MATEMÁTICAS
para primero de CIENCIAS

Matemáticas para primero de Ciencias

María Angeles Mulero Díaz

Ignacio Ojeda Martínez de Castilla

A Jara y a Violeta
A Esther

La publicación del presente manual forma parte de las “Acciones para el Desarrollo del Espacio Europeo de Educación Superior en la Universidad de Extremadura Curso 2006/07” en el marco de la Convocatoria de ayudas para la mejora de la calidad de la docencia en la Universidad de Extremadura realizada en febrero de 2007 por el Vicerrectorado de Docencia e Integración Europea y financiada por la Junta de Extremadura, el Ministerio de Educación y Ciencia y la Universidad de Extremadura.

Prólogo

EL presente manual está concebido para servir de apoyo a la docencia de una asignatura de matemáticas básicas del primer curso de un Grado de la Rama de Ciencias y se ha redactado a partir de los apuntes elaborados durante varios cursos para impartir la asignatura de Matemáticas de primero de Biología.

Uno de nuestros principales objetivos como profesores de Matemáticas es convencer al estudiante de la utilidad de las Matemáticas para comprender determinados aspectos de la realidad. Para ello, hemos creído conveniente incidir menos en los aspectos más teóricos, omitiendo por ejemplo la mayoría de las demostraciones, y hemos procurado exponer abundantes ejemplos que muestren el uso en la Rama de Ciencias de los conceptos y resultados explicados.

Los contenidos seleccionados son cálculo, ecuaciones diferenciales, introducción a la probabilidad y álgebra lineal, exponiendo una materia de 6 créditos ECTS.

La teoría expuesta en este manual se complementa con notas históricas y reseñas bibliográficas donde el lector interesado podrá ampliar sus conocimientos sobre los temas tratados y, sobre todo, remitimos a la bibliografía a quien desee consultar las demostraciones omitidas. Todas las referencias bibliográficas corresponden a textos de amplia difusión.

Al final de cada capítulo se incluye una relación de ejercicios con los que se pretende que el alumno reafirme y aplique los conocimientos adquiridos y se ejercite en el manejo de las técnicas y métodos aprendidos. Por último, proponemos una autoevaluación por capítulo, formada por una batería de preguntas esencialmente de tipo test, destinada a que cada alumno valore su grado de asimilación de los conceptos estudiados.

Badajoz, Septiembre de 2007.

Índice general

Introducción

EL objetivo fundamental de cualquier científico es entender la realidad (más bien, una pequeña parcela de la misma) y llegar a describirla de forma racional. Con frecuencia, para formular esta descripción, se utiliza una representación simplificada del fenómeno en estudio (biológico, físico, etc...) es decir, un modelo. Los modelos se clasifican atendiendo a diversos criterios. Según la fuente de información sobre la que se basa el modelo, se distingue entre modelos empíricos, basados en observaciones experimentales, y modelos heurísticos, que se fundamentan en las explicaciones sobre las causas o mecanismos naturales que producen el fenómeno estudiado.

Un modelo matemático es una representación simplificada de un fenómeno natural mediante procedimientos matemáticos, con el que se pretende entender la realidad y describirla de modo preciso, así como facilitar cálculos y predicciones. El modelo matemático más sencillo consiste en una o varias ecuaciones que permiten calcular el valor de una cierta magnitud en función de otras. Hay dos tipos de modelos matemáticos: los determinísticos, o deterministas, y los estocásticos o probabilísticos.

Los modelos determinísticos se caracterizan porque en ellos no intervienen ni el azar ni la probabilidad, de modo que, siempre que se parta de los mismos supuestos se repiten exactamente las mismas conclusiones. Estos modelos pueden resultar excesivamente rígidos para describir una realidad biológica. No obstante, son de gran importancia para el estudio de numerosos procesos biológicos.

Los modelos estocásticos son aquellos en los que intervienen el azar o la probabilidad como elementos del modelo.

El principal objetivo de las asignaturas de Matemáticas y Estadística es proporcionar a los alumnos la formación matemática y estadística necesaria para entender y manejar los modelos que estudiarán en las distintas asignaturas de los grados de Ciencias.

En este manual de Matemáticas pretendemos proporcionar las herramientas necesarias para describir y entender los modelos determinísticos. Los modelos estocásticos se estudian en asignaturas de Estadística o Bioestadística.

Estudiaremos dos tipos de modelos determinísticos: los discretos y los continuos. En los modelos discretos interviene el tiempo como una variable discreta, es decir sólo toma valores enteros (0, 1, 2, etc...), independientemente de la unidad en que se mida (horas, semanas, años, etc...). En los modelos continuos el tiempo es una variable continua, que puede tomar cualquier valor real (número decimal con número finito o infinito de cifras).

Para construir los modelos discretos utilizaremos las matrices como herramienta fundamental. Los modelos continuos se construirán a partir de ecuaciones diferenciales. La teoría de ecuaciones diferenciales requiere el conocimiento previo del cálculo diferencial e integral.

Dedicaremos un capítulo de la asignatura cada uno de estos temas: cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y álgebra lineal. Estudiaremos también un tema de introducción a la probabilidad.

TEMA I

Cálculo diferencial

Introducción

COMENZAREMOS la asignatura revisando los conceptos y resultados fundamentales del cálculo diferencial para funciones reales de una variable real, que suponemos ya estudiados en su mayoría en las Matemáticas del Bachillerato. El conocimiento y compresión de esta materia es fundamental para abordar con éxito los siguientes capítulos, dedicados al cálculo integral y al estudio de las ecuaciones diferenciales.

Daremos en primer lugar una breve justificación de la necesidad y conveniencia del estudio de funciones, límites, continuidad y derivadas en una Licenciatura en Biología.

Como hemos señalado en la introducción de la asignatura, el objetivo primordial del científico es el de entender y describir la realidad en sus múltiples facetas. Necesitará para ello herramientas que le proporcionan las Matemáticas.

Una función es una herramienta matemática mediante la que expresamos la relación entre una causa (variable independiente) y un efecto (variable dependiente). Así, utilizamos funciones para formular de manera precisa la dependencia de una magnitud respecto de otra; por ejemplo, la presión P a que está sometido un gas depende (es función) de la temperatura T del gas, $P = f(T)$; la dinámica de poblaciones estudia la evolución del número de individuos de una población, N, a lo largo del tiempo, $N = N(t)$.

Cualquier medida que hagamos de una magnitud real será aproximada, nunca exacta. Por este motivo, nos interesa estudiar los límites y la continuidad de las funciones. Una función es continua cuando variaciones muy pequeñas (en la escala que se esté usando) en la causa producen pequeñas variaciones en el efecto. Estas pequeñas variaciones en las magnitudes siempre ocurren debido a las imprecisiones de las medidas. Cuando una función es continua, podemos aproximarnos tanto como queramos a un determinado valor del efecto (por ejemplo, la presión) sin más que controlar, tanto como sea necesario, el valor de la causa (por ejemplo, la temperatura). Cuando una función presenta una discontinuidad, no podemos prever los efectos, puesto que la causa siempre estará sometida a la imprecisión de la medida.

El concepto fundamental del cálculo diferencial es el de derivada de una función, que expresa la tasa de variación instantánea, o velocidad, de un proceso. Además, a partir de la derivada se obtiene información fundamental sobre la función, (crecimiento, extremos, etc...), y por tanto, sobre el fenómeno en estudio.

El cálculo diferencial permite resolver los problemas que dieron lugar a su creación: construir una línea tangente a una curva (aproximación lineal) y calcular los máximos y mínimos de una función (optimización). El cálculo es una de las herramientas analíticas más importante en la investigación de procesos dinámicos y se aplica en las ciencias de la vida para construir multitud de modelos (epidemiológicos, de crecimiento, interacciones entre organismos, estrategias evolutivas, reacciones enzimáticas, etc...).

1. Algunas nociones básicas sobre $\mathbb{R}$.

HISTÓRICAMENTE, el concepto de número real fue el último, de los que se estudian en un curso estándar de cálculo diferencial e integral, que se fundamentó de forma rigurosa. Este hecho puede resultar extraño de partida, pues el resto de conceptos (función, límite, derivada, etc.) tienen como espacio ambiente el conjunto de los número reales. Probablemente esto se debe a que el concepto de número real es el que tiene un significado geométrico más claro, un número real se puede entender como la longitud de un segmento, y sin embargo es sin lugar a dudas el más difícil de fundamentar aritméticamente.

En esta sección definiremos los distintos tipos de números que aparecerán a lo largo de la asignatura, así como algunos conceptos elementales de la topología de la recta real: los intervalos.

Se puede encontrar una buena introducción histórica del concepto de número real en el apartado cuarto del segundo capítulo de [**Dur96**]; asimismo, remitimos al lector al capítulo 2 de [**Spi96**] para un desarrollo más completo y avanzado de los conceptos que introduciremos en esta sección.

1.1. Números naturales, enteros, racionales y reales.

Los números más sencillos son los “números de contar”

$$1, 2, 3, \dots$$

Estos números se llaman **naturales** y el conjunto (infinito) de todos ellos se denota $\mathbb{N}$. Los números naturales se pueden sumar y multiplicar, aunque no siempre tiene sentido la resta o diferencia de dos de ellos, por ejemplo, $2-3$ no es un número natural. Este problema se resuelve fácilmente ampliando nuestro conjunto de números, sin más que considerar el cero y los opuestos (negativos) de los números naturales,

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Este nuevo conjunto se denota $\mathbb{Z}$ y su elementos se llaman **números enteros**. Es claro que los números enteros se pueden sumar, multiplicar y restar, además, todas las ecuaciones lineales de la forma $x - a = 0,\ a \in \mathbb{Z}$, tienen solución en $\mathbb{Z}$. Sin embargo, volvemos a encontrarnos con un problema si tratamos de resolver una ecuación lineal de la forma $ax - b = 0,\ a$ y $b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$; por ejemplo, $2x - 1 = 0$, ya que su solución no es un número entero. El problema radica en que no existe ningún número entero que multiplicado por 2 de como resultado 1, esto es, el número entero 2 no tiene inverso en $\mathbb{Z}$. De nuevo, necesitamos ampliar nuestro conjunto de números a otros donde no tenga cabida este tipo de problemas. Así, consideramos el conjunto de todas las fracciones b/a con a y $b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, los números representados por tales fracciones forman el conjunto de los **números racionales**. En una fracción b/a con a y $b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, se llama **denominador** al número entero a y **numerador** al número entero b.

Como es bien sabido los números racionales se pueden sumar y restar

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$

se pueden multiplicar

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

y se pueden dividir

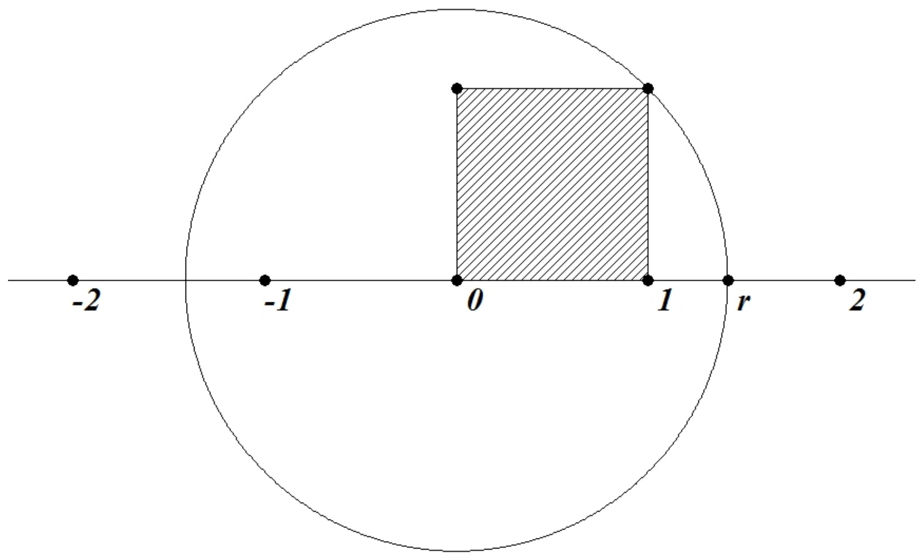
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

para cada a, b, c y $d \in \mathbb{Z}$, con b y d no nulos, y además, c no nulo en la división.

Sabemos que existen infinitas maneras de escribir un mismo número racional; por ejemplo, $1/2 = 2/4 = 3/6 \ldots$. Normalmente usaremos las fracciones reducidas para representarlos. Diremos que a/b, a y $b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, es una **fracción reducida** si el máximo común divisor de a y b es uno, en símbolos, $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$. Es claro que *cualquier fracción se puede escribir en forma reducida*. En efecto, dada una fracción a/b, a y $b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, cualquiera, si $d = \mathrm{mcd}(a, b)$, y $a = da'$ y $b = db'$, entonces a'/b' y a/b representan el mismo número racional, y a'/b' es reducida.

Las fracciones (y en consecuencia los números racionales), además de permitirnos resolver todas las ecuaciones lineales de la forma $ax - b = 0$, a y $b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$; recogen la noción de proporcionalidad; por ejemplo, si los lados de un rectángulo miden 1 y 2 se dice que el lado menor es proporcional al mayor con razón $1/2$. Es más, en términos de proporcionalidad, si dos fracciones a/b y c/d, con a, b, c y $d \in \mathbb{Z}$, con b y d no nulos, representan un mismo número racional, diremos que *a es b como c es d*. Así, en determinadas ocasiones preferiremos fracciones cuyo denominador sea 100 (en vez de fracciones reducidas), para expresar proporciones porcentuales, es decir, porcentajes; por ejemplo, si un determinado grupo de individuos constituye el 25 por ciento de la población total, diremos que este grupo mantiene una proporción de razón $25/100$ respecto a la población total, es decir, el número de individuos del grupo es al número total de la población como 25 es a 100.

No obstante, existen proporciones que no se pueden expresar mediante números racionales (o fracciones de números enteros); por ejemplo, la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado de lado uno o la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro no se pueden expresar como fracciones de número enteros. En el primer caso, la razón es $\sqrt{2}$ y en el segundo es π. Los griegos llamaron a estos números magnitudes inconmensurables y hoy día se conocen como números irracionales en contraposición a los racionales que, como hemos dicho antes, son los que se pueden expresar como fracciones de números enteros. Según lo anterior, si dibujamos todos los números racionales sobre una línea recta ideal en la que fijamos un punto que corresponde al cero, observamos que aún hay huecos (de hecho una cantidad infinita de ellos), como por ejemplo el punto correspondiente a $r = \sqrt{2}$:



Con esta identificación, el conjunto de todos números correspondientes a los puntos de la recta se llaman **números reales**, y por extensión a tal recta se le llama **recta real**. El conjunto de los números reales se denota $\mathbb{R}$. En ocasiones, $\mathbb{R}$ recibe el nombre de recta real, en cuyo caso, su elementos (los números reales) se denominan puntos por razones obvias.

Llegados a este punto hay que advertir que la construcción aritmética de los números reales no es elemental. En otras palabras, las propiedades aritméticas

(a) Si a y b son números reales cualesquiera $a + b = b + a$.
(b) Si a, b y c son números reales cualesquiera $a + (b + c) = (a + b) + c$.
(c) Si a es un número real $a + 0 = 0 + a = a$.
(d) Para todo número real a existe un número $-a$ tal que $a+(-a) = (-a)+a = 0$.
(e) Si a y b son números reales cualesquiera $a \cdot b = b \cdot a$.
(f) Si a, b y c son números reales cualesquiera $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
(g) Si a es un número real $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
(h) Para todo número real a distinto de cero existe un número a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
(i) Si a y b son números reales cualesquiera $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

no distinguen a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, aunque sí los distinguen de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Por lo que se requieren argumentos sofisticados que sobrepasan los objetivos de este curso (véase el capítulo 28 de [**Spi96**] o el capítulo 1 de [**BL83**]).

Finalmente, observamos que, partiendo de los números naturales, hemos ido construyendo una serie de conjuntos de números (enteros, racionales y reales) cada uno incluido en el siguiente. De este modo tenemos que la siguiente cadena de inclusiones de conjuntos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.2. Intervalos.

A continuación vamos a repasar brevemente algunas nociones elementales sobre la topología[1] de la recta real.

Dados a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, definimos el **intervalo cerrado** de extremos a y b, que denotaremos por $[a, b]$, como el conjunto

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

y el **intervalo abierto** de extremos a y b, que denotaremos por (a, b), como el conjunto

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Asimismo, definimos los intervalos $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, como los conjuntos

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad \text{y} \quad (a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

y, por último,

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \quad \text{y} \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

Nota I.1.1. Obsérvese que hemos usado los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ para denotar conceptualmente los "extremos" izquierdo y derecho de la recta real, que llamaremos menos infinito y más infinito, respectivamente; de este modo se tiene que $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$. Es muy importante tener presente que, como hemos dicho, $-\infty$ y $+\infty$ son símbolos y <u>no</u> representan números en ningún caso.

Nota I.1.2. La intersección de dos intervalos (si no es el conjunto vacío) es un intervalo, aunque no será necesariamente ni abierto ni cerrado; por ejemplo, dados dos intervalos $I = [1, 3]$ y $J = (0, 2)$, la intersección de I y J, $I \cap J$, es el intervalo $[1, 2)$.

---

[1] Del gr. $\tau\acute{o}\pi o\zeta$, lugar, y -logía.

1. f. Rama de las matemáticas que trata especialmente de la continuidad y de otros conceptos más generales originados de ella. Así estudia las propiedades de las figuras con independencia de su tamaño o forma (las diferentes formas de una figura dibujada en una superficie elástica estirada o comprimida son equivalentes en topología).

Diccionario de la Lengua Española. Real Academia Española, 1992.

Nota I.1.3. Si la intersección de dos intervalos es el conjunto vacío, entonces la unión no es un intervalo. Pero, si dos intervalos se cortan (es decir, su intersección no es el conjunto vacío), entonces la unión es un intervalo, que no será necesariamente ni abierto ni cerrado; por ejemplo, si $I = [1, 3]$ y $J = (0, 2)$, la unión de I y J, $I \cup J$, es el intervalo $(0, 3]$.

Se llama **intervalo simétrico de centro** a **y radio** $\delta > 0$ al intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$.

1.3. Valor absoluto.

Sabemos que si un número real a es negativo, entonces $-a$ es positivo. Este hecho es la base de un concepto que va desempeñar un papel sumamente importante para la descripción de algunos intervalos. Para todo número real a definimos el **valor absoluto**, o **módulo**, $|a|$, de a como sigue:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Una definición alternativa de valor absoluto de a es la siguiente

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Nótese que $|a|$ es siempre un número positivo, a menos que a sea cero; por ejemplo, $|-2| = 2$, $|5| = 5$ y $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Destacamos la siguiente propiedad del valor absoluto:

Proposición I.1.4. *Dados a y $b \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. El lector interesado en conocer la demostración de esta desigualdad puede encontrarla en la página 14 de [**Spi96**]. ■

El número $|a - b|$, a y $b \in \mathbb{R}$ tiene una interpretación geométrica sencilla: es la distancia entre a y b, es decir, la longitud del intervalo cerrado $[a, b]$. Esto nos permite reinterpretar los intervalos simétricos de centro $a \in \mathbb{R}$ y radio $\delta > 0$ como *los números reales que distan de a menos que δ*. En símbolos,

$$(a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}.$$

2. Funciones reales de variable real

La definición de función real de variable real que suele considerarse en un curso estándar de Análisis Matemático es la siguiente: *se dice que f es una función definida en un conjunto D de números reales si a cada punto x de D se le asocia un único número real que denotaremos $f(x)$*. Es importante resaltar que la forma de asociar el número $f(x)$ al número x puede ser tan arbitraria como se desee.

El germen de la idea de función real de variable real se debe, entre otros, al matemático francés R. Descartes (1596-1650). Aunque hay que esperar hasta el siglo XIX para llegar al concepto actual de función que se atribuye a dos matemáticos que lo expusieron de forma independiente: el ruso N.I. Lobachevski (1793-1856) y el alemán P.G.L. Dirichlet (1805-1859) (véase el primer apartado del capítulo 2 de [**Dur96**] para más detalles).

Definición I.2.1. Llamaremos **función real de variable real** a cualquier aplicación (o correspondencia unívoca) definida en una parte, D, de $\mathbb{R}$, que tome valores en $\mathbb{R}$ (o en una parte de $\mathbb{R}$), lo que denotaremos por

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

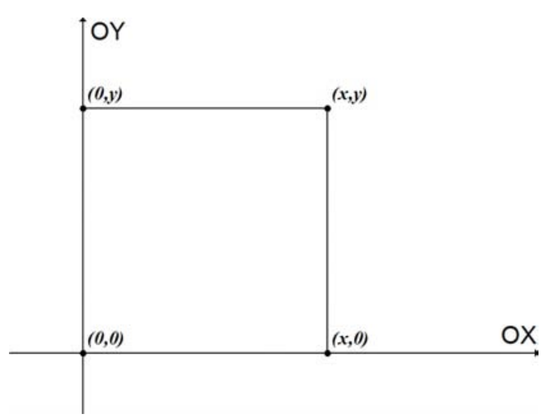
El conjunto D se llama **dominio de la función**.

En palabras de Dirichlet, "el valor de la función puede ser dado por una expresión analítica o por una condición que aporta un modo de examinar todos los números y elegir uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir y resultar desconocida." De forma general, en esta asignatura, describiremos las funciones mediante su **expresión analítica**, es decir, mediante expresiones de $f(x)$ obtenidas a partir de x mediante las cuatro reglas elementales (suma, resta, producto y división), extracción de raíces, valor absoluto, exponenciales, logaritmos, funciones trigonómetricas, etc...; por ejemplo,

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+x}.$$

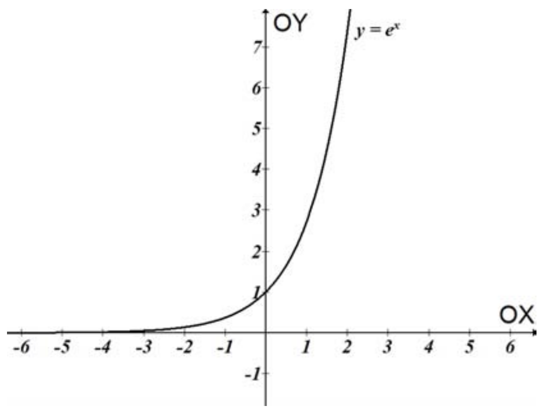
Generalmente, cuando no se diga lo contrario, entenderemos que el dominio de una función definida mediante su expresión analítica es *el mayor conjunto de números reales donde es posible definir la función.*

Hemos visto que los números reales se pueden dibujar sobre una recta, de igual modo se pueden dibujar pares de números reales (x, y) sobre un plano. Para ello, consideramos dos líneas rectas que se cortan en ángulo recto. Para distinguir estas rectas llamamos a una de ellas **eje OX** (o **eje de abscisas**) y la otra **eje OY** (o **eje de ordenadas**) El eje OX corresponde a pares de la forma $(x, 0)$ y el eje OY a los de la forma $(0, y)$, de manera que la intersección de los dos ejes, el **origen de coordenadas**, corresponde al par $(0, 0)$.



Esto es lo que se conoce como **sistema cartesiano de coordenadas** y se debe a Descartes. Así, cualquier par ordenado (x, y) de número reales se podrá dibujar ahora como se aprecia en la figura en el vértice del rectángulo cuyos otros vértices son los designados por $(0,0)$, $(x,0)$ y $(0,y)$; en cuyo caso, los números x e y se llaman primera y segunda coordenada de punto (x,y).

Definición I.2.2. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si, para cada $a \in D$, consideramos los pares $(a, f(a))$ como puntos sobre un sistema cartesiano de coordenadas (x,y), obtenemos una curva que se conoce como **gráfica**.



Gráfica de la función exponencial natural.

En el apéndice I se muestran las expresiones analíticas de algunas las funciones elementales.

Nota I.2.3. Dado que <u>todas</u> las funciones que estudiaremos en esta asignatura serán reales de variable real, en lo que sigue nos referiremos a ellas como funciones a secas.

2.1. Operaciones con funciones.

El valor de una función es, como sabemos, un número real, por lo que podemos realizar operaciones aritméticas con funciones dando lugar a nuevas funciones.

Definición I.2.4. Sean $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $D_f \cap D_g \neq \varnothing$. Definimos

- la **suma de** f **y** g, $f+g$, y el **producto de** f **por** g, $f \cdot g$, como las funciones
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x),\\ (f\cdot g)(x) &:= f(x)\cdot g(x),\end{aligned}$$
respectivamente, para cada $x \in D_f \cap D_g$, es decir, el dominio de la suma y del producto de f y g es $D_{f+g} = D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$.
- el **cociente de** f **entre** g, f/g, como la función
$$(f/g)(x) := f(x)/g(x),$$
para cada $x \in (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$, es decir, el dominio del cociente de f entre g, $D_{f/g}$, es $D_f \cap D_g$ excepto los valores de x que anulan al denominador, g.

- el **producto de f por un número real** λ, $\lambda \cdot f$, como la función
$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x),$$
para cada $x \in D_f$.

Otra importante operación con funciones es la composición que pasamos a definir a continuación:

Definición I.2.5. Sean $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $D_f \cap g(D_g) \neq \varnothing$. Se define la **composición de** g **con** f, que se denota por $f \circ g$, como:
$$(f \circ g)(x) := f\left(g(x)\right),$$
para cada $x \in \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$, es decir, el dominio de la composición de g con f, $D_{f\circ g}$, lo forman aquellos números reales de D_g cuya imagen por g está en D_f.

2.2. Signo de una función. Puntos de corte con los ejes.

Al ser el valor de una función un número real, podemos determinar qué valores de una función son positivos, negativos y nulos, esto es su signo y puntos de corte con el eje OX. Además de para el estudio gráfico de una función, la determinación del signo de una función y sus puntos de corte con el eje OX es de suma utilidad para determinados problemas concretos, como por ejemplo los relacionados con la optimización de áreas y volúmenes, que veremos más adelante.

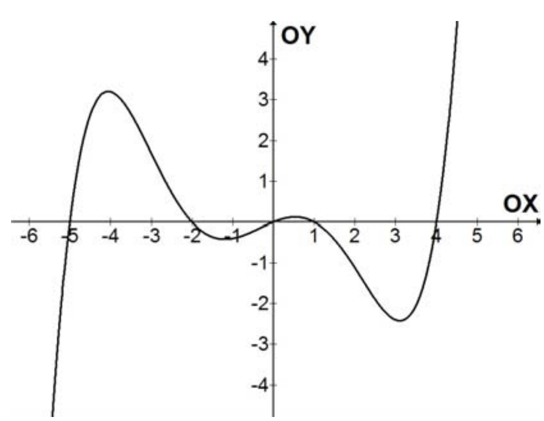
Definición I.2.6. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I \subset D$. Diremos que f tiene **signo positivo** en I si $f(a) > 0$ para todo $a \in I$, y diremos que que f tiene **signo negativo** en I si $f(a) < 0$ para todo $a \in I$.

Los **puntos de corte con el eje OX** corresponden a las soluciones de la ecuación
$$\boxed{f(x) = 0}$$
Si esta ecuación no tiene ninguna solución, entonces la gráfica no corta al eje OX.

El **punto de corte con el eje OY** es $(0, f(0))$ si $0 \in D$. Si el 0 no está en el dominio de la función, es decir, $0 \notin D$, entonces la gráfica no corta al eje OY.

Ejemplo I.2.7. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función correspondiente a la gráfica de la derecha.

La función f tiene signo positivo en
$$(-5,-2) \cup (0,1) \cup (4,+\infty)$$
y signo negativo en
$$(-\infty,-5) \cup (-2,0) \cup (1,4).$$
La función f corta al eje OX en los puntos $(-5,0)$, $(-2,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$ y $(4,0)$, y corta al eje OY en el punto $(0,0)$.



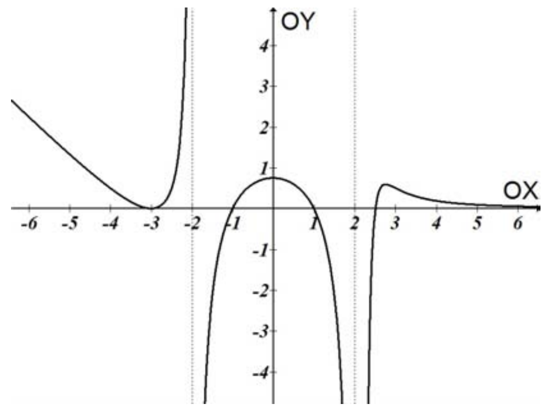
Ejemplo I.2.8. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función correspondiente a la gráfica de la izquierda.

La función f corta al eje OY en el punto $(0, 3/4)$ y al eje OX en los puntos $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(5/2, 0)$. La función f es positiva en

$$(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (5/2, +\infty),$$

y es negativa en

$$(-2, -1) \cup (1, 5/2).$$

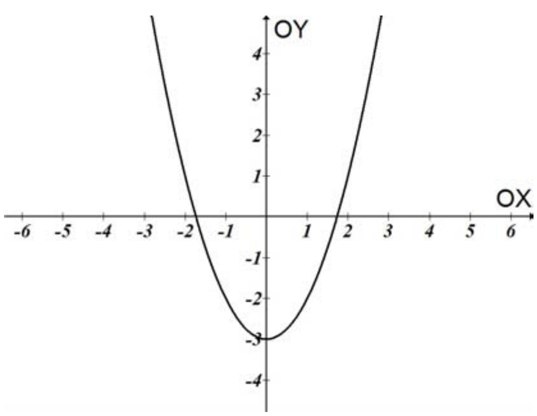


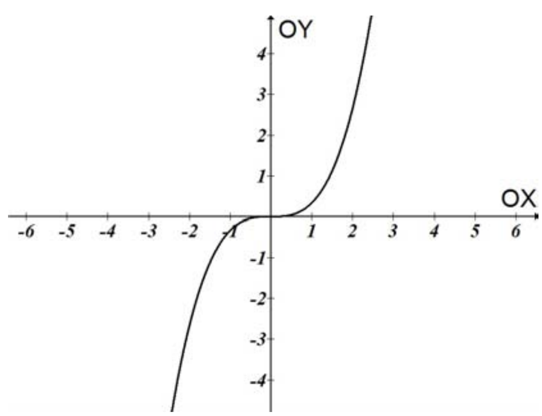
2.3. Simetrías. Funciones periódicas.

A menudo ciertas propiedades de las funciones simplifican considerablemente su estudio. Aunque podríamos hablar de distintos tipo de simetrías, solamente vamos a considerar la simetría respecto del eje OY, simetría par, y la simetría central de centro el origen de coordenadas, simetría impar.

Definición I.2.9. Diremos que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **simétrica par** si $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in D$, y que es **simétrica impar** si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D$.

Ejemplo I.2.10. La función correspondiente a la gráfica de la izquierda es simétrica par y la de la derecha es simétrica impar.

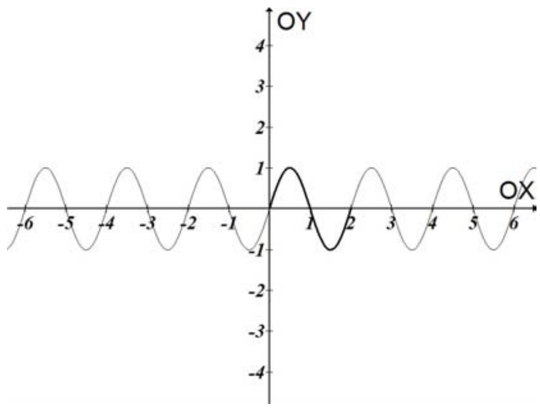




Otra particularidad que puede presentar una función es la periodicidad, esto ocurre cuando los valores que toma función se repiten de forma periódica. Esta es una de las propiedades características de las funciones seno y coseno, cuyo estudio se realiza en el apéndice I.

Definición I.2.11. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **periódica** si existe $\tau \in \mathbb{R}_+$ (un número real positivo) tal que $f(x+\tau) = f(x)$ para todo $x \in D$. En este caso, el menor valor τ que cumpla la propiedad anterior se llama **periodo de la función** f.

Ejemplo I.2.12. La función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ correspondiente a la gráfica de la ilustración es periódica de periodo 2.



Ejemplo I.2.13. Sean $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ y $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_1(x) = a_1 \operatorname{sen}(\omega\, x).$$

En primer lugar queremos estudiar si f_1 es periódica y, en caso afirmativo, determinar su periodo. Para ello suponemos que f_1 es periódica y que τ es su periodo. En este caso, τ es el menor número real positivo tal que $f_1(x+\tau) = f_1(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, τ es el menor número real positivo tal que

$$a_1 \operatorname{sen}(\omega(x+\tau)) = a_1 \operatorname{sen}(\omega\, x + \omega\, \tau) = a_1 \operatorname{sen}(\omega\, x).$$

De donde se sigue, usando que la función seno es periódica de periodo 2π, que $\omega\, \tau = 2\pi$. Luego, concluimos que la función $f_1(x) = a_1 \operatorname{sen}(\omega\, x)$ es periódica de periodo $\tau = 2\pi/\omega$.

Análogamente se puede demostrar que la función $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x) = b_1 \cos(\omega\, x)$ con $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $b_1 \in \mathbb{R}$ es periódica de periodo $2\pi/\omega$.

En términos físicos, el movimiento cuyo desplazamiento está descrito por $f_1(x) = a_1 \operatorname{sen}(\omega\, x)$, se denomina *movimiento armónico simple de periodo* $2\pi/w$ *y amplitud* a_1. De igual modo, el movimiento cuyo desplazamiento está descrito por $g_1(x) = b_1 \cos(\omega\, x)$, también se trata de un movimiento armónico simple de periodo $2\pi/w$ aunque con amplitud b_1 y un desfase inicial de $\pi/2$.

Consideremos ahora el movimiento cuyo desplazamiento está descrito por

$$h(x) = a_1 \operatorname{sen}(\omega\, x) + a_2 \operatorname{sen}(2\omega\, x), \tag{1}$$

con ω, a_1 y $a_2 \in \mathbb{R}$. Esta expresión representa la superposición de dos movimientos armónicos simples de periodos $P = 2\pi/\omega$ y $2\pi/(2\,\omega) = P/2$. Obviamente, $h(x)$ es también una función periódica, y su periodo es P; aunque $h(x)$ no describe un movimiento armónico simple.

Si a la expresión (1) le sumamos funciones periódicas de la forma $a_3 \operatorname{sen}(3\omega\, x)$, $a_4 \operatorname{sen}(4\omega\, x), \ldots, a_n \operatorname{sen}(n\omega\, x), \ldots$ de periodos $P/3, P/4, \ldots, P/n, \ldots$ ó si le sumamos funciones cosenoidales de los mismos periodos, es decir, $b_1 \cos(\omega\, x)$, $b_2 \cos(2\omega\, x)$, $\ldots$, $b_n \cos(n\omega\, x), \ldots$, obtenemos una nueva función f periódica de periodo P.

Así vemos que sumando movimientos armónicos simples cuyos periodos son múltiplos de P y cuyas amplitudes sean seleccionadas correctamente, podemos obtener casi cualquier función periódica arbitraria. Lo inverso también es verdadero, y constituye el *teorema de Fourier*. El teorema de Fourier[2] establece que una función periódica f de periodo $P = 2\pi/\omega$ puede expresarse como una suma

$$\begin{aligned} f(x) \;\; &= \;\; a_0 + a_1 \operatorname{sen}(\omega\, x) + a_2 \operatorname{sen}(2\omega\, x) + \ldots + a_n \operatorname{sen}(n\omega\, x) + \ldots \\ &\quad\;\; + b_0 + b_1 \cos(\omega\, x) + b_2 \cos(2\omega\, x) + \ldots + b_n \cos(n\omega\, x) + \ldots \end{aligned}$$

que se conoce como *serie de Fourier*.

3. Límites

DEDICAMOS esta sección a recordar brevemente el concepto de límite de una función en un punto. Un desarrollo completo de las cuestiones que comentaremos y plantearemos a continuación puede hallarse, por ejemplo, en el capítulo 5 de [**Spi96**].

3.1. El concepto de límite.

Comencemos analizando un problema de poblaciones que nos ayudará a entender mejor las dificultades en torno al concepto de límite.

Supongamos que $N(t)$ es una función que mide (modela) la cantidad de población de una cierta especie en el instante t. La tasa de variación media de la población es el cociente entre el incremento de población y el incremento de tiempo, esto es,

$$\frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Sin embargo, la tasa de variación media proporciona poca información, pues sólo depende de los valores de la función $N(t)$ en los extremos del intervalo $[t_0, t_1]$. Trataremos pues de obtener más información viendo lo que pasa en la cercanía de un instante determinado t_0.

La tasa de variación media en el instante de tiempo que va de $t_0 - h$ hasta $t_0 + h$ vale

$$\frac{N(t_0 + h) - N(t_0 - h)}{2h}.$$

Parece evidente que, si queremos conocer la tasa de variación instantánea en t_0, bastaría tomar el incremento de tiempo h igual a cero, de manera que el intervalo se reduzca al instante t_0, y aplicar la fórmula anterior. Sin embargo, al hacer $h = 0$ encontramos una expresión carente de sentido, pues obtenemos $\frac{0}{0}$.

[2]Que debe su nombre al matemático frances J. Fourier (1768-1830)

Con el concepto de límite se pretende resolver este problema. Es decir, se dispone de una función f, en nuestro ejemplo,

$$f(h) = \frac{N(t_0 + h) - N(t_0 - h)}{2h},$$

que se va aproximando a una cantidad fija l, cuando la variable h se aproxima a un cierto número real a, en nuestro caso, $a = 0$, y se trata de definir de forma inequívoca (y unívoca) esta cantidad fija a la que se aproxima la función, aun cuando esa cantidad no se pueda calcular sustituyendo el punto en la función (por encontrarse entonces una expresión que carece de sentido, como ocurre en nuestro ejemplo).

La definición actual de límite sorprende por su complicación conceptual y formal, caracterizada por un enunciado aparentemente indescifrable para los estudiantes.

Definición I.3.1. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Diremos que la función f tiene **límite** l **cuando** x **tiende hacia** a, lo que denotaremos por $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l}$, si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \mid\ x \in D \ \text{ y } \ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon;$$

es decir, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $x \in (a - \delta, a + \delta)$ y f está definida en x, entonces $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. También se dice que f **converge a** l **en** a.

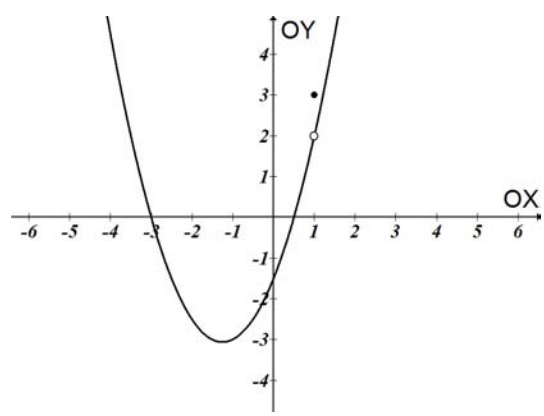
Así, la definición de límite se puede entender coloquialmente como que "el valor *esperado* de f cuando x se aproxima a a es l."

Obsérvese que el límite de una función en un punto no tiene que coincidir con el valor de la función en ese punto.

Ejemplo I.3.2. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. El límite de f cuando x tiende hacia 1 es 2, es decir,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Sin embargo, $f(1) = 3$.



Es importante resaltar que una función no puede tender hacia dos límites distintos en un mismo punto, es decir, el límite si existe es único. En otras palabras,

Teorema I.3.3. *El límite de una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en un punto $a \in D$, si existe, es único.*

Demostración. La demostración de este teorema puede encontrarse, por ejemplo, en la página 120 de [**Spi96**], o en la página 76 de [**BL83**]. ∎

Otra alternativa para aproximarnos a a consiste en considerar intervalos de la forma $(a, a+h)$ o de la forma $(a-h, a)$ y tomar h igual a cero, dando a lugar al concepto de límites laterales.

Diremos que el **límite lateral** de f cuando x tiende hacia a **por la derecha** es l si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \mid\ x \in D \ \text{ y } \ 0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

es decir, "el valor *esperado* de f cuando x se aproxima a a por la derecha[3] es l." Lo que denotaremos por $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = l.}$ De forma análoga se dice que el **límite lateral** de f cuando x tiende hacia a **por la izquierda** es l, $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = l,}$ si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \mid\ x \in D \ \text{ y } \ -\delta < x - a < 0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

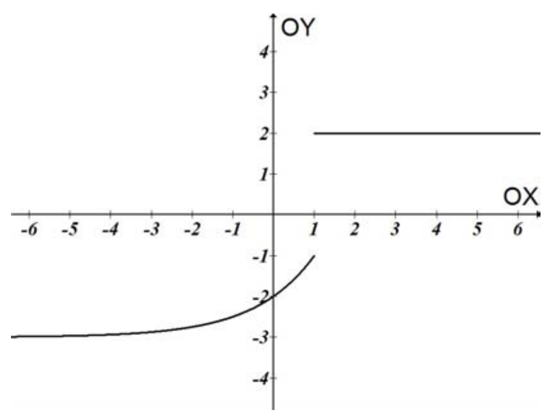
es decir, "el valor *esperado* de f cuando x se aproxima a a por la izquierda[4] es l."

