rho) \in \Phi$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$. La aplicación
$(\rho_{|V}) \circ (\rho_{|U})^{-1} : \rho(U \cap V) \to \rho(U \cap V)$ es la identidad que es holomorfa.

Además R es conexo y Hausdorf.(*). Luego (R,Φ) es una variedad analítica. csqd.

DEFINICION: Sean (X,Φ) e (Y,Ψ) variedades analíticas y $f: X \to Y$ una función continua. Se dice que f es analítica en un punto $a \in X$ si para cada carta $(V,\mu) \in \Psi$ que contenga a $f(a)$ existe una carta $(U,\varphi) \in \Phi$ que contiene a "a" y tal que
i) $f(U) \subset V$ e ii) $\mu \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{C}$ es analítica.



Esta definición generaliza el concepto de analiticidad (u holomorfía) en $\mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ con $D \subset \mathbb{C}$ para $\varphi = \mu = id$, e incluso la derivabilidad definida en el tema de "superficies de Riemann elementales".

<u>2.3. TEOREMA</u>: Sea $\mathcal{F}$ una función analítica completa con superficie de Riemann (R, ρ). Si $\mathcal{F}: R \to \mathbb{C}$ está definida por

$$\mathcal{F}(z, [f]_z) = f(z)$$

entonces $\mathcal{F}$ es una función analítica.

Demostrac: Sean $(a, [f]_a) \in R$ y $\varepsilon > 0$. Existe entonces una bola abierta de centro a, $B(a)$, tal que $f \in H(B(a))$ y

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon, \ \forall z \in B(a)$$

pues f define un germen en "a" y f es continua en a.

Entonces

$$|\mathcal{F}(z, [f]_z) - \mathcal{F}(a, [f]_a)| = |f(z) - f(a)| < \varepsilon, \ \forall (z, [f]_z) \in N(f, B(a)).$$

Luego $\mathcal{F}$ es continua en $(a, [f]_a)$. Esto prueba también la proposición i) de la definición anterior.

Sabemos además que $\rho: N(f, B(a)) \to B(a)$ es un homeomorfismo. Entonces $\mathcal{F} \circ \rho^{-1}: B(a) \to \mathbb{C}$ que está definida por

$$(\mathcal{F} \circ \rho^{-1})(z) = \mathcal{F}(z, [f]_z) = f(z), \ \forall z \in B(a)$$

es holomorfa en $B(a)$, pues $f \in H(B(a))$.

Luego $\mathcal{F}$ es analítica en $B(a)$. c.s.q.d.