Una consecuencia inmediata del teorema anterior y de las definiciones de límite y límites laterales es que *el límite de una función en un punto existe si, y sólo si, existen los límites laterales en ese mismo punto y son iguales.*

Ejemplo I.3.4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. El límite de f cuando x tiende hacia 1 por la izquierda es -1 y el límite de f cuando x tiende hacia 1 por la derecha es 2. Es decir,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \neq 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

Por tanto, no existe el límite de f cuando x tiende hacia 1.



El concepto de límite (siglo XIX) es posterior al de derivada (siglo XVII), aunque el primero se use para dar una definición rigurosa del segundo como veremos más adelante. Intencionadamente, el ejemplo elegido para introducir el concepto de límite es un caso de cálculo de derivadas, pues la tasa de variación instantánea de una población no es más que la derivada del tamaño de la población respecto del tiempo.

[3]Entendiendo que a la derecha de a se encuentran los números reales mayores que a, es decir, en un intervalo de la forma $(a, a+\delta)$.

[4]Entendiendo que a la izquierda de a se encuentran los números reales menores que a, es decir, en un intervalo de la forma $(a-\delta, a)$.

Una primera noción de límite ya fue apuntada, aunque de forma rudimentaria, por el matemático británico I. Newton (1642-1727) en su obra maestra *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Hay que remontarse a mediados del siglo XVIII para encontrar el siguiente paso en el intento de profundizar en el concepto de límite, y se debe al matemático francés J.R. D'Alembert (1717-1784). En el primer cuarto del siglo XIX el matemático checo B. Bolzano (1781-1848) y el matemático francés A.L. Cauchy (1789-1857) dan, de forma independiente, el impulso definitivo que culminará con la definición de límite del matemático alemán K. Weierstrass (1815-1897) tal y como hoy día la enseñamos (véase la definición I.3.1). Estos y otros detalles históricos a cerca del concepto de límite pueden encontrase en la segunda sección del capítulo segundo de [**Dur96**].

3.2. Límites infinitos. Asíntotas verticales.

Sabemos que el límite de una función en un punto a puede no existir; por ejemplo, si los límites laterales en a son distintos. Asimismo, puede ocurrir que cuando nos aproximamos a a la función tome valores indefinidamente grandes (en valor absoluto). Esta situación se puede formalizar si extendemos la definición de límite al conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

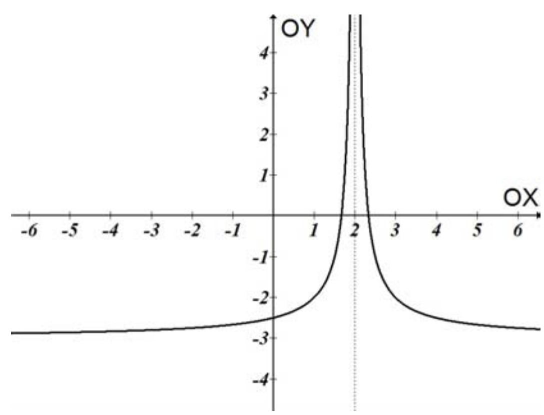
Definición I.3.5. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f **diverge a más infinito cuando** x **tiende hacia** a, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, si, y sólo si,

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 \ \mid \ x \in D \ \text{ y } \ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > K.$$

En otra palabras, la función f diverge a más infinito en a si f toma valores cada vez mayores conforme nos aproximamos a a.

Ejemplo I.3.6. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función la función de la ilustración. El límite de f cuando x tiende hacia a 2 es $+\infty$, es decir,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty.$$



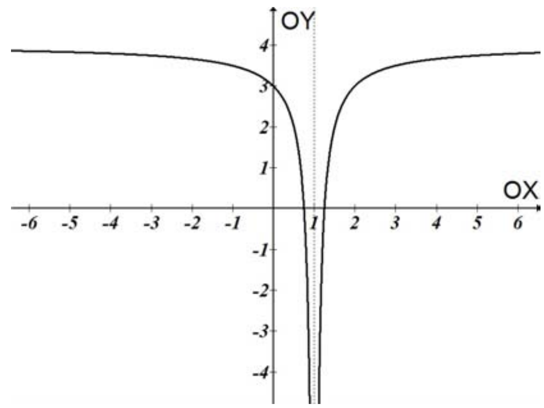
Por otra parte, también puede ocurrir que la función tienda hacia menos infinito cuando nos aproximemos a un punto a; es decir, que tome valores negativos indefinidamente grandes en valor absoluto cuanto más próximo estemos de a.

Definición I.3.7. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f **diverge a menos infinito cuando** x **tiende hacia** a, y se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si, y sólo si,

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 \ \mid\ x \in D \ \text{ y } \ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < K.$$

Ejemplo I.3.8. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. El límite de f cuando x tiende hacia a 1 es $-\infty$, es decir,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty.$$



Finalmente, al igual que hemos definidos los límites infinitos de una función f cuando x tiende hacia $a \in \mathbb{R}$, se pueden definir los límites laterales infinitos, cuando x tiende hacia a por la derecha o por la izquierda (la formalización de estas definiciones las dejamos como ejercicio al lector).

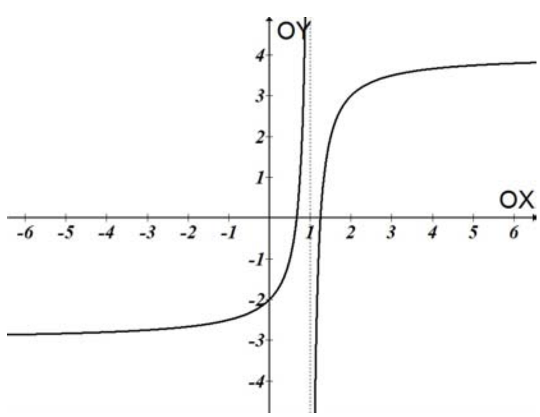
Ejemplo I.3.9. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. El límite lateral de f cuando x tiende hacia 1 por la izquierda es $+\infty$, es decir,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Mientras el límite cuando x tiende hacia 1 por la derecha es $-\infty$, es decir,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty.$$

Obsérvese que, en este caso, no existe el límite en $x = 1$.



En los ejemplos anteriores observamos que cuando x tiende hacia a, bien sea por la derecha, por la izquierda o a ambos lados, la gráfica de la función se confunde con una recta vertical (paralela al eje OY), tal recta se dice que es una asíntota vertical de la función.

Definición I.3.10. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de f en a, si al menos uno de los dos límites laterales en a es infinito (más o menos infinito), es decir, si

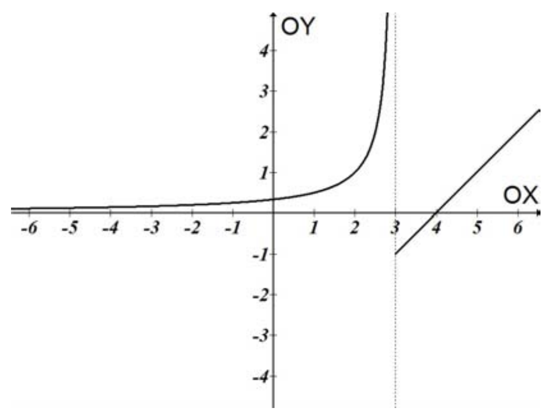
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty,$$

dicho de otro modo, la gráfica de la función f *se confunde* con la recta vertical (paralela al eje OY) $x = a$ cuando x tiende hacia a por la derecha ó cuando x tiende hacia a por la izquierda, respectivamente.

Por ejemplo, las funciones de los ejemplos I.3.6, I.3.8 y I.3.9, tienen como asíntotas verticales a las rectas $x = 2, x = 1$ y $x = 1$, respectivamente. En cualquier caso, según la definición I.3.10, para que exista una asíntota vertical es suficiente que uno de los límites laterales sea divergente.

Ejemplo I.3.11. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical de f, aunque el límite lateral de f cuando x tiende hacia 3 por la derecha sea -1, pues el límite lateral de f cuando x tiende hacia 3 por la izquierda es $+\infty$, es decir,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty.$$



3.3. Límites en el infinito. Asíntotas horizontales y oblicuas.

Consideramos ahora una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(a, +\infty) \subseteq D$, para algún $a \in \mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$, y estudiemos el comportamiento de la función cuando x se aproxima a $+\infty$.

Definición I.3.12. Se dice que el límite de f cuando x tiende a $+\infty$ es el número real c, y se escribe $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = c}$ si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{R} \;\mid\; x \in D \;\text{ y }\; x > K \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon.$$

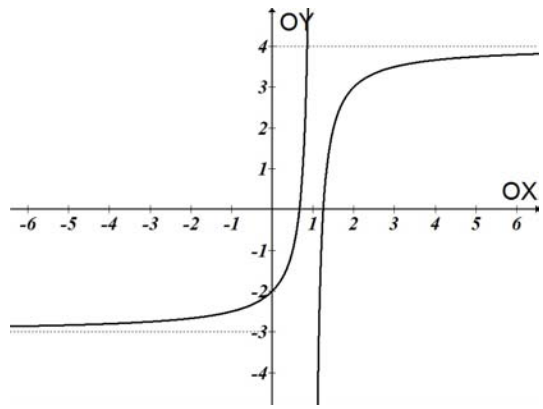
Esto significa que cuando x toma valores positivos suficientemente grandes, el valor de $f(x)$ está muy próximo a c y se puede tomar c como una aproximación de $f(x)$.

Análogamente, si $(-\infty, b) \subseteq D$, para algún $b \in \mathbb{R}$, se tiene que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = c}$ si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R} \ \mid \ x \in D \ \text{ y } \ x < K \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon,$$

Esto significa que cuando x toma valores negativos con valor absoluto suficientemente grande, el valor de $f(x)$ está muy próximo a c y se puede tomar c como una aproximación de $f(x)$.

Ejemplo I.3.13. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. El límite de f cuando x tiende hacia a $-\infty$ es -3, es decir, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$. El límite de f cuando x tiende hacia a ∞ es 4, es decir, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$.



Definición I.3.14. La recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** de f si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c,$$

es decir, la gráfica de la función f *se confunde* con la recta horizontal (paralela al eje OX) $y = c$ cuando x tiende hacia $+\infty$ o cuando x tiende hacia $-\infty$, respectivamente.

Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas: una cuando x tiende hacia $+\infty$ y otra cuando x tiende $-\infty$.

- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c_1 \in \mathbb{R}$, entonces la gráfica de f se "confunde" con la recta $y = c_1$ cuando x toma valores positivos suficientemente grandes.
- Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c_2 \in \mathbb{R}$, entonces la gráfica de f se "confunde" con la recta $y = c_2$ cuando x toma valores negativos con valor absoluto suficientemente grande.

Ejemplo I.3.15. Las función del ejemplo I.3.13 tiene como asíntotas horizontales a las recta $y = -3$ cuando x tiende hacia menos infinito y a la recta $y = 4$ cuando x tiende hacia más infinito.

Hemos visto que en determinadas ocasiones la gráfica de una determinada función se confunde con una recta paralela al eje OY (asíntota vertical) o con una recta paralela al eje OX (asíntota horizontal). Veamos ahora qué tiene ocurrir que para que la función se aproxime a una recta general (ni vertical ni horizontal).

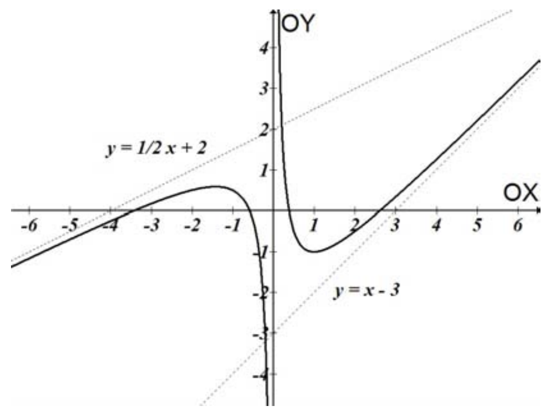
Definición I.3.16. La recta $y = bx + c$, $b \neq 0$, es una **asíntota oblicua** de f si

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (bx + c)) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (bx + c)) = 0,$$

es decir, la gráfica de la función f *se confunde* con la recta $y = bx+c$ cuando x tiende hacia $+\infty$ o cuando x tiende hacia $-\infty$, respectivamente.

Nótese que si hay asíntota horizontal cuando x tiende hacia $+\infty$ no puede haber asíntota oblicua cuando x tiende hacia $+\infty$, y viceversa. Análogamente, si hay asíntota horizontal cuando x tiende hacia $-\infty$ no puede haber asíntota oblicua cuando x tiende hacia $-\infty$, y viceversa.

Ejemplo I.3.17. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. La recta $y = (1/2)x + 2$ es una asíntota oblicua de f cuando x tiende a $-\infty$ y la recta $y = x - 3$ es una asíntota oblicua de f cuando x tiende $+\infty$.



Cálculo de asíntotas oblicuas: La recta $\boxed{y = bx + c}$, con b y $c \neq 0$, es un asíntota oblicua de f si, y sólo si,

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad c = \lim_{x\to\infty} (f(x) - bx)\,,$$

donde ∞ puede ser $+\infty$ ó $-\infty$.

3.4. Álgebra de límites. Indeterminaciones.

Terminamos esta sección viendo algunas propiedades aritméticas de los límites. Para ello consideramos dos funciones $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con límites l y $m \in \mathbb{R}$, respectivamente, cuando x tiende hacia $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Entonces, se cumple que:

- el **límite de la suma** (o resta) es la suma (o resta) de los límites,
$$\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = l \pm m,$$
- el **límite del producto** es el producto de los límites,
$$\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m,$$

- el **límite del cociente** es el cociente de los límites, siempre y cuando el límite del denominador no sea nulo,
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l}{m},\quad \text{si}\quad m\neq 0.$$

Una demostración de las igualdades anteriores puede encontrarse en las páginas 126 y 127 de [**Spi96**].

Es tremendamente importante tener en cuenta que en todas las operaciones anteriores hemos supuesto que los límites de las funciones consideradas no son infinitos, es decir, las igualdades mostradas sólo son válidas para funciones convergentes. Si ampliamos las operaciones anteriores al caso en que una o las dos funciones son divergentes nos podríamos encontrar con situaciones no siempre deseadas, conocidas como **indeterminaciones**; por ejemplo,

- que, en el límite de la suma, una función tienda a más infinito y la otra a menos infinito, llamada indeterminación de tipo $\infty-\infty$.
- que, en el límite del producto, una función tienda a cero y la otra a infinito, lo que se conoce como indeterminación de tipo $0\cdot\infty$.
- que, en el límite de un cociente, ambas funciones tiendan a infinito, lo que se conoce como indeterminación de tipo ∞/∞.

Asimismo, encontramos otra familia de indeterminaciones cuando,

- el límite del cociente de dos funciones que tienden a cero, llamada indeterminación de tipo $0/0$.

Para determinar si existen estos límites, y en su caso, calcularlos se emplean métodos como la regla de L'Hôpital, que más adelante enunciaremos.

La lista de indeterminaciones se completa con las de tipo $\infty^0, 0^0$ y 1^∞.

3.5. Un ejemplo importante: el número e.

La expresión general para el crecimiento mediante división celular a partir de una sola célula madre, dada en términos del número de células tras t generaciones, puede expresarse como

$$n_t = 2^t, \tag{2}$$

donde t toma los valores $0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots$, y n_t es el tamaño de la población después de t divisiones (generaciones).

Si hubiésemos comenzado con n_0 células madre en lugar de con una sola, entonces la ecuación (2) sería

$$n_t = n_0\,2^t, \tag{3}$$

de forma que el tamaño inicial de la población es $n_0\,2^0 = n_0$.

Una extensión natural de la ecuación (2), en un sentido estrictamente matemático, consiste en definir la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=n_0\,2^x$, donde ahora x puede tomar cualquier valor real.

Consideremos ahora un cultivo con un número elevado, n_0, de bacterias, con abastecimiento ilimitado de alimento. Supongamos que cada unidad tiempo (una hora, por ejemplo) una pequeña proporción o fracción, $0 \leq r \leq 1$, de las células se divide y que esta fracción permanece constante a lo largo del tiempo.

Al principio, el tamaño de la población es n_0. Durante el primer intervalo de tiempo (por ejemplo, durante la primera hora), $r\,n_0$ bacterias se dividen siendo cada una de ellas sustituida por 2 células hijas. Las restantes $n_0 - r\,n_0$ células no se dividen. Por consiguiente, el número de células al final del primer intervalo de tiempo es

$$n_1 = r\,n_0 \times 2 + (n_0 - r\,n_0) \times 1 = n_0(1 + r),$$

es decir, para $t = 1$ hay $n_1 = n_0(1 + r)$ bacterias. Durante el segundo intervalo de tiempo, $r\,n_1$ de estas células se dividirán y $(n_1 - rn_1)$ no lo harán. Por tanto,

$$n_2 = r\,n_1 \times 2 + (n_1 - r\,n_1) \times 1 = n_1(1 + r) = n_0(1 + r)^2.$$

En general, tras t unidades de tiempo habrá

$$n_t = n_0(1 + r)^t$$

bacterias; por ejemplo, si $r = 1$, es decir, la proporción de células que se dividen es 1 sobre 1, o lo que es lo mismo, todas las células se dividen, entonces $n_t = n_0 2^t$ que corresponde a la ecuación (2).

Nótese que este modelo sólo es sensible a la primera división de una bacteria en un determinado intervalo de tiempo (fijado *a priori*), es decir, no estamos considerando la contribución de las bacterias que se dividen más de una vez en tal intervalo de tiempo. Sin embargo, según las particularidades de la población (de bacterias en nuestro caso) que estemos estudiando, esta hipótesis de trabajo puede llegar a ser bastante restrictiva. Por lo que nos interesaría construir un modelo en los que la contribución de las bacterias que se dividen más de una vez (ya sean dos, tres, ...) en el intervalo de tiempo fijado, sea tenida en cuenta.

Para construir este tipo de modelo procedemos como sigue.

Supongamos que dividimos nuestro intervalo de tiempo en ζ subintervalos (por ejemplo, si nuestro intervalo de tiempo fuese una hora, podemos dividirlo en 3600 segundos, en cuyo caso $\zeta = 3600$). Como la fracción de células que se dividen en el intervalo de tiempo original es r, se tiene que, durante nuestro nuevo intervalo de tiempo, la fracción de células que se dividen es $\varepsilon = r/\zeta$. Luego, en términos de nuestros nuevos intervalos de tiempo, la expresión general del tamaño de la población en t unidades de tiempo es

$$n_t = n_0(1 + \varepsilon)^{\zeta\, t} = n_0(1 + \varepsilon)^{r\, t/\varepsilon}. \tag{4}$$

Si ζ es grande, es decir, si el nuevo intervalo de tiempo es pequeño, entonces ε será pequeño y próximo a cero. Para enfatizar que ε es una fracción escribiremos $\varepsilon = 1/\nu$, de modo que sustituyendo en la expresión (4) obtenemos que

$$n_t = n_0 \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{r\,t\,\nu} = n_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right]^{r\,t}. \tag{5}$$

La siguiente tabla muestra los valores de $(1+1/\nu)^\nu$ para las seis primeras potencias naturales de 10

ν	$10^0=1$	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$(1+1/\nu)^\nu$	2,593742	2,704814	2,716924	2,718146	2,718268	2,718280

De hecho, cuando ν toma valores grandes, el número $(1+1/\nu)^\nu$ se aproxima a $\mathrm{e} = 2{,}718282...$, es decir,

$$\mathrm{e} = \lim_{\nu\to+\infty}(1+1/\nu)^\nu = 2{,}718282...$$

Por consiguiente, retornando a nuestro ejemplo, obtenemos que la expresión

$$n_t = n_0\,\mathrm{e}^{r\,t}$$

describe el número de bacterias a lo largo del tiempo a partir del tamaño inicial de la población, n_0 y de la fracción de células, r, que se dividen durante un cierto intervalo de tiempo[5].

4. Continuidad

No siempre ocurre que, dados una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumpla que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a);$$

por ejemplo, podría suceder que f no estuviese definida en a, o también que estando definida en a no coincida con su límite en este punto, o que no exista el límite, ... En estos casos se dice que f es discontinua en a. No obstante, parece más natural considerar estas situaciones como anomalías y definir rigurosamente el concepto opuesto, es decir, el concepto de función continua en un punto. La definición de continuidad que mostramos a continuación no es muy diferente a la dada originalmente por Bolzano y Cauchy a la vez en el primer cuarto del siglo XIX.

Definición I.4.1. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es **continua en** $a \in \mathbb{R}$ si, y sólo si,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \ \mid\ x \in D \ \text{ y } \ |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

es decir, si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Lo que podemos entender como que "el valor *esperado* de f cuando x se aproxima a a es precisamente el valor de f en a."

Se dice que f es **continua en** $I \subseteq D$ si f es continua para cada $a \in I$.

[5] La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x$ se llama **función exponencial natural** y a menudo se denota por $\exp(x)$.

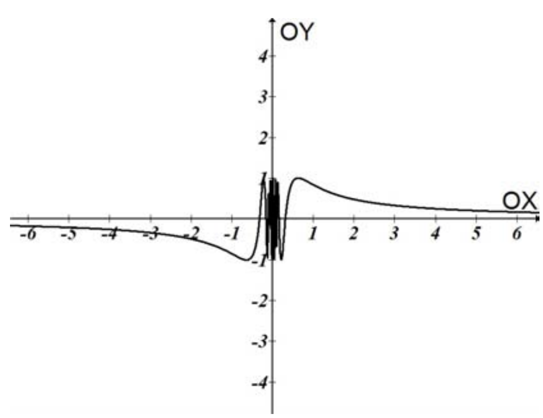
Intuitivamente, una función f es continua en un subconjunto I de su dominio D si su gráfica en esta porción de la recta real no contiene ni interrupciones, ni saltos, ni oscila indefinidamente en ningún punto.

No es difícil encontrar ejemplos de funciones que no son continuas, es decir, que son discontinuas en algún punto de su dominio.

Ejemplo I.4.2. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

- **Discontinuidad evitable** en a, ocurre si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y no es infinito, pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$; por ejemplo, la función del ejemplo I.3.2 presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.
- **Discontinuidad de primera especie** en a, ocurre si
  (a) Existen los límites laterales de f en a (pudiendo ser infinitos) pero son distintos. En este caso, al valor absoluto de la diferencia de los límites laterales le llamaremos **salto de la función** en a; por ejemplo, las funciones de los ejemplos I.3.4, I.3.9, I.3.11, I.3.17 presentan una discontinuidad de primera especie en $x = 1$, $x = 1$, $x = 3$ y $x = 0$, respectivamente.
  (b) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y vale ∞; por ejemplo, las funciones de los ejemplos I.3.6 y I.3.8 presentan sendas discontinuidades de primera especie en $x = 2$ y $x = 1$, respectivamente.
- **Discontinuidad de segunda especie** en a : ocurre si no existe alguno de los límites laterales en a.

Ejemplo I.4.3. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. La función f presenta una discontinuidad de segunda especie en $x = 0$ pues no existen los límites laterales de f; ni cuando x tiende hacia 0 por la derecha, ni cuando tiende a 0 por la izquierda.



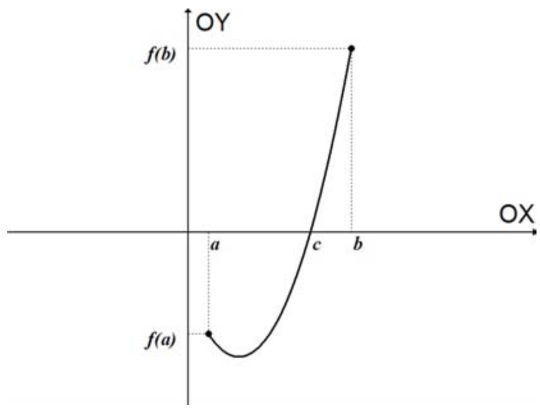
Las funciones continuas tiene buenas propiedades como se puede observar en el siguiente resultado.

Teorema de Bolzano. *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b] \subseteq D$. *Si* $f(a) < 0 < f(b)$ *ó* $f(b) < 0 < f(a)$ *entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en los capítulos 7 y 8 de [**Spi96**], o en las páginas 93-94 de [**BL83**]. ∎

Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua en un intervalo que cambia de signo en los extremos del intervalo, debe cruzar el eje OX en, al menos, un punto, como en la siguiente gráfica.

Idea gráfica del teorema de Bolzano



El teorema de Bolzano proporciona una condición suficiente para que la ecuación $f(x) = 0$ tenga al menos una solución[6] en el intervalo $[a, b]$. Ya que es suficiente que f sea continua en $[a, b]$ y que el signo de $f(a)$ sea distinto del signo de $f(b)$ para tener la certeza de que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

5. Derivadas

LA derivada de una función es uno de los conceptos centrales del cálculo. Al final del siglo XVII, el cálculo queda establecido en los trabajos de Newton y del matemático alemán G.W. Leibniz (1646-1716), aunque careciera de una fundamentación lógica y rigurosa tal y como la entendemos hoy. La figura clave del siglo XVIII, no sólo en relación al cálculo, sino a toda la matemática, fue el suizo L. Euler (1707-1783); en sus trabajos comienza a surgir el cociente de incrementos

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

que dará origen a la definición actual de derivada de una función. El primer intento serio (aunque sin éxito) de definir rigurosamente el concepto de derivada de una función en un punto se debe uno de los grandes matemáticos de la Revolución Francesa, J.L. Lagrange (1736-1813). Así llegamos hasta el siglo XIX, donde se va producir la fundamentación del concepto de derivada a partir de los trabajos de Cauchy y de Bolzano. De esta forma, el concepto de derivada que comenzó su andadura en el siglo XVII, alcanza una fundamentación lógica adecuada, basada en el concepto de límite (el lector interesado en el tema puede profundizar más en el capítulo 3 de [**Dur96**].)

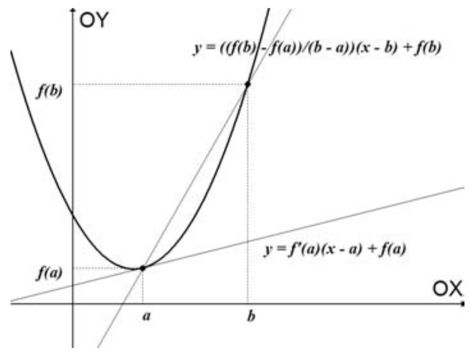
[6]Es decir, que con seguridad hay una solución pero puede haber más de una.

Definición I.5.1. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in D$. Se dice que f es **derivable en** a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R},$$

es decir, si existe el límite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ cuando x tiende hacia a y no es infinito. Al valor de este límite se le llama **derivada** de f en a y se denota por $f'(a)$.

Ejemplo I.5.2. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función correspondiente a la curva de la ilustración. Supongamos que queremos estudiar la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$. Para ello tomamos otro punto $(x, f(x))$ y calculamos la pendiente de la recta r que pasa por $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$:



$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Es claro que, cuanto más cerca está x de a, la recta r se parece más a la recta tangente a f en $(a, f(a))$.

Sin embargo, para $x = a$ no tiene ningún sentido la expresión anterior, aunque sí podemos estudiar su valor *esperado* cuando x tiende hacia a, es decir, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, que no es otra cosa que la derivada de f en a. Concluimos de este modo que la pendiente de recta tangente a f en $(a, f(a))$ es $f'(a)$.

Es muy importante tener en cuenta que si f es derivable en a, entonces

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

es la **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Esta recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es precisamente la gráfica de la función lineal que más se aproxima a f en el punto $(a, f(a))$.

Desde un punto de vista físico, la derivada de f en a es la velocidad en el instante $t = a$ de un móvil cuyo recorrido respecto del tiempo, t, viene dado por $f(t)$.

Definición I.5.3. Se dice que una función es **derivable en** $I \subseteq \mathbb{R}$ si es derivable en cada $a \in I$. Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $I \subseteq D$, llamaremos **función derivada** de f en I, y la denotaremos por f', a $f' : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$.

Se dice que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **dos veces derivable en** $a \in D$ si es derivable en a y su función derivada, f', también es derivable en a. En cuyo caso, se llama **derivada segunda de** f **en** a a la derivada de f' en a, y se denota por $f''(a)$.

Se dice que una función es **dos veces derivable en** $I \subseteq \mathbb{R}$ si es dos veces derivable en cada $a \in I$. Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $I \subseteq D$ y $f' : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en I, llamaremos **función derivada segunda** de f en I, y la denotaremos por f'', a $f'' : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f''(x)$.

En general, se dice que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es n **veces derivable** en $a \in D$ si es derivable en a, su función derivada, f', es derivable en a, su función derivada segunda, f'', es derivable en $a, \ldots$ y así sucesivamente hasta n veces. En cuyo caso, se llama **derivada n-ésima de f en a** a la derivada de la derivada de la derivada, ... (n-veces), de f en a. Lo que denotaremos por $f^{n)}(a)$.

Se dice que una función es n **veces derivable en** $I \subseteq \mathbb{R}$ si es n veces derivable en cada $a \in I$. Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es n veces derivable en $I \subseteq D$, llamaremos **función derivada n-ésima**, y la denotaremos por $f^{n)}$ a

$$f^{n)} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f^{n)}(x).$$

Se dice que una función f es **indefinidamente derivable** en un punto, o en un subconjunto, si es n veces diferenciable en ese punto, o subconjunto, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5.1. Álgebra de las derivadas. Regla de la cadena.

Proposición I.5.4. *Si $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $a \in D_f \cap D_g$, entonces $f + g,\ f \cdot g,\ \lambda \cdot f$ (para todo $\lambda \in \mathbb{R}$) y f/g (con $g(a) \neq 0$) son derivables en a. Además se cumple que:*

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a);$
- $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a);$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{(g(a))^2}.$

Demostración. La demostración es una consecuencia directa de las propiedades aritméticas elementales del límite (véase el apartado 3.4). El lector interesado puede encontrar su demostración en el capítulo 10 de [**Spi96**], o en las páginas 104-105 de [**BL83**]. ∎

Regla de la cadena *Sean $y : D_y \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y sea $a \in D_y$ tal que $y(a) \in D_f$. Si y es derivable en $a \in D_y$ y f es derivable en $y(a)$, entonces $f \circ y$ es derivable en a y se cumple que*

$$(f \circ y)'(a) = f'(y(a)) \cdot y'(a).$$

Es decir,

$$\frac{df}{dx}(y(a)) = \frac{df}{dy}(y(a)) \cdot \frac{dy}{dx}(a).$$

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en las páginas 241-243 de [**Spi96**], o en la página 106 de [**BL83**]. ∎

5.2. Teoremas fundamentales del cálculo diferencial.

Teorema I.5.5. *Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in D$. Si f es derivable en a, entonces es continua en a.*

Demostración. La demostración de este resultado se puede hallar en la página 213 de [**Spi96**], o en la página 102 de [**BL83**]. ∎

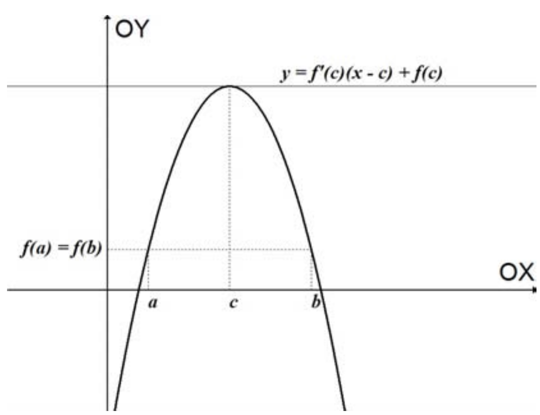
Es muy importante resaltar que el recíproco del teorema anterior no es cierto en general; existen funciones continuas que en algún punto no admiten derivada.

Teorema de Rolle[7] *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b] \subseteq D$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. La demostración de este resultado se puede hallar en la página 265 de [**Spi96**], o en la página 115 de [**BL83**]. ∎

Obsérvese que el teorema de Rolle proporciona una condición suficiente para que la ecuación $f'(x) = 0$ tenga alguna solución en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo I.5.6. Geométricamente, el teorema de Rolle viene a decir que si f está en las hipótesis de dicho teorema, entonces existe algún punto de su gráfica en el cual la tangente es horizontal (paralela al eje OX).



En términos físicos, el teorema de Rolle dice que si al cabo $b - a$ unidades de tiempo un móvil de recorrido $f(t)$ (donde f es una función continua en $[a, b]$) se encuentra en el mismo lugar ($f(a) = f(b)$), es seguro que su velocidad ha sido nula en algún instante.

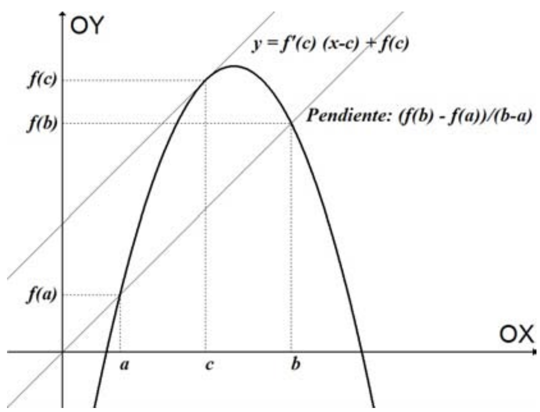
[7]Este teorema fue formulado por el matemático frances M. Rolle (1652-1719) en 1691.

Teorema del valor medio de Lagrange. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a,b] \subseteq D$ y derivable en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

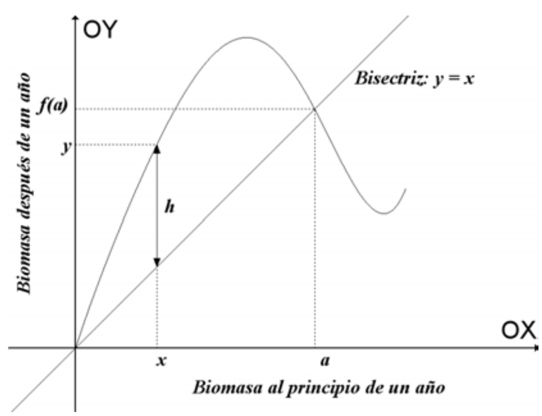
Demostración. La demostración de este resultado se puede hallar en la página 267 de [**Spi96**], o en la página 116 de [**BL83**]. ∎

Ejemplo I.5.7. Geométricamente, el teorema del valor medio nos dice que la tangente en algún punto de la gráfica de una función, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Desde un punto de vista físico, el teorema del valor medio de Lagrange asegura que todo móvil alcanza en algún momento de su recorrido la *velocidad media*.

Ejemplo I.5.8. La biomasa de un bosque de pinos se puede medir por el número de metros cuadrados de tablero estándar que se pueden hacer con sus árboles. Supongamos que medimos la biomasa al principio de cada año. Conocida la biomasa x del bosque al principio de un año, la biomasa del bosque al cabo de un año es $y = f(x)$. La curva $y = f(x)$ se denomina curva de reproducción del bosque.



Sea a la ordenada del punto en que la curva $y = f(x)$ corta a la bisectriz del primer cuadrante, es decir, la recta $y = x$. Observemos que, para valores de x menores que a, la biomasa aumenta de un año a otro en una cantidad h (que depende de x). Si al comenzar el año la biomasa del bosque es mayor que a, el bosque mengua (si el bosque es muy denso, habrá menos luz, el suelo será menos fértil, etc..). Para el valor a, el tamaño del bosque permanece constante.

Si la biomasa al comienzo de un año es x y al finalizar el año talamos una cantidad de masa igual a $h = f(x) - x$, el bosque vuelve a su tamaño y hemos usado una parte de la biomasa h.

El tamaño hasta el que conviene dejar crecer el bosque para que, dejándolo estabilizarse en ese tamaño, nos permita talar una cantidad máxima de biomasa es el valor de x para el que es máximo $h = f(x) - x$. Como veremos más adelante (véase la proposición I.6.6), este valor se alcanza cuando la derivada de h es cero, es decir, $f'(x) = 1$. La existencia de un punto x, entre 0 y a, en el que $f'(x) = 1$ está garantizada por el teorema del valor medio, pues

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a - 0}{a - 0} = 1$$

Teorema del valor medio generalizado de Cauchy. *Sean* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones. Si* f *y* g *son continuas en* $[a, b] \subseteq D$*, derivables en* (a, b) *y* g' *no se anula en* (a, b)*, entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en las páginas 281-282 de [**Spi96**], o en la página 116 de [**BL83**]. ∎

La interpretación física del teorema del valor medio generalizado es la siguiente: la razón de espacios recorridos por dos móviles de recorrido $f(t)$ y $g(t)$ en $b-a$ unidades de tiempo, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, es igual a la razón de velocidades en algún instante, $f'(c)/g'(c)$.

Consecuencia: regla de L'Hôpital. Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en algún intervalo simétrico de centro $a \in D$ tales que

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Entonces, si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y coinciden, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Demostración.[8] Como f y g son derivables en $(a-\delta', a+\delta')$ para algún $\delta' > 0$, tenemos la certeza de que existe $\delta > 0$ tal que f y g son continuas en $[a, a+\delta] \subset (a-\delta', a+\delta')$ y derivables en $(a, a+\delta)$. Luego, por el teorema del valor medio generalizado, existe c entre a y $a+\delta$ tal que

$$\frac{f(a+\delta) - f(a)}{g(a+\delta) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[8]Aunque hemos omitido todas las demostraciones hasta el momento, no nos resistimos a incluir la de la Regla de L'Hôpital, a modo de ejemplo del uso de los teoremas de valor medio anteriores.

Pero $f(a) = f(b) = 0$, por tanto, tenemos que

$$\frac{f(a+\delta)}{g(a+\delta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Teniendo ahora en cuenta que c tiende a a por la derecha cuando δ tiende a cero, concluimos que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Análogamente, tomando intervalos de la forma $[a-\delta, a]$ y $(a-\delta, a)$, se prueba que

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

De ambas igualdades se sigue que si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y coinciden. ■

Nota I.5.9. La regla de L'Hôpital también es válida cuando

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Ejercicio I.5.10. Aplicando la regla de L'Hôpital, demostrar que si la recta $y = bx + c$ es asíntota oblícua en $+\infty$ de una función derivable $f(x)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b$.

6. Aplicaciones de la derivada

A lo largo de esta sección $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función cualquiera, I un subconjunto arbitrario de D y $a \in D$.

6.1. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

Definición I.6.1. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $I \subseteq D$.

(a) La función f es **creciente** en I si $f(x) \leq f(y)$ para todo $x, y \in I$ con $x < y$.
(b) La función f es **decreciente** en I si $f(x) \geq f(y)$ para todo $x, y \in I$ con $x < y$.

Definición I.6.2. La función f alcanza un **máximo relativo** en el punto $(a, f(a))$, $a \in D$, si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Si $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in D$, se dice que f tiene un **máximo absoluto** en el punto $(a, f(a))$.

Obsérvese que una función continua en a tiene un máximo relativo en ese punto si es creciente en $(a-\delta, a)$ y decreciente en $(a, a+\delta)$, para algún $\delta > 0$, es decir, si es creciente a la izquierda de a y decreciente a su derecha.

Definición I.6.3. La función f alcanza un **mínimo relativo** en el punto $(a, f(a))$, $a \in D$, si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Si $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in D$, se dice que f tiene un **mínimo absoluto** en el punto $(a, f(a))$.

Nótese que una función continua en a tiene un mínimo relativo en ese punto si es decreciente en $(a - \delta, a)$ y creciente en $(a, a + \delta)$, para algún $\delta > 0$, es decir, si es decreciente a la izquierda de a y creciente a su derecha.

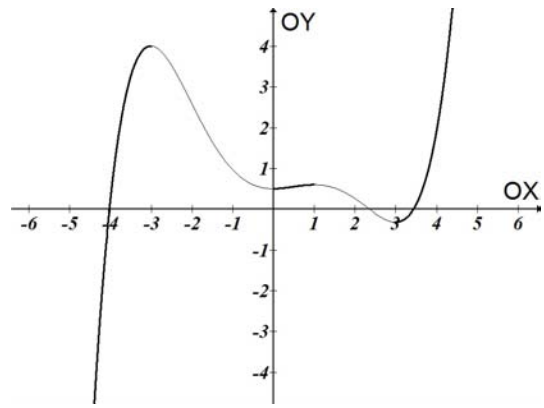
Ejemplo I.6.4. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. La función f es creciente en

$$(-\infty, -3) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$$

y decreciente en

$$(-3, 0) \cup (1, 3).$$

Alcanza máximos relativos en los puntos $(-3, \frac{401}{100})$ y $(1, \frac{179}{300})$, y mínimos relativos en los puntos $(0, \frac{1}{2})$ y $(3, -\frac{31}{100})$.



Proposición I.6.5. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo $I \subseteq D$.*

(a) *Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I.*
(b) *Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.*

Demostración. Consideremos el caso $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$. Sean a y $b \in I$ con $a < b$. Por el teorema del valor medio existe $c \in [a, b] \subseteq I$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(c) > 0$, pues $c \in I$, de modo que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0,$$

y puesto que $a < b$ se sigue que $f(a) < f(b)$.

La demostración del caso $f'(x) < 0$, para todo $x \in I$, es análoga y se deja como ejercicio al lector. ■

Proposición I.6.6. *Si f tiene n derivadas continuas en un entorno de a tales que $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{n-1)}(a) = 0$ y $f^{n)}(a) \neq 0$ y n es par, entonces*

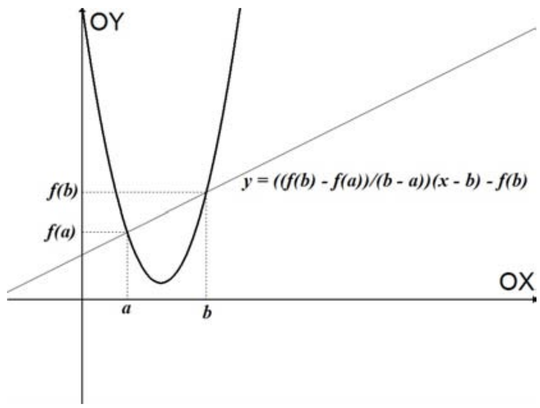
$$\begin{cases} f^{n)}(a) > 0 & \Rightarrow \quad f \textit{ tiene un mínimo local en } a \\ f^{n)}(a) < 0 & \Rightarrow \quad f \textit{ tiene un máximo local en } a \end{cases}$$

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en las páginas 277-279 de [**Spi96**], o en la página 233 de [**Bor86**]. ■

6.2. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Definición I.6.7. La función f es **cóncava** en I si para todo a y $b \in I$ el segmento que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda *por encima* de la porción de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$.

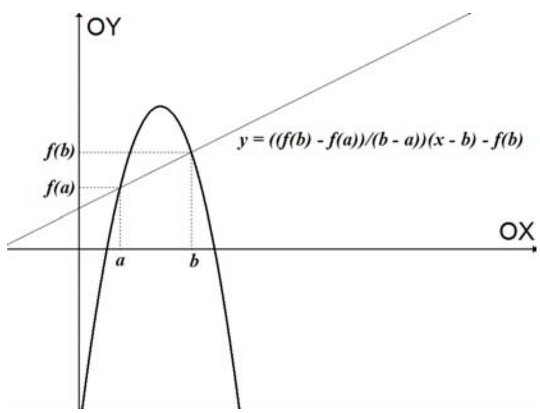
Ejemplo I.6.8. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. La función f es cóncava en todo su dominio, D. Por tanto, podemos comprobar que para todo a y $b \in D$ el segmento que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por encima de la porción de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$.



Definición I.6.9. La función f es **convexa** en I si para todo a y $b \in I$ el segmento que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda *por debajo* de la porción de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$.

Ejemplo I.6.10. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración.

La función f es convexa en todo su dominio, D. Por tanto, podemos comprobar que para todo a y $b \in D$ el segmento que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por debajo de la porción de la gráfica de f correspondiente al intervalo $[a, b]$.



Definición I.6.11. Se dice que $(c, f(c))$, $c \in D$, es **punto de inflexión** de f si existe $\delta > 0$ tal que f es cóncava (ó convexa) en $(c - \delta, c)$ y convexa (ó cóncava) en $(c, c + \delta)$.

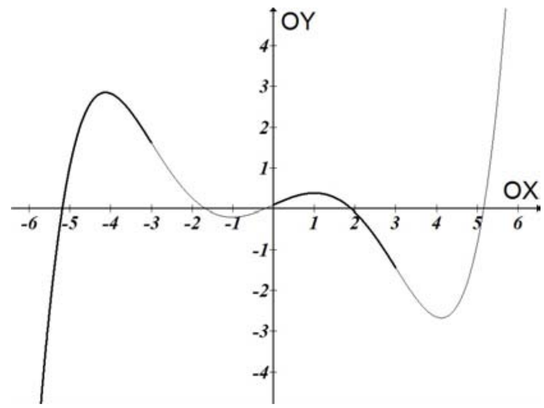
Ejemplo I.6.12. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de la ilustración. La función f es convexa en

$$(-\infty, -3) \cup (0, 3)$$

y cóncava en

$$(-3, 0) \cup (3, +\infty).$$

Los puntos $(-3, \frac{81}{50})$, $(0, \frac{9}{100})$ y $(3, -\frac{36}{25})$ son puntos de inflexión.



Proposición I.6.13. *Si f tiene segunda derivada en I, entonces, f es cóncava (convexa, respectivamente) en I si, y sólo si, $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$ ($f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, respectivamente).*

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en las páginas 304-306 de [**Spi96**], o en la página 235 de [**Bor86**]. ∎

Corolario I.6.14. *Si f tiene n derivadas continuas en un entorno de a tales que $f''(a) = \ldots = f^{n-1)}(a) = 0$ y $f^{n)}(a) \neq 0$ y n es impar y mayor o igual que 3, entonces f tiene un punto de inflexión en a.*

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en las páginas 237-239 de [**Bor86**]. ∎

6.3. Representación gráfica de funciones.

Aunque el problema de la representación gráfica de funciones no es, en rigor, una parte del Cálculo Diferencial, ocurre que dicho Cálculo proporciona (para las funciones que son derivables, naturalmente) las mejores herramientas para la resolución del mismo.

Esa es la única razón de que sea en el último apartado de esta sección dedicado al Cálculo Diferencial, en el que nos detengamos a sistematizar, y también a completar, los conocimientos hasta ahora adquiridos que pueden ser útiles para representar aproximadamente la gráfica de las funciones reales de variable real.

Dada la *expresión analítica* de una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, para realizar su **representación gráfica** debemos estudiar los siguientes puntos:

1. Dominio.
2. Simetrías (función par o impar). Periodicidad.
3. Asíntotas.
4. Corte con los ejes. Signo de la función.
5. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

6. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Dibujando debidamente la información obtenida en cada uno de estos puntos sobre un sistema cartesiano de coordenadas (x, y), se obtiene una aproximación a la gráfica de la función que recoge los aspectos fundamentales de ésta.

En el apéndice I se incluye el estudio gráfico de algunas las funciones elementales.

6.4. Optimización.

Los problemas optimización (matemática) consisten en obtener el valor máximo o mínimo (el óptimo) de una función $f(x)$, llamada función objetivo, que representa o mide la calidad de las decisiones (en nuestro caso, un número real), cuando x pertenece a un conjunto Ω (en nuestro caso, un intervalo), llamado conjunto decisiones factibles o restricciones del problema.

Uno de los ejemplos clásicos de optimización tuvo como origen una cosecha excepcional de uva en Austria, que una vez procesada generó gran cantidad de vino. Para guardar dicho vino, J. Kepler (1571-1630) estudió la forma de los barriles que con menor superficie, y por tanto menor cantidad de madera utilizada para hacerlos, tuvieran mayor volumen, y por consiguiente pudieran albergar más cantidad de vino.

Evidentemente, existen muchas otras situaciones reales en las que interesa optimizar (minimizar o maximizar) ciertas cantidades. Por ejemplo, en una reacción química, se desea conocer bajo qué condiciones la velocidad de reacción es máxima. En una explotación agrícola, se desea saber la cantidad de fertilizante que maximiza la cosecha. Los problemas de optimización surgen también en el estudio de la evolución de historias de vida, e involucran cuestiones como cuándo debe empezar a reproducirse un organismo para maximizar el número de descendientes supervivientes (en la sección 4 del capítulo 5 de [**Neu04**] se pueden encontrar estos y otros ejemplos).

En los ejemplos citados, el interés está en encontrar extremos absolutos de una determinada función (reales de variable real) en un intervalo. Veamos ahora un par de ejemplos concretos.

Ejemplo I.6.15. **Cosecha de maíz.**

Sea $Y(N)$ la cosecha de una explotación agrícola de maíz en función del nivel de nitrógeno del suelo, N. Experimentalmente, se ha llegado a la conclusión de que un modelo para esta situación puede ser

$$Y(N) = \frac{N}{1+N^2}, \text{ para } N > 0$$

(donde N se mide en las unidades apropiadas). Calculemos el nivel de nitrógeno en el suelo que hace que la cosecha sea máxima.

La función $Y(N)$ es derivable $(0, +\infty)$, y su derivada es

$$Y'(N) = \frac{(1+N^2) - N \cdot 2N}{(1+N^2)^2} = \frac{1-N^2}{(1+N^2)^2}.$$

Haciendo $Y'(N) = 0$, se obtienen los candidatos a extremos locales

$$Y'(N) = 0 \Longleftrightarrow 1 - N^2 = 0 \Longleftrightarrow N = \pm 1.$$

Como $N = -1$ no está en el intervalo $(0, +\infty)$, se puede descartar como candidato. El otro candidato $N = 1$ sí está en el dominio, y se puede ver que

$$Y'(N) > 0 \quad \text{si} \quad 0 < N < 1$$

y

$$Y'(N) < 0 \quad \text{si} \quad N > 1.$$

Por consiguiente, como la función cambia de creciente a decreciente en $N = 1$, este punto ha de ser un máximo local. Para comprobar si se trata de un máximo global, tenemos que estudiar qué ocurre en los extremos del dominio. Por una parte,

$$\lim_{N \to 0^+} Y(N) = \lim_{N \to 0^+} \frac{N}{1 + N^2} = 0$$

y por otra

$$\lim_{N \to +\infty} Y(N) = \lim_{N \to +\infty} \frac{N}{1 + N^2} = 0.$$

Como $Y(1) = \frac{1}{2}$, se concluye que $N = 1$ es el máximo global. Es decir, $N = 1$ es el nivel de nitrógeno óptimo para la cosecha.

En el ejemplo anterior conocemos explícitamente la función que se desea optimizar. Consideremos ahora un ejemplo en el que tenemos que construir la función a optimizar. En cualquiera de los dos casos, una vez que conocemos la función que queremos optimizar, el procedimiento a seguir es el mismo: calcular los extremos globales de una función. Sin embargo, es muy importante establecer bien el dominio de la función ya que los extremos globales pueden aparecer en las fronteras del dominio.

Ejemplo I.6.16. **Minimización de material.**
Las latas de aluminio de los refrescos se modelan en forma de cilindro circular recto y almacenan un tercio de litro. La producción de aluminio requiere mucha energía, por lo que se desea diseñar las latas de refresco de forma que utilicen la mínima cantidad posible de material. ¿Qué dimensiones debe tener la lata refresco óptima?

La lata con la mínima cantidad de material será aquella cuya área superficial sea mínima para un volumen dado. Utilizando las formulas de geometría, el área superficial de un cilindro recto de altura h con tapa y base cerradas de radio r se expresa como[9]

$$A = \underbrace{2\pi r h}_{\text{pared del cilindro}} + \underbrace{2\left(\pi r^2\right)}_{\text{tapa y base del cilindro}}$$

[9]Estamos suponiendo que el aluminio del cilindro y de las tapas es del mismo grosor. En las latas de refresco reales las tapas tienen mayor grosor que el cilindro.

El volumen V del cilindro recto es

$$V = \pi r^2 h.$$

Por tanto, es necesario minimizar A cuando el volumen V es igual a un tercio de litro, es decir, $1000/3\,\mathrm{cm}^3$. Despejando h de $\pi r^2 h = 1000/3$, se obtiene que

$$h = \frac{1000}{3\pi r^2}.$$

Sustituyendo este valor de h en la fórmula del área, se obtiene que

$$A(r) = 2\pi r \frac{1000}{3\,\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2000}{3\,r} + 2\pi r^2, \text{ para } r > 0.$$

El problema consiste ahora en determinar si la función $A(r)$ tiene un mínimo global en su dominio, $(0, +\infty)$. Para calcular el mínimo global (si lo hubiese), se deriva $A(r)$ y se hace su derivada igual a 0.

$$A'(r) = -\frac{2000}{3\,r^2} + 4\pi r = 0.$$

Despejando r se obtiene que

$$r^3 = \frac{2000}{12\,\pi},$$

por tanto,

$$r = \left(\frac{1000}{6\,\pi}\right)^{1/3} = 3{,}75\,\mathrm{cm}$$

Para comprobar si se trata de un mínimo, se calcula la segunda derivada de $A(r)$:

$$A''(r) = \frac{4000}{3\,r^3} + 4\pi.$$

Como $A''(3{,}75) = 37{,}85 > 0$, concluimos que $r = 3{,}75$ es un mínimo local. Para determinar si este valor de r es un mínimo global, hay que calcular el área de la superficie del cilindro en la frontera del dominio. Dado que

$$\lim_{r\to 0^+} A(r) = \lim_{r\to\infty} A(r) = +\infty,$$

se deduce que el mínimo global se alcanza en $r = 3{,}75$. Finalmente, calculamos el valor de h,

$$h = \frac{1000}{3\pi r^2} = \frac{1000}{3\pi(3{,}75)^2} = 7{,}5\,\mathrm{cm}.$$

Por tanto, hemos obtenido que la lata que utiliza menos material es aquella en la que su altura es igual a su diámetro.

Ejercicio I.6.17. Determinar los puntos de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

que están a máxima distancia del origen. Calcular también los que están más próximos al origen.

7. Aproximación lineal y polinómica

Si p es una función polinómica

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0;$$

por ejemplo, una recta $p(x) = 2x + 1$, o una parábola $p(x) = x^2 - 3x + 2$, entonces el valor de $p(x)$ en un punto se puede calcular fácilmente. Esto no se cumple en absoluto para las funciones como $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ o $f(x) = \mathrm{e}^x$.

En esta sección mostraremos importantes resultados teóricos que reducirán el calculo de $f(x)$, para muchas funciones f, al cálculo de funciones polinómicas. El método consiste en hallar funciones polinómicas que se aproximen estrechamente a f en un punto a, y de este modo calcular el valor aproximado de f en a.

7.1. Aproximación lineal y polinómica.

Sabemos que si una función $f(x)$ es derivable en un punto $x = a$, entonces la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Esta recta es la gráfica de la función lineal $L_{f(a)}(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Esta función lineal es la única (entre las funciones lineales) que cumple que en el punto $x = a$, la función y su derivada toman el mismo valor que f y su derivada. Es decir, que

$$L_{f(a)}(a) = f(a) \quad \text{y} \quad L'_{f(a)}(a) = f'(a)$$

La función $L_{f(a)}(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es por tanto la función lineal que mejor aproxima a f "cerca de a".

Dicho de otro modo, si fijamos un punto de la gráfica de una función, y consideramos un trozo de la curva alrededor dicho punto, si el trozo es suficientemente pequeño, es prácticamente recto, pues bien, la recta que más "se parece" a la curva en ese pequeño tramo, es la recta tangente a la curva en el punto, pues es la única que recta pasa por el punto $(a, f(a))$ y lleva en ese punto la misma dirección que la curva.

Definición I.7.1. Si una función $f(x)$ es derivable en un punto $x = a$, se llama **aproximación por la recta tangente, aproximación lineal o linealización de f en $x = a$** a la función lineal $L_{f(a)}(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Como las funciones lineales son, evidentemente, las más sencillas de evaluar en cualquier punto, la aproximación lineal de una función se utiliza para calcular el valor aproximado de la función en puntos cercanos a uno donde se conozca el valor de la función. Veamos un ejemplo que ilustre este procedimiento.

Ejemplo I.7.2. Supongamos que queremos calcular el valor, al menos aproximado, de $\ln(1{,}05)$ sin utilizar una calculadora. Sabemos que $\ln(1) = 0$. Como la función $\ln(x)$ es continua, el valor de $\ln(1{,}05)$ está próximo a $\ln(1) = 0$. Como además, la función $\ln(x)$ es derivable en $x = 1$, existe la recta tangente a $y = \ln(x)$ en el punto

$(1,0)$, y esta recta es $y = \ln(1) + \ln'(1)(x-1)$. Consideremos entonces la aproximación lineal del $\ln(x)$ en $x = 1$:

$$L_{\ln(1)}(x) = \ln(1) + \ln'(1)(x-1) = 0 + (1)(x-1) = x - 1.$$

Si evaluamos $L_{\ln(1)}(x)$ en $x = 1{,}05$, se obtiene $L_{\ln(1)}(1{,}05) = 1{,}05 - 1 = 0{,}05$. Para estimar la bondad de esta aproximación utilizamos la calculadora y vemos que 0,05 es una buena aproximación de $\ln(1{,}05) = 0{,}04879016\ldots$.

Ejercicio I.7.3.

1. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Para qué valores de a existe la aproximación lineal de f en a. Escribir la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ en los puntos $x = a$ en los que existe.
2. Utilizar la aproximación lineal para calcular el valor de $\sqrt{50}$. Comparar el resultado obtenido con el que proporciona la calculadora $\sqrt{50} = 7{,}071067\ldots$.

7.2. Aproximación polinómica. Polinomio de Taylor.

En el ejemplo I.7.2, utilizamos la aproximación lineal para calcular el valor de $\ln(1{,}05)$ y obtuvimos $L_{\ln(1)}(1{,}05) = 0{,}05$, que se diferencia en algo más de una centésima del valor obtenido con la calculadora $\ln(1{,}05) = 0{,}04879016\ldots$. En algunas situaciones esta aproximación puede ser suficiente, pero en otras puede necesitarse mayor precisión. Esta mayor precisión puede conseguirse utilizando funciones polinómicas, en lugar de funciones lineales.

7.2.1. Polinomio de Taylor de segundo grado.

Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo I.7.4. Supongamos, como en el ejemplo anterior, que queremos obtener una aproximación del valor de $\ln(1{,}05)$, sin usar una calculadora y cometiendo un error menor que el que se obtiene con la aproximación lineal.

Para realizar este cálculo, utilizaremos un polinomio de segundo grado, que es una función fácil de evaluar en cualquier punto. Para que el polinomio sea una buena aproximación de la función $\ln(x)$, cerca del punto $x = 1$, exigiremos que en el punto $x = 1$ el valor del polinomio sea igual a $\ln(1) = 0$, el valor de su derivada sea igual a $\ln'(1) = 1$ (estas dos condiciones ya las cumplía la aproximación lineal) y además exigiremos que el valor de la segunda derivada del polinomio en $x = 1$ sea igual a $\ln''(1) = -1$. (Observemos que esta última condición no puede exigirse a una función lineal, pues la derivada segunda de una función lineal es siempre 0).

El siguiente polinomio cumple las condiciones exigidas:

$$P^2_{\ln(1)}(x) = \ln(1) + \ln'(1)(x-1) + \frac{1}{2}\ \ln''(1)(x-1)^2.$$

En $x = 1$, el polinomio vale

$$P^2_{\ln(1)}(1) = \ln(1) = 0$$

La primera derivada de este polinomio es

$$(P^2_{\ln(1)})'(x) = \ln'(1) + \ln''(1)(x-1),$$

luego

$$(P^2_{\ln(1)})'(1) = \ln'(1) = 1.$$

La segunda derivada del polinomio es

$$(P^2_{\ln(1)})''(x) = \ln''(1) = -1,$$

luego

$$(P^2_{\ln(1)})''(1) = \ln''(1) = -1.$$

Analicemos el significado de estas condiciones. La gráfica de la función $y = P^2_{\ln(1)}(x)$ es una parábola (por ser una función polinómica de segundo grado). La primera condición exigida, $P^2_{\ln(1)}(1) = \ln(1) = 0$ significa que la parábola pasa por el punto $(1, \ln(1) = 0)$. La segunda condición, $(P^2_{\ln(1)})'(1) = \ln'(1) = 1$ significa que la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 0)$ coincide con la recta tangente a la gráfica de la función $y = \ln(x)$, es decir, las dos curvas tienen en el punto $(1, 0)$ la misma dirección. Por último, la tercera condición, $(P^2_{\ln(1)})''(1) = \ln''(1) = -1$, significa que las dos curvas (la parábola y la gráfica del $\ln(x)$) tienen la misma forma, cóncava o convexa, cerca del punto $(1, 0)$.

El análisis anterior nos lleva a la conclusión de que la función

$$P^2_{\ln(1)}(x) = \ln(1) + \ln'(1)(x-1) + \frac{1}{2}\ln''(1)(x-1)^2$$

es el polinomio de segundo grado que mejor aproxima a la función $\ln(x)$ cerca del punto $x = 1$. La gráfica de esta función cuadrática es la parábola que más se parece, o que mejor se ajusta, a la gráfica del $\ln(x)$ en las proximidades del punto $(1, 0)$.

Evaluemos el polinomio $P^2_{\ln(1)}(x)$ en $x = 1{,}05$ y comparemos con los resultados obtenidos con la aproximación y con calculadora para $\ln(1{,}05)$.

$$P^2_{\ln(1)}(1{,}05) = \ln(1) + \ln'(1)(1{,}05-1) + \frac{1}{2}\ln''(1)(x-1)^2 =$$

$$0 + (1)(1{,}05-1) + \frac{1}{2}(-1)(1{,}05-1)^2 = 0{,}04875$$

Observemos que el valor ahora obtenido coincide hasta la tercera cifra decimal con el que nos da la calculadora, $\ln(1{,}05) = 0{,}04879016\ldots$.

El polinomio construido en el ejemplo anterior para la función $\ln(x)$ en $x = 1$ se puede definir para cualquier función $f(x)$ en los puntos de su dominio donde existan la primera y la segunda derivada.

Definición I.7.5. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea a un punto de su dominio D. Si f es dos veces derivable en a, se llama **polinomio de Taylor**[10] **de segundo**

[10]B. Taylor (1685-1731), matemático inglés famoso por el teorema que lleva su nombre sobre el desarrollo en serie infinita de una función en un punto.

grado de f **en** a a la función $P^2_{f(a)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$P^2_{f(a)}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

El polinomio de Taylor de segundo grado de f en a cumple que:

$$P^2_{f(a)}(a) = f(a), \quad (P^2_{f(a)})'(a) = f'(a) \;\text{ y }\; (P^2_{f(a)})''(a) = f''(a)$$

Esto significa que la parábola $y = P^2_{f(a)}(x)$ pasa por el punto $(a, f(a))$, y tiene en ese punto la misma tangente y la misma forma (segunda derivada) que la gráfica $y = f(x)$.

La función $P^2_{f(a)}(x)$ es la única función polinómica de segundo grado cuyo valor y el de sus derivadas primera y segunda en $x = a$ coinciden con los correspondientes de f. Por esta razón, decimos que el polinomio de Taylor de grado 2 de f en a es la función polinómica de segundo grado que mejor aproxima a f en los puntos suficientemente próximos a a.

Ejercicio I.7.6. Escribir la aproximación lineal y el polinomio de Taylor de segundo grado de $f(x) = 1/x$ en $x = 1$ y utilizarlos para calcular aproximaciones de 1/0,99. (Con la calculadora: 1/0,99 = 0,010101...).

7.2.2. Polinomio de Taylor de grado n.

La aproximación del valor de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ obtenida por la recta tangente o por el polinomio de Taylor de segundo grado se puede mejorar utilizando polinomios de grado mayor (3, 4, etc...), siempre que en el punto a existan las derivadas necesarias (tercera, cuarta, etc...). La definición y propiedades de estos polinomios son enteramente análogas a las dadas para el de segundo grado.

Definición I.7.7. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea a un punto de su dominio D. Si f es n veces derivable en a, se llama **polinomio de Taylor de grado** n **de** f **en** a a la función $P^n_{f(a)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por [11]

$$\begin{aligned} P^n_{f(a)}(x) =& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}f'''(a)(a-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{n)}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Observemos que el polinomio de Taylor de grado 1 de f en a es precisamente la aproximación lineal:

$$P^1_{f(a)}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = L_{f(a)}(x).$$

El polinomio de Taylor de grado n de f en a cumple que:

$$P^n_{f(a)}(a) = f(a), \quad \text{y} \quad (P^n_{f(a)})^{i)}(a) = f^{i)}(a) \quad \text{para } \; i = 1, \ldots, n$$

[11] Recordemos que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1$.

La función $P^n_{f(a)}(x)$ es la única función polinómica de grado n cuyo valor y el de todas sus derivadas hasta el orden n en a coinciden con los correspondientes de f. Por esta razón, decimos que el polinomio de Taylor de grado n de f en a es la función polinómica de grado n que mejor aproxima a f en los puntos suficientemente próximos a a.

Las funciones polinómicas resultan útiles para aproximar otras funciones porque los polinomios son, en general, más fáciles de evaluar en cualquier punto. El uso de estas funciones reduce el cálculo de senos, cosenos, exponenciales, logaritmos, etc... a sumas, rectas, productos y divisiones.

Señalemos por último que, aunque no abordaremos aquí esta cuestión, conviene saber que el Análisis Matemático proporciona resultados que permiten conocer la magnitud del error que se comete cuando se realizan cálculos aproximados con los polinomios de Taylor (véase el capítulo 19 de [**Spi96**] para este y otros detalles sobre aproximación polinómica).

Ejemplo I.7.8. El polinomio de Taylor de la función exponencial e^x en el punto $x = 0$ es:

$$P^n(x) = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 x + \frac{1}{2!}\mathrm{e}^0 x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{e}^0 x^n = 1 + x + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Ejercicio I.7.9. Escribir el polinomio de Taylor de orden 4 de las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ en $x = 0$.

Ejercicios de Cálculo Diferencial

Ejercicios de repaso.

Ejercicio 1. Calcular la unión y la intersección, y representarlas sobre la recta real, de cada una de las siguientes parejas de intervalos:

1. $I = [-1, 1]$ y $J = (0, 2)$,
2. $I = [-2, -1]$ y $J = (-1, 0)$,
3. $I = [-2, -1]$ y $J = [0, 1]$.

Ejercicio 2. Dibujar sobre la recta real los siguientes intervalos simétricos abiertos:

1. de centro 0 y radio 1;
2. de centro $-1/2$ y radio $1/2$;
3. de centro 1 y radio 10^{-2}.

Ejercicio 3. Calcular el dominio, y representarlo gráficamente sobre la recta real, de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x}$,
2. $g(x) = x^2$,
3. $h(x) = \frac{1}{x}$,
4. $q(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$,
5. $r(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

Ejercicio 4. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$ y $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$, escribir la expresión analítica y calcular el dominio de las siguientes funciones: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$ y $h \circ g$.

Ejercicio 5. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \leq 1; \\ 3 - ax^2 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6. Calcular los siguientes límites, si existen.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{6}{4+e^{-1/x}}$
2. $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1})$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
4. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^x}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{|x|}{x}$
6. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x}$

Ejercicio 7. En cada caso, dar ejemplos de funciones para las que se cumpla

1. $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
2. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$.
3. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

Ejercicio 8. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -3\operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad x < -\frac{\pi}{2}; \\ a\operatorname{sen}(x) + b & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \cos(x) & \text{si} \quad x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

elegir a y $b \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 9. Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ de las siguientes funciones y, en caso de que haya discontinuidades decir de qué tipo son.

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq 1; \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$
2. $f(x) = |x^2 - 1|$.
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{1/x}} & \text{si} \quad x < 0; \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

Ejercicio 10. Determinar el dominio y estudiar la continuidad y las asíntotas de cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \frac{x^3-27}{x^2-9}$
2. $f(x) = \frac{x+\frac{1}{x}}{1+x^2}$
3. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$
4. $f(x) = \ln(\sqrt{2x^3+4x^2})$
5. $f(x) = \frac{1-x}{x\sqrt{x+2}}$
6. $f(x) = \frac{|x|}{x^3-1}$

Ejercicio 11. Estudiar si las siguientes funciones son periódicas. En caso afirmativo, calcular su periodo.

1. $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$
2. $f(x) = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(\frac{x}{2})$
3. $f(x) = \operatorname{sen}(x) + e^x$
4. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

Ejercicio 12. Dibujar de forma aproximada (sin hacer el correspondiente estudio gráfico) la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = 2x + 1$
3. $f(x) = x^2 - 1$
4. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
5. $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f(x) = z$ si $x \in (z-1, z],\ z \in \mathbb{Z}$.

Ejercicios del tema.

Ejercicio 13. Demostrar que para cualquier número real k la ecuación $x^3-3x+k=0$ no puede tener dos soluciones en el intervalo $(0,1)$.

Ejercicio 14. Demostrar que la única solución real de la ecuación $\mathrm{e}^x=1+x$ es $x=0$.

Ejercicio 15. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si existe algún punto c en el intervalo abierto $(-1,1)$ en el que se anulan:

1. $f(x)=x^5+x^3+x+1$;
2. $f(x)=1/x$;
3. $f(x)=x^2$
4. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

Ejercicio 16. Estudiar y representar gráficamente las siguientes funciones

- **Polinómicas**:
$$f(x)=-x^2+x+1, \quad g(x)=x^3+1, \quad h(x)=x^4-1.$$
- **Racionales**:
$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^4-1}, \quad g(x)=\frac{x^4-1}{x^3+1}, \quad h(x)=\frac{x^2+1}{x^3+1}-\frac{x}{x^2-1},$$
$$p(x)=\frac{6x^2-8x}{6x-9}, \quad q(x)=\frac{1}{x^2}-x.$$
- **Potenciales**:
$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}, \quad g(x)=x^{\frac{1}{4}}, \quad h(x)=\sqrt{x^2+x+1},$$
$$r(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x-1}.$$

Ejercicio 17. Estudiar y representar gráficamente la función
$$f(x)=\begin{cases} (x-1)(x+2)+\frac{1-x^3}{x} & \text{si} \quad x<1 \\ (x+1)(x-2)-\frac{1+x^3}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Ejercicio 18. Estudiar y representar gráficamente las funciones

1. $f(x)=|x+1|\cdot|x-2|$
2. $f(x)=\frac{1}{|x+1|\cdot|x-2|}$
3. $f(x)=\sqrt{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}$
4. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x)=\mathrm{e}^{-(x^2-1)}$
6. $f(x)=x\cdot\ln(x)$
7. $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$
8. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
9. $f(x)=\operatorname{sen}^2(x)\cdot\cos(2x)$
10. $f(x)=\cos(x^2)$

Ejercicio 19. Estudiar y representar gráficamente las funciones

$$f(x) = \frac{|x|}{x^3-1}, \qquad f(x) = \frac{x^5}{x^3-1} - x^2, \quad f(x) = \mathrm{Ln}(x^2)$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \quad f(x) = \frac{x}{x^2-1} \qquad f(t) = 10(1 - \tfrac{9}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t})$$

Ejercicio 20. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$. Calcular los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ es horizontal.

Ejercicio 21. Estudiar y representar gráficamente la función definida en $D = [0, +\infty)$ por $f(0) = 0$ y $f(x) = x(\mathrm{Ln}(x) - 1)$ cuando $x > 0$.

Ejercicio 22. Calcular los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \mathrm{e}^{-(x^2+1)}$.

Ejercicio 23. Calcular las asíntotas, obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento y determinar los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$.

Ejercicio 24. Dibujar la gráfica de una función $f(x)$ que presente las siguiente características:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$, o que lo es lo mismo $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.
- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$.
- Negativa en $(-\infty, -2)$ y positiva en el resto.
- Tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

Responder a las siguientes preguntas sobre la gráfica de la función dibujada:

1. ¿En qué puntos no es continua?
2. Escribir las asíntotas verticales y horizontales.
3. Escribir los puntos donde la derivada es nula.

Ejercicio 25. Dibujar la gráfica de una función que presente las siguientes características:

- Dominio= $\mathbb{R} - \{3\}$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$
- Pasa por los puntos: (-3,0), (-1,0), (2,0).
- Es positiva en los intervalos $(-3, -1)$ y $(0, +\infty)$, y negativa en el resto del dominio.
- La recta $y = 0$ es asíntota en $-\infty$, y la recta $y = x$ es asíntota en $+\infty$.
- Es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$
- Tiene mínimos relativos en los puntos: (-4, -1), (2, 0) y (5, 1), y tiene máximos relativos en los puntos: (-2, 2) y (1,1).
- Es cóncava el los intervalos: (-5,-3), ($\frac{3}{2}$, 3) y (3, $+\infty$), y es convexa en los intervalos $(-\infty, -5)$, (3,0), (0, $\frac{3}{2}$).

Responder a las siguientes cuestiones sobre la función dibujada:

1. ¿En qué puntos no es continua? ¿Qué tipo de discontinuidad presenta en cada uno de estos puntos?
2. Determinar las asíntotas verticales.
3. ¿En qué puntos tiene derivada nula?
4. ¿En qué intervalos es creciente la derivada de esta función?
5. Determinar los puntos de inflexión.

Ejercicio 26. Un cultivo de bacterias tiene un número muy grande de células de manera que, para su estudio, en lugar de contar el número de células, se mide su masa. Supongamos que tenemos un cultivo al que se suministra una cantidad ilimitada de comida. En cada intervalo unidad de tiempo una proporción, r, de células se divide, y esta proporción permanece constante durante todo el tiempo.

En estas condiciones, se comprueba (véase el ejemplo 3.5 de la página 34) que el tamaño del cultivo, en función del tiempo, viene dado por la función exponencial:

$$M(t) = n_0 \mathrm{e}^{rt}$$

1. Dibujar la gráfica de esta función para $r = \frac{2}{3}$.
2. Interpretar los siguientes aspectos de la gráfica: cortes con los ejes, asíntotas, puntos de inflexión.
3. Se llama "tasa de crecimiento" a la función derivada $M'(t)$. Estudiar el crecimiento de esta función.
4. Se llama "tasa de crecimiento relativo" a la función $M'(t)/M(t)$. Comprobar que se cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = r.$$

5. ¿Qué significado tendrá que el valor de r sea negativo?
6. Dibujar la gráfica de la función $f(t) = n_0 \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$

Ejercicio 27. El peso en gramos, W, de una hembra de ratón criada bajo condiciones de laboratorio, se mide durante un periodo de 11 meses, desde tres semanas antes del nacimiento, hasta la madurez y se obtiene que, en función de la edad en semanas, t, el peso viene dado por la siguiente función (llamada *función logística*):

$$W(t) = \frac{26}{1 + 30\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}}$$

1. Dibujar la curva de crecimiento del animal, es decir, la gráfica de la función de peso.
2. Interpretar los siguientes aspectos de la gráfica: cortes con los ejes, asíntotas, puntos de inflexión.
3. Se llama "tasa de crecimiento" a la función derivada $W'(t)$. Estudiar el crecimiento de esta función y comprobar que alcanza un máximo.

4. Se llama "tasa de crecimiento relativo" a la función $W'(t)/W(t)$. Comprobar que se cumple la siguiente ecuación:
$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{2}{3}(1 - \frac{W(t)}{26}).$$
Comprobar también que la tasa de crecimiento relativo es siempre decreciente.

Ejercicio 28. Para cada una de la siguientes funciones, determinar si existe algún punto c en el intervalo abierto $(-1, 1)$ donde se anule su derivada, $f'(c) = 0$:

1. $f(x) = 1/x^2$;
2. $f(x) = |x|$;
3. $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$;
4. $f(x) = x^3$.

Ejercicio 29. Utilizando la aproximación lineal, obtener un valor aproximado de:

1. $\sqrt{65}$;
2. $(0{,}99)^{25}$;
3. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 0{,}02\right)$;
4. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}01\right)$;
5. $\operatorname{Ln}(1{,}01)$;
6. $\operatorname{sen}(0{,}01)$;
7. $\sqrt{4{,}01}$.

Compara cada uno de estos resultados con el correspondiente valor obtenido mediante calculadora.

Autoevaluación de Cálculo Diferencial

Indíquese, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son correctas.

1. Para cualquier número real x se cumple que:
   (a) $\mathrm{e}^{t\ln 2-1} = 2^t/\mathrm{e}$;
   (b) $\ln(x^2) = (\ln(x))^2$;
   (c) $\ln(x^5) = x\ln(5)$
   (d) $\ln(\frac{e}{x+1}) = -\ln(x)$.
2. (a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 0$
   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{2x-3} = 0$
   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(x)}{x} = 0$
   (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(x^2)}{x} = 0$.
3. (a) $\lim_{x\to 0} x\mathrm{Ln}(x) = 0$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 0$
   (c) $\lim_{x\to 0} x\mathrm{sen}(x) = 0$
   (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 0$.
4. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} = -1$
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} = +\infty$
   (c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} = +\infty$
   (d) La función $\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}$ es siempre negativa.
5. La función $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$
   (a) Tiene como asíntotas verticales a las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
   (b) Tiene como asíntota horizontal a la recta $y = 2$ en $+\infty$ y en $-\infty$.
   (c) No tiene extremos relativos.
   (d) Es creciente en todo su dominio.
6. (a) La función $f(t) = \mathrm{e}^{-(t^2+1)}$ alcanza un máximo en $t = 0$.
   (b) La función $f(t) = \mathrm{e}^{-(t^2+1)}$ no tiene puntos de inflexión.
   (c) La función $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ alcanza un mínimo en $x = -1/2$.
   (d) La función $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ no tiene puntos de inflexión.
7. La recta $y = 2(x-1)$
   (a) Es tangente a $y = 2\ln(x)$ en $x = 1$.
   (b) Es tangente a $y = x^2-1$ en $x = 1$.
   (c) Es tangente a $y = x^2+2x-2$ en $x = 0$.
   (d) Es tangente a $y = \mathrm{e}^x-3$ en $x = 0$.
8. (a) Ninguna de las rectas tangentes a $y = \ln(x+1)$ es horizontal.
   (b) La recta $y = x$ es tangente a $y = \ln(x+1)$ en $x = 0$.
   (c) En el intervalo $[0, 2\pi]$ la recta tangente a $y = \mathrm{e}^{x+1}\cos(x)$ es horizontal en $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

(d) En el intervalo $[0,\pi]$ la recta tangente a $y = \mathrm{e}^{x+1}\cos(x)$ tiene pendiente positiva sólo cuando $x \in [0,\pi/4)$.

9. Utilizando aproximación lineal obtenemos que el valor aproximado de cada una de las siguientes funciones en el punto 0.01 es:
   (a) Si $f(x) = \frac{1}{x+1}$, entonces $f(0{,}01) \simeq 1{,}01$.
   (b) Si $f(x) = \frac{1}{x-1}$ entonces $f(0{,}01) \simeq -0{,}99$.
   (c) Si $f(x) = \mathrm{e}^{2xt}$ entonces $f(0{,}01) \simeq 1{,}02$.
   (d) Si $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ entonces $f(0{,}01) \simeq 0{,}01$.

10. (a) Si $f(t) = 2\mathrm{e}^{5t}$ entonces $\frac{f'}{f} = 5$.
   (b) Si $f(t) = \frac{100}{1+9\mathrm{e}^{-0{,}1t}}$ entonces $\frac{f'}{f} = 0{,}1(1 - \frac{f}{100})$.
   (c) Si $f(t) = 2 - \mathrm{e}^{-3t}$ entonces $f' = -3(2 - \mathrm{e}^{-3t})$.
   (d) Si $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ entonces $f + f'' = 0$.

TEMA II

Cálculo integral

Introducción

El cálculo integral surgió para resolver problemas como obtener la longitud de una curva, calcular el área de una región y el volumen de un cuerpo. En muchos fenómenos físicos (económicos, sociales, etc...), el área bajo la curva de una función representa una magnitud relevante, que conviene saber medir. Por ejemplo, si representamos la velocidad de un móvil en función del tiempo, el área bajo la curva obtenida es el espacio recorrido, y cuando representamos la fuerza en función del espacio, el área bajo la curva significa el trabajo realizado. El resultado que nos permite obtener el área bajo una curva es el teorema fundamental del cálculo, que relaciona el cálculo del área bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ con el cálculo de una función cuya derivada es f.

Los conceptos y resultados estudiados en este capítulo constituyen la base para establecer la teoría de las ecuaciones diferenciales, a partir de las que se construyen numerosos modelos en Biología (y en Física, Economía, etc...). Es por ello importante asimilar y entender el contenido del presente capítulo antes de pasar al siguiente, dedicado al estudio de las ecuaciones diferenciales.

1. La integral indefinida

En el siglo XVII apareció una nueva modalidad de problemas de tangentes: los problemas inversos de tangentes. Éstos consistían en la determinación de una curva conociendo alguna propiedad de sus tangentes. El primero en plantear uno de estos problemas fue F. de Beaune, un discípulo de Descartes, quien apuntaría que las propiedades de las curvas podían estar determinadas por las propiedades de sus tangentes.

En términos actuales, podemos considerar que un problema inverso de tangentes consiste en determinar una función de la cual conocemos su derivada. En esta sección nos ocuparemos de este tipo de problemas.

1.1. Definición y propiedades.

Definición II.1.1. Dada una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que la función derivable $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función primitiva** de f en I si $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

Ejemplo II.1.2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x^3$.

i) $F(x) = x^4$ es una primitiva de $f(x)$ en $\mathbb{R}$, porque $F'(x) = f(x)$. En efecto,
$$F'(x) = (x^4)' = 4x^3 = f(x).$$

ii) $F(x) = x^4 + 5$ es otra primitiva de $f(x)$ en $\mathbb{R}$, porque $F'(x) = f(x)$. En efecto,
$$F'(x) = (x^4 + 5)' = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x).$$

iii) En general, si C es cualquier número real, $F(x) = x^4 + C$ es una primitiva de $f(x)$ en $\mathbb{R}$, porque[1]
$$F'(x) = (x^4 + C)' = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x).$$

Del ejemplo anterior se deduce que si $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función primitiva de $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en I y C es un número real cualquiera, entonces $F(x) + C$ es una función primitiva de $f(x)$, para todo $x \in I$.

Teorema II.1.3. *Si dos funciones $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $G : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son primitivas de una misma función $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces existe un número real C tal que $G(x) = F(x) + C$, para cada $x \in I$.*

Demostración. Dado que la derivada de $F(x) - G(x)$ es cero, y las únicas funciones cuya derivada es nula son las funciones constantes (pues son aquellas cuyas rectas tangentes en cualquier punto tienen pendiente cero), se sigue que $F(x) - G(x) = C$, para algún $C \in \mathbb{R}$. ■

Según el teorema anterior, basta localizar una función primitiva, $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de la función $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ para conocer todas las funciones primitivas de f en I; ya que serán de la forma $F(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante, para cada $x \in I$.

Definición II.1.4. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se llama **integral indefinida** de f en $I \subseteq D$, al conjunto de todas las primitivas de f en $I \subseteq D$, lo que se designa por
$$\int f(x)\, dx.$$

Es decir, la integral indefinida de f en I es
$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$
donde F es alguna primitiva de f en I y $C \in \mathbb{R}$ cualquier constante.

Ejemplo II.1.5. En el ejemplo II.1.2 la integral indefinida de $f(x) = 4x^3$ en $\mathbb{R}$ es
$$\int 4x^3\, dx = x^4 + C,$$
con $C \in \mathbb{R}$.

[1] Recuérdese que si C es constante, entonces su derivada es cero.

Ejemplo II.1.6. Otros ejemplos sencillos de integrales indefinidas pueden ser los siguientes:

i)
$$\int (6x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 1)\, dx = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x + C,$$
ya que $(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x + C)' = 6x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 1$.

ii)
$$\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C,$$
porque $(\operatorname{sen}(x) + C)' = \cos(x)$.

Propiedades de la integral. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, y $k \in \mathbb{R}$.

- La integral de la suma (o resta) coincide con la suma de las integrales. Es decir,
$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$
- La integral del producto de un número real, k, por una función es igual a la producto del número real por la integral de la función. Es decir,
$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx.$$

Las propiedades 1. y 2. anteriores aseguran que la *integral indefinida es lineal*, y su demostración es una consecuencia de las propiedades correspondientes de las derivadas.

1.2. Integrales inmediatas.

Las **integrales inmediatas** son aquellas que se deducen directamente de las reglas de derivación. Las más importantes las hemos reunido en la *tabla de integrales indefinidas inmediatas* que se encuentra en el Apéndice III . Todas ellas se justifican sin más que calcular la derivada del miembro de la derecha y comprobar que se obtiene la función que está detrás del signo integral. Por ejemplo,
$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C \quad \text{porque} \quad \left(\sqrt{x} + C\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
o
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \operatorname{tg}(x) + C$$

porque

$$\begin{aligned}(\mathrm{tg}(x))' &= \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\mathrm{sen}(x))'\cos(x) - (\cos(x))'\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\mathrm{sen}(x))\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

1.3. Algunos métodos de integración.

A menudo la integral que tratamos de calcular no está contenida en la tabla de integrales inmediatas. En este caso será preciso, mediante métodos apropiados, transformarla hasta convertirla en una integral similar pero inmediata. A continuación exponemos algunos métodos de integración.

1.3.1. Cambio de variable. Método de sustitución.

Para calcular

$$\int f(x)\,dx$$

cuando no es inmediata, podemos *sustituir* la variable x por otra variable t (*cambio de variable*), en cuyo caso debemos también escribir dx en función de t y dt (de ahí la importancia de poner dx en todas las integrales).

Haremos lo siguiente:

(a) $x = h(t)$;
(b) $dx = h'(t)dt$.

La integral será ahora

$$\int f(x)\,dx = \int f(h(t))h'(t)\,dt.$$

O bien,

(a') $t = q(x)$;
(b') $dt = q'(x)dx$, es decir, $dx = \frac{dt}{q'(x)}$,

y se sustituye en la integral como en el caso anterior.

Si se elige debidamente el cambio de variable, puede ocurrir que la nueva expresión sea una integral inmediata. Calculada ésta, volvemos a la variable primera deshaciendo el cambio, esto es, cambiando ahora t por x.

Ejemplo II.1.7. Calcular

$$\int 4\mathrm{e}^{(7x+5)}\,dx.$$

Si hacemos $t = 7x + 5$, entonces $dt = (7x + 5)'\,dx = 7\,dx$, esto es, $dx = \frac{dt}{7}$. Sustituyendo en la integral anterior obtenemos que

$$\int 4\mathrm{e}^{(7x+5)}\,dx \overset{t=7x+5}{=} \int 4\mathrm{e}^t \frac{dt}{7} = \frac{4}{7}\int \mathrm{e}^t\,dt = \frac{4}{7}\mathrm{e}^t + C,$$

y deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $7x + 5$, concluimos que

$$\int 4\mathrm{e}^{(7x+5)}\,dx = \frac{4}{7}\mathrm{e}^{(7x+5)} + C.$$

Ejemplo II.1.8. Calcular

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx.$$

Si hacemos $t = \sqrt{x-1}$, entonces $t^2 = x - 1$ (ó $x = t^2 + 1$, que es lo mismo), por lo tanto, $2t\,dt = dx$, esto es, $dx = 2tdt$. Sustituyendo en la integral anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &\overset{t=\sqrt{x-1}}{=} \int (t^2+1)\,t\,2t\,dt = \int (2t^4 + 2t^2)\,dt \\ &= 2\int t^4\,dt + 2\int t^2\,dt = 2\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} + C,\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $\sqrt{x-1}$, obtenemos que

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C.$$

Ejemplo II.1.9. Calcular

$$\int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx.$$

Si hacemos $t = \sqrt{3x^4-12}$, entonces $t^2 = 3x^4 - 12$, por lo tanto $2t\,dt = 12x^3\,dx$, esto es, $x^3\,dx = \frac{2t}{6}\,dt = \frac{t}{6}\,dt$. Sustituyendo en la integral anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx &\overset{t=\sqrt{3x^4-12}}{=} \int \left(\sqrt{3x^4-12}\right)\,x^3\,dx = \int t\frac{t}{6}\,dt \\ &= \int \frac{1}{6}t^2\,dt = \frac{1}{6}\int t^2\,dt = \frac{1}{6}\frac{t^3}{3} + C = \frac{t^3}{18} + C,\end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $\sqrt{3x^4-12}$, obtenemos que

$$\int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx = \frac{\left(\sqrt{3x^4-12}\right)^3}{18} + C.$$

1.3.2. Método de integración por partes.

Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son dos funciones derivables, entonces

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.$$

Despejando $u \cdot dv$ en la expresión anterior, obtenemos que $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$, y por tanto que

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\int d(u \cdot v) = u \cdot v,$$

obtenemos la siguiente propiedad

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du.$$

El método de integración por partes suele utilizarse en los casos:

$$\int P(x)\mathrm{e}^{f(x)}\, dx, \qquad \int P(x)\mathrm{Ln}(f(x))\, dx \qquad \int P(x)\,\mathrm{sen}(f(x))\, dx,$$

$$\int P(x)\cos(f(x))\, dx, \qquad \int \mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{sen}(f(x))\, dx, \qquad \int \mathrm{e}^{g(x)}\cos(f(x))\, dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio, y f y g dos funciones derivables.

La utilización de este método no es exclusiva ni excluyente a estos seis tipos de funciones, es decir, hay funciones que no son de esta forma pero que sí se pueden integrar por partes (por ejemplo $\int \mathrm{arcsen}(x)\, dx$), y hay funciones que, aún siendo de alguno de estos seis tipos, no se pueden integrar por partes (por ejemplo, $\int x\mathrm{e}^{x^3}\, dx$).

Ejemplo II.1.10. Calcular

$$\int x\,\mathrm{sen}(x)\, dx.$$

Sean $\boxed{u = x,}$ entonces $du = (x)'\, dx = dx$, y $\boxed{dv = \mathrm{sen}(x)\, dx,}$ entonces $v = \int \mathrm{sen}(x)\, dx = -\cos(x)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int x\,\mathrm{sen}(x)\, dx &= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)\, dx = -x\cos x + \int \cos(x)\, dx \\ &= -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C. \end{aligned}$$

Ejemplo II.1.11. Calcular

$$\int x^3\mathrm{Ln}(x)\, dx.$$

Sean $\boxed{u = \text{Ln}(x),}$ entonces $du = (\text{Ln}(x))'\,dx = \frac{1}{x}\,dx$, y $\boxed{dv = x^3 dx,}$ entonces $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. Por consiguiente,

$$\int x^3 \text{Ln}(x)\,dx = \text{Ln}(x)\,\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4\text{Ln}(x)}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$
$$= \frac{x^4\text{Ln}(x)}{4} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4\text{Ln}(x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$$

Ejemplo II.1.12. Calcular

$$\int \text{arcsen}(x)\,dx.$$

Sean $\boxed{u = \text{arcsen}(x),}$ entonces $du = (\text{arcsen}(x))'\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, y $\boxed{dv = dx,}$ entonces $v = \int dx = x$. Por consiguiente

$$\int \text{arcsen}(x)\,dx = \text{arcsen}(x)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\,\text{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ahora, para calcular está última integral, aplicaremos el método de sustitución. Si hacemos $t = \sqrt{1-x^2}$, entonces $dt = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. De modo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{t=\sqrt{1-x^2}}{=} -\int dt = -t.$$

Deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $\sqrt{1-x^2}$ obtenemos que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2},$$

y entonces podemos concluir que

$$\int \text{arcsen}(x)\,dx = x\,\text{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C,$$

1.3.3. Integración de funciones racionales.

Se llama **integral racional** a la integral de una función racional, es decir,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grados $n \geq 0$ y $m > 0$, respectivamente.

Ejemplo II.1.13. Ejemplos de integrales racionales son los siguientes

$$\text{(a)} \int \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^2 + x}\,dx, \quad \text{(b)} \int \frac{x^2 - 3x - 2}{x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4}\,dx,$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$, (d) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$, (e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2 + 1}\,dx$.

Para calcular las integrales racionales seguiremos los pasos siguientes, que iremos ilustrando con el ejemplo II.1.13.

En primer lugar, vamos a calcular la integral racional del apartado (a), es decir,

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^2 + x}\,dx.$$

PASO 1. División del numerador entre el denominador si $n \geq m$.

Lo primero que debemos hacer es mirar los grados de los polinomios del numerador y del denominador. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, dividimos los polinomios hasta que el grado del numerador sea menor estrictamente que el grado del denominador.

Es conveniente recordar las siguiente regla:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde $C(x)$ es el cociente y el $R(x)$ es el resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$.

En nuestro caso,

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^2 + x} = (x + 4) + \frac{-x - 9}{x^2 + x},$$

donde $x + 4$ es el cociente y $-x - 9$ es el resto de la división de $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ entre $x^2 + x$.

Si el grado del numerador fuese estrictamente menor que el grado del denominador no hay que realizar esta división.

PASO 2. Factorización del denominador.

Se factoriza el denominador, es decir, se escribe como producto de polinomios de grado 1 o de grado 2 sin raíces reales (de la forma $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$. En nuestro caso, es muy sencillo, porque

$$x^2 + x = x(x + 1).$$

PASO 3. Descomposición en fracciones simples.

Una vez factorizado el denominador, se escribe la fracción como suma de fracciones simples, que tendrán el denominador de grado uno o de grado dos sin raíces reales y el numerador de grado menor. Estas fracciones son inmediatas de integrar. En nuestro caso, vamos a calcular los valores de A y B para que se verifique la igualdad:

$$\frac{-x - 9}{x^2 + x} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1}}_{\text{fracciones simples}}.$$

Calcular A y B no tiene ninguna dificultad. En efecto,

$$\frac{-x-9}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx}{x^2+x}=\frac{(A+B)x+A}{x^2+x}.$$

De donde se deduce que

$$\frac{-x-9}{x^2+x}=\frac{(A+B)x+A}{x^2+x}.$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador, por consiguiente,

$$-x-9=(A+B)x+A.$$

Asimismo, es conocido que para que dos polinomios sean iguales, han de tener el mismo grado, los mismos coeficientes y el mismo término independiente:

$$\left.\begin{array}{lrcrcr}\text{Coeficientes de } x\text{:} & A & + & B & = & -1\\ \text{Términos independientes:} & A & & & = & -9\end{array}\right\}$$

De este modo obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, A y B, cuya solución es $A=-9$ y $B=8$.

Con lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{-x-9}{x^2+x}=\frac{-9}{x}+\frac{8}{x+1}.$$

Obsérvese que las integrales de las fracciones de la derecha son prácticamente inmediatas.

PASO 4. Integración de todos los sumandos obtenidos.

Una vez que hemos descompuesto la fracción en suma de polinomios y de fracciones simples se procede a integrar cada uno de los sumandos.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x}\,dx &= \int\left((x+4)+\frac{-9}{x}+\frac{8}{x+1}\right)dx\\ &= \int(x+4)dx+\int\frac{-9}{x}\,dx+\int\frac{8}{x+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}+4x-9\int\frac{1}{x}\,dx+8\int\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}+4x-9\,\mathrm{Ln}|x|+8\,\mathrm{Ln}|x+1|+C.\end{aligned}$$

Ahora, vamos a calcular la integral racional del apartado (b) del ejemplo II.1.13, es decir,

$$\int\frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}\,dx.$$

PASO 1. División del numerador entre el denominador si $n\geq m$.

Como el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador, no hay que efectuar la división.

PASO 2. Factorización del denominador.

Factorizamos el denominador aplicando el método de Ruffini tantas veces como sea necesario. En este caso,

$$x^4 + 16x^3 + 12x + 4 = (x+1)^2(x+2)^2.$$

PASO 3. Descomposición en fracciones simples.

Realizamos las descomposición en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+1)^2(x+2) + D(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2} =$$

$$\frac{(A+C)x^3 + (5A+B+4C+D)x^2 + (8A+4B+5C+2D)x + (4A+4B+2C+D)}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} x^2-3x-2 \;=\; & (A+C)x^3 + (5A+B+4C+D)x^2 \\ & +(8A+4B+5C+2D)x + (4A+4B+2C+D). \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{Coeficientes de } x^3\text{:} & A & & & + & C & & & = & 0 \\ \text{Coeficientes de } x^2\text{:} & 5A & + & B & + & 4C & + & D & = & 1 \\ \text{Coeficientes de } x\text{:} & 8A & + & 4B & + & 5C & + & 2D & = & -3 \\ \text{Términos independientes:} & 4A & + & 4B & + & 2C & + & D & = & -2 \end{array}\right\}$$

De este modo obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, $A,\ B,\ C$ y D, cuya solución es $A=-9,\ B=2,\ C=9$ y $D=8$.

Con lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4} = \frac{-9}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{9}{x+2} + \frac{8}{(x+2)^2}.$$

PASO 4. Integración de todos los sumandos obtenidos.

Una vez que hemos descompuesto la fracción en suma de fracciones simples se procede a integrar cada uno de los sumandos.

$$\int \frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{-9}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{9}{x+2} + \frac{8}{(x+2)^2} \right) dx =$$

$$= \int \frac{-9}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{9}{x+2}\,dx + \int \frac{8}{(x+2)^2}\,dx =$$
$$= -9\,\mathrm{Ln}|x+1| - \frac{2}{x+1} + 9\,\mathrm{Ln}|x+2| - \frac{8}{x+2} + C.$$

Vamos a calcular la integral racional del apartado (c) del ejemplo II.1.13, es decir,

$$\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$$

PASO 1. División del numerador entre el denominador si $n \geq m$.

Como el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador, no hay que efectuar la división.

PASO 2. Factorización del denominador.

Factorizamos el denominador aplicando el método de Ruffini tantas veces como sea necesario. En este caso,

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1).$$

Obsérvese que x^2+1 es un polinomio de segundo grado que no tiene raíces reales.

PASO 3. Descomposición en fracciones simples.

Realizamos las descomposición en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3-x^2+x-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador. Entonces

$$x = (A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C).$$

De donde se sigue que

$$\left.\begin{array}{llcccccccc} \text{Coeficientes de } x^2: & A & + & B & & & = & 0 \\ \text{Coeficientes de } x: & & - & B & + & C & = & 1 \\ \text{Términos independientes:} & A & & & - & C & = & 0 \end{array}\right\}$$

De este modo obtenemos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, A, B y C, cuya solución es $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ y $C = \frac{1}{2}$.

Con lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{(-1/2)x+1/2}{x^2+1}.$$

PASO 4. Integración de todos los sumandos obtenidos.

Una vez que hemos descompuesto la fracción en suma de fracciones simples se procede a integrar todos los sumandos.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\,dx =& \int \left(\frac{1/2}{x-1}+\frac{(-1/2)x+1/2}{x^2+1}\right)dx \\
=&\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{x^2+1}\,dx \\
=&\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x-1|-\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
=&\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x-1|-\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x) \\
=&\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x-1|-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(x^2+1)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x)+C.
\end{aligned}
$$

Los apartados (d) y (e) del ejemplo II.1.13 se calculan de forma análoga, obteniéndose los siguientes resultados:

(d)

$$\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx = 2\,\mathrm{arctg}(x)+4\,\mathrm{Ln}|x-1|+x+C.$$

(e)

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}-\frac{\mathrm{Ln}(x^2+1)}{2}+C.$$

2. La integral definida

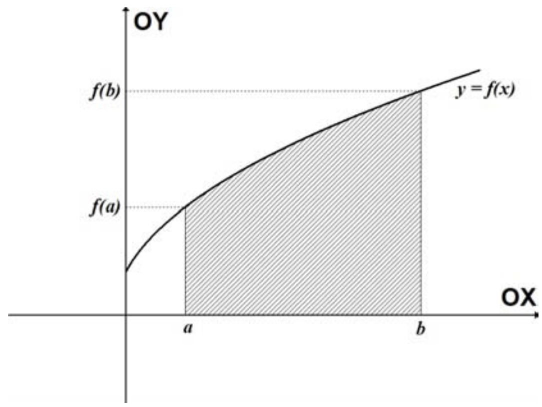
Los problemas de cuadratura consisten en el cálculo de áreas, si bien genéricamente incluyen cálculos de longitudes y volúmenes, aunque el interés por estos problemas de rectificación de curvas aparece hacia el tercer cuarto del siglo XVII, a diferencia de los primeros que ya interesaban a los antiguos griegos. Este retraso en la aparición del interés por el estudio de los problemas de longitudes, se debió al desánimo que causaba el hecho de que, por ejemplo, hasta entonces nadie hubiera sido capaz de calcular la longitud de una curva tan simple como la elipse.

El reconocimiento claro y contundente, por parte de Newton y Leibniz a finales del siglo XVII, de que los problemas de tangentes y cuadraturas son recíprocos (o que el problema inverso de tangentes equivale a una cuadratura) supuso una nueva herramienta para el cálculo de áreas: bastaría invertir los procesos para el cálculo de tangentes, es decir, calcular una primitiva, como diríamos hoy día. Sin embargo, a principios del siglo XIX se empezó a ver la necesidad de dar una definición directa de la integral de una función. Los primeros trabajos en este sentido se deben a Cauchy. La idea era usar el concepto de límite para definir la integral como el límite de la suma de rectángulos, y después probar la relación con la derivada. Cauchy desarrolló esta idea sólo para funciones continuas. La extensión del concepto de integral definida a funciones no necesariamente continuas se debe a B. Riemann (1826-1866).

Remitimos al lector interesado en profundizar estas y otras cuestiones históricas sobre la génesis del cálculo integral al capítulo 3 de [**Dur96**].

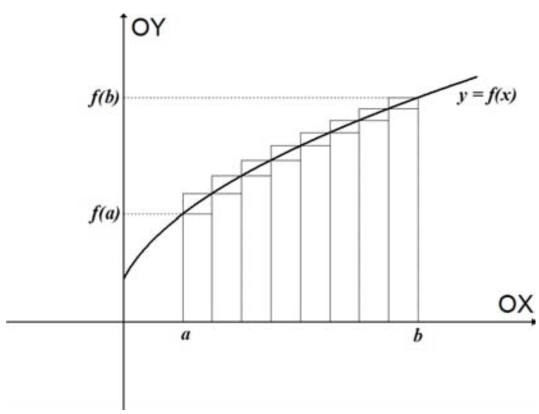
2.1. Definición y propiedades.

Ejemplo II.2.1. Consideremos la función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica es la curva del dibujo de la derecha y $[a, b] \subseteq D$ (obsérvese que, según la gráfica dada, f es continua y positiva en $[a, b]$, lo cual resta generalidad al ejemplo), y supongamos que queremos calcular el area que encierran la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre a y b. Es decir, queremos calcular el área sombreada en la figura.



Podemos calcular este área de forma aproximada dibujando la gráfica en un papel cuadriculado y contando los cuadrados. Es claro, que la aproximación será más precisa cuanto menores sean las cuadrículas. Sin embargo, en general no obtendremos el área exacta, solamente conseguiremos una aproximación.

Consideremos ahora la división de esta área en bloques rectangulares, tal y como en la siguiente gráfica.



Los pequeños "triángulos"que quedan por debajo de la curva en la figura de arriba representan la diferencia entre el área real A y su aproximación (por defecto) A_L mediante los bloques rectangulares que quedan por debajo de la curva. Otra aproximación (por exceso) a A viene dada por A_U, que se puede calcular sumando las áreas de los bloques rectangulares que quedan por encima de la curva. Es claro que

$$A_L \leq A \leq A_U.$$

Por tanto, el área que queremos determinar se encuentra entre A_L (suma de las áreas de los rectángulos inferiores) y A_U (suma de las áreas de los rectángulos superiores).

También parece claro que si reducimos el ancho de cada rectángulo, reduciendo su base y obteniendo de este modo más rectángulos entre a y b, entonces A_L y A_U estarán más próximos a A.

Por consiguiente, si el ancho de los rectángulos tiende hacia cero, A_L y A_U se aproximan a A. Luego, el área, A, que encierran la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre a y b es la *suma entre a y b de las áreas de rectángulos de base δx, y altura $f(x)$, cuando δx tiende a cero*, es decir,

$$A = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x \in [a,b]} f(x)\delta x.$$

Lo que habitualmente se escribe

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

De hecho el signo integral $\int$ es una S (de suma) estilizada, pues en cierto sentido no estamos haciendo otra cosa que "sumar las áreas" de todos los rectángulos de base infinitesimal, dx, y altura $f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

En general, sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera. Si la gráfica de la función f y el eje OX encierran un área (delimitada), como ocurría en el caso anterior, entre a y b se dice que la función en **integrable (en sentido Riemann) en el intervalo** $[a, b]$. En otro caso se dice que no es integrable.

A la expresión $\int_a^b f(x)\, dx$ se le llama **integral de definida o de Riemann de f en el intervalo** $[a, b]$. El lector interesado en un desarrollo completo y riguroso del concepto de integral definida puede hallarlo en el capítulo 13 de [**Spi96**].

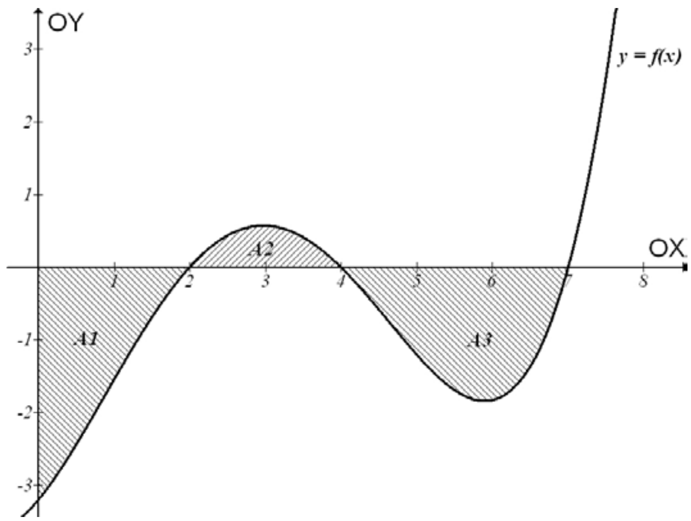
Teorema II.2.2. *Toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Además, se tiene que*

(a) *Si $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a, b]$, y $f(x) \geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ es igual al área de la región entre la gráfica de f y el eje OX desde a hasta b.*

(b) *Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ es igual al área por encima del eje OX menos área por debajo del eje OX, y $\int_a^b |f(x)|\, dx$ es igual al área de la región entre la gráfica de f y el eje OX desde a hasta b.*

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en las páginas 366-367 de [**Spi96**]. ∎

Ejemplo II.2.3. La integral entre 0 y 7 de la función f del dibujo inferior es igual a $A2 - A1 - A3$.



Veamos que para calcular la integral de Riemann de una función continua en intervalo $[a, b]$ basta conocer una de sus primitivas

Teorema II.2.4. ***Regla de Barrow***[2] *Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y $F : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en la página 403 de [**Spi96**], o en las página 170-171 de [**BL83**]. ∎

Ejemplo II.2.5. Sea $f : [1, 5] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{5x + 1}$. Calcular en área delimitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre 1 y 5.

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1, 5]$, el área que nos piden corresponde a la siguiente integral de Riemann

$$\int_1^5 f(x)\, dx,$$

pues

$$\int_1^5 |f(x)|\, dx \overset{f(x) \geq 0}{=} \int_1^5 f(x)\, dx.$$

[2]La regla de Barrow debe su nombre al matemático británico I. Barrow (1630-1677). Sus *Lectiones Geometricae* (Lecciones de geometría, 1669-1670) contienen ideas similares a las que su más distinguido alumno, I. Newton, y otros utilizaron más tarde en el cálculo diferencial e integral.

Teniendo en cuenta que una primitiva de f en $[1,5]$ es $F(x) = \frac{2(5x+1)^{3/2}}{15}$ (compruébese) y que f es continua en $[1,5]$, de la regla de Barrow se sigue que

$$\int_1^5 \sqrt{5x+1}\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx = F(5) - F(1) = \frac{2(26)^{3/2}}{15} - \frac{2(6)^{3/2}}{15} \cong 15{,}72.$$

Ejemplo II.2.6. Calcular el área de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$.

La gráfica de la función $f : [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ es precisamente la cuarta parte de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$. De modo que el área que nos piden calcular es cuatro veces el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre 0 y r, es decir,

$$\begin{aligned} 4\left(\int_0^r |\sqrt{r^2-x^2}|\,dx\right) &\overset{f(x)\geq 0}{=} 4\left(\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx\right) \\ &= 4\left(\frac{r^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)}{2} + \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}\right)\Bigg|_0^r \\ &= 4\left(\frac{\pi r^2}{4} - 0\right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

Propiedades de la integral de Riemann. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a,b] \subseteq D$.

(a) Para todo $c \in [a,b]$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Esta es una propiedad fundamental para calcular integrales de funciones integrables con un número finito de discontinuidades.

(b) La integral de Riemann es lineal:

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Obsérvese que esta propiedad no es más que una consecuencia de la linealidad de la integral indefinida.

(c) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

En términos geométricos esta propiedad parece bastante razonable, pues viene a decirnos que el área limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre a y b es un número positivo.

(d)
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Esta última propiedad nos advierte que, generalmente, no es lo mismo la integral del valor absoluto que el valor absoluto de la integral. Compruébese usando la función $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ y $f(x) = -1$ si $x \in (1, 2]$.

Las demostraciones de las propiedades (a) y (b) pueden encontrarse en las páginas 368-372 de [**Spi96**]. Las propiedades (c) y (d) corresponden a los ejercicios 14(a) y 38, respectivamente, del capítulo 13 de [**Spi96**].

Corolario II.2.7. *Si $f : [a, b] \subseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Ejercicio 20 del capítulo 13 de [**Spi96**]. ∎

No obstante, existen funciones que, aun siendo acotadas, no son integrables.

Ejemplo II.2.8. Sea $f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}; \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Esta función, llamada **función de Dirichlet**, no es integrable en $[0, 1]$ pues se cumple que $A_L = 0$ y $A_U = 1$, independientemente del ancho de las bases de los rectángulos.

Ejemplo II.2.9. Sea $f : [0, 2] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \in [0, 1]; \\ 5 & \text{si} \quad x \in (1, 2]. \end{cases}$$
Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $y = 3$ en ente 0 y 1 e $y = 5$ entre 1 y 2.

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1, 5]$, el área que nos piden corresponde a la siguiente integral de Riemann
$$\int_0^2 f(x)\, dx.$$
La gráfica de f consiste precisamente en las porciones de las rectas $y = 3$ e $y = 5$ comprendidas entre 0 y 1, y 1 y 2, respectivamente. No obstante, como la función f no es continua en $[0, 2]$ no podemos usar la regla de Barrow.

Sin embargo, las funciones $f_1 : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = 3$ y $f_2 : [1, 2] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_2(x) = 5$ sí son continuas en $[0, 1]$ y $[1, 2]$, respectivamente, y además se cumple que
$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 f_1(x)\, dx + \int_1^2 f_2(x)\, dx.$$

Teniendo ahora en cuenta que $F_1(x) = 3x$ es una primitiva de f_1 en $[0,1]$ y que $F_2(x) = 5x$ es una primitiva de f_2 en $[1,2]$, (compruébese), de la regla de Barrow se sigue que

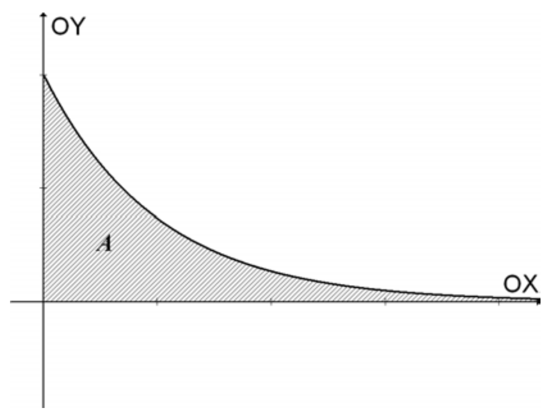
$$\begin{aligned}\int_0^1 f_1(x)\,dx + \int_1^2 f_2(x)\,dx &= (F_1(1) - F_1(0)) + (F_2(2) - F_2(1)) \\ &= (3\cdot 1 - 3\cdot 0) + (5\cdot 2 - 5\cdot 1) = 8.\end{aligned}$$

2.2. Integrales impropias.

Se llaman integrales impropias a dos tipos de integrales definidas: aquellas en las que la función a integrar no está acotada en algún punto del intervalo de integración y aquellas en las que uno, o los dos, extremos del intervalo de integración es infinito. En este curso estudiaremos sólo las de este último tipo. Estas integrales aparecerán cuando se manejen las funciones de densidad y de distribución de las variables aleatorias en la asignatura de Bioestadística.

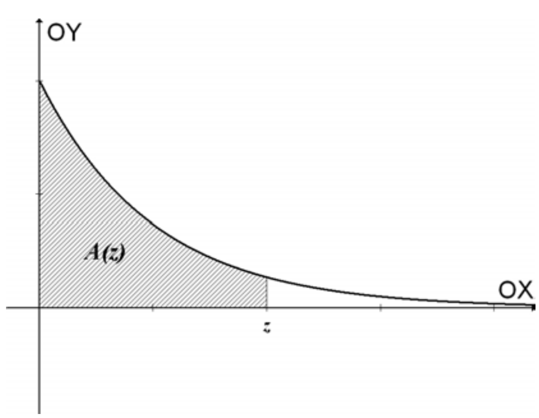
Supongamos que queremos calcular el área de la región comprendida entre la gráfica de una función, por ejemplo $f(x) = e^{-x}$, el eje OX y el eje OY. Denotaremos este área por

$$A = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} dx.$$



Sabemos que el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ y el eje OX, entre 0 y un valor z es

$$A(z) = \int_0^z \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x}|_0^z = 1 - \mathrm{e}^{-z}.$$



Para obtener el área A, tomaremos el límite (si existe) de las áreas $A(z)$, cuando $z \to +\infty$:

$$A = \lim_{z\to+\infty} A(z) = \lim_{z\to+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-z}) = 1,$$

luego

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} dx = 1.$$

Puede resultar sorprendente que el área de una región no limitada sea finita. Esto sólo ocurre cuando la función $f(x)$ tiende muy rápidamente a cero cuando $x \to +\infty$. Es decir, cuando la gráfica de la función $f(x)$ se aproxima de forma rápida al eje OX.

Definiciones II.2.10. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, +\infty)$. Si el límite

$$\lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)dx$$

existe y tiene un valor finito, se define la integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)dx.$$

Análogamente se define la integral impropia cuando el límite de integración inferior es infinito.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $(-\infty, a]$. Si el límite

$$\lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)dx$$

existe y tiene un valor finito, se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)dx.$$

Para definir la integral cuando ambos límites de integración son infinitos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

consideramos un punto $a \in \mathbb{R}$ a partir del cual la dividimos en dos partes y damos la siguiente definición:

Sea $f(x)$ una función continua en $(-\infty, +\infty)$. Si para algún número real a existen las integrales $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ y $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Nota II.2.11. Es importante advertir que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ no es lo mismo que $\lim_{z\to\infty} \int_{-z}^z f(x)dx$. Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = x^3$, para cualquier número real z tenemos que

$$\int_{-z}^z x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big]_{-z}^z = \frac{1}{4}(z^4 - (-z)^4) = 0,$$

luego

$$\lim_{z \to \infty} \int_{-z}^z x^3 dx = 0.$$

Sin embargo, la integral impropia $\int_0^{+\infty} x^3 dx$ no existe ya que la integral $\int_0^{+\infty} x^3 dx$ es infinita pues

$$\int_0^{+\infty} x^3 dx = \lim_{z\to\infty} \int_0^z x^3 dx = \frac{1}{4} \lim_{z\to\infty} (z^4 - 0) = \infty.$$

Ejemplo II.2.12. Comprobemos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$

Calculamos

$$\int_1^z \frac{1}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right]_1^z = -\frac{1}{z} + 1.$$

Al tomar el límite cuando $z \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{z\to\infty} (-\frac{1}{z} + 1) = 1.$$

Luego

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$

Ejemplo II.2.13. Calculemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Para cualquier número real $z > 1$ tenemos:

$$\int_1^z \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\left.\sqrt{x}\right]_1^z = 2\left(\sqrt{z} - 1\right).$$

Tomando límite:

$$\lim_{z\to\infty} 2\left(\sqrt{z} - 1\right) = \infty,$$

y concluimos que no existe $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Observemos que la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tiende a cero cuando $x \to \infty$, sin embargo esto no basta para garantizar que exista la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Lo que ocurre en este caso es que cuando $x \to \infty$, la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ no se acerca a 0 de forma suficientemente rápida. La función $\frac{1}{x^2}$ tiende a 0, cuando $x \to \infty$ mucho más rápidamente.

Ejercicio II.2.14. Compruébese que, para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se obtiene que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1}$$

y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} dx = \infty.$$

Concluimos esta sección con un ejemplo importante por su uso en Bioestadística.

Ejemplo II.2.15. Puede demostrarse que el área bajo la llamada curva normal o campana de Gauss es igual a 1. Es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1.$$

Ejercicio II.2.16. Realizar el estudio y la representación gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2.3. Aplicaciones de la integral de Riemann.

Hasta el momento hemos visto que el valor absoluto de la integral definida de una función continua f en un intervalo $[a, b]$ coincide con el área encerrada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. Veamos ahora otras fórmulas para el cálculo de áreas, longitudes y volúmenes.

2.3.1. Área encerrada por dos curvas.

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$ tales que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el área de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ entre a y b es

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

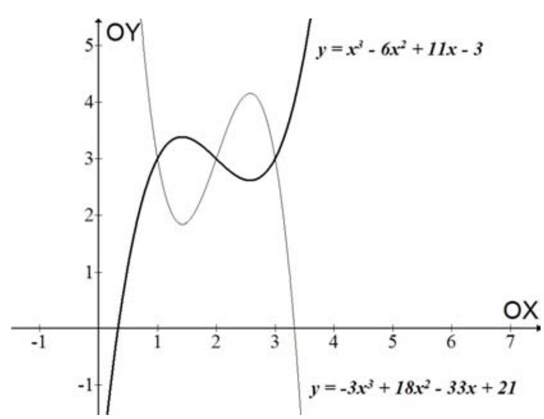
Ejemplo II.2.17. Determinar el área limitada por las curvas

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$$

e

$$y = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 21.$$

En la imagen de la derecha se muestran las gráficas de nuestras dos curvas; la curva de trazo grueso corresponde a $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$ y la curva de trazo fino corresponde a $y = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 21$. Observamos además que las curvas se cortan en los puntos $(1, 3)$, $(2, 3)$ y $(3, 3)$, ya que son los puntos que corresponden a las soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 11x - 3 = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 21$ (compruébese).



Sean $f : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$ y $g : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 21$. Entonces, $f(x) \geq g(x)$ si $x \in [1, 2]$ y $g(x) \geq f(x)$ si

$x \in [2,3]$. Por consiguiente, el área que nos piden calcular es

$$\int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx + \int_2^3 (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \int_1^2 (4x^3 - 24x^2 + 44x - 24)\,dx + \int_2^3 (-4x^3 + 24x^2 - 44x + 24)\,dx =$$

$$= (x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x)\Big|_1^2 + (-x^4 + 8x^3 - 22x^2 + 24x)\Big|_2^3 =$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

2.3.2. Longitud de arco.

Sea f una función derivable con derivada continua en $[a,b]$. Si denotamos por A al punto $(a, f(a))$ y por B al punto $(b, f(b))$, entonces la longitud del arco AB de la curva $y = f(x)$ viene dada por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Si la curva viene dada en forma paramétrica, $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array} \right.$ donde x e y tienen derivada continua en $[t_1, t_2]$, entonces la longitud del arco de curva entre los parámetros t_1 y t_2 viene dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Ejemplo II.2.18. Calcular el perímetro de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$.

En coordenadas cartesianas. La gráfica de la función $f : [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ es precisamente la cuarta parte de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$. De modo que el perímetro que nos piden calcular es cuatro veces la longitud del arco AB de la curva $y = f(x)$ donde A es el punto $(0, f(0) = r)$ y B el punto $(r, f(r) = 0)$, es decir,

$$\begin{aligned} 4\left(\int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx\right) &= 4\left(\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx\right) \\ &= 4\left(r \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)\right)\Big|_0^r = 4\left(r\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi r. \end{aligned}$$

En coordenadas paramétricas. Las ecuaciones paramétrica de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$ es

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r\cos(t) \\ y & = & r\operatorname{sen}(t) \end{array} \right.$$

con $t \in [0, 2\pi]$. De modo que el perímetro de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$ es la longitud del arco de curva entre los parámetros 0 y 2π, es decir,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-r^2 \operatorname{sen}^2(t)) + (r^2 \cos^2(t))}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

2.3.3. Volumen de un cuerpo de revolución.

Si se hace girar entre a y b la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX se genera un sólido de revolución cuyo volumen viene dado por

$$\int_a^b \pi (f(x))^2\, dx.$$

Ejemplo II.2.19. Calcular el volumen de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$.

La esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$, se puede obtener como el cuerpo de revolución que se genera al girar la semicircunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$ comprendida entre $-r$ y r alrededor del eje OX, es decir, al girar la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ entre $-r$ y r alrededor del eje OX. Por lo tanto, el volumen que nos piden calcular es

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = &\int_{-r}^{r} \pi (r^2 - x^2)^2\, dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} \\ = &\ \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - (r^2\,(-r) - \frac{(-r)^3}{3})\right) = \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

Al girar la región plana entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ alrededor del eje OX entre a y b, con $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, el volumen del sólido de revolución engendrado es

$$\int_a^b \pi ((f(x))^2 - (g(x))^2)\, dx.$$

Ejemplo II.2.20. Calcular el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la región plana comprendida entre las rectas $y = x$ e $y = x + 1$ alrededor del eje OX entre 1 y 2.

Sean $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ y $g : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x$. Las gráficas de f y g son las porciones de las rectas $y = x + 1$ e $y = x$ comprendidas entre 1 y 2, respectivamente. Además, $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [1, 2]$. Entonces, el volumen que nos piden calcular es

$$\int_1^2 \pi((x + 1)^2 - (x)^2)\, dx = \pi \int_1^2 2x + 1\, dx = \pi(x^2 + x)\big|_1^2 = \pi(6 - 2) = 4\pi.$$

2.3.4. Área de la superficie de un cuerpo de revolución.

Sea f una función derivable con derivada continua en $[a, b]$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. El área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX entre los valores abscisa a y b es

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Si la curva viene dada en forma paramétrica, $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right.$ donde x e y tienen derivada continua en $[t_1, t_2]$, entonces el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva alrededor del eje OX entre t_1 y t_2 viene dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Ejemplo II.2.21. Calcular el área de la superficie de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$.

La esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$, se puede obtener como el cuerpo de revolución que se genera al girar la semicircunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$ comprendida entre $-r$ y r alrededor del eje OX.

Lo que **en coordenadas cartesianas** corresponde a girar la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ entre $-r$ y r alrededor del eje OX. Por lo tanto, el área que nos piden calcular es

$$\begin{aligned} \int_r^{-r} 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx &= \int_r^{-r} 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi\int_r^{-r} r\, dx = 2\pi(rx)|_{-r}^{r} \\ &= 2\pi(r^2 - r\cdot(-r)) = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Lo que **en coordenadas paramétricas** corresponde a girar la curva de ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos(t) \\ y & = & r\,\mathrm{sen}(t) \end{array}\right.$$

con $t \in [0, \pi]$ alrededor del eje OX. De modo que, el área que nos piden calcular es

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 2\pi r\mathrm{sen}(t)\sqrt{(-r^2\mathrm{sen}(t))^2 + (r^2\cos(t))^2}\, dt &= 2\pi\int_0^{\pi} r^2\mathrm{sen}(t)\, dt \\ &= 2\pi\left(-r^2\cos(t)\right)\Big|_0^{\pi} \\ &= 2\pi\left(r^2 - (r^2\cdot(-1))\right) \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Ejercicios de Cálculo Integral

Ejercicios de repaso.

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales usando el *método de sustitución.*

1. $\int \frac{x}{1+(x^2+4)^2} dx$ 2. $\int 5x^2 \mathrm{sen}(x^3)\, dx$ 3. $\int \frac{\mathrm{Ln}(x)}{x} dx$
4. $\int \mathrm{e}^{9x+5}\, dx$ 5. $\int (\mathrm{e}^x+2)^{25}\mathrm{e}^x dx$ 6. $\int 3x\sqrt{2+7x^2}\, dx$

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales usando el *método de integración por partes.*

1. $\int x\mathrm{e}^{2x}\, dx$ 2. $\int x^2\mathrm{e}^x dx$ 3. $\int x\,\mathrm{Ln}(x)\, dx$
4. $\int x^3 \mathrm{sen}(x) dx$ 5. $\int x^n \mathrm{Ln}(x)\, dx,\ n>1$ 6. $\int (x^2+5x-9)\mathrm{e}^{-2x}\, dx$

Ejercicio 3. Calcular las integrales de las siguientes *funciones racionales.*

1. $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}\, dx$ 2. $\int \frac{2x^3+4x^2+3}{x^2+x-2}\, dx$ 3. $\int \frac{1}{x^2-4}\, dx$
4. $\int \frac{4x^3-21x^2+38x-23}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}\, dx$ 5. $\int \frac{x+1}{(x-2)(x^2+3)}\, dx$ 6. $\int \frac{x}{x^3+6x^2+11x+6}\, dx$

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales usando los diferentes métodos estudiados. Es posible que en alguna de ellas sea necesario el uso de, al menos, dos métodos.

1. $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, dx$ 2. $\int \frac{1-\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x}}\, dx$ 3. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}\, dx$
4. $\int \mathrm{e}^x \mathrm{sen}(x)\, dx$ 5. $\int (x^3-4x^2+7x+6)\mathrm{e}^{5x}\, dx$ 6. $\int \frac{x^3}{2+x^8}\, dx$

Ejercicio 5. Calcular las siguientes integrales usando los diferentes métodos estudiados. Es posible que en alguna de ellas sea necesario el uso de, al menos, dos métodos.

1. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\, dx$ 2. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$ 3. $\int \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}\, dx$
4. $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\, dx$ 5. $\int \frac{3x-5}{(x-1)^2(x^2+4)}\, dx$ 6. $\int \frac{x}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\, dx$

Ejercicios del tema.

Ejercicio 6. Calcular una función que en el punto $x = 1$ valga 0 y que tenga como derivada a la función $f'(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

Ejercicio 7. Calcular una función que tome el valor 38 en el punto $x = 3$, y que tenga por derivada a $f'(x) = 6x^2 + 2x - 10$.

Ejercicio 8. Determinar la expresión analítica de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica pasa por el punto $P = (10, 2)$ y tal que $f'(x) = 2x - \frac{3}{x}$, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejercicio 9. Hallar la primitiva de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\, f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^x$, que se anula en $x = 1$.

Ejercicio 10. Determinar la expresión analítica de una función cuya gráfica pase por el punto $(0, 0)$, tiene un extremo relativo en este punto y su segunda derivada es la función $f''(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$. En el punto $(0, 0)$ ¿la función tiene un máximo o un mínimo?.

Ejercicio 11. ¿Para qué funciones se cumple que $f'(x) = f''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$?

Ejercicio 12. ¿Puede ser cierto el siguiente resultado:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2?$$

¿Por qué? ¿Qué error se ha cometido?

Ejercicio 13. Hallar el valor de μ que cumpla $\int_1^3 f(x)dx = 2\mu$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [1, 2); \\ 2 & \text{si} \quad x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Ejercicio 14. Calcular el área de la superficie delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ en cada uno de los siguientes casos:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$
6. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$
8. $f(x) = x\operatorname{sen}(\pi x^2)$

Ejercicio 15. Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = \frac{x^2}{3}$ e $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

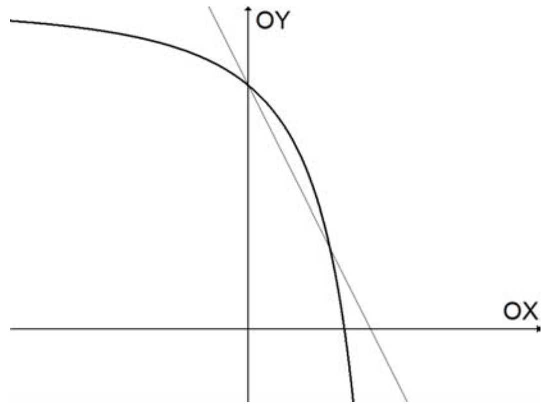
Ejercicio 16. Calcular el área de la figura comprendida entre la *curva de Agnesi* $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

Ejercicio 17. Calcular el área de la superficie comprendida entre las curvas $y = \text{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Ejercicio 18. Determinar el área limitada por las curvas

$$y = \frac{4x^2 - 20x + 18}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{e} \quad y = 3 - 2x,$$

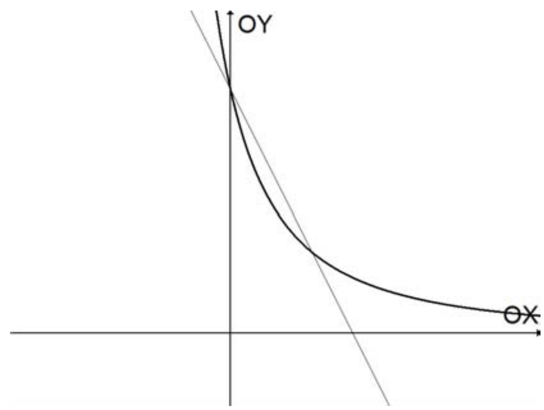
con $x \in (-\infty, 2)$, sabiendo que las gráficas de ambas funciones son las del dibujo de la derecha.



Ejercicio 19. Determinar el área limitada por las curvas

$$y = \frac{6}{x^2 + 3x + 2} \quad \text{e} \quad y = 3 - 2x,$$

con $x \in (0, +\infty)$, sabiendo que las gráficas de ambas funciones son las del dibujo de la derecha.



Ejercicio 20. Determinar el área limitada por

1. la curva $y = x\,\text{Ln}(x)$ y las rectas $y = 0,\ x = 0$ y $x = \text{e}$.
2. la curva $y = \text{Ln}(x + 1)$ y las rectas $y = 0,\ x = 0$ y $x = 1$.
3. la curva $y = x\text{e}^{x^2}$ y las rectas $y = 0,\ x = 0$ y $x = 1$.
4. la curva $y = x^2$ y las rectas $y = x,\ x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 21. Calcular el área limitada por la curva $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ y las rectas $y = 0$, $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$.

Ejercicio 22. Sea $f(x) = \text{sen}(x)$. Se pide:

1. Calcular el área limitada por la curva $f(x) = \text{sen}(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.
2. ¿Cuánto debe valer la constante k para que la integral $\int_0^\pi k dx$ sea igual al área obtenida en el apartado anterior?

Autoevaluación de Cálculo Integral

Dígase razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

1. La función $F(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}} + 4$ es una primitiva de
   (a) $\mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}}$,
   (b) $\frac{-2}{(1+t^2)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}} + 4$,
   (c) $\frac{-2}{(1+t^2)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}}$,
   (d) $\frac{1}{1+t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+t^2}}$
2. (a) $\int \frac{1}{1-x}dx = \ln(1-x) + C$
   (b) $\int x\mathrm{sen}(x)dx = -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C$
   (c) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}dx = 2\ln(1+\mathrm{e}^{2x}) + C$
   (d) $\int \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$
3. La descomposición en fracciones simples de $\frac{1}{x(x-4)}$ es:
   (a) $\frac{\frac{1}{4}}{x-4} - \frac{\frac{1}{4}}{x}$,
   (b) $\frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x-4}$,
   (d) $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}$,
   (d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$
4. (a) $\int \frac{1}{1+2x}dx = 2\ln(1+2x) + C$.
   (b) $\int \mathrm{e}^{2x+1}dx = 1/2e^{2x+1} + C$.
   (c) $\int \ln(x+1)dx = (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + C$.
   (d) $\int \frac{x}{x^2-1}dx = \ln(\frac{1+x}{1-x}) + C$.
5. (a) $\int_a^b f(x)dx$ no puede ser negativa.
   (b) $\int_a^b f(x)dx$ no puede ser cero.
   (c) Si $F'(x) = G'(x)$, $\forall x \in [a,b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.
   (d) Si $f(x) = -f(-x)$, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
6. Si $0 \le a < b$, entonces
   (a) $\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$;
   (b) $\int_a^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$;
   (c) $\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$;
   (d) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$.
7. (a) Si $a > 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$.
   (b) Si $a > 0$, $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$.
   (c) Si $a < 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$.
   (d) Si $a < b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_b^{+\infty} f(x)dx$.
8. Si $f(x) = f(-x), \forall x$ y $0 \le a < b$, entonces:

(a) $\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{1} f(x)dx$;
(b) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{-b} f(x)dx$;
(c) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$;
(d) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

9. Si $f(x) = f(-x), \forall x$ y $0 \leq a < b$, entonces:
(a) $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{b} f(x)dx$;
(b) $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$;
(c) $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1/2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$;
(d) $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$.

10. Si $f(x) = f(-x), \forall x$ y $0 \leq a < b$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ entonces:
(a) $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1/2$;
(b) $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = 1/2 + \int_{0}^{a} f(x)dx$;
(c) $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 1/2 + \int_{0}^{a} f(x)dx$;
(d) $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{b} f(x)dx$.

TEMA III

Ecuaciones diferenciales

Introducción

EL objetivo de este capítulo es introducir una potente herramienta para elaborar modelos matemáticos: las ecuaciones diferenciales.

En una ecuación diferencial interviene una función desconocida (que es la incógnita) y una o más de sus derivadas. Resolver una ecuación es encontrar una función que la satisfaga.

Mediante ecuaciones diferenciales se expresan muchos modelos determinísticos continuos. En estos modelos la variable, generalmente el tiempo, puede tomar cualquier valor real.

En este capítulo aprenderemos a resolver algunas ecuaciones diferenciales sencillas y estudiaremos algunos modelos biológicos basados en ellas.

Para elaborar este capítulo hemos utilizado la siguiente bibliografía: capítulos 1 y 4 de [**Bra93**], capítulos 1 y 3 de [**FV96**], capítulos 1, 2, 7 y 8 de [**Sim77**], y capítulos 1,2,3 y 8 de [**Zil06**], capítulos 8 y 11 de [**Neu04**], capítulos 1 y 10 de [**BR93**], capítulos 1 y 2 de [**Mur93**] y capítulos 13, 14 y 15 de [**Rod99**]. Los cuatro primeros libros son tratados clásicos de ecuaciones diferenciales, dirigidos fundamentalmente a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. En ellos el lector que así lo desee podrá consultar los aspectos matemáticos más formales de la teoría, en particular, los enunciados rigurosos, y las demostraciones, de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. El libro de Neuhauser, [**Neu04**], dirigido a estudiantes de un primer curso de matemáticas en las carreras de ciencias de la vida: Medicina, Biología, Veterinaria, Farmacia, Química, etc., da un tratamiento al tema similar al que aquí expondremos, incluyendo numerosos ejemplos. Los libros de Brown y Rothery, [**BR93**] y de Murray [**Mur93**], exponen con bastante profundidad y rigor numerosos modelos matemáticos utilizados en Biología. Finalmente, hemos consultado también el texto de Ecología [**Rod99**] para adecuar la exposición de los ejemplos a la forma en que posteriormente serán estudiados por los alumnos de la Licenciatura en Biología.

Para introducir el concepto de ecuación diferencial y su utilidad en el contexto de la modelización matemática, estudiemos el siguiente ejemplo en el que se muestran dos modelos, uno discreto y otro continuo, para describir un mismo fenómeno: la evolución del tamaño de una población a lo largo del tiempo. En los modelos discretos la variable tiempo sólo toma valores naturales: $1, 2, 3, \dots$ en oposición a los modelos continuos en los que se supone que el tiempo puede tomar cualquier valor real dentro de un cierto intervalo.

Modelos discreto y continuo de Malthus. Para estudiar la evolución de una población formada por una o varias especies, se utilizan modelos matemáticos en los que se trata de reflejar los hechos fundamentales que determinan el tamaño de la población.

Vamos a estudiar aquí un par de ejemplos sencillos de modelos de crecimiento de poblaciones. En ambos casos supondremos que la población está formada por individuos de una única especie. Los dos modelos se pueden considerar como dos versiones (discreta y continua) de un mismo modelo, formulado por el economista y demógrafo británico T.R. Malthus (1766-1834), que parte de la hipótesis fundamental de que "el incremento de población es proporcional al número de individuos".

Modelo discreto de Malthus. Consideraremos el tiempo divido en intervalos o periodos, todos de igual longitud (horas, meses, años, ...). El uso del tiempo como variable discreta puede parecer un tanto artificial, pero resulta apropiado cuando los censos de población se realizan en ciertos intervalos de tiempo, de modo que sólo se dispone de los datos de nacimientos y muertes en periodos de tiempo discretos. También es adecuado el empleo de tiempo discreto cuando se trata de especies que se reproducen en momentos determinados, como algunos insectos o aves que ponen huevos en primavera.

Supongamos que para una cierta especie, la población en un periodo de tiempo es múltiplo constante de la población en el periodo anterior. Puede tratarse, por ejemplo, de bacterias, que se dividen en dos a intervalos regulares, o de insectos que ponen huevos en primavera o verano y luego mueren, de los huevos salen larvas, que tras un periodo de crecimiento se convierten en pupas que se transforman en insectos adultos la siguiente primavera.

Llamaremos n_t a la población al final del t-ésimo periodo de tiempo (t tomará los valores $1, 2, 3, \ldots$). Bajo las suposiciones anteriores, tenemos que,

$$n_{t+1} = \alpha \cdot n_t.$$

La primera población censada se llama población inicial y se denota n_0.

Si la población inicial es n_0, al final del primer periodo la población será

$$n_1 = \alpha \cdot n_0,$$

al final del segundo periodo la población será

$$n_2 = \alpha \cdot n_1 = \alpha \cdot (\alpha \cdot n_0) = \alpha^2 \cdot n_0.$$

Al final del periodo t-ésimo, la población será:

$$n_t = \alpha \cdot n_{t-1} = \alpha^2 \cdot n_{t-2} = \cdots = \alpha^t \cdot n_0.$$

Obsérvese que si $\alpha = 1$, la población permanece constante, si $\alpha < 1$, la población disminuye, y si $\alpha > 1$, aumenta.

Si consideramos ahora el incremento de población en un periodo de tiempo, es decir, la diferencia $n_{t+1} - n_t$ obtenemos que

$$n_{t+1} - n_t = \alpha n_t - n_t = (\alpha - 1)n_t.$$

Esta ecuación proporciona una formulación equivalente del modelo de Malthus, que consiste en decir que "el incremento de población en un periodo de tiempo es proporcional al número de individuos al comienzo de dicho periodo."

Modelo continuo de Malthus. A continuación vamos a construir un modelo de crecimiento de población basándonos en las mismas hipótesis de Malthus pero considerando el tiempo como una variable continua. Es decir, el número de individuos de la población se mide en cualquier momento y se pueden tomar intervalos de tiempo tan pequeños como se desee.

Llamemos $N(t)$ a la cantidad de población en el instante t y consideremos un incremento h de t. La tasa de variación media de población es el cociente entre el incremento de población y el incremento de tiempo:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = \text{Tasa de variación media de población.}$$

Esta tasa expresa la variación relativa de población $N(t)$ con relación a t en el intervalo $[t, t+h]$. Si hacemos que h tienda a cero,

$$\lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N'(t)$$

obtenemos la derivada $N'(t)$ que expresa la tasa de variación infinitesimal de la población, es decir, la velocidad de crecimiento de la población en el instante t.

Según el modelo de Malthus, la velocidad de crecimiento de la población en cada instante es proporcional al tamaño de la población en dicho instante. Esto se representa mediante la ecuación:

$$N'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = rN(t).$$

Observemos que esta ecuación es la versión continua del modelo discreto de Malthus:

$$n_{t+1} - n_t = (\alpha - 1)n_t.$$

Observemos que la ecuación $N'(t) = rN(t)$ expresa una relación entre la función $N(t)$ y su derivada $N'(t)$. Este es un primer ejemplo de ecuación diferencial. La incógnita de esta ecuación es la función $N(t)$.

Las soluciones de la ecuación diferencial $N'(t) = rN(t)$ son las funciones de la forma $N(t) = C\mathrm{e}^{rt}$, donde C es una constante. Esto puede comprobarse fácilmente: si $N(t) = C\mathrm{e}^{rt}$ entonces $N'(t) = Cr\mathrm{e}^{rt} = rN(t)$.

1. Conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales

Como hemos indicado en la introducción, el objetivo de este tema no consiste en afrontar con rigor el estudio de las ecuaciones diferenciales, sino que se persigue mostrar una herramienta para la modelización matemática de problemas de biología. Así, nuestro enfoque estará más dirigido a la explicación de los conceptos relacionados con las ecuaciones diferenciales y algunas de sus particularidades más interesantes, que a los problemas matemáticos que surgen entorno a su resolución omitiendo en la mayoría de las ocasiones planteamientos generales en favor de una mejor compresión del problema.

1.1. Generalidades.

¿Qué es una ecuación diferencial? En una ecuación diferencial se expresa una relación de una función, de una o varias variables, con sus derivadas (primera, segunda, ...). En este curso consideraremos sólo ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Estas ecuaciones son aquellas en las que sólo intervienen funciones de una única variable, que normalmente llamaremos t (tiempo), aunque podemos también llamar de cualquier otra forma a la variable, como $x,\ s,\ \ldots$ A la función incógnita la llamaremos normalmente y, o también $f,\ g,\ p,\ \ldots$ La derivada de una función $y(t)$ se denotará indistintamente por $y'(t)$ o por $\dfrac{dy}{dt}$. Cuando no dé lugar a confusión, escribiremos simplemente y e y', en lugar de $y(t)$, e $y'(t)$.

Se llama **grado de una ecuación diferencial** al mayor de los órdenes de las derivadas que en ella intervienen. En este curso vamos a limitarnos a estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado. Por comodidad, a este tipo de ecuaciones las llamaremos simplemente ecuaciones diferenciales.

El ejemplo más sencillo de ecuación diferencial es $y' = f(t)$; por ejemplo, $y' = \operatorname{sen}(t)$. Resolver esta ecuación consiste en encontrar una función $F(t)$ tal que $F'(t) = f(t)$, es decir, una primitiva de la función $f(t)$.

Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales son los siguientes:

- $p'(t) = kp(t)$;
- $y' = k(y - a)$;
- $ty' + 2y - \cos(t) = 0$;
- $N' = rN(1 - \frac{N}{k})$;
- $(u^2 + 1)u' = \operatorname{sen}(t)$.

Una función, ¿cuándo es solución de una ecuación diferencial? Una función es solución de una ecuación diferencial cuando ella y su derivada cumplen la relación dada por la ecuación; por ejemplo,

- cualquier función de la forma $f(t) = -\cos(t) + C$, donde C es una constante, es solución de la ecuación $f'(t) = \operatorname{sen}(t)$,
- la función $p(t) = C\mathrm{e}^{kt}$, donde C es una constante, es solución de $p'(t) = kp(t)$.

Al igual que ocurre con otros tipos de ecuaciones, una ecuación diferencial puede no tener solución. Cuando existe solución, una ecuación diferencial no tiene una única solución, sino una familia infinita de soluciones diferenciadas por una constante, como acabamos de ver en los ejemplos anteriores. Esta familia de soluciones, dependiente de una constante, se llama **solución general** de la ecuación diferencial. Así por ejemplo, la solución general de la ecuación $\dfrac{df}{dt} = \operatorname{sen}(t)$ es $f(t) = -\cos(t) + C$. Para cada valor concreto de la constante c se obtiene una **solución particular**; por ejemplo, $-\cos(t)$ y $-\cos(t) + 1$ son soluciones particulares de $\dfrac{df}{dt} = \operatorname{sen}(t)$.

Problema de valor inicial. En los procesos experimentales lo normal es que a una ecuación diferencial se le añadan unas condiciones, llamadas **condiciones iniciales** que consisten en dar el valor de la función incógnita y para algún valor t_0 de la variable independiente t, normalmente para $t = 0$ (de ahí el nombre de condiciones iniciales). Estas condiciones se expresan de la forma $y(t_0) = y_0$, donde y_0 es un número determinado.

El conjunto formado por una ecuación diferencial y las condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$ se conoce con el nombre de **problema de valor inicial.** La solución de este problema, cuando existe, sí es única. Todas las ecuaciones diferenciales que estudiaremos en este curso tendrán solución y los problemas de valor inicial tendrán solución única. Los enunciados y demostraciones de los teoremas que proporcionan condiciones suficientes para garantizar la existencia y la unicidad de solución de un problema de valor inicial pueden consultarse en cualquier libro sobre ecuaciones diferenciales, por ejemplo en el capítulo 11 de [**Sim77**] o en el capítulo 2 de [**FV96**].

Para resolver un problema de valor inicial se resuelve primero la ecuación diferencial, obteniendo la solución general y luego se determina la solución particular, es decir, el valor de la constante, que satisface las condiciones iniciales dadas. Por ejemplo, la solución general de la ecuación $y' = k(y-a)$ es $y = C\mathrm{e}^{kt} + a$ (más adelante aprenderemos a resolver esta ecuación). Para resolver el problema de valor inicial $y' = k(y-a)$, $y(0) = 1$, debemos determinar la solución particular que satisface $y(0) = 1$. Como $y(0) = C\mathrm{e}^0 + a = C + a$ debe ser igual a 1, obtenemos que $C = 1 - a$ y la solución buscada es $y = (1-a)\mathrm{e}^{kt} + a$.

Ejercicio III.1.1. Comprobar que la función $y(t) = \operatorname{tg}(t^3 + \pi)$ es solución de la ecuación diferencial $y' = 3t^2(y^2 + 1)$

Ejercicio III.1.2. ¿Es $y(t) = C\mathrm{e}^{t^2/2} - 1$ solución de $y' = t \cdot y + t$?

Ejercicio III.1.3. ¿Es $y(t) = C\mathrm{e}^{2t}$ solución de $y' = 2y$?

Ejercicio III.1.4. Decir si $x(t) = \frac{t^3}{3}$ es solución de las ecuaciones:

1. $x' = x^2$.
2. $x' = 3^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}}$.
3. $x' = 3^{\frac{1}{3}} t x^{\frac{1}{3}}$.
4. $x' = x^3/3$.

Ejercicio III.1.5. Justifica la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

La solución general de la ecuación $x' = x - t$ es:

1. $x = \mathrm{e}^t + t + C$
2. $x = -\mathrm{e}^t + t + 1$
3. $x = C\mathrm{e}^t + t + 1$
4. $x = t + 1$

Si $x(t)$ es solución de la ecuación $x' = x - t$:

a) Si $x(0) = 0$, entonces $x(-1) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$
b) Si $x(0) = 1$, entonces $x(t) = t + 1$
c) Si $x(0) = -1$, entonces $x(t)$ es una función creciente.
d) Si $x(1) = 0$, entonces $x(0) = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$

¿Cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales? La resolución de ecuaciones diferenciales es un problema difícil y complejo. La mayor parte de las ecuaciones diferenciales no tienen solución con expresión analítica conocida. Existen algunos métodos para "resolver" algunos tipos de ecuaciones diferenciales (escribimos resolver entre comillas, porque estos métodos conllevan el cálculo de integrales). En este curso resolveremos sólo los tipos más sencillos de ecuaciones diferenciales: las puramente temporales y las autónomas.

Uno de los aspectos fundamentales del estudio de las ecuaciones diferenciales es la búsqueda de información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones, cuando éstas se desconocen.

Por último existen métodos númericos (con algoritmos programables en un ordenador) que proporcionan soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales.

1.2. Ecuaciones diferenciales puramente temporales.

Las ecuaciones diferenciales más sencillas tienen la forma

$$\boxed{\text{y'=f(t).}}$$

Estas ecuaciones se llaman **puramente temporales** porque la velocidad de variación de la función incógnita y depende sólo de la variable independiente t que, en muchas aplicaciones representa el tiempo.

La solución general de la ecuación $y' = f(t)$ es

$$y = \int f(t) = F(t) + C,$$

donde $F(t)$ es una primitiva de la función f y C es una constante.

Para determinar C, es decir, para obtener una solución particular, debemos conocer las condiciones iniciales, $y(t_0) = y_0$. Dicho de otro modo, hay que plantear un problema de valor inicial:

$$y' = f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

La solución de este problema será $y = \int f(t)dt = F(t) + C$, donde C debe calcularse para que $y(t_0) = y_0$. Luego, $C = y_0 - F(t_0)$.

Ejemplo III.1.6. La solución general de la ecuación $y' = 1/(t+1)$ es

$$y = \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t+1| + C.$$

Ejemplo III.1.7. Supongamos que la velocidad instantánea de variación del volumen de una célula $V(t)$ viene dado por la ecuación:

$$V'(t) = \operatorname{sen}(t), \quad \text{con} \quad V(0) = 3.$$

Calculemos $V(t)$:

$$V(t) = \int \operatorname{sen}(t) = -\cos(t) + C$$

$$3 = V(0) = -\cos(0) + C = -1 + C, \quad \text{luego} \quad C = 4 \quad \text{y}$$

$$V(t) = 4 - \cos(t).$$

Ejercicio III.1.8. Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $y' = t^3 + t^2 + 1, \quad y(0) = 4$
2. $y' = 1/(1-t), \quad y(0) = 1$
3. $y' = x\mathrm{e}^{x^2}, \quad y(0) = 1$

Ejercicio III.1.9. La cantidad de fósforo en un lago en función del tiempo se denomina $P(t)$ y obedece a la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = 3t + 1, \quad \text{con} \quad P(0) = 0.$$

Calcular la cantidad de fósforo en $t = 10$ (Solución: $P(10) = 160$.)

2. Crecimiento exponencial y crecimiento logístico

En el ejemplo expuesto en la introducción a este capítulo, se estudiaron brevemente un par de modelos de cambio en una población aislada, uno discreto y otro continuo, ambos de Malthus. En el último capítulo de la asignatura utilizaremos las matrices para expresar un modelo discreto más complejo, el modelo matricial de Leslie. En esta sección vamos a estudiar dos modelos continuos de crecimiento de poblaciones basados en ecuaciones diferenciales. Para establecer estos modelos, necesitamos introducir previamente algunos conceptos fundamentales.

2.1. Conceptos fundamentales.

En ecología se llama población a un conjunto de individuos que pertenecen a la misma especie y ocupan una determinada región geográfica. La ecología de poblaciones se centra en el estudio del tamaño, dinámica e interacciones entre ellas. Cuando se consideran poblaciones aisladas se entiende que los únicos factores que contribuyen al incremento o disminución de población son exclusivamente los nacimientos y las muertes que tienen lugar en su seno (no se consideran procesos como la inmigración y emigración).

El tamaño de una población varía (aumenta o disminuye) con el tiempo, es decir, es una función del tiempo. Consideraremos el tiempo como una variable continua y llamaremos $N(t)$ *a la función que en cada instante* t *tiene como valor el tamaño de la población en ese instante* t. En ecología, al tamaño de una población se le suele llamar también densidad de población.

La derivada de la función $N(t)$ con respecto al tiempo, $\dfrac{dN}{dt} = N'(t)$, *representa la velocidad instantánea de cambio de población*, llamada también tasa de cambio de población. Recordemos que el valor de la derivada en un punto, $N'(t_0)$, es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $N(t)$ en el punto $(t_0, N(t_0))$.

Se llama **tasa intrínseca de crecimiento** al cociente $\big(dN/dt\big)/N$. Este cociente representa la contribución de cada individuo al crecimiento instantáneo de la población, de manera que es una tasa instantánea.

Las distintas expresiones de la tasa intrínseca de crecimiento, dan lugar a distintos modelos de crecimiento.

2.2. Crecimiento exponencial, o de Malthus, continuo.

Este es el modelo continuo de crecimiento de poblaciones más sencillo. Consiste en suponer que la tasa intrínseca de crecimiento es constante. Llamando r a esta constante el modelo se expresa mediante el problema de valor inicial:

$$\frac{\frac{dN}{dt}}{N} = r \quad \text{siendo} \quad N(0) = N_0$$

Es decir,

$$\frac{dN}{dt} = rN \;\; \text{siendo} \quad N(0) = N_0.$$

Esta ecuación indica que la tasa de cambio de la población, dN/dt es el producto de la contribución de un individuo (tasa intrínseca) por el número de individuos.

Como se expuso en la introducción a este capítulo, este modelo es la versión continua del modelo discreto de Malthus.

Observemos que si la tasa intrínseca de crecimiento r es positiva, la población aumenta, si es negativa, la población disminuye y si es cero, la población permanece constante.

En la sección 4 de este capítulo resolveremos la ecuación diferencial $dN/dt = rN$ y obtendremos que la solución general de esta ecuación es $N(t) = Ce^{rt}$.

Ejercicio III.2.1. Compuébese que $N(t) = \mathrm{C}e^{rt}$ es la solución general de la ecuación diferencial $dN/dt = rN$.

Ejercicio III.2.2. Compruébese que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad N(0) = N_0$$

es

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

Una misma ecuación puede servir como modelo matemático de varios fenómenos distintos. La **ecuación exponencial** $y' = ry$ se utiliza para representar la desintegración de una sustancia radiactiva: se supone que la velocidad con la que se desintegra la sustancia en cada instante es proporcional a la cantidad de sustancia $y(t)$ que queda en ese instante t. En este caso, la constante r es negativa y la función exponencial $y(t) = y_0 e^{rt}$ es siempre decreciente.

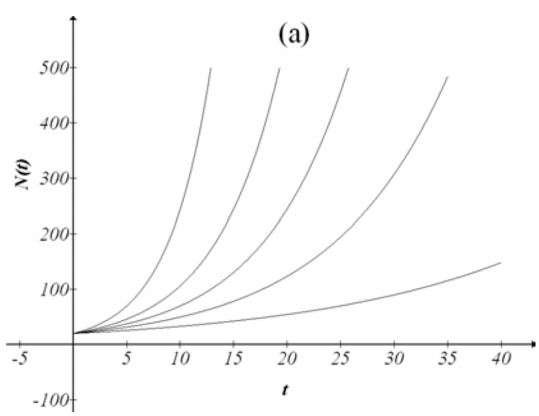
Esta ecuación exponencial también se aplica en Economía. Si llamamos $y(t)$ al capital invertido continuamente a una tasa de interés r, la ecuación exponencial $y' = ry$ describe el crecimiento del capital en función del tiempo.

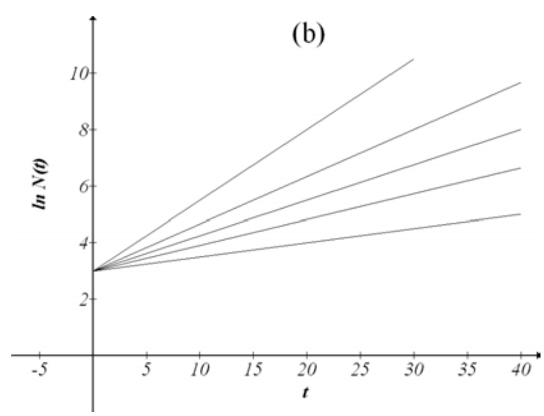
2.2.1. Algunas propiedades del crecimiento exponencial.

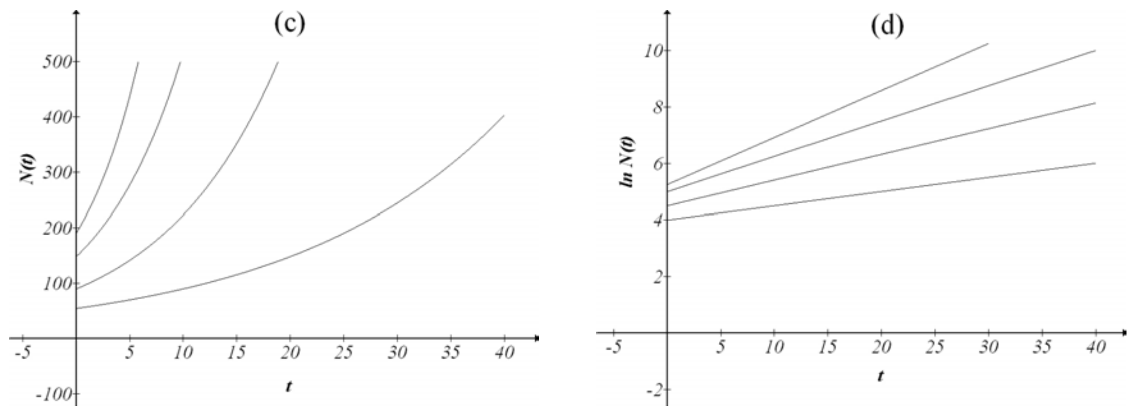
Una importante propiedad de esta función de crecimiento exponencial es que el logaritmo neperiano de $N(t)$ es una función lineal de pendiente igual a la tasa intrínseca de crecimiento r:

$$\ln N(t) = \ln N_0 + rt.$$

En las siguientes figuras se muestran las gráficas de varias funciones de crecimiento exponencial, variando la tasa de crecimiento intrínseca (figura a), y la población inicial (figura c). Observemos que cuando las poblaciones tienen la misma tasa intrínseca, al tomar logaritmo neperiano se obtienen una serie de rectas paralelas (figura d).







Ejemplos de crecimiento exponencial en tiempo continuo para distintos valores de la tasa intrínseca de crecimiento, r, y tamaño de la población inicial, N_0. (a) $N_0 = 10, r = 0{,}05$ (abajo), $0{,}10, 0{,}15, 0{,}20$ y $0{,}25$ (arriba); (b) logaritmo de los valores del apartado (a); (c) $r = 0{,}10, N_0 10, 50, 100$ y 200; (d) logaritmo de los valores del apartado (c).

Como medida de la velocidad de crecimiento de una población, es frecuente usar el **tiempo de duplicación** del número de individuos que la componen. Es decir, el tiempo τ que tarda la población $N(t)$ en alcanzar el valor $2N(t)$. Este tiempo de duplicación es una constante, no depende de t.

Ejercicio III.2.3. A partir de la ecuación

$$N(t+\tau) = 2N(t),$$

demuestra que si $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{rt}$ entonces,

$$\tau = \frac{\ln(2)}{r}.$$

Observemos que cuando la tasa intrínseca de crecimiento r es mayor que cero, el tamaño de la población crece ilimitadamente, es decir, $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$. Esta situación se puede producir cuando los individuos no están limitados por el alimento ni por la competencia. Si se inicia un cultivo de una colonia bacteriana sobre un sustrato rico en nutrientes inoculando en el sustrato unas pocas bacterias, entonces las bacterias inicialmente pueden crecer y dividirse sin restricción. Posteriormente, cuando el sustrato se encuentre más poblado y la fuente de alimento se reduzca, el crecimiento se restringirá. Para describir esta nueva situación, se necesitará una ecuación diferencial distinta, como la que estudiaremos en el siguiente modelo.

2.3. Crecimiento logístico.

El **modelo de crecimiento logístico** describe la variación del tamaño de una población $N(t)$ en la que la tasa intrínseca de crecimiento $r = \frac{dN/N}{N}$ es densodependiente, es decir, depende de la densidad de población.

La **ecuación logística** fue desarrollada originalmente sobre el año 1835 por el matemático belga P.F. Verhulst (1804-1849), que fue quien utilizó el nombre de logística para denominar a esta ecuación. Su trabajo fue completamente olvidado hasta 1920, cuando R. Pearl y L. J. Reed publicaron una serie de artículos sobre crecimiento de poblaciones[1], en los que utilizaban la misma ecuación que Verhulst. Tras descubrir el trabajo de Verhulst, Pearl y Reed adoptaron también el nombre de ecuación logística. Pearl y Reed utilizaron la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de la población de Estados Unidos basándose en los datos censales desde 1790 hasta 1920. Su ecuación habría predicho unos 185 millones de personas en los Estados Unidos en el año 2.000, que es una subestimación del tamaño real de la población (unos 260 millones de personas). Aunque la ecuación parece no ajustarse muy bien a las poblaciones reales, es un modelo útil para analizar el crecimiento bajo recursos limitados.

En el modelo logístico se asume que la tasa intrínseca de crecimiento r depende de N de la forma más simple: r es función lineal de N. Esto se expresa con la siguiente ecuación:

$$r = \frac{dN/dt}{N} = r_m - zN, \quad \text{donde } r_m \text{ y } z \text{ son constantes.}$$

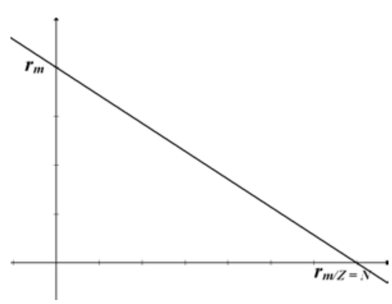
Observemos que esta ecuación recoge la idea de que mayor densidad de población implica menor disponibilidad de recursos (alimento, espacio, ...) para los individuos, lo que se traduce en una disminución de la tasa intrínseca r.

La constante r_m se llama **tasa intrínseca de crecimiento máxima**, y representa el valor máximo que alcanzaría r en el caso límite $N = 0$. Esto significa que, cuando la densidad de población es muy baja ($N \to 0$), r se hace prácticamente igual a r_m. A medida que la población aumenta, el valor de r disminuye y se hace igual a cero cuando $N = r_m/z$. A este valor r_m/z se le suele denotar K y se llama **capacidad de carga** o **capacidad de alojamiento** del medio para la población en cuestión. La capacidad de carga K hace referencia a la existencia de algún recurso limitador que impide que la población crezca indefinidamente. Probaremos que, como su nombre indica, K determina el tamaño máximo de la población que puede ser admitido por el entorno.

La función r se puede escribir de la forma

$$r = \frac{dN/dt}{N} = r_m\left(1 - \frac{1}{K}N\right).$$

La gráfica de esta función r puede verse en la figura de la derecha.



[1]Véase, por ejemplo, R. Pearl y L. J. Reed, *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation.* Proc. Nat. Acad. Sci. 6, (1920), 275–288.

El modelo de crecimiento logístico se describe por el problema de valor inicial:

$$\frac{dN}{dt} = r_m N(1 - \frac{N}{K}) \quad \text{con} \quad N(0) = N_0$$

Este modelo puede interpretarse como una modificación del modelo exponencial $dN/dt = r_m N$. El factor $1 - \dfrac{N}{K}$ actúa a modo de freno del término exponencial: cuando $N \to K$ el freno $1 - N/K$ tiende a cero, de manera que la derivada dN/dt tiende también a cero y la población deja de crecer, y la densidad de población $N(t)$ se estabiliza alrededor del valor de K.

En la sección 4 de este capítulo resolveremos la ecuación logística

$$\frac{dN}{dt} = r_m N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

y obtendremos que la solución general de esta ecuación es la función logística

$$N(t) = \frac{K}{1 + C\mathrm{e}^{-r_m t}}.$$

La solución particular que cumple las condiciones iniciales $N(0) = N_0$ es

$$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)\mathrm{e}^{-r_m t}}$$

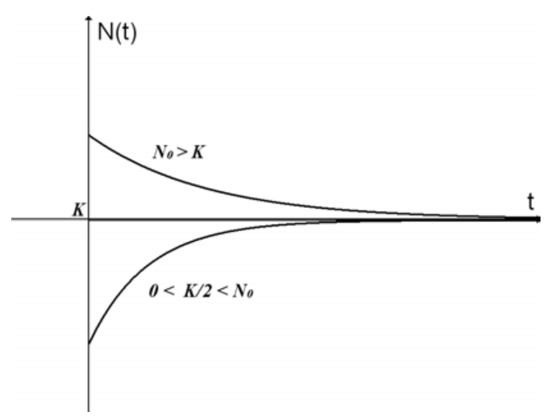
Ejercicio III.2.4. Compruébese que la solución del problema de valor inicial

$$N(t) = \frac{K}{1 + C\mathrm{e}^{-r_m t}}, \quad N(0) = N_0$$

es

$$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)\mathrm{e}^{-r_m t}}.$$

En la figura de la derecha, se muestran las gráficas de algunas de estas soluciones, para diferentes valores de N_0.



Ejercicio III.2.5. Realizar el estudio y representación gráfica de la función logística $N(t)$ en el caso $C > 0$, es decir, $K > N(0) > 0$. Comprobar que esta función tiene las siguientes propiedades:

1. Está definida, es continua y es derivable en todo $\mathbb{R}$.
2. Las rectas $N = 0$ y $N = K$ son asíntotas en $-\infty$ y en $+\infty$, respectivamente.
3. La función N está acotada inferior y superiormente pues $0 < N(t) < K$, para cualquier valor de t.
4. La función logística es siempre creciente.
5. La función N tiene un punto de inflexión cuando $N = K/2$. En este punto, la función pasa de ser cóncava a ser convexa.

Ejercicio III.2.6. Estudiar y representar gráficamente la función logística $N(t)$ según los distintos valores de N_0:

1. $N_0 = K > 0$
2. $0 < N_0 < K/2$
3. $0 < K/2 < N_0$

Interpretar biológicamente cada una de estas situaciones.

Ejercicio III.2.7. Supongamos que el tamaño de una población $N(t)$ evoluciona de acuerdo con la ecuación logística. Calcular la tasa intrínseca de crecimiento máxima si la capacidad de alojamiento es 100, $N(0) = 10$ y $N(10) = 90$. (Solución $r_m = \ln(81)/10$).

3. Ecuaciones diferenciales autónomas

Se llaman **ecuaciones diferenciales autónomas** a las que pueden escribirse de la forma

$$\boxed{y' = h(y).}$$

Observemos que la función derivada y' no depende explícitamente de la variable independiente t, sino sólo de la dependiente y. Muchas de las ecuaciones que modelan situaciones biológicas son autónomas.

Veamos algunos ejemplos de ecuaciones de este tipo:

1. La ecuación exponencial $y' = ry$.
2. La ecuación $y' = r(y - A)$.
3. La ecuación logística $N' = rN(1 - \frac{1}{K}N)$.

3.1. Soluciones constantes o equilibrios.

Una clase muy especial de soluciones de las ecuaciones diferenciales son las soluciones constantes, que se denominan **puntos de equilibrio** o simplemente **equilibrios**.

Consideremos la ecuación diferencial autónoma $\dfrac{dy}{dt} = h(y)$. Si un número real $\tilde{y}$ satisface la ecuación $h(\tilde{y}) = 0$, entonces $\tilde{y}$ es un equilibrio de $\dfrac{dy}{dt} = h(y)$, es decir la función constante $y = \tilde{y}$ es solución de $\dfrac{dy}{dt} = h(y)$. Por otra parte, para que una función constante $y = \tilde{y}$ sea solución de la ecuación $y' = h(y)$ debe ocurrir que $y' = 0 = h(\tilde{y})$. Es decir, los puntos de equilibrio de la ecuación autónoma $\dfrac{dy}{dt} = h(y)$ son las soluciones de la ecuación $h(y) = 0$. Por ejemplo, los equilibrios de la ecuación $y' = y^2 - 1$ son $\tilde{y} = 1$ e $\tilde{y} = -1$.

Puede ocurrir que para una ecuación diferencial no existan puntos de equilibrio. Por ejemplo, la ecuación $y' = y^2 + 1$ no tiene equilibrios.

Ejemplo III.3.1. **Puntos de equilibrio de la ecuación logística.** Consideremos el problema de valor inicial que describe el modelo de crecimiento logístico:

$$\frac{dN}{dt} = r_m N(1 - \frac{N}{K}) \quad N(0) = N_0$$

Las soluciones constantes $N = 0$ y $N = K$ son los puntos de equilibrio de la ecuación logística. Esto tiene un claro significado biológico: si el tamaño de una población $N(t)$ evoluciona de acuerdo con la ecuación logística y en un momento dado la población se extingue, es decir, tiene cero individuos, seguirá así en adelante, hasta que una causa externa modifique la situación. Lo mismo ocurre cuando la población alcanza la capacidad de carga o capacidad de alojamiento del medio K, la población ya no podrá aumentar y seguirá teniendo siempre K individuos, salvo que alguna causa externa modifique esta situación.

3.1.1. Estabilidad de los equilibrios.

Supongamos que el comportamiento de un sistema biológico (físico, ...) viene dado por el problema de valor inicial

$$y' = h(y), \quad y(0) = y_0.$$

Si $\tilde{y}$ es un equilibrio de $\frac{dy}{dt} = h(y)$, es decir, $h(\tilde{y}) = 0$, y el sistema está inicialmente en equilibrio, o sea $y_0 = \tilde{y}$, entonces la solución del problema de valor inicial es la función constante $y = \tilde{y}$. Esta propiedad caracteriza los equilibrios: si el sistema en un instante dado está en equilibrio, permanecerá en dicho estado en todos los instantes posteriores (salvo que alguna causa externa perturbe el sistema). Esto no implica que el sistema alcance necesariamente un equilibrio particular cuando arranca desde un valor inicial que es diferente de dicho equilibrio, ni siquiera cuando ese valor inicial está muy próximo al equilibrio.

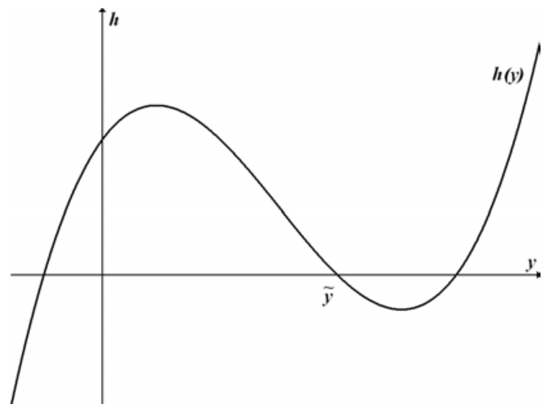
Para analizar lo que sucede cuando el estado inicial del sistema está muy próximo a un punto de equilibrio podemos considerar que el sistema ha sufrido una pequeña perturbación y la solución del equilibrio se ha movido una pequeña cantidad. El que el sistema vuelva o no a un equilibrio tras una pequeña perturbación depende de la estabilidad local del equilibrio.

Por estabilidad local entendemos lo siguiente:

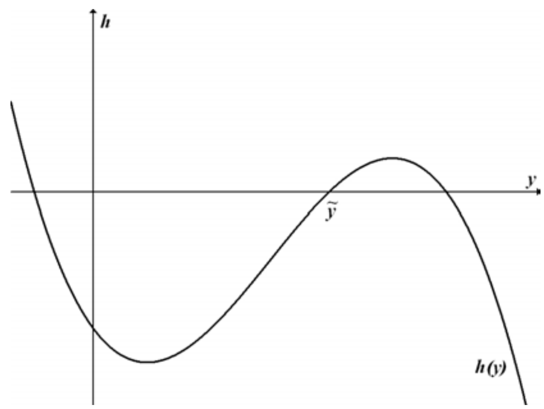
Supongamos que $\tilde{y}$ es un equilibrio de $y' = h(y)$, es decir, $h(\tilde{y}) = 0$. Se dice que el equilibrio $\tilde{y}$ es **localmente estable** si, después de una pequeña perturbación, el sistema tiende a recuperar el equilibrio. Es decir, si la solución de la ecuación diferencial $y' = h(y)$ para la condición inicial $y(0) = \tilde{y} + z$, siendo z un número real con valor absoluto pequeño, es una función $y(t)$ (que ya no será constante) que se acerca a la recta $y = \tilde{y}$. Si el sistema no tiende a recuperar el estado de equilibrio después de una pequeña perturbación, se dice que el equilibrio es **inestable**.

Estudiaremos a continuación un método para analizar la estabilidad de los equilibrios de las ecuaciones autónomas $y' = h(y)$.

Supongamos que $\tilde{y}$ es un equilibrio de $y' = h(y)$, es decir, $h(\tilde{y}) = 0$. *Si* $h'(\tilde{y}) < 0$, *entonces* $\tilde{y}$ *es un equilibrio localmente estable.* Veamos por qué (es conveniente observar la figura 2): si $h'(\tilde{y}) < 0$ entonces h es decreciente en $\tilde{y}$, luego si el sistema parte de un valor inicial y_1 un poco mayor que $\tilde{y}$, entonces $h(y_1) < 0$. En ese instante tendremos $y' = h(y_1) < 0$, luego la función y será decreciente. Al decrecer, vuelve al punto de equilibrio $\tilde{y}$. Es decir, si el sistema parte de un valor un poco mayor que $\tilde{y}$, al cabo de un cierto tiempo alcanza el equilibrio $\tilde{y}$. Lo mismo ocurre si el sistema parte de un valor y_2 un poco menor que $\tilde{y}$: como la función h es decreciente en $\tilde{y}$, tendremos que $h(y_2) > h(\tilde{y}) = 0$, luego en ese instante $y' = h(y_2) > 0$, la función y es creciente y llegará al valor $\tilde{y}$.



Veamos ahora que *si* $h'(\tilde{y}) > 0$, *entonces* $\tilde{y}$ *es un equilibrio inestable.* (es conveniente observar la figura 3). En esta situación, la función h es creciente en $\tilde{y}$. Por tanto, si el sistema parte de un valor y_1 un poco mayor que $\tilde{y}$, ocurrirá que $h(y_1) > h(\tilde{y}) = 0$, luego en ese instante, $y' = h(y_1) > 0$. Esto significa que la función y es creciente, por lo que si el sistema parte de un valor mayor que $\tilde{y}$, la función y crece y no vuelve al punto de equilibrio $\tilde{y}$. Análogamente, si el sistema parte de un valor y_2 un poco menor que $\tilde{y}$, tendremos que $h(y_2) < h(\tilde{y}) = 0$, luego en ese instante $y' = h(y_2) < 0$. Ocurre entonces que la función y es decreciente. Por consiguiente, si el sistema parte de un valor un poco menor que el equilibrio $\tilde{y}$, al ser la función y decreciente, no alcanza el punto de equilibrio $\tilde{y}$.



Ejemplo III.3.2. **Estabilidad de los equilibrios de la ecuación logística.** Supongamos que una población evoluciona según el modelo de crecimiento logístico:

$$\frac{dN}{dt} = r_m N(1 - \frac{N}{K}) \quad N(0) = N_0$$

Los equilibrios de esta ecuación son, según hemos visto, $\tilde{N}_1 = 0$ y $\tilde{N}_2 = K$. Para analizar la estabilidad de estos equilibrios consideramos la función

$$h(N) = r_m N(1 - \frac{N}{K}) = -\frac{r_m}{K} N^2 + r_m N.$$

La derivada de esta función es

$$h'(N) = -2\frac{r_m}{K}N + r_m$$

En $\tilde{N}_1 = 0$ tenemos que $h'(0) = r_m > 0$. Luego, $\tilde{N}_1 = 0$ es un equilibrio inestable.

En $\tilde{N}_2 = K$ ocurre que $h'(K) = -r_m < 0$, luego este equilibrio es localmente estable.

Ejemplo III.3.3. **Equilibrios y estabilidad en el modelo de un solo compartimiento o depósito.** Los modelos de compartimientos se utilizan frecuentemente para modelar el flujo de materia (nutrientes) o energía. El modelo más simple consiste en un compartimiento, por ejemplo, un volumen V de agua (como un tanque o un lago) que contiene un soluto (por ejemplo fósforo). Supongamos que el agua entra al compartimiento con una velocidad constante q y sale del compartimiento a la misma velocidad. Como las velocidades de entrada y salida coinciden, el volumen del depósito permanece constante.

Denominaremos $S(t)$ a la concentración de la solución del compartimiento en el instante t. La masa total de soluto en el compartimiento en el instante t será $S(t)V$, donde V es el volumen del compartimiento, que permanece constante. Por ejemplo, si concentración de la solución en un momento dado es de 2 gramos por litro y el volumen del compartimiento es de 10 litros, entonces la masa de soluto será de 20 gramos.

Si S_e es la concentración de la solución entrante y q es la velocidad a la que entra el agua, entonces la velocidad con que entra la masa del soluto es qS_e, lo que se suele llamar carga de entrada. Por ejemplo, si la concentración de la solución entrante es $S_e = 5$ gramos/litro y la velocidad con que entra la solución es $q = 0{,}1$ litros/segundo entonces la carga de entrada es igual a 0,5 gramos/segundo.

Suponemos que la solución del compartimiento está bien mezclada, de forma que la solución que sale tiene la misma concentración que la solución que hay en el compartimiento (concretamente, $S(t)$ en el instante t). La velocidad a la que sale masa de soluto del compartimiento en el instante t es $qS(t)$.

Como la masa se conserva en el sistema, obtenemos la siguiente ecuación que describe el flujo de materia en este sistema:

$$\begin{bmatrix} \text{velocidad de cambio} \\ \text{de masa de soluto} \\ \text{en el depósito} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{velocidad} \\ \text{de entrada} \\ \text{de masa} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{velocidad} \\ \text{de salida} \\ \text{de masa} \end{bmatrix}$$

La masa de soluto en el depósito en el instante t es igual a $V \cdot S(t)$. La velocidad de cambio de esta masa es la derivada de esta función con respecto a t. Como el volumen V es constante, esta derivada es:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot S) = V\frac{d}{dt}(S).$$

La velocidad de entrada de masa es igual a qS_e. La velocidad de salida de masa es $qS(t)$. Si la concentración de la solución inicial en el compartimiento es $S(0) = S_0$, el flujo de soluto en este sistema se describe mediante el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot S) = qS_e - qS; \quad S(0) = S_0$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt}(S) = \frac{q}{V}(S_e - S); \quad S(0) = S_0$$

El único punto de equilibrio de esta ecuación diferencial es $\tilde{S} = S_e$. Esto significa que cuando la concentración inicial de soluto en el compartimiento es igual a la concentración de la solución entrante, entonces esta concentración permanece constante. Este punto de equilibrio es localmente estable (compruébese como ejercicio).

La solución del problema de valor inicial planteado arriba es (compruébese como ejercicio):

$$S(t) = S_e \left[1 - \left(1 - \frac{S_0}{S_e}\right) \mathrm{e}^{-(q/V)t}\right]$$

Observando esta solución podemos ver que

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S_e$$

Esto significa que, cualquiera que sea la concentración inicial S_0, al cabo de un tiempo suficientemente largo, la concentración de soluto en el depósito se acerca a la concentración de la solución entrante. Es decir, independientemente de lo que se perturbe el sistema de su estado de equilibrio (que es $S = S_e$), el sistema vuelve a ese estado. Cuando ocurre esto, se dice que el equilibrio es **globalmente estable**. ¿Podrías citar otra situación en la que aparezca un equilibrio globalmente estable?

Ejercicio III.3.4. Sea $S(t)$ la concentración de soluto en un compartimiento en el instante t. Supongamos que la solución de la concentración entrante es de 3g litro^{-1}, que la velocidad de entrada de masa es de 0,2 litros s^{-1} y que el volumen del compartimiento es $V = 400$ litros.

1. Obtener la ecuación diferencial de la velocidad de cambio en la concentración en el instante t.
2. Resolver la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior cuando $S(0) = 0$ y calcular $\lim_{t\to\infty} S(t)$.
3. Calcular los equilibrios de la ecuación diferencial del apartado a) y estudiar su estabilidad.

3.2. Resolución de las ecuaciones diferenciales autónomas.

Una vez que hemos encontrado los puntos de equilibrio de la ecuación $y' = h(y)$, podemos suponer que $h(y) \neq 0$ para encontrar el resto de las soluciones. Cuando $h(y) \neq 0$ podemos escribir la ecuación $y' = h(y)$ de la forma:

$$\frac{1}{h(y)}y' = 1.$$

Llamemos $g(y)$ a la función $\dfrac{1}{h(y)}$.

$$\text{Si} \quad g(y)y' = 1 \quad \text{entonces} \int g(y)y'dt = \int 1dt.$$

Para calcular $\int g(y)y'dt$, podemos usar la fórmula

$$\int g(y)y'dt = \int g(y)dy.$$

Esta igualdad es una consecuencia de la regla de la cadena: si consideramos g como una función de y y llamamos G a una primitiva,

$$\int g(y)dy = G(y),$$

derivamos G con respecto a t, aplicando la regla de la cadena, y obtenemos

$$\frac{dG(y(t))}{dt} = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = g(y) \cdot y'.$$

Luego,

$$\int g(y)y'dt = \int g(y)\frac{dy}{dt}dt = G(y) = \int g(y)dy.$$

Para obtener la solución general de $g(y)y' = 1$, es decir, de $y' = h(y)$, se calculan las integrales

$$\int g(y)dy = \int dt = t + \text{cte.},$$

y luego se trata de despejar la y en función de t. Obtendremos una familia de soluciones dependiente de un parámetro o constante, cuyo valor quedará determinado por las condiciones iniciales.

Veamos ahora una serie de ejemplos de ecuaciones autónomas.

Ejemplo III.3.5. Para resolver la ecuación exponencial $y' = ry$ (r es una constante) la escribimos de la forma

$$\frac{y'}{ry} = 1,$$

puede resultar más cómodo escribir

$$\frac{y'}{y} = r.$$

Integramos ambos términos de la igualdad

$$\int \frac{y'}{y}dt = \int rdt,$$

$$\int \frac{y'}{y}dt = \int \frac{1}{y}dy = \ln |y| + \text{cte.}$$

$$\int r dt = rt + \text{cte},$$

luego,

$$\ln |y| = rt + \text{cte}.$$

Para obtener y en función de t, calculamos la exponencial en ambos términos:

$$|y| = \mathrm{e}^{rt+\text{cte}} = \mathrm{e}^{\text{cte}}\mathrm{e}^{rt},$$

y tomando $C = \pm \mathrm{e}^{\text{cte}}$ llegamos a la solución general

$$y = C\mathrm{e}^{rt}.$$

Ejemplo III.3.6. Resolución de la ecuación $y' = r(y - A)$, donde r y A son constantes:

Escribimos la ecuación de la forma $\dfrac{y'}{r(y-A)} = 1$ o bien $\frac{y'}{y-A} = r$. Integrando ambos términos de esta última igualdad

$$\int \frac{y'}{y-A} dt = \int r dt$$

$$\int \frac{y'}{y-A} dt = \int \frac{1}{y-A} dy = \ln |y - A| + \text{cte}$$

$$\int r dt = rt + \text{cte}$$

$$|y - A| = C\mathrm{e}^{rt}$$

Solución general:

$$y = A + C\mathrm{e}^{rt}.$$

Ejercicio III.3.7. Resolver los problemas de valor inicial:

1. $y' = 2y, \quad y(0) = 1$. (Solución $y = \mathrm{e}^{2t}$).
2. $y' = 4(y - 1), \quad y(0) = 1$.

Ejemplo III.3.8. Resolución de la ecuación logística

$$N' = rN\left(1 - \frac{1}{K}N\right),$$

donde r y K son constantes positivas:

$$\frac{N'}{N(1 - \frac{1}{K}N)} = r$$

$$\int \frac{N'}{N(1 - \frac{1}{K}N)} dt = \int r dt = rt + \text{cte}.$$

$$\int \frac{N'}{N(1 - \frac{1}{K}N)} dt = \int \frac{1}{N(1 - \frac{1}{K}N)} dN$$

Descomponemos $\dfrac{1}{N(1-\frac{1}{K}N)}$ en fracciones simples:

$$\frac{1}{N(1-\frac{1}{K}N)} = \frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{K}}{1-\frac{1}{K}N}$$

Ahora calculamos la integral

$$\int \frac{1}{N(1-\frac{1}{K}N)}dN = \int \frac{1}{N}dN + \int \frac{\frac{1}{K}}{1-\frac{1}{K}N}dN = \ln|N| - \ln|1-\frac{1}{K}N| + \text{cte.} =$$

$$\ln\left|\frac{N}{1-\frac{1}{K}N}\right| + \text{cte.}$$

Como $\int \frac{1}{N(1-\frac{1}{K}N)}dN = \int r dt$, tenemos que

$$\ln\left|\frac{N}{1-\frac{1}{K}N}\right| = rt + \text{cte.}$$

Calculamos la exponencial en los dos términos de la igualdad:

$$\left|\frac{N}{1-\frac{1}{K}N}\right| = \mathrm{e}^{rt}\cdot\text{cte.}$$

$$\frac{N}{1-\frac{1}{K}N} = \pm\mathrm{e}^{rt}\cdot\text{cte.} = \text{cte}\cdot\mathrm{e}^{rt}.$$

Para obtener la expresión de la función N, invertimos ambos términos de la igualdad:

$$\frac{1-\frac{1}{K}N}{N} = \text{cte}\cdot\mathrm{e}^{-rt}$$

$$\frac{1-\frac{1}{K}N}{N} = \frac{1}{N} - \frac{1}{K} = \text{cte}\cdot\mathrm{e}^{-rt}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{K} + \text{cte}\cdot\mathrm{e}^{-rt} = \frac{1+\text{cte}\cdot\mathrm{e}^{-rt}}{K}$$

De aquí se obtiene la solución general de la ecuación:

$$N(t) = \frac{K}{1+C\cdot\mathrm{e}^{-rt}}$$

En las aplicaciones de interés biológico de esta función, la constante C que aparece en la expresión de N es siempre positiva. Esta función (realmente, familia de funciones) $N(t) = \dfrac{K}{1+C\mathrm{e}^{-rt}}$ es conocida como **función logística** y, como ya hemos visto en la sección 2 de este capítulo, se usa para describir modelos de crecimiento de poblaciones.

Ejemplo III.3.9. Resolución de la **ecuación de von Bertalanffy**[2] $y' = K(y_m - y)$, donde K e y_m son constantes positivas:

$$\frac{y'}{y_m - y} = K$$

$$\int \frac{y'}{y_m - y}dt = \int K dt = Kt + \mathrm{cte}$$

$$\int \frac{y'}{y_m - y}dt = \int \frac{1}{y_m - y}dy = -\ln|y_m - y| + \mathrm{cte}$$

$$-\ln(|y_m - y|) = Kt + \mathrm{cte}$$

$$|y_m - y| = \mathrm{cte}\cdot \mathrm{e}^{-Kt}$$

$$y_m - y = \mathrm{cte}\cdot \mathrm{e}^{-Kt}$$

$$y = y_m(1 - \mathrm{cte}\cdot \mathrm{e}^{-Kt})$$

$$y = y_m - C\mathrm{e}^{-Kt}$$

La solución general de la ecuación $y' = K(y_m - y)$ es la función $y(t) = y_m - C\mathrm{e}^{-Kt}$, donde C es una constante. Esta función se conoce como función o **curva de von Bertalanffy** y se utiliza para describir el crecimiento de algunos organismos.

Ejercicio III.3.10. Determinar la curva de Bertalanffy que cumple la condición inicial $y(0) = 0$, es decir, que pasa por el punto $(0, 0)$.

Ejercicio III.3.11. Comprobar que la función de von Bertalanffy, $y(t) = y_m - C\mathrm{e}^{-Kt}$, tiene las siguientes propiedades:

1. Está definida, es continua y es derivable en todo $\mathbb{R}$.
2. $y(0) = y_m - C$
3. La recta $y = y_m$ es asíntota horizontal en $+\infty$.
4. Si $C = y_m - y(0) > 0$, la función y está acotada superiormente pues $y(t) < y_m$, para cualquier valor de t.
5. Si las constantes C y K son positivas, la función de Bertalanffy es siempre creciente y convexa.

Ejercicio III.3.12. Dibujar la gráfica de las siguientes curvas de Bertalanffy:

1. $y(t) = 34 - 32\mathrm{e}^{-Kt}$, sabiendo que $y(4) = 10$.
2. $y(t) = 34 - 32\mathrm{e}^{-Kt}$, sabiendo que $y(4) = 98$.
3. $y(t) = 32 - 34\mathrm{e}^{-Kt}$, sabiendo que $y(4) = 10$.

Ejemplo III.3.13. Resolución de la **ecuación de Gompertz**[3] $W' = kW(\ln(W_m) - \ln(W))$, donde W_m es una constante positiva:

$$\frac{W'}{W(\ln W_m - \ln W)} = k$$

[2] Que debe su nombre al biólogo austriaco K.L. von Bertalanffy (1901-1972).

[3] Por el matemático británico B. Gompertz (1779-1865).

$$\int \frac{W'}{W(\ln W_m - \ln W)} dt = \int k dt = kt + \text{cte}$$

$$\int \frac{W'}{W(\ln W_m - \ln W)} dt = \int \frac{1}{W(\ln W_m - \ln W)} dW =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{W}}{\ln W_m - \ln W} dW = -\ln|\ln W_m - \ln|W|| + \text{cte}.$$

Igualando ambas integrales:

$$-\ln|\ln W_m - \ln|W|| + \text{cte}k = t + \text{cte}$$

$$\ln W_m - \ln|W| = \text{cte} \cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

$$\ln\left(\frac{|W|}{W_m}\right) = -\text{cte} \cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

$$\frac{|W|}{W_m} = \mathrm{e}^{-\text{cte} \cdot \mathrm{e}^{-kt}}$$

$$W = \pm W_m \mathrm{e}^{-\text{cte} \cdot \mathrm{e}^{-kt}}$$

La solución general de la ecuación $W' = kW(\ln W_m - \ln W)$ viene dada por dos familias de funciones: una formada por funciones positivas, $W = W_m \mathrm{e}^{-\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-kt}}$, y otra formada por funciones negativas, $W = -W_m \mathrm{e}^{-\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-kt}}$.

Las funciones positivas $W = W_m \mathrm{e}^{-\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-kt}}$ son conocidas como **curvas de Gompertz** y se utilizan para describir modelos de crecimiento de organismos.

Ejercicio III.3.14. Dada una curva de Gompertz $W = W_m \mathrm{e}^{-\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-kt}}$:

1. Calcular C en función de $W(0) = W_0$. (Solución $C = \ln \frac{W_m}{W_0}$.)
2. Calcula las asíntotas horizontales de esta función.
3. ¿Para qué curva de Gompertz ocurre que $C = 0$.?
4. Comprobar que si $C > 0$ entonces la curva de Gompertz es creciente.
5. ¿Qué ocurre cuando $C < 0$?

Ejercicio III.3.15. Aplíquese el método explicado para obtener la solución general de la ecuación diferencial autónoma ($m \neq 1$, k y W_m constantes positivas):

$$W' = \frac{kW}{(1-m)} \left[\left(\frac{W_m}{W} \right)^{1-m} - 1 \right]$$

Estas ecuaciones diferenciales (tenemos una ecuación para cada valor de m) se llaman **ecuaciones de Richards**[4] , y sus soluciones son las **curvas de Richards.**

La solución general de estas ecuaciones es:

$$W(t) = W_m \left(1 - C\mathrm{e}^{-kt}\right)^{1/(1-m)}$$

[4]Que debe su nombre al físico estadounidense L. A. Richards (1904–1993).

Observemos que, para $m = 2$, la ecuación de Richards es la logística (descrita en la subsección 2.3:

$$W' = -kW\left[\left(\frac{W_m}{W}\right)^{-1} - 1\right] = -kW\left(\frac{W}{W_m} - 1\right) = kW\left(1 - \frac{W}{W_m}\right),$$

por lo tanto, la curva de Richards cuando $m = 2$ es la logística.

Para $m = 0$ la ecuación de Richards es la de von Bertalanffy (ejemplo 7):

$$W' = kW(\frac{W_m}{W} - 1) = k(W_m - W).$$

4. Aproximación lineal y ecuaciones diferenciales

En esta sección vamos a estudiar algunos ejemplos que nos muestran cómo mediante la aproximación lineal podemos obtener información del comportamiento de un sistema regido por una ecuación diferencial autónoma, es decir, del tipo $y' = h(y)$.

Ejemplo III.4.1. Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t y supongamos que la velocidad de crecimiento de la población se rige por una ecuación diferencial de la forma:

$$N' = \frac{dN}{dt} = f(N),$$

siendo f una función derivable con $f(0) = 0$. Si consideramos la velocidad de crecimiento N' como función de N y calculamos la aproximación lineal de $N' = f(N)$ en $N = 0$, obtenemos:

$$N' \simeq L_{f(0)} = f(0) + f'(0)N$$

Como $f(0) = 0$, poniendo $f'(0) = r$ (es una constante) se obtiene que para valores de N próximos a 0:

$$N' = \frac{dN}{dt} \simeq rN$$

Eso demuestra que, cuando el tamaño de la población es pequeño su crecimiento es aproximadamente exponencial.

El suponer que $f(0) = 0$ obedece a razones biológicas. Cuando el tamaño de una población es 0, la velocidad de crecimiento también será nula, pues si fuese positiva produciría generación espontánea y si fuese negativa, daría lugar a una población de tamaño negativo.

Ejemplo III.4.2. Veamos ahora cómo aplicando la aproximación lineal podemos calcular el tamaño aproximado de una población en instantes muy cercanos a uno dado en el que el tamaño es conocido.

Sea $N(t)$ el tamaño de una población de bacterias en el instante t (medido en millones). Sabemos que la velocidad de crecimiento per cápita es igual al 2 %, es decir,

$$N' = 0{,}02N$$

Sabemos que en el instante $t = 10$ el tamaño de la población es de 250000000, es decir, $N(10) = 250$. Para calcular el tamaño aproximado de la población en $t = 10{,}2$, utilizamos la aproximación lineal $N(10{,}2) \simeq L_{N(10)}(10{,}2)$:

$$L_{N(10)}(t) = N(10) + N'(10)(t - 10)$$

Para calcular $L_{N(10)}(10{,}2)$ necesitamos conocer previamente $N'(10)$. Utilizando la ecuación diferencial $N' = 0{,}02N$, obtenemos $N'(10) = (0{,}02)N(10) = (0{,}02)(250) = 5$. Luego,

$$L_{N(10)}(t) = N(10) + N'(10)(t - 10) = 250 + 5 \cdot 0{,}2 = 251$$

Ejercicio III.4.3. Sea $N(t)$ el tamaño en el instante t de una población que crece de acuerdo con la ecuación logística

$$N' = 0{,}1N(1 - 10^{-6}N), \quad N(0) = 10^5.$$

Calcular, mediante la aproximación lineal, el tamaño aproximado de la población en $t = 0{,}1$. (Solución: $N(0{,}1) \simeq 109000$).

5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Hasta ahora hemos estudiado modelos matemáticos descritos por una única ecuación diferencial. Con frecuencia ocurre que una ecuación diferencial no basta para describir un fenómeno natural. Por ejemplo, si dos especies distintas viven en un mismo ambiente en el que interactúan y compiten, sus poblaciones estarán descritas por dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ y para modelar su evolución necesitaremos recurrir a un sistema de ecuaciones diferenciales como:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & f_1(t,x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & f_2(t,x,y) \end{array} \right. \tag{6}$$

donde $f_1(t,x,y)$ y $f_2(t,x,y)$ serán funciones dependientes de tres variables: la variable independiente t y las variables dependientes x e y. Igual que en el caso de una ecuación diferencial, para representar la evolución de un fenómeno mediante un sistema de ecuaciones diferenciales será necesario especificar las condiciones iniciales: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

5.1. Conceptos básicos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales.

Un problema de valores iniciales dado por un **sistema de ecuaciones diferenciales** de primer orden (pues, interviene sólo la primera derivada) se expresará como

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} y_1' & = & f_1(t, y_1, y_2, \ldots y_n), & y_1(t_0) & = & y_{10}; \\ y_2' & = & f_2(t, y_1, y_2, \ldots y_n), & y_2(t_0) & = & y_{20}; \\ & \vdots & & & \vdots & \\ y_n' & = & f_n(t, y_1, y_2, \ldots y_n), & y_n(t_0) & = & y_{n0}. \end{array}$$

Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales como (6) consiste en un par de funciones $x(t)$, $y(t)$ que satisfagan las igualdades: $x'(t) = f_1(t, x(t), y(t))$, $y'(t) = f_2(t, x(t), y(t))$. En general, un sistema de ecuaciones diferenciales tendrá infinitas soluciones. Fijadas unas condiciones iniciales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$, la solución del problema de valores iniciales será única. Los puntos de la forma $(x(t), y(t))$ describen una curva del plano OXY, llamado **plano de fases**. Al variar las condiciones iniciales, se obtienen distintas curvas que llamaremos **trayectorias** u **órbitas** del sistema. Los puntos de equilibrio del sistema son las soluciones constantes $x(t) = \hat{x},\ y(t) = \hat{y}$. Para estas soluciones constantes, la órbita $(x(t), y(t)) = (\hat{x}, \hat{y})$ está formada por un único punto.

Ejercicio III.5.1. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{rcl} x' &=& 2x - 2y \\ y' &=& 2x - 3y. \end{array},$$

1. Comprobar que, para cualquier par de constantes c_1, c_2, la pareja de funciones $x(t) = 2c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-2t}$, $y(t) = c_1\mathrm{e}^t + 2c_2\mathrm{e}^{-2t}$ es solución del sistema.
2. Comprobar que la solución que cumple las condiciones iniciales $x(0) = -1$, $y(0) = 4$ es $x(t) = -4\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{-2t}$, $y(t) = -2\mathrm{e}^t + 6\mathrm{e}^{-2t}$.

Ejercicio III.5.2. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{rcl} x' &=& 2x - 3y \\ y' &=& x - 2y. \end{array},$$

1. Comprobar que, para cualquier par de constantes c_1, c_2, la pareja de funciones $x(t) = 3c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t}$, $y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t}$ es solución del sistema.
2. Determinar la solución que cumple las condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Ejercicio III.5.3. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{rcl} x' &=& x \\ y' &=& x + y \end{array}$$

1. Comprobar que, para cualquier par de constantes c_1, c_2, las funciones
$$x(t) = c_1\mathrm{e}^t$$
$$y(t) = \mathrm{e}^t(c_2 + c_1 t)$$
forman una solución del sistema.
2. Determinar la solución que cumple las condiciones iniciales $x(0) = 1,\ y(0) = 2$.

Diremos que un **sistema de ecuaciones diferenciales** es **autónomo** cuando las funciones f_i no dependen explícitamente de la variable independiente t, es decir, cuando cada una de las ecuaciones diferenciales que forma el sistema es autónoma.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos más sencillos son los lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy. \end{aligned}$$

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo de dos variables:

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y) \\ y' &= f_2(x, y), \end{aligned}$$

llamaremos **isoclinas cero** a las curvas del plano de fases definidas por las ecuaciones $f_1(x, y) = 0$, isoclina cero de la x, y $f_2(x, y) = 0$, isoclina cero de la y. Estas curvas representan los puntos del plano donde las respectivas velocidades de crecimiento son cero. Los puntos donde se cortan las dos isoclinas cero son los puntos de equilibrio del sistema.

Ejercicio III.5.4. Calcular las isoclinas cero del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2y \\ y' &= 2x - 3y \end{aligned}$$

y comprobar que el único punto de equilibrio es el origen $x = 0$, $y = 0$.

Igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales, existen tres vías fundamentales para estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales. La primera de ellas consiste en desarrollar métodos para resolverlos. Estos métodos son aplicables para los sistemas más sencillos, como los lineales con coeficientes constantes. Cuando no es posible obtener las soluciones de un sistema se realiza un estudio cualitativo del mismo para determinar el comportamiento general de las soluciones o bien se aplican métodos numéricos para obtener valores aproximados de las soluciones.

Un estudio riguroso de los sistemas de ecuaciones diferenciales y de los modelos construidos a partir de ellos está fuera del alcance de este curso por lo que nos limitaremos a estudiar con cierto detalle un modelo concreto de interés biológico y matemático, el modelo depredador-presa formulado por los matemáticos estadounidense e italiano, respectivamente, A.J. Lotka (1880-1949) y V. Volterra (1860 – 1940).

5.2. Modelo depredador-presa.

Supongamos que dos especies comparten el mismo ecosistema. La primera de ellas, la presa, se alimenta sólo de plantas de manera que, encontrando alimento suficiente en su entorno, se multiplicaría indefinidamente si estuviera sola. La segunda especie, la depredadora, se alimenta de la presa, por lo que si se quedara sola desaparecería por falta de alimentos. Podemos suponer que los depredadores son zorros y las presas conejos. Cuando hay una cantidad suficiente de conejos, los zorros disponen de abundante alimento y su población crece. Cuando la población de zorros alcance cierto límite, la de conejos, al ser devorados con rapidez por los zorros, comenzará a disminuir y esto provocará a su vez una disminución en la población de zorros por falta de alimento. El descenso en la población de zorros permite que se recupere la población de conejos desencadenando un nuevo incremento en la población de zorros. Así, a lo largo del tiempo observaremos una repetición cíclica de aumentos y disminuciones de las dos especies. Para confirmar estas conclusiones, obtenidas de modo intuitivo, vamos a plantear a las ecuaciones que rigen el comportamiento de las poblaciones de presas y depredadores. El análisis de estas ecuaciones confirmará las conclusiones que acabamos de obtener.

Denotemos por $P(t)$ y $D(t)$, respectivamente, a las poblaciones de conejos (presas) y zorros (depredadores) respectivamente. Cuando no hay zorros y las reservas de alimento son prácticamente ilimitadas, el crecimiento de la población de conejos es exponencial:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP(t), \quad r > 0.$$

Pero, cuando hay zorros, la población de conejos disminuye según la rapidez con que son devorados por los zorros que, en el modelo más sencillo, asumimos que será proporcional tanto a la población de conejos como a la de zorros, es decir, será proporcional al producto PD:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP(t) - aP(t)D(t), \quad r > 0, \quad a > 0.$$

En cuanto a la zorros, si no hubiera conejos, la población disminuiría de forma exponencial por falta de alimentos:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = -mD(t), \quad m > 0.$$

La presencia de conejos significa que hay alimento para los zorros, por lo que la población de éstos aumentará de forma proporcional a las presas que consumen:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = haP(t)D(t) - mD(t), \quad h > 0, \quad m > 0.$$

Las dos ecuaciones obtenidas forman el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= rP(t) - aP(t)D(t), \quad r > 0, \quad a > 0 \\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= haP(t)D(t) - mD(t), \quad h > 0, \quad m > 0. \end{aligned}$$

Este sistema es conocido como el **modelo depredador-presa de Lotka-Volterra**.

Las isoclinas del sistema son las curvas

$$\begin{array}{rcccl} rP - aPD & = & P(r - aD) & = & 0 \\ ahPD - mD & = & D(ahP - m) & = & 0, \end{array}$$

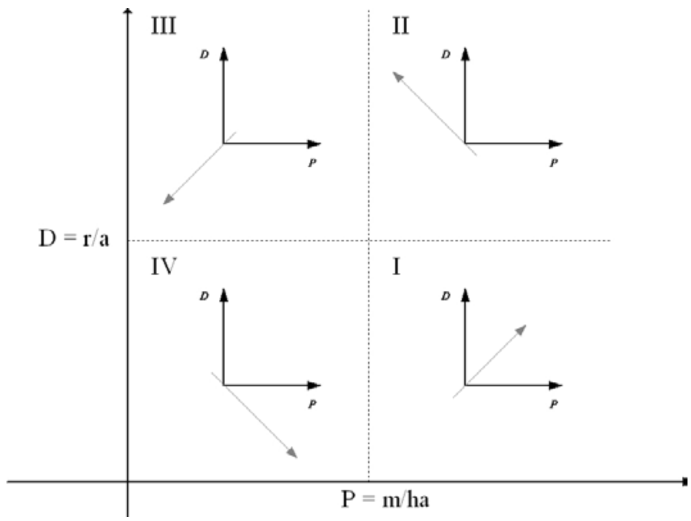
es decir, las rectas $P = 0$, $D = r/a$, $D = 0$ y $P = m/ha$.

Los puntos de equilibrio del sistema son $(\hat{P}, \hat{D}) = (0, 0)$ y $(P^*, D^*) = (m/ha, r/a)$.

En las cercanías del punto de equilibrio $(\hat{P}, \hat{D}) = (0, 0)$ los valores de P y D están muy próximos a 0, por lo que el valor de PD estará más próximo aún a 0 y podemos despreciarlo. El sistema nos queda entonces $P' = rP, \quad D' = -mD$.

Si en ausencia de población, $(\hat{P}, \hat{D}) = (0, 0)$, se introduce un pequeño número P de presas, la población de éstas seguirá aumentando indefinidamente, es decir, se aleja de la posición de equilibrio. En cambio, si se introducen depredadores, como $D' = -mD < 0$ la población de éstos decrecerá hasta extinguirse, alcanzando de nuevo la posición de equilibrio. Un punto de equilibrio de estas características se denomina punto de silla.

Para estudiar el comportamiento dinámico del sistema usaremos el plano de fases OPD. En el eje de abscisas representaremos las densidades de la presa y en el de ordenadas las del depredador. Naturalmente, supondremos $P \geq 0$ y $D \geq 0$. Las rectas paralelas a los ejes $P = m/ah$ y $D = r/a$ se cortan en el punto de equilibrio $(P^*, D^*) = (m/ah, r/a)$ y dividen al plano en cuatro regiones.



Cuando el sistema se encuentra en un punto de la región I, es decir, cuando las densidades de población cumplen que $P(t) > m/ha > 0$ y $0 < D(t) < r/a$, tenemos que

$$P' = rP - aPD = aP(\frac{r}{a} - D) > 0$$

$$D' = haPD - mD = haD(P - \frac{m}{ha}) > 0,$$

y por tanto las dos poblaciones, conejos y zorros, son crecientes.

En la región II, $P > m/ha > 0$ y $D > r/a > 0$, tenemos que

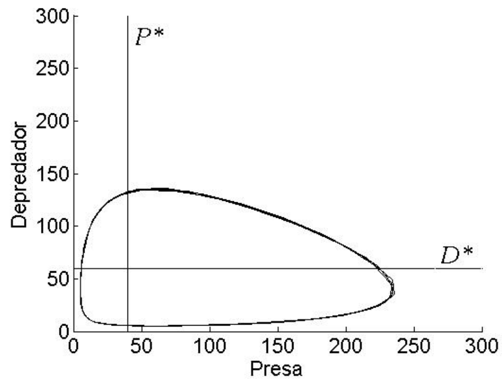
$$P' = rP - aPD = aP(\frac{r}{a} - D) < 0$$

$$D' = haPD - mD = haD(P - \frac{m}{ha}) > 0,$$

de manera que en esta región disminuye la población de conejos y aumenta la de zorros.

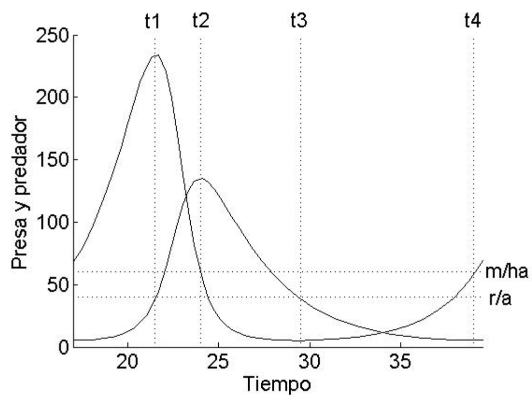
Análogamente se obtiene que en la región III las dos poblaciones decrecen y en la región IV aumenta el número de conejos y disminuye el de zorros.

Puede probarse que las trayectorias del sistema son curvas cerradas alrededor del punto de equilibrio $(ah/m, r/a)$.



Estas trayectorias se corresponden con soluciones $P(t)$, $D(t)$ que son periódicas.

Analicemos el comportamiento de estas soluciones cuando partimos, por ejemplo, de unas condiciones iniciales $P(0) = P_0$, $D(0) = D_0$ correspondientes a un punto de la región I del plano de fases OPD , es decir $P_0 > m/ha > 0$ y $0 < D_0 < r/a$. Supongamos también que $m/ha > r/a$. En el instante $t = 0$, las dos funciones $P(t)$ y $D(t)$ son crecientes (como hay abundancia de conejos, la población de zorros aumenta). Este comportamiento continúa hasta en el instante t_1 en el que $D(t_1) = r/a$, entramos entonces en la región II donde $P(t)$ comienza a decrecer mientras que $D(t)$ continua creciendo. En algún instante t_2 ocurrirá que $P(t_2) = m/ha$ y a partir de ahí empieza a decrecer también la población de zorros $D(t)$, estamos en la región III. Al decrecer $D(t)$, en algún momento t_3 volverá a tomar el valor r/a. A partir de ese momento empieza a crecer $P(t)$ mientras que $D(t)$ sigue decreciendo (región IV) y así continuará el sistema hasta que en el instante t_4 ocurra que $P(t_4) = m/ha$, volviendo a la región I, es decir, $D(t)$ empezará a crecer y $P(t)$ continuará creciendo. Puede demostrarse que existe un instante T en el que simultáneamente P y D vuelven a tomar sus respectivos valores iniciales, es decir, $P(T) = P(0) = P_0$ y $D(T) = D(0) = D_0$ y el sistema vuelve a evolucionar de la misma forma. Esto significa que las funciones P y D son periódicas, lo que se traduce, como hemos señalado más arriba, en que las trayectorias son curvas cerradas.



Ejercicio III.5.5. Dado el sistema depredador-presa de lotka-Volterra

$$\begin{aligned} P' &= 4P - 2PD \\ D' &= PD - 3D \end{aligned}$$

1. Determinar la tasa de crecimiento intrínseca de cada una de las dos especies en ausencia de la otra.
2. Calcular las isoclinas cero y representarlas en el plano de fases.
3. Obtener los equilibrios del sistema.
4. Describir cómo evolucionará el sistema a partir de las condiciones iniciales $P(0) = 3$, $D(0) = 2$.
5. Supongamos que a causa del mal tiempo muere el 90 % de la población de presas y el 67 % de la de depredadores. ¿Cómo evolucionará ahora el sistema?

5.2.1. El efecto Volterra.

Una de las características del modelo de Lotka-Volterra es que el valor promedio de las densidades de población de depredadores y presas no depende de las condiciones iniciales sino de los parámetros de la población. El valor promedio de la población de depredadores es:

$$\bar{D} = \frac{1}{T}\int_0^T D\mathrm{d}t.$$

Para calcular este valor promedio, a partir de la ecuación $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP - aPD$, expresamos D como

$$D = \frac{1}{a}\big(r - \frac{P'}{P}\big),$$

y calculamos la integral

$$\bar{D} = \frac{1}{T}\int_0^T D\mathrm{d}t = \frac{1}{Ta}\big[rt - \ln P\big]_0^T = \frac{r}{a}.$$

La densidad media de presas se calcula de forma análoga y obtenemos:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\mathrm{d}t = \frac{m}{ha}.$$

Observemos que la densidad media de la población depredadora, $\bar{D} = r/a$ no depende de su tasa de mortalidad sino de la tasa de crecimiento r de la presa mientras que la densidad media de la población de presas, $\bar{P} = m/ha$, no depende de su tasa de crecimiento sino de la mortalidad m del depredador. Esta dependencia cruzada tiene un efecto paradójico llamado **efecto Volterra** que debe ser tenido en cuenta en distintas situaciones como por ejemplo el control de plagas. Normalmente los insectos considerados como plagas son herbívoros (pulgones, orugas, ...), éstos tienen sus depredadores (por ejemplo, las avispas). Si para combatir una plaga se aplica un insecticida genérico, es decir que disminuye r y aumenta m, el resultado es un aumento de la presa (la plaga) y una disminución del depredador (posible controlador biológico).

El efecto Volterra fue observado por el biólogo y naturalista italiano U. D'Ancona (1896 - 1964), de la Universidad de Siena, quien observó que la disminución del volumen de pesca durante la primera guerra mundial provocó un aumento en la población de depredadores (tiburones, rayas, ...) resultando éstos más beneficiados que las presas (peces comestibles). D'Ancona planteó la cuestión al matemático Vito Volterra, de la Universidad de Roma quien, para entender la situación descrita, formuló el modelo matemático que estamos estudiando. El mismo sistema de ecuaciones diferenciales fué propuesto también por Lotka para el estudio de algunos problemas de concentraciones y reacciones químicas.

Ejercicio III.5.6. *El efecto Volterra* Una población de tiburones, D, se alimenta de peces comestibles, P. Además de los supuestos del modelo clásico de Lotka-Volterra, se supone que la intensidad de la pesca es, para ambas especies, directamente proporcional al total de la población, afectando negativamente. La evolución de las poblaciones viene dada por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$P' = (r - \epsilon)P - aPD$$
$$D' = haPD - (m + \epsilon)D,$$

donde la constante ϵ refleja la intensidad de la pesca. Suponiendo que $r < \epsilon$:

1. Determinar los puntos de equilibrio del sistema y los valores promedios de las funciones $P(t)$ y $D(t)$.
2. ¿Qué resultado tiene una disminución de la intensidad de la pesca (es decir, disminución de ϵ) sobre las poblaciones de presa y depredador?

5.2.2. Ecuaciones de las trayectorias.

Las ecuaciones de las trayectorias de las soluciones del modelo de Lotka-Volterra se pueden obtener en función de P y D eliminando la variable t del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP(t) - aP(t)D(t), \quad r > 0, \quad a > 0$$
$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = haP(t)D(t) - mD(t), \quad h > 0, \quad m > 0.$$

Por la regla de la cadena,

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P} \cdot \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$$

luego

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P} = \frac{\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}} = \frac{haPD - mD}{rP - aPD} = \frac{D(haP - m)}{P(r - aD)}$$

Para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P} = \frac{D(haP - m)}{P(r - aD)},$$

separamos las variables y escribimos

$$\frac{r - aD}{D} \cdot \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P} = \frac{haP - m}{P}.$$

Integrando ahora ambos miembros de la igualdad, con respecto a P, obtenemos:

$$\int \frac{r - aD}{D} \cdot D'dP = \int \frac{r}{D} \cdot D'dP - \int aD'dP = \ln D - aD + \text{cte}.$$

$$\int \frac{haP - m}{P} dP = \int hadP - \int \frac{m}{P} dP = haP - m \ln P + \text{cte}.$$

luego

$$r \ln D - aD = haP - m \ln P + \text{cte}.$$

Tomando exponenciales,

$$D^r \mathrm{e}^{-aD} = \mathrm{e}^{haP} P^{-m} C,$$

donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales:

$$C = \frac{D_0^r \mathrm{e}^{-aD_0}}{\mathrm{e}^{haP_0} P_0^{-m}} = D_0^r P_0^m \mathrm{e}^{-aD_0 - haP_0}.$$

Las posibles trayectorias del sistema vienen dadas por la familia de curvas

$$D^r P^m \mathrm{e}^{-aD - haP} = C.$$

Como la constante $C = D_0^r P_0^m \mathrm{e}^{-aD_0 - haP_0}$ depende de las condiciones iniciales, las trayectorias obtenidas no son estables frente a perturbaciones, es decir, si una pequeña perturbación cambia los valores de P o D, el sistema seguirá una trayectoria cerrada diferente de manera que las predicciones del modelo pueden cambiar sustancialmente. Este es el principal inconveniente de modelo de Lotka-Volterra. Si una población natural siguiera el modelo de Lotka-Volterra, su densidad no presentaría ciclos regulares, ya que siempre habría causas externas que constantemente provocarían cambios de trayectorias. Si una población natural presenta ciclos regulares, es razonable esperar que dichos ciclos sean estables, es decir, que tras una pequeña perturbación la población vuelva al mismo ciclo.

5.2.3. Modificaciones del modelo.

En el modelo de Lotka-Volterra se han introducido modificaciones para conseguir modelos más realistas. Una primera modificación consiste en suponer que, en ausencia de depredador, el crecimiento de la presa es logístico, en lugar de exponencial. El modelo obtenido es

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= rP\big(1 - \tfrac{P}{K}\big) - aPD, \\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= haPD - mD. \end{aligned}$$

En el siguiente modelo se modifica la rapidez con que los depredadores devoran a las presas, introduciendo un factor de saturación que limita el número de presas consumidas por depredador:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= rP\big(1 - \tfrac{P}{K}\big) - c(1 - \mathrm{e}^{-aP/c})D, \\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= hc(1 - \mathrm{e}^{-aP/c})D - mD. \end{aligned}$$

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales

Ejercicio 1. Comprobar que la función $y = y(t)$ que verifica la ecuación $(1-t)\,y^2 = t^3$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria $2t^3\,y' = y\,(y^2+3t^2)$.

Ejercicio 2. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1,3)$ y cuya pendiente en el punto (x,y) es $y/3$.

Ejercicio 3. Sea $N(t)$ el tamaño de un cultivo de bacterias. Se sabe el cultivo crece según la ley de crecimiento exponencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad \text{con} \quad N(0) = N_0$$

1. Calcular los equilibrios de la ecuación $\frac{dN}{dt} = rN$ y analizar su estabilidad.
2. Resolver el problema de valor inicial arriba expuesto.
3. Calcular el valor de la constante r, sabiendo que $N(1) = \frac{3}{2}N_0$.
3. Calcular el tiempo necesario para que el tamaño de la colonia de bacterias se duplique.

Ejercicio 4. Una población de mosca de la fruta crece según la ley de crecimiento exponencial. Si había 180 moscas tras el segundo día y 300 tras el cuarto, ¿cuántas moscas había en la población original?

Ejercicio 5. Supongamos que se sigue la evolución de una población a lo largo del tiempo. Si se dibuja el tamaño de la población en función del tiempo en una escala semilogarítmica (es decir, el eje horizontal representa el tiempo en escala lineal y el eje vertical representa el tamaño de la población en escala logarítmica), se obtiene que los datos se ajustan a una línea recta que corta al eje vertical en 1 (escala logarítmica) y cuya pendiente es $-0{,}43$. Obténgase una ecuación diferencial que relacione la velocidad de crecimiento de la población en el instante t con el tamaño de la población en el mismo instante.

Ejercicio 6. Sea $W(t)$ la cantidad de material radiactivo en el instante t. La desintegración radiactiva se describe mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W(t) \quad \text{con} \quad W(0) = W_0$$

siendo λ una constante positiva, denominada constante de desintegración. Se pide:

1. Resolver el problema de valor inicial arriba expuesto.
2. Calcular la constante de desintegración y determinar la “vida media” o “semivida” de la sustancia radiactiva (tiempo necesario para que la cantidad de material $W(t)$ pase a ser la mitad $\frac{1}{2}W(t)$, sabiendo que $W(0) = 123$ gr. y que $W(5) = 20$ gr. y que el tiempo se mide en minutos.

Ejercicio 7. La semivida de un elemento radiactivo es de 25 años. De un gramo inicial, ¿cuánto queda tras 15 años?

Ejercicio 8. El carbono-14 (C_{14}) es un isótopo radiactivo del carbono que se desintegra siguiendo la ley exponencial. El C_{14} se produce de manera continua en la atmósfera como consecuencia de la radiación cósmica. Las plantas incorporan C_{14} mediante la fotosíntesis y los animales lo incorporan por ingestión de manera que la proporción entre el C_{14} y el C_{12} en los seres vivos es similar a la existente en la atmósfera. Al morir, los organismos vivos dejan de absorber C_{14} y la concentración de éste en los tejidos va decreciendo según la ley exponencial. Suponiendo que la proporción de C_{14} en la atmósfera permanece constante a lo largo del tiempo, es posible obtener una estimación razonable de la edad de un fósil comparando la proporción de C_{14} que contiene con la de la atmósfera. Este método de datación por carbono-14 fue descubierto en 1949 por Willard Libby. Por su trabajo Libby obtuvo en premio Nobel en 1960. Actualmente se sabe que no es correcta la hipótesis de que la concentración de C_{14} en la atmósfera es constante, no obstante, se conoce con precisión la evolución de esta concentración en los últimos 25.000 años, por lo que puede corregirse la estimación de edad.

Se sabe que la vida media del C_{14} es de 5730 años. Se ha encontrado un fósil que contiene $1/900$ de la cantidad original de C_{14}. Estimar la edad del fósil.

Ejercicio 9. *La ley de Newton del enfriamiento.* Esta ley afirma que un cuerpo se enfría con una velocidad proporcional a la diferencia de temperatura respecto al medio que lo rodea. Si llamamos $T(t)$ a la temperatura del cuerpo caliente en el instante t y T_m a la temperatura del medio (se supone que permanece constante), esta ley se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$T'(t) = -k(T(t) - T_m).$$

Un cuerpo se calienta a 110ºC y se coloca al aire a 10ºC; tras una hora su temperatura es 60ºC. ¿Cuánto tiempo tardará todavía en alcanzar los 30ºC?

Ejercicio 10. Utilizando la ley de Newton del enfriamiento, determinar la hora de la muerte de una persona cuyo cadáver se encontró a las 10h, con una temperatura de 30ºC en una habitación con temperatura constante de 22ºC, sabiendo que una hora más tarde la temperatura del cadáver había descendido a 28ºC y que la temperatura de una persona viva es de 37ºC aproximadamente.

Ejercicio 11. En un modelo de propagación de una epidemia en una población de tamaño n, el número de individuos infectados en el instante t, que se denota $Y(t)$, sigue la ecuación diferencial

$$\frac{dY}{dt} = \beta \cdot Y \cdot (n - Y)$$

donde β es una constante positiva que mide la tasa de contacto entre individuos infectados y susceptibles.

1. Calcular los equilibrios de la ecuación diferencial y analizar su estabilidad.
2. Obtener una expresión del número de individuos infectados en el instante n.

3. Para una población de tamaño $n = 1000$, tasa de contacto $\beta = 0{,}001$ por día y un número inicial de individuos infectados $Y_0 = 10$, calcular el tiempo necesario para que esté infectada (i) el 50 % y (ii) el 90 % de la población.
4. Repetir los cálculos anteriores para una población de tamaño $n = 2000$ y comentar los resultados obtenidos.

Ejercicio 12. El tamaño $N(t)$ de una población satisface la ecuación logística

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}34N\left(1 - \frac{N}{200}\right) \quad \text{con} \quad N(0) = 50$$

1. Calcular los equilibrios de esta ecuación logística y analizar su estabilidad.
2. Resolver la ecuación diferencial y determinar el tamaño de la población a largo plazo, es decir, calcular $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

Ejercicio 13. *El efecto Allee.* En especies que se reproducen sexualmente, la velocidad de crecimiento de la población puede ser muy baja cuando la población cae por debajo de un cierto nivel, debido a la falta de apareamientos. Esto se conoce como efecto Allee. Para incorporar este efecto, se realiza una modificación en la ecuación logística:

$$\frac{dN}{dt} = rN(N-a)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

siendo r, K y a constantes positivas. Se supone que $0 < a < K$. Como en la ecuación logística, K indica la capacidad de alojamiento. La constante a es un umbral sobre el tamaño de la población por debajo del cual la velocidad de crecimiento es negativa, lo que indica que la población disminuirá y finalmente se extinguirá.

1. Estudiar y representar gráficamente la función $h(N) = rN(N-a)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$
2. Calcular los equilibrios y analizar su estabilidad, para la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = rN(N-a)\left(1 - \frac{N}{K}\right)$
3. Interpretar los resultados obtenidos.

Ejercicio 14. *Un modelo simple de depredación.* Supongamos que $N(t)$ indica el tamaño de una población en el instante t. La población evoluciona de acuerdo con la ecuación logística pero, además, la depredación reduce el tamaño de la población de forma que la velocidad de cambio se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dN}{dt} = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5+N}$$

El primer término del miembro derecho modela el crecimiento logístico. El segundo modela el efecto de la depredación.

1. Dibujar la gráfica de la función $h(N) = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5+N}$
2. Calcular los equilibrios de la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5+N}$.
3. Analizar la estabilidad de los equilibrios obtenidos.

Ejercicio 15. Supongamos que una población de peces evoluciona de acuerdo a la ecuación logística y que se recogen un número fijo de peces por unidad de tiempo. Es decir,

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - H$$

Calcular los equilibrios y analizar su estabilidad cuando $r = 2$, $K = 1000$ y $H = 100$.

Ejercicio 16. Sea $L(t)$ la longitud de un pez en el instante t. Supongamos que el pez crece de acuerdo con la ecuación de von Bertalanffy

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{3}(10 - L) \quad \text{con} \quad L(0) = 1$$

1. Calcular el punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\frac{dL}{dt} = \frac{1}{3}(10 - L)$ y analizar su estabilidad. ¿Qué significado biológico tiene el resultado obtenido?
2. Resolver el problema de valor inicial arriba expuesto.
3. Calcular la longitud asintótica del pez, es decir, $\lim_{t\to\infty} L(t)$.
4. Calcular el tiempo que el pez tarda en alcanzar la mitad de la longitud asintótica.

Ejercicio 17. Sea $S(t)$ la concentración de soluto en un compartimiento en el instante t y supongamos que

$$\frac{dS}{dt} = 3(20 - S(t))$$

1. Resolver esta ecuación diferencial cuando $S(0) = 5$.
2. Calcular en qué instante t ocurre que $S(t) = 10$.
3. Calcular $\lim_{t\to\infty} S(t)$.

Ejercicio 18. Supongamos que un tanque contiene 1000 litros de agua, y que se disuelven 2 kg de sal.

1. Calcular la concentración de sal de g litro^{-1}.
2. Supongamos que se desea reducir la concentración de sal. Un método sería quitar una cierta cantidad de agua salada del tanque y sustituirla después por agua pura. ¿Cuánta agua salada habría que reemplazar por agua pura para obtener una concentración de sal de 1 g litro^{-1}?
3. Otro método para reducir la concentración de sal sería aplicar una tubería de desbordamiento y bombear agua pura en el tanque. De esta forma la concentración de sal se reduciría gradualmente. Supongamos que tenemos dos bombas, una que bombea agua a una velocidad de 1 litro s^{-1} y otra que bombea a una velocidad de 2 litros s^{-1}. Para cada bomba, calcúlese cuánto tiempo se tardaría en reducir la concentración de sal desde la concentración inicial hasta 1 g litro^{-1}, y cuánta agua pura necesita en cada caso (nótese que la velocidad a la que el agua entra en el tanque es igual a la velocidad

a la que el agua sale del tanque). Compárese la cantidad de agua necesaria utilizando las bombas con la cantidad de agua necesaria en el apartado (b).

Ejercicio 19. Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t. Supongamos que la población evoluciona de acuerdo con la ecuación logística, que la tasa de crecimiento intrínseca es de 5 y que la capacidad de alojamiento es de 30.

1. Escribir una ecuación diferencial que describa el crecimiento de esta población.
2. Sin resolver la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior, dibujar las curvas de la solución para $N(t)$ en función de t cuando $N(0) = 10,\ N(0) = 20$ y cuando $N(0) = 40$.

Ejercicio 20. Sea $N(t)$ el tamaño de una población en el instante t. Supongamos que la población evoluciona de acuerdo con la ecuación logística:

$$\frac{dN}{dt} = r\,N\left(1 - \frac{N}{346}\right) \quad \text{con} \quad N(0) = 25$$

1. Resolver el problema de valor inicial.
2. Calcular la tasa de crecimiento intrínseca es decir, r, sabiendo que $N(12) = 150$.
3. ¿En qué momento se alcanza la máxima velocidad de crecimiento?

Ejercicio 21. Sea $L(t)$ la longitud de un pez en el instante t. Supongamos que el pez crece de acuerdo con la ecuación de von Bertalanffy

$$\frac{dL}{dt} = k(34 - L(t)) \quad \text{con} \quad L(0) = 2$$

1. Resolver el problema de valor inicial arriba expuesto.
2. Determinar la constante k, bajo el supuesto de que $L(4) = 10$. Dibujar la gráfica de $L(t)$ para este valor de k.
3. Calcular la longitud del pez cuando $t = 10$.
4. Calcular la longitud asintótica del pez, es decir, $\lim_{t\to\infty} L(t)$.

Ejercicio 22. Supongamos que tenemos una reacción química $A + B \to C$ y que en $t = 0$ la concentración de A es a y la de B es b. Llamemos $X(t)$ a la cantidad de producto C en el instante t. Se sabe que la velocidad de formación C es proporcional a la concentración de A y B. Esto es decir que la formación de C viene dada por el problema de valor inicial

$$x' = k(a - x)(b - x), \quad x(0) = 0,$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Resolver este problema de valor inicial, suponiendo $a \neq b$.

Ejercicio 23. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= x \end{aligned}$$

1. Comprobar que, para cualquier par de constantes c_1, c_2, las funciones
$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\left((\frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + (-\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2)\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$
$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$
forman una solución del sistema.
2. Determinar la solución que cumple las condiciones iniciales $x(0) = \frac{1}{2}$ e $y(0) = 1$.

Ejercicio 24. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= x + 2y \end{aligned}$$

1. Comprobar que, para cualquier par de constantes c_1, c_2, las funciones
$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\mathrm{e}^{2t} \\ y(t) &= \mathrm{e}^{2t}(c_2 + c_1 t) \end{aligned}$$
forman una solución del sistema.
2. Determinar la solución que cumple las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 1$.

Ejercicio 25. Describir cómo evoluciona el sistema depredador-presa de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} P' &= 5P - DP \\ D' &= PD - D \end{aligned}$$

a partir de las siguientes condiciones iniciales:

1. $P(0) = 2$, $D(0) = 3$
2. $P(0) = 0{,}5$, $D(0) = 6$
3. $P(0) = 1$, $D(0) = 5$
4. $P(0) = 1$, $D(0) = 3$

Ejercicio 26. Consideremos el modelo modificado de Lotka-Volterra que contempla el crecimiento logístico de la presa:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= rP\big(1 - \tfrac{P}{K}\big) - aPD, \\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= haPD - mD. \end{aligned}$$

1. Calcular las isoclinas cero.

2. Calcular los puntos de equilibrio del sistema y determinar la capacidad de alojamiento mínima K para que exista un equilibrio no trivial, es decir $(\hat{P}, \hat{D})$, con $\hat{P} > 0$ y $\hat{D} > 0$.

Autoevaluación de Ecuaciones Diferenciales

Indica las afirmaciones que sean correctas. Justifica las respuestas.

1. (a) La función $x(t) = \text{sen}(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x^2 + (x')^2 = 1$.
   (b) La función $x(t) = \text{sen}(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x' = \cos(x)$
   (c) La función $e^{-\frac{t}{2}}$ es solución de la ecuación diferencial $2x' + x = 0$.
   (d) La función $e^{-\frac{t}{2}}$ es solución del problema de valor inicial $2x' + x = 0$, $x(0) = -\frac{1}{2}$.
2. Si $y(t)$ es solución de la ecuación diferencial $y' = y^2 + 1$ entonces
   (a) la función $y(t)$ es estrictamente creciente;
   (b) $y'' = 2y$;
   (c) $y(t)$ presenta un punto de inflexión cuando $y = 0$;
   (d) Si $y(0) = 0$ entonces $y'(0) = 1$.
3. Sea $N(t)$ el número de bacterias, en millones, que hay en un cultivo en el instante t. Se sabe que el cultivo crece según la ley exponencial. El número inicial de bacterias es $N(0) = 1$ y al cabo de una hora es $N(1) = 2$.
   (a) Al cabo de tres horas habrá tres millones de bacterias, es decir, $N(3) = 3$.
   (b) $N(4) = 4$.
   (c) La tasa intrínseca de crecimiento de la población es $r = \ln 2$.
   (d) El tiempo de duplicación es $\tau = 1$.
4. Para la ecuación diferencial $N' = 2N(5 - N)$:
   (a) $\hat{N} = 2$ es un equilibrio inestable;
   (b) $\hat{N} = 0$ es un equilibrio inestable;
   (c) $\hat{N} = 5$ es un equilibrio estable;
   (d) $\hat{N} = 5/2$ es un equilibrio estable.
5. La densidad de una cierta población, medida en miles de individuos, sigue la ecuación logística
   $$N' = 2N(5 - N)$$
   (a) La capacidad de carga del medio es de 1000 individuos.
   (b) La tasa de crecimiento intrínseca es $r = 2$.
   (c) Si la población inicial es de 2000 individuos , la función $N(t)$ es decreciente.
   (d) Al cabo de un tiempo suficientemente largo, la población se aproxima a los 5000 individuos.
6. Sea $N(t)$ una solución de la ecuación logística
   $$N' = 0{,}34N(1 - \frac{N}{200}),$$

(a) si N(0)=50, entonces $N'(0) = 12{,}75$;
(b) si N(0)=50, entonces $N(0{,}5) \simeq 56{,}375$;
(c) si N(0)=200, entonces $N(1) \simeq 212{,}75$;
(d) si N(0)=100, entonces $N(1) \simeq 101{,}7$;

7. El crecimiento de un pez se rige por la ley de von Bertalanffy
$$L' = \frac{1}{3}(12 - L).$$
(a) $\hat{L} = 0$ es un equilibrio inestable.
(b) La longitud asinótica del pez es $L_\infty = 4$.
(c) Si $L(0) = 1$ entonces $L(t) = 12 - 11\mathrm{e}^{-1/3t}$.
(d) Si $L(0) = 1$ entonces $L(1) \simeq 4{,}118$.

8. En una ciudad de 2000 habitantes una epidemia de gripe se extiende según la ecuación diferencial
$$y' = py(2000 - y),$$
donde $y(t)$ es el número de personas afectadas por la enfermedad en el instante t (el tiempo se mide en semanas) y $p = 0,002$. Si inicialmente hay 2 personas afectadas, entonces
(a) El número de personas afectadas en el instante t viene dado por la función
$$y(t) = \frac{2000}{1 + 999e^{4t}}.$$
(b) El número de personas afectadas en el instante t viene dado por la función
$$y(t) = \frac{2000}{1 + 999e^{-4t}}.$$
(c) Al cabo de 2 semanas estará afectada el 75 % de la población.
(d) Al cabo de un tiempo suficientemente largo estará afectada toda la población.

9. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales
$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x + y \end{aligned}$$
(a) La pareja de funciones $x(t) = 0$, $y(t) = \mathrm{e}^t$ es una solución del sistema.
(b) Para las condiciones iniciales $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$ el sistema no tiene solución.
(c) La pareja de funciones $x(t) = \mathrm{e}^t$, $y(t) = t\mathrm{e}^t$ es la solución del sistema que cumple las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.
(d) Si $x(t)$, $y(t)$ es una solución del sistema y las dos funciones son positivas, entonces ambas funciones son crecientes.

10. Dado el sistema depredador-presa de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} P' &= 2P(3-D) \\ D' &= D(P-1) \end{aligned}$$

(a) Siempre que el número de presas sea igual al de depredadores, $P = D$, la población se mantendrá estable.
(b) Si la población en el instante t es $P(t) = 2$, $D(t) = 2$ entonces ambas poblaciones crecen.
(c) Para que la población de depredadores aumente la población mínima de presas debe ser $P = 3$.
(d) A partir de una población de depredadores $D = 3$ el número de presas comienza a disminuir.

TEMA IV

Introducción a la probabilidad

Introducción

En la naturaleza podemos observar fenómenos que, realizados en las mismas condiciones, dan lugar a idénticos resultados. Por ejemplo, en el movimiento uniforme, todo aumento de la velocidad (v) de un cuerpo da lugar a un aumento del espacio recorrido por el mismo (e) en un intervalo de tiempo (t), de acuerdo con la ecuación $e = v \cdot t$. La repetición del experimento en diferentes ocasiones conduce siempre al mismo resultado. Son los llamados fenómenos deterministas.

Existen otros fenómenos en la naturaleza en los que no se puede predecir cuál será el resultado final, incluso cuando se hace todo lo posible para que las condiciones en las que se realiza el experimento sean las mismas, como ocurre por ejemplo en el lanzamiento al aire de una moneda. Son los llamados fenómenos aleatorios. Muchos son los ejemplos de fenómenos aleatorios relacionados con las Ciencias de la vida: la duración de la vida de un organismo, el número de huevos de una puesta, la herencia de un gen, la curación de un enfermo tras la aplicación de un cierto tratamiento, etc.

La Teoría de la Probabilidad y la Estadística son las disciplinas que proporcionan herramientas y métodos para el estudio de los fenómenos aleatorios. La Teoría de la Probabilidad proporciona herramientas para modelar la aleatoriedad y constituye la base de la Estadística. La Estadística proporciona herramientas para analizar los datos de los experimentos. Esta ciencia se interesa por la recogida, presentación y resumen de datos y por la obtención de información a partir de ellos con el propósito de estudiar posibles relaciones entre variables de interés para el hombre.

La Estadística Matemática tiene por objeto el desarrollo de nuevos métodos estadísticos, para lo que se precisa a menudo de complejas técnicas matemáticas.

La Estadística Aplicada consiste en la aplicación de los métodos de la estadística matemática en otras áreas como pueden ser Economía, Psicología, Sociología, Medicina o Biología.

La Bioestadística es la rama de la Estadística aplicada que se encarga de la aplicación de los métodos estadísticos en las ciencias de la salud y en Biología.

En este tema de la asignatura de Matemáticas estudiaremos algunos conceptos fundamentales (sucesos, probabilidad, independencia de sucesos) con el fin de proporcionar una mínima base matemática para el estudio de los fenómenos aleatorios, que se realizará con mayor profundidad en la asignatura de Bioestadística.

Para elaborar esta capítulo hemos utilizado la siguiente bibliografía: capítulo 2 de [**Del04**], capítulo 1 de [**Gar04**], capítulo 12 de [**Neu04**] y capítulo 4 de [**RB05**].

1. Sucesos aleatorios.

Definición IV.1.1. Diremos que un **experimento** es **aleatorio** cuando cumpla tres requisitos:

(a) Puede ser repetido cuantas veces se desee.
(b) Los posibles resultados del experimento se conocen a priori, es decir, antes de realizar el experimento. Todos los posibles resultados forman un conjunto al que denominaremos **espacio muestral** y lo designaremos mediante Ω.
(c) El resultado que se obtendrá en una ejecución del experimento es impredecible antes de que se ejecute el experimento.

Ejemplo IV.1.2. Supongamos que se lanza una moneda con cara (C) y cruz (X). Si se lanza la moneda una vez, los posibles resultados son C y X y el espacio muestral es

$$\Omega = \{C, X\}.$$

Si se lanza la moneda dos veces seguidas, cada resultado es un par ordenado con el resultado de la primera tirada seguido del resultado de la segunda tirada. El espacio muestral en este caso es

$$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}.$$

Ejemplo IV.1.3. Consideremos una población de individuos diploides que presenta tres alelos de un gen: A_1, A_2 y A_3. Si seleccionamos al azar un individuo de esta población, el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es

$$\Omega = \{A_1A_1,\ A_1A_2,\ A_1A_3,\ A_2A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_3\}$$

Cuando se realiza un experimento aleatorio, se considera a menudo un resultado particular, o una colección de resultados que forman un subconjunto del espacio muestral. Estos subconjuntos se denominan sucesos.

Definición IV.1.4. Un **suceso aleatorio** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Se dice que ha ocurrido un suceso aleatorio A cuando el resultado de la ejecución de un experimento aleatorio es uno de los elementos de A.

Definición IV.1.5. Un **suceso elemental** es un suceso aleatorio formado por un único elemento del espacio muestral del experimento aleatorio.

Ejemplo IV.1.6. El espacio muestral asociado al experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6 es

$$\Omega = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4), \dots\} = \{(i,j) :\ 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq 6\}.$$

El suceso A, "la suma de las puntuaciones obtenidas es igual a 5" , es el subconjunto del espacio muestral

$$A = \{(1,4),\ (2,3),\ (4,1),\ (3,2)\}.$$

Cada uno de los sucesos $\{(1,1)\},\ \{(1,2)\},\ \{(1,3)\}$, etc., es un suceso elemental.

Ejercicio IV.1.7. De una urna que contiene cinco bolas idénticas numeradas del uno al cinco se extraen simultáneamente dos bolas.

1. Escribir el espacio muestral Ω asociado a este experimento aleatorio.
2. Escribir el subconjunto de Ω asociado a cada uno de los siguientes sucesos:
   - A, "la numeración de alguna de las bolas es par;"
   - B, "la numeración de alguna de las bolas es mayor o igual que 3;"
   - C, "la numeración de alguna de las bolas es par y la numeración de alguna es mayor o igual que 3;"
   - D, "la numeración de alguna de las bolas es par o la numeración de alguna es mayor o igual que 3."

Definición IV.1.8. El **suceso seguro** es el suceso aleatorio que incluye a todos los elementos del espacio muestral. Como su nombre indica ocurre siempre que realizamos el experimento. Lo designaremos mediante Ω.

Definición IV.1.9. El **suceso imposible** es el suceso aleatorio que no incluye a ninguno de los elementos del espacio muestral. Como su nombre indica no ocurre nunca, pero es preciso designarlo. Lo denotaremos mediante $\varnothing$.

Operaciones con sucesos.

Definición IV.1.10. Si A y B son dos sucesos del espacio muestral Ω , llamaremos **suceso unión** de A y B, y lo denotaremos como $A\cup B$ al subconjunto de Ω que tiene como elementos a todos los que pertenecen a A o a B. El suceso $A\cup B$ ocurrirá cuando el resultado del experimento sea uno de los sucesos elementales que componen A o B, es decir, cuando ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Esta definición se puede generalizar a un número finito de sucesos. Si $A_1,\ A_2,\dots A_n$ son sucesos de un mismo espacio muestral Ω entonces:

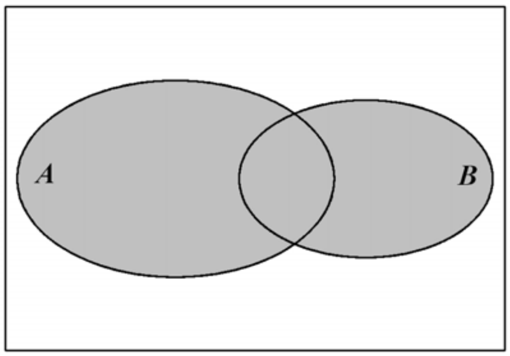
$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n = \left[\begin{array}{c}\text{conjunto de todos los resultados que}\\ \text{pertenecen a alguno de los conjuntos } A_i\end{array}\right]$$

Definición IV.1.11. Si A y B son dos sucesos del espacio muestral Ω, llamaremos **intersección** de A y B, y lo denotaremos $A\cap B$ subconjunto de Ω que tiene como elementos a aquellos que son comunes a A y a B. Es decir, el suceso $A\cap B$ ocurrirá cuando ocurran simultáneamente A y B.

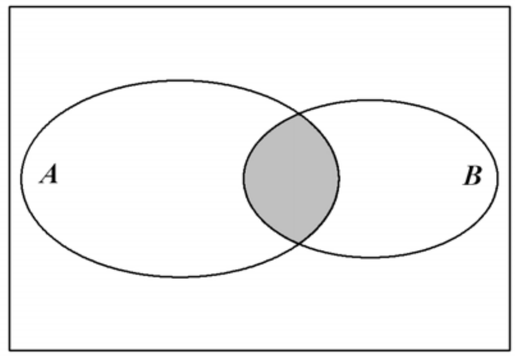
Esta definición se puede generalizar a un número finito de sucesos. Si $A_1,\ A_2,\dots A_n$ son sucesos de un mismo espacio muestral Ω entonces:

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n = \left[\begin{array}{c}\text{conjunto de todos los resultados que}\\ \text{pertenecen a todos los conjuntos } A_i\end{array}\right]$$

Para ilustrar las operaciones con sucesos (en general, con conjuntos) pueden ser útiles los llamados **diagramas de Venn**. En estos diagramas cada conjunto se representa mediante un óvalo o círculo. Véanse las siguientes figuras:



La unión de A y B, $A \cup B$, ilustrada en un diagrama de Venn.



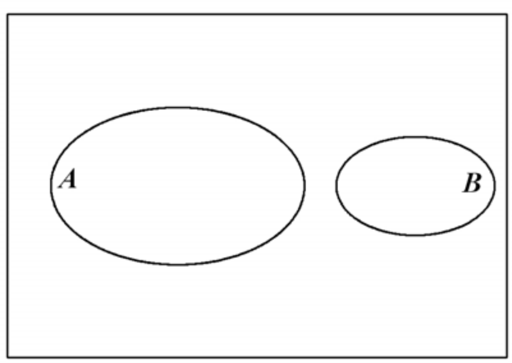
La intersección de A y B, $A \cap B$, ilustrada en un diagrama de Venn.

Ejemplo IV.1.12. En el experimento aleatorio considerado en el ejercicio IV.1.7, la unión de los sucesos A y B es el suceso D, es decir, $A \cup B = D$. La intersección de A y B es $A \cap B = C$.

Ejercicio IV.1.13. Una población está formada por individuos rubios y morenos que tienen los ojos claros u oscuros. Se elige al azar un individuo de la población y consideramos los sucesos A, "el individuo es rubio", B, "el individuo es moreno" y C, "el individuo tiene los ojos claros". Describir los siguientes sucesos:

$$A \cup C, \quad A \cup B, \quad A \cap C \quad \text{y} \quad A \cap B.$$

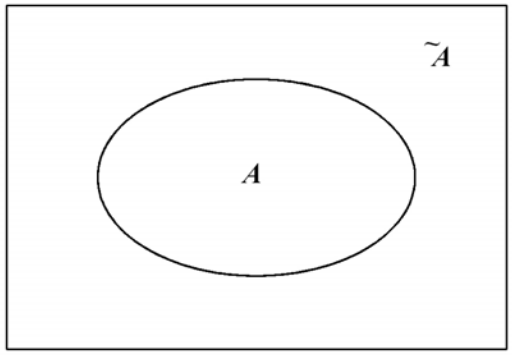
Definición IV.1.14. Dos **sucesos** son **incompatibles** si su intersección es el suceso imposible. Es decir, cuando ambos no pueden ocurrir a la vez.



Por ejemplo, los sucesos A y B descritos en el ejemplo IV.1.13 son incompatibles.

Ejercicio IV.1.15. Se lanzan a la vez dos dados, con las caras numeradas del 1 al 6. Escribir dos sucesos que sean incompatibles con el suceso A, “la suma de las puntuaciones obtenidas es par” .

Definición IV.1.16. Diremos que dos **sucesos** son **complementarios** si son incompatibles y su unión es el suceso seguro. Al complementario del suceso A lo denotaremos $\tilde{}A$. Observemos que $\tilde{}A$ es el suceso que ocurre si y sólo si no ocurre A.



Ejercicio IV.1.17. Una urna contiene 4 bolas verdes, 6 bolas azules y 2 bolas rojas. Se extraen, sin reposición, tres bolas de la urna. Determinar el complementario de cada uno de los siguientes sucesos:

1. A, “las tres bolas son verdes;”
2. B, “ninguna de las tres bolas es verde;”
3. C, “alguna de las tres bolas es verde.”

Ejercicio IV.1.18. Tres arqueros hacen cada uno un disparo sobre un blanco. Escribir el espacio muestral que recoge todos los posibles resultados de los tres disparos, teniendo en cuenta que el resultado de cada disparo puede ser acertar en el blanco (A) o fallar (F). Escribir, como subconjunto de Ω cada uno de los siguientes sucesos:

1. A_1, “Todos dan en el blanco.”
2. A_2, “Da en el blanco sólo el segundo.”
3. A_3, “Ninguno da en el blanco.”
4. A_4, “Alguno da en el blanco.”
5. A_5, “Sólo uno da en el blanco.”
6. Describir el complementario de cada uno de los sucesos anteriores.

A la hora de realizar operaciones con sucesos es interesante tener en cuenta las propiedades que exponemos a continuación.

Propiedades de las operaciones con sucesos (conjuntos).

(a) $\tilde{}\Omega = \varnothing$ y $\tilde{}\varnothing = \Omega$.
(b) $\tilde{}(\tilde{}A) = A$.
(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(e) ***Leyes de De Morgan***[1]*:*

$$\tilde{}(A \cup B) = \tilde{}A \cap \tilde{}B$$

$$\tilde{}(A \cap B) = \tilde{}A \cup \tilde{}B$$

Demostración. La demostración de estas propiedades se plantean como ejercicio al lector. ■

Ejercicio IV.1.19. Describir el complementario de cada uno de los siguientes sucesos:

1. A, B, C y D del ejercicio IV.1.7.
2. $A \cup C$ y $A \cap C$ del ejercicio IV.1.13.

2. Probabilidad

SUPONGAMOS que realizamos un experimento aleatorio que tiene asociado el espacio muestral Ω y estamos interesados por un suceso concreto A. Queremos medir de alguna manera el grado de confianza que podemos tener en que al realizar el experimento se obtenga un resultado que esté en A. (¿Cuánto apostaríamos a que A va o no a realizarse?). La probabilidad proporciona la medida del grado de incertidumbre que poseemos sobre la ocurrencia de un determinado suceso en la realización futura del experimento aleatorio. Esta medida debe satisfacer ciertas propiedades que posteriormente indicaremos y que son análogas a las que se verifican para la medida del área de las figuras en el plano (no en vano, el matemático ruso A. N. Kolmogorov fijó la misma base matemática para el cálculo de probabilidades que para la Teoría de la Medida, parte de las Matemáticas que se ocupa del cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.).

Un primer concepto de probabilidad surge como una abstracción de la idea de frecuencia relativa de un suceso en una larga serie de repeticiones independientes del experimento. La **frecuencia relativa** de un suceso A cuando se ha realizado n veces un experimento es el cociente entre el número de veces que ha ocurrido A y el número n de pruebas realizadas.

En general ocurre que, para cualquier fenómeno aleatorio y cualquier suceso A, cuando la repetición del experimento tiende a infinito, la frecuencia relativa del suceso A tiende a un cierto número $P(A)$. Este hecho, comprobable empírica y matemáticamente (es consecuencia de la llamada Ley de los Grandes Números) es la base de la definición frecuencial de probabilidad, que si bien presenta ciertos inconvenientes desde un punto de vista formal, puede servir de punto de partida intuitivo para una aproximación matemáticamente más apropiada que es la definición axiomática de probabilidad, debida a Kolmogorov.

[1]Por el matemático inglés, nacido en la india, A. De Morgan (1806 - 1871)

Definición frecuencial de probabilidad (*Ley de los Grandes Números*). La probabilidad de un suceso es el límite, cuando n tiende a infinito, de la frecuencia relativa del suceso encontrada al repetir el experimento aleatorio n veces.

Definición IV.2.1. **Definición axiomática de probabilidad. (Kolmogorov, 1933)** Una probabilidad en un espacio muestral Ω es una aplicación P que asigna a cada suceso $A \subseteq \Omega$ un número $P(A)$, de forma que se cumplan los tres requisitos o axiomas siguientes:

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \subseteq \Omega$.
(b) $P(\Omega) = 1$.
(c) Si A y B son dos sucesos incompatibles entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Nota IV.2.2. Debe quedar claro que los tres axiomas anteriores son propiedades que se exigen necesariamente para que la aplicación P sea una probabilidad. Es decir, una aplicación P que no cumpla alguno de los axiomas no es una probabilidad.

Estos axiomas pueden justificarse de forma intuitiva a partir de la aproximación frecuencial a la probabilidad: el primer axioma viene motivado porque la frecuencia relativa siempre está entre 0 y 1; el segundo porque la frecuencia relativa del suceso seguro es siempre 1; finalmente puede probarse sin ninguna dificultad que la frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las frecuencias relativas de cada uno de ellos, lo que justifica el tercer axioma.

Haciendo uso de los tres axiomas podemos deducir las siguientes propiedades de la probabilidad.

Propiedades de la Probabilidad. *Sean A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral Ω.*

(P1) $P(\tilde{}A) = 1 - P(A)$
(P2) $P(\emptyset) = 0$.
(P3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
(P4) *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$), entonces*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Demostración. La demostración de las tres primeras propiedades puede consultarse en [**Del04**], pág. 44-45.

En cuanto a P4, no hay más que tener en cuenta que

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n =$$
$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n =$$
$$((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-2}) \cup A_{n-1}) \cup A_n = \ldots .$$

■

Ejemplo IV.2.3. **Definición clásica de probabilidad de Laplace.** *Si un experimento aleatorio tiene n resultados posibles, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, todos ellos igualmente posibles o probables, y un suceso aleatorio de este experimento puede ocurrir de k formas distintas, la probabilidad del suceso aleatorio es el cociente entre k y n. Es decir, la probabilidad de que ocurra un suceso es, según esta definición, igual al cociente*

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}.$$

Es fácil comprobar que esta definición de probabilidad satisface los tres axiomas de la definición de Kolmogorov IV.2.1.

Esta definición clásica de probabilidad es aplicable sólo en el caso en que el espacio muestral es finito, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, y todos los sucesos elementales son equiprobables, $P(\omega_i) = 1/n$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Por ejemplo, cuando lanzamos un dado, admitiremos que éste es perfecto cuando todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad, es decir, todas ellas serán igual a $1/6$ (pues deben sumar 1). La probabilidad de sacar número par será igual a $3/6 = 1/2$, la de sacar un múltiplo de 3 será $2/6 = 1/3$, etc.

La hipótesis de que los sucesos elementales son equiprobables no puede admitirse sin una justificación apropiada. Por ejemplo, si elegimos un individuo al azar en una población puede ocurrir que tenga una cierta enfermedad o no la tenga, pero, en este caso, no parece razonable suponer que ambas cosas son igualmente probables.

Ejemplo IV.2.4. Supongamos conocido que en España el 41 % de la población es del grupo sanguíneo A, el 9 % del B, el 4 % del AB y el 46 % restante del O. Si elegimos un individuo al azar en España y miramos su grupo sanguíneo, el espacio muestral asociado tendrá cuatro elementos, $\Omega = \{A, B, AB, O\}$. Los sucesos elementales de este espacio no tienen todos la misma probabilidad, pues $P(A) = 0{,}41$, $P(B) = 0{,}09$, $P(AB) = 0{,}04$ y $P(O) = 0{,}46$. Para calcular la probabilidad de que un individuo elegido al azar sea de los grupos A o B, usamos el tercer axioma:

$$P(\{A, B\}) = P(\{A\} \cup \{B\}) = P(A) + P(B) = 0{,}41 + 0{,}09 = 0{,}50.$$

Ejercicio IV.2.5. Se lanza una moneda perfecta tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras?

Ejemplo IV.2.6. Vamos a considerar ahora un experimento aleatorio en el que el espacio muestral es infinito. Supongamos que fijamos una región R del plano, por ejemplo el círculo limitado por la circunferencia de centro el origen y radio igual a 1, es decir,

$$R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Elegimos al azar un punto p de R y queremos calcular la probabilidad de que dicho punto esté en una subregión determinada S de R. Esta probabilidad será:

$$P(p \in S) = \frac{\text{Área de S}}{\text{Área de R}}.$$

Por ejemplo, si S es el círculo de radio $1/2$ y centro en el origen, $S = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 1/4\}$, entonces

$$P(p \in S) = \frac{\pi(1/2)^2}{\pi} = \frac{1}{4}.$$

Estudiamos a continuación un caso particular de este ejemplo que será de gran utilidad para el manejo de las funciones de distribución de las variables aleatorias en la asignatura de Bioestadística.

Ejemplo IV.2.7. **Áreas bajo la curva normal.** Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

consideremos la región del plano limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX, a la que llamaremos R. Como ya indicamos al estudiar las integrales impropias, ejemplo II.2.15, el área de esta región es

$$A(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Puesto que el área de R es igual a 1, si determinamos una cierta subregión, la probabilidad de que un punto elegido al azar esté en la subregión será igual al área de la subregión.

La probabilidad de que elegido un punto (x, y) al azar bajo la curva normal, su primera coordenada sea mayor o igual que cero y menor igual que un valor dado z, es decir, $0 \leq x \leq z$ será:

$$P(0 \leq x \leq z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

El cálculo de esta probabilidad se realiza con ayuda de tablas. La tabla del apéndice IV proporciona los valores de esta probabilidad para los valores de z de la forma $z = n.d_1d_2$, con $n, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ y $0 \leq n \leq 3$. El valor correspondiente a $n.d_1d_2$ es el situado en la fila $n.d_1$, columna d_2. Por ejemplo:

$$P(0 \leq x \leq 0{,}57) = 0{,}2157, \quad \text{y} \quad P(0 \leq x \leq 1{,}61) = 0{,}4463$$

Para cualquier pareja de valores $z_1 < z_2$, $\;z_1, z_2 \in [+\infty, -\infty]$ la probabilidad $P(z_1 \leq x \leq z_2)$ se obtiene a partir de la tabla utilizando las propiedades de la probabilidad y de las integrales.

Por ejemplo, si $z > 0$:

$$P(z \leq x) = P(z \leq x < +\infty) = 1 - P(x < z) = 1 - \int_{-\infty}^{z} f(x)dx =$$

$$1 - (\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^z f(x)dx) = 1 - (\frac{1}{2} + P(0 \leq x \leq z)) = \frac{1}{2} - P(0 \leq x \leq z),$$

y el valor de $P(0 \leq x \leq z)$ puede consultarse en la tabla.

Ejercicio IV.2.8. Se elige un punto (x, y) de la región del plano limitada por la curva normal $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ y el eje OX. Con ayuda de la tabla del apéndice IV, calcular las siguientes probabilidades:

1. $P(x \leq 2{,}52)$
2. $P(x \geq 2{,}52)$
3. $P(x \leq -2{,}52)$
4. $P(1{,}47 \leq x \leq 2{,}52)$

3. Independencia de sucesos

3.1. Probabilidad condicionada.

Supongamos que una urna contiene cinco bolas blancas numeradas del 1 al 5 y tres bolas negras numeradas del 1 al 3. Sacamos una bola al azar. Como todas las bolas tienen la misma probabilidad de salir, la probabilidad de que la bola que hemos sacado tenga un número par es $\frac{3}{7}$. Supongamos ahora que, antes de mirar el número, sabemos que la bola es negra. ¿Qué probabilidad le asignaríamos ahora a que la bola tenga un número par, sabiendo que es negra? Intuitivamente diríamos que, sabiendo que la bola es negra, la probabilidad de que tenga un número par es $\frac{1}{3}$. Para afirmar esto de forma rigurosa, se define el concepto de probabilidad condicionada.

Definición IV.3.1. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral Ω, con $P(B) > 0$. La **probabilidad** del suceso A **condicionada** por el suceso B o la probabilidad de A dado B, que se denota por $P(A|B)$, es la probabilidad de que ocurra A dado el hecho de que B ha ocurrido. Esta probabilidad se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo IV.3.2. En uno de sus experimentos con plantas de guisantes, Mendel tenía semillas que producían plantas con flores blancas o rojas. El color de la flor en estos guisantes está determinado por un único gen que tiene dos alelos C y c. Los posibles genotipos de estas plantas son CC, Cc y cc. Los genotipos CC y Cc tienen flores rojas y el genotipo cc tiene flores blancas. Sabemos que una planta determinada es el resultado de un cruce $Cc \times Cc$ y que sus flores son rojas. Calculemos la probabilidad de que esta planta sea del tipo CC.

Si llamamos A al suceso tener genotipo CC y R al suceso tener flores rojas, queremos calcular $P(A|R)$, es decir,

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)}.$$

Calculemos en primer lugar $P(R)$. Como los dos progenitores son Cc, el espacio muestral para la descendencia es

$$\Omega = \{(C, C), (C, c), (c, C), (c, c)\},$$

teniendo todos los sucesos elementales la misma probabilidad, $\frac{1}{4}$. Puesto que $R = \{(C,C),(C,c),(c,C)\}$, tenemos que $P(R) = \frac{3}{4}$.

Para calcular $P(A \cap R)$, basta tener en cuenta que $A \cap R = \{(C,C)\}$, luego $P(A \cap R) = \frac{1}{4}$. Por tanto,

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio IV.3.3. Se lanzan dos dados perfectos. Calcular la probabilidad de que el primero haya sacado un cuatro, sabiendo que la suma de los dos ha sido igual a siete.

Ejemplo IV.3.4. **(de la Ley de probabilidad total).** Supongamos que en una población concreta el 5 % de los varones y el 0,25 % de las mujeres son daltónicos, habiendo igual proporción de ambos sexos. Si escogemos una persona al azar de la población, ¿cuál es la probabilidad de que sea daltónica?

El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es

$$\Omega = \{\text{varón daltónico, varón no daltónico, mujer daltónica, mujer no daltónica}\}.$$

Consideramos los sucesos

$$V = \{\text{varón}\} = \{\text{varón daltónico, varón no daltónico}\}$$

$$M = \{\text{mujer}\} = \{\text{mujer daltónica, mujer no daltónica}\}$$

$$D = \{\text{daltónico}\} = \{\text{varón daltónico, mujer daltónica}\}.$$

Queremos calcular $P(D)$ y los datos de que disponemos son: $P(V) = 0{,}5$, $P(M) = 0{,}5$, $P(D|V) = 0{,}05$ y $P(D|M) = 0{,}0025$. A partir de estos datos podemos calcular

$$P(D \cap V) = P(D|V)P(V) = 0{,}05 \cdot 0{,}5 = 0{,}025,$$

$$P(D \cap M) = P(D|M)P(M) = 0{,}0025 \cdot 0{,}5 = 0{,}00125.$$

Podemos escribir D en función de $D \cap V$ y $D \cap M$, pues $\Omega = V \cup M$. luego,

$$D = (D \cap V) \cup (D \cap M),$$

y como los sucesos $D \cap V$ y $D \cap M$ son incompatibles, tenemos que:

$$P(D) = P(D \cap V) + P(D \cap M) = P(D|V)P(V) + P(D|M)P(M) = 0{,}02625.$$

Esta forma de calcular $P(D)$ a partir de $P(V)$, $P(M)$, $P(D|V)$ y $P(D|M)$ se puede generalizar obteniéndose un resultado conocido como Ley de las probabilidades totales que no estudiaremos con más detalle en este curso.

Ejemplo IV.3.5. **(de la Fórmula de Bayes).** Siguiendo con el ejemplo anterior, supongamos ahora que sabemos que la persona escogida al azar es daltónica. Veamos cómo calcular la probabilidad de que sea mujer, es decir $P(M|D)$. El dato de que disponemos es que $P(D|M) = 0{,}0025$ (podemos decir que le queremos "dar la vuelta" a la probabilidad condicionada). Para ello hacemos

$$P(M|D) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \frac{0{,}0025 \cdot 0{,}5}{0{,}02625} \simeq 0{,}04762.$$

La generalización de este cálculo es el resultado conocido como Fórmula de Bayes, que no estudiaremos con más detalle.

3.2. Independencia de sucesos.

La definición de sucesos independientes expresa de forma rigurosa la idea intuitiva de considerar dos sucesos independientes cuando la información de que uno de ellos ha ocurrido no afecta a la probabilidad de ocurrencia del otro.

Definición IV.3.6. Se dice que dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral son **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Si dos sucesos no son independientes existen dos relaciones posibles entre ellos: Diremos que los sucesos A y B están facilitados si:

$$P(A \cap B) > P(A) \cdot P(B).$$

Diremos que A y B están inhibidos si:

$$P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B).$$

Nota IV.3.7. **Relación entre probabilidad condicionada e independencia.** Si A y B son dos sucesos de un mismo espacio muestral Ω y $P(B) > 0$, entonces A y B serán independientes, es decir $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, si, y sólo si,

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B),$$

o bien, si es $P(A) > 0$,

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A).$$

Ejemplo IV.3.8. **Leyes de Mendel.** La **primera ley de Mendel** establece que cuando se cruzan dos líneas puras con distinto alelo en un gen (por ejemplo, guisantes con flor amarilla y guisantes con flor blanca, o guisantes con la piel lisa y guisantes con la piel rugosa) todos los individuos de la primera generación filial son iguales. Si uno de los alelos es dominante, todos los hijos tendrán el aspecto de uno de los padres y si no existe dominancia, todos los hijos tendrán un aspecto intermedio. Por ejemplo, si cruzamos guisantes amarillos (carácter dominante) homocigóticos AA con guisantes verdes homocigóticos vv (carácter recesivo), el genotipo de la primera generación filial, F_1 será Av y tendrán color amarillo.

La segunda generación filial es la obtenida mediante cruce entre individuos de la primera generación filial (que son todos iguales entre sí). La **segunda ley de Mendel** dice que los individuos la segunda generación filial no son todos iguales. Si existe dominancia, tres cuartos de los individuos serán como sus padres, es decir, como el individuo de la primera generación filial portador del carácter dominante y el cuarto restante será como el abuelo portador del carácter recesivo. Cuando no hay dominancia, las proporciones son: un cuarto de individuos será como uno de los abuelos, otro cuarto como el otro abuelo y el medio restante será como los padres, es decir, tendrá un aspecto intermedio. Por ejemplo, al cruzar dos individuos amarillos de la F_1, $Av \times Av$, obtendremos que sus descendientes, serán, en proporciones iguales, AA, Av, vA y vv, es decir tres cuartas partes son amarillos y una cuarta parte son verdes.

La **tercera ley de Mendel** se denomina "ley de la independencia entre los caracteres genéticos". Esta ley establece que los distintos caracteres genéticos se transmiten de modo independiente. Según ella, si la probabilidad de que un individuo de la segunda generación filial tenga flor amarilla es $P(A_2) = \frac{3}{4}$ y la probabilidad de que tenga piel lisa es $P(L_2) = \frac{3}{4}$ (el carácter liso es dominante frente al rugoso), entonces la probabilidad de que un individuo de la F_2 tenga flor amarilla y piel lisa es:

$$P(A_2 \cap L_2) = P(A_2)P(L_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

Análogamente, la proporción de individuos en la F_2 que tendrán flor verde y piel lisa será:

$$P(v_2 \cap L_2) = P(v_2)P(L_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}.$$

Los que presentan flor amarilla piel rugosa serán:

$$P(A_2 \cap r_2) = P(A_2)P(r_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

Por último, los de flor verde y piel rugosa serán:

$$P(v_2 \cap r_2) = P(v_2)P(v_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Ejercicios de Introducción a la Probabilidad.

Ejercicio 1. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral Ω. Si la probabilidad de A es 1/2, la probabilidad de que ocurra uno u otro es 3/4 y la de que no ocurra B es 5/8. Calcula:

1. La probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente.
2. La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos.
3. La probabilidad de que no ocurran los dos.
4. La probabilidad de que ocurra B y no ocurra A.

Ejercicio 2. Escogemos al azar un punto de un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia del punto al centro del círculo sea menor que el doble de la distancia del punto al borde del círculo?

Ejercicio 3. Se escoge al azar un punto interior a un triángulo equilátero de lado 3. Hallar la probabilidad de que el citado punto esté a menos de una unidad de distancia de un vértice.

Ejercicio 4. Se elige un punto (x, y) de la región del plano limitada por la curva normal $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ y el eje OX. Con ayuda de la tabla del apéndice IV, calcular las siguientes probabilidades:

1. $P(-1{,}45 \leq x \leq 1{,}45)$
2. $P(x < -1{,}45 \,\text{ó}\, x > 1{,}45)$
3. $P(-1{,}45 \leq x \leq 0{,}36)$
4. $P(x \leq 0{,}36 \text{ o } x \geq -1{,}45)$

Ejercicio 5. Supongamos que un dado, con caras marcadas del 1 al 6, está cargado de modo que la probabilidad de que aparezca una cara es proporcional al número que lleva escrito. Hallar la probabilidad de que aparezca un número par.

Ejercicio 6. Sean A y B dos sucesos independientes. La probabilidad de que ambos se den simultáneamente es 1/6 y la de que no se dé ninguno es 1/3. Calcula las probabilidades de A y B.

Ejercicio 7. Tres hombres hacen un disparo sobre un blanco. Si la probabilidad de acertar de cada uno de ellos es: 1/6, 1/4 y 1/3. Calcula:

1. La probabilidad de que todos den en el blanco.
2. La probabilidad de que dé en el blanco sólo el segundo.
3. La probabilidad de que ninguno dé en el blanco.
4. La probabilidad de que alguno dé en el blanco.
5. La probabilidad de que solo uno dé en el blanco.

Ejercicio 8. Problema de Chevalier De Mere propuesto a Blaise Pascal en el siglo XVII: Calcula la probabilidad de obtener al menos un "uno" en cuatro tiradas con un solo dado y la de obtener al menos un doble "uno" en 24 tiradas con dos dados.

De Mere creía que es igualmente probable obtener al menos un "uno" en cuatro tiradas con un solo dado, que al menos un doble "uno" en 24 tiradas con dos dados, ya que en cuatro tiradas de un dado "esperaba obtener" un total de 2/3 de puntos (en cada lanzamiento obtendría 1/6, como hace cuatro intentos obtendría 2/3). La probabilidad de un doble "uno" con dos dados es 1/36 y en 24 tiradas también esperaba obtener 2/3 de punto con el mismo argumento.

Ejercicio 9. En una plantación de guisantes todas las plantas tienen flores blancas o amarillas y los guisantes tienen la piel lisa o rugosa. Examinamos un guisante de la plantación elegido al azar. Encontramos que en el 44 % de los ensayos del experimento aparecen guisantes con la piel rugosa o la flor amarilla, presentando ambas características el 6 % de los guisantes examinados. Observamos también que el 30 % de las plantas en la plantación tienen la flor amarilla.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un guisante tenga la piel rugosa?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un guisante tenga la piel lisa y la flor blanca?
3. ¿Son independientes los sucesos tener la flor amarilla y la piel rugosa?

Ejercicio 10. Consideremos el lanzamiento de un dado que tuviese siete caras equiprobables.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número múltiplo de tres?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par y que a la vez sea múltiplo de tres?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga par o múltiplo de tres?
5. ¿Son independientes ser múltiplo de tres y ser par? En caso contrario especifica el tipo de relación entre ambos sucesos.

Ejercicio 11. Se está estudiando la probabilidad con la que el Camaleón de Madagascar aclara u oscurece su piel y la probabilidad con la que aumenta o disminuye el número y tamaño de las manchas rojas que presenta diseminadas por su piel. Parece ser que cuando cambia de rama oscurece su piel con una probabilidad de 0.5 mientras que la probabilidad de que oscurezca su piel y al mismo tiempo aumente el número de manchas rojas es de 0.1. La probabilidad de que al cambiar de rama haga alguna de las dos cosas (oscurecer la piel o aumentar el número de manchas rojas) es de 0.6.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que aumente el número de manchas rojas cuando cambia de rama?
2. ¿Cuál es la relación de dependencia que existe entre los sucesos oscurecer la piel y aumentar el número de manchas rojas?

Ejercicio 12. La probabilidad del suceso A es 0.5. La probabilidad del suceso B es 0.6. Si la probabilidad de que ocurran simultáneamente es de 0.15, ¿Qué relación guardan entre sí ambos sucesos?

Ejercicio 13. En una población se comprueba que el 50 % de los individuos es rubio o tiene los ojos claros presentando ambas características el 25 % de dicha población. Sabiendo que el 30 % de los individuos son rubios, calcular las siguientes probabilidades:

1. La probabilidad de que un individuo de la población tenga los ojos claros.
2. La probabilidad de que un individuo sea moreno y tenga los ojos oscuros.
3. La probabilidad de que un individuo sea moreno o tenga los ojos oscuros.
4. ¿Son independientes los sucesos "ser rubio" y "tener los ojos claros" ? En caso de que no sean sucesos independientes, explica el tipo de dependencia que presentan.

Ejercicio 14. En los últimos años hay dos "creencias" en cuanto al cuidado de la salud: dietas denominadas "sanas" y "ejercicio físico" . Supongamos que el 40 % de las personas hace ejercicio, el 10 % es adicto al germen de trigo y el 43 % sigue al menos uno de los dos comportamientos mencionados.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona haga ejercicio y siga al mismo tiempo una dieta sana?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que haga ejercicio pero no siga una dieta sana?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que coma sano pero no haga ejercicio?
4. Según las probabilidades asignadas, ¿Estaríamos ante dos comportamientos independientes?
5. Supongamos ahora que sólo conocemos los dos primeros datos del enunciado, es decir que el 40 % de las personas hace ejercicio y el 10 % es adicto al germen de trigo. Calcula cuáles serían entonces las probabilidades más alta y más baja posible para la unión y la intersección de los dos sucesos considerados e indica qué relación habrá entre ellos cuando se alcanzan tales probabilidades.

Ejercicio 15. Se han capturado 200 blátidos (similares a cucarachas) salicófagos (comedores de sauces). El 90 % de los animales pertenece a la especie Calligrapha multipunctata y el resto a la Plagiodera versicolora. Se les ofreció elegir entre dos comederos. En uno de los comederos había una mezcla de hojas de dos especies de sauces, en el otro comedero había hojas de sauces híbridos de los mismos sauces anteriores. El 71 % de los animales prefirió las hojas de los sauces híbridos a la mezcla de hojas.

1. Con estos datos, ¿Cuáles son las probabilidades más alta y más baja posible que se pueden obtener para la unión y la intersección de los sucesos "pertenecer a la especie versicolora" y "preferir hojas de sauce híbrido" ? Determina el tipo de relación que cada situación implica para estos dos sucesos.

Si sabemos además que 146 animales eran de la especie versicolora o prefirieron hojas híbridas, calcula:

2. La probabilidad de que un animal de la especie versicolora prefiera hojas híbridas.
3. La probabilidad de que un animal prefiera hojas híbridas y no sea versicolora.

4. La especie del blátido, ¿es independiente de sus preferencias gastronómicas? En caso negativo, indica qué relación presenta cada especie con sus preferencias gastronómicas.

Ejercicio 16. Se ha estudiado la probabilidad de que en un cultivo una planta del guisante tenga las características “Talla enana” y “Flor roja.” De 8000 plantas que se estudiaron, aparecieron ambas características en 1000. En 3000 de las plantas estudiadas no apareció ninguna de las dos características. Calcula la probabilidad de cada una de las dos características asumiendo la independencia entre caracteres de la tercera ley de Mendel. Para ello, ten en cuenta que había más plantas enanas que plantas rojas.

Ejercicio 17. En una encuesta sobre la atención recibida en la visita a un parque natural se encuentra que el 40 % de los encuestados manifiesta que el recorrido realizado le ha parecido fatigoso. El 10 % de los encuestados considera que las explicaciones recibidas de los monitores son insuficientes. El 43 % de los encuestados ha respondido de modo afirmativo al menos a una de las dos cuestiones anteriores .

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una encuesta elegida al azar sea de alguien que ha respondido de modo afirmativo a ambas cuestiones?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que una encuesta elegida al azar sea de alguien que se ha fatigado y no le parezcan insuficientes las explicaciones?
3. Según las probabilidades asignadas, ¿han resultado independientes las dos respuestas?
4. Si consideramos sólo los dos primeros datos que aparecen en el enunciado, ¿Cuáles serían las probabilidades más alta y más baja para la intersección y para la unión de los sucesos considerados? ¿Qué tipo de relación implican entre los sucesos?

Autoevaluación de Introducción a la Probabilidad

Dígase razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

1. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral Ω. Si A y B son incompatibles entonces:
   (a) $P(B) = 1 - P(A)$
   (b) $P(A) + P(B) \leq 1$
   (c) $A \cap C$ y $B \cap C$ son incompatibles, para cualquier otro suceso C de Ω.
   (d) $A \cup C$ y $B \cup C$ son incompatibles, para cualquier otro suceso C de Ω.
2. Sean A B y C sucesos de un espacio muestral Ω.
   (a) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
   (b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   (c) $\tilde{}(A \cup B) = \tilde{}A \cup \tilde{}B$.
   (d) $\tilde{}(A \cup B) \cup C = (\tilde{}A \cup C) \cup (\tilde{}B \cup C)$.
3. Sea A un suceso de un espacio muestral Ω.
   (a) A y Ω son independientes.
   (b) A y $\varnothing$ son independientes.
   (c) A y $\tilde{}A$ son independientes.
   (d) $P(\tilde{}A) = \frac{1}{P(A)}$.
4. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral Ω. Si la probabilidad de A es $3/8$, la probabilidad de que ocurra uno u otro es $3/4$ y la de que no ocurra B es $1/2$, entonces:
   (a) $P(B) = 1/2$.
   (b) $P(A \cap B) = 3/16$.
   (c) $P(A \cup B) = 3/8 + 1/2 = 7/8$.
   (d) $P(A \cup \tilde{}B) = 1/4$.
5. Si lanzamos dos veces consecutivas un dado perfecto, las siguientes parejas de sucesos son independientes:
   (a) A, "en el primero sale un número par," y B, "en el segundo sale un número impar."
   (b) A, "en el primero sale un número par," y C, "la suma de las dos puntuaciones es mayor que 4."
   (c) A, "en el primero sale un número par," y C, "la suma de las dos puntuaciones es par."
   (d) C = "la suma de las dos puntuaciones es par," y D = "en alguno de los lanzamientos sale un 1."

TEMA V

Álgebra Lineal

Introducción

ESTE capítulo describe un mínimo de álgebra lineal, lo suficiente para entender algunos modelos expresados en términos matriciales. Las técnicas básicas que estudiaremos incluyen la suma y el producto de matrices, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, la inversión de matrices y el cálculo de los autovalores de una matriz y sus autovectores asociados.

La teoría de matrices está íntimamente relacionada con la de las aplicaciones lineales. Aunque el estudio de las matrices en términos de aplicaciones lineales proporciona una mejor y más profunda comprensión de la teoría, en este curso hemos optado por omitir las aplicaciones lineales para centrarnos en los aspectos más prácticos en relación con la Licenciatura en Biología.

Para elaborar este capítulo hemos utilizado la siguiente bibliografía, que el lector podrá consultar si desea profundizar o ampliar sus conocimientos sobre los temas aquí tratados: capítulos 1, 2 y 7 de [**Her94**], capítulos 1, 2 y 6 de [**Gro87**], capítulo XII de [**Gro88**], capítulos 2, 3 y 7 de [**LEF04**], capítulos I y IV de [**MS06**] y las secciones 2 y 3 del capítulo 9 de [**Neu04**].

Comenzaremos haciendo una rápida revisión de algunos conceptos ya conocidos del Bachiller: operaciones con matrices, cálculo de determinantes, matriz inversa, etc. Estas cuestiones pueden estudiarse con más detalle y profundidad en cualquier libro de Matemáticas II, de Segundo de Bachillerato.

La segunda parte del capítulo está dedicada al estudio de la forma diagonal de una matriz, para ello introduciremos dos importantes conceptos, que son novedosos para los alumnos, los autovalores y autovectores de una matriz. Este tema puede ampliarse en cualquier libro de Álgebra Lineal.

Como ejemplo de aplicación de estos conceptos en Biología, estudiaremos con detalle un modelo discreto de crecimiento de poblaciones que se formula en términos de matrices, el llamado modelo matricial de Leslie. Para consultas sobre este tema remitimos a [**Gro88**] y [**Neu04**].

Un poco de Historia.

El origen de las matrices y los determinantes podemos localizarlo en el siglo segundo antes de Cristo (a.C.), aunque ya hay indicios de su uso en el siglo cuarto a.C.

No es sorprendente que los primeros usos de las matrices y los determinantes se encuadren en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Los babilonios estudiaban problemas que conducían a la resolución simultánea de varias ecuaciones lineales. Hoy en día se conservan tablas de arcilla con algunos de ellos; por ejemplo, en una tabla datada en torno al año 300 a.C. se recoge el siguiente problema:

> *Hay dos campos con un área total de 1800 metros cuadrados*[1]*. Uno produce grano con una proporción de 2/3 de kilo por metro cuadrado mientras que el otro produce grano con una proporción de 1/2 kilo por metro cuadrado. Si el total de la producción es de 1000 kilos, ¿cuál es el tamaño de cada campo?*

Los chinos, entre los años 200 y 100 a.C., alcanzaron una mayor destreza en el manejo de matrices que los Babilonios. Es de justicia afirmar que en el texto *Nueve capítulos sobre el arte de las Matemáticas* escrito durante la Dinastía Han aparece el primer ejemplo conocido de un método matricial; el ejemplo comienza enunciando un problema similar al anterior.

> *Hay tres tipos de maíz, de los que tres haces del primero, dos del segundo y uno de tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de maíz hay en un haz de cada tipo?*

A continuación el autor hace algo digno de mención; extrae los coeficientes del sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas y los escribe ordenadamente sobre una tabla de cálculo[2].

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}$$

(Hoy en día, en en siglo XXI, escribimos los sistemas de ecuaciones lineales de una forma completamente análoga.) Sin embargo es aún más impresionante que el autor, en el año 200 a.C., describa un método de resolución del sistema que consiste en multiplicar la segunda fila por 3 y restarle la primera *tantas veces como sea posible*, dos veces en este caso, y multiplicar la última fila por 3 y restarle la primera *tantas veces como sea posible*, una sóla vez en este caso. Lo que produce la siguiente tabla

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{array}$$

A continuación la última fila se multiplica por 5 y se le resta la segunda *tantas veces como sea posible*, cuatro veces en este caso. Estas operaciones dan siguiente tabla

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{array}$$

[1]Obviamente, por aquel entonces no se usaba el sistema métrico decimal que es posterior a la Revolución Francesa.

[2]De nuevo, adaptamos la notación al lenguaje moderno y usamos numeración indo-arábiga

de donde se puede encontrar fácilmente la solución para el tercer tipo de maíz. Con esta se consigue la solución para el segundo tipo de maíz y finalmente para el primero a partir de las soluciones anteriores.

Este procedimiento se conoce hoy en día como **método de Gauss** (o de **eliminación Gaussiana**), pues fue Gauss quien lo estudió y popularizó en Europa a comienzos del siglo XIX.

Pero el uso de las matrices no sólo se restringe a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En la actualidad las matrices se aplican en campos de la más diversa índole y se cuentan por miles los problemas que se modelizan en términos matriciales. No es por tanto de extrañar que ciencias como la Biología se nutran de una herramienta tan potente.

1. Matrices

UNA **matriz**[3] de números reales **de orden** $m \times n$ es un conjunto ordenado de $m \times n$ números reales dispuestos en m filas y n columnas de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De manera abreviada esta matriz se escribirá $A = (a_{ij})$, con $i = 1, 2 \dots m$ y $j = 1, \dots, n$.

Por lo general, denotaremos las matrices con letras mayúsculas: A, B, M, $P, \dots$ Los elementos de una matriz, también llamados coeficientes, se denotarán con la correspondiente letra minúscula, acompañada de dos subíndices: el primero de ellos indicará la fila que ocupa ese elemento y el segundo, la columna.

Ejemplo V.1.1. **Algunos tipos de matrices.** Determinadas particularidades del orden o de los elementos de una matriz definen tipos o familias de matrices especiales. Mostramos a continuación aquellos que usaremos en la asignatura, el lector interesado puede encontrar otros tipos de matrices en el primer capítulo de [**MS06**].

(i) **Matriz nula:** Es la que tiene todos los coeficientes iguales a cero.

(ii) **Matriz cuadrada:** Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir $m = n$. En este caso, se dice que la matriz es cuadrada de orden n.

En una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, los elementos a_{ii}, con $i = 1, \dots, n$ forman la diagonal principal.

[3]La primera persona en usar la palabra “matriz” para referirse a una caja ordenada de términos fue el matemático inglés J.J.Sylvester(1814-1897) en 1850.

(iii) **Matriz diagonal:** es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no están en la diagonal principal son nulos.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

En ocasiones, escribiremos $\mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$, para expresar la matriz diagonal D. Es decir, $\mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ denota la matriz diagonal de orden n cuyos elementos en la diagonal principal son $d_{ii},\ i = 1, \dots, n$.

(iv) **Matriz identidad:** Es la matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1. La matriz identidad de orden $n \times n$ se denota por I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(v) **Matriz fila o vector fila:** la que tiene una única fila, es decir, es de orden $1 \times n$

$$V = (v_1, \dots, v_n).$$

(vi) **Matriz columna o vector columna:** sólo tiene una columna, es decir, es de orden $m \times 1$.

$$C = \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Nota V.1.2. Salvo que digamos expresamente lo contrario, para operar con matrices manejaremos los vectores como columnas.

A continuación resumiremos algunas **operaciones con matrices** Al igual que antes solamente consideraremos aquellas que vamos a usar en la asignatura. En el primer capítulo de [**MS06**] se pueden encontrar otras operaciones con matrices, sus propiedades básicas, así como las distintas estructuras algebraica que éstas definen en el conjunto de las matrices.

Suma de matrices. La suma de dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo orden $m \times n$ es la matriz de orden $m \times n$

$$S = A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

De manera enteramente análoga se define la diferencia de las matrices A y B.

Producto de un número por una matriz. El producto de un número α por una matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $B = (\alpha \cdot a_{ij})$, que tiene el mismo orden que A.

Producto de matrices. El producto de una matriz fila de orden $1 \times n$, $F = (f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n})$ por una matriz columna de orden $n \times 1$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix},$$

es el número que se obtiene sumando los productos $f_{1k} \cdot c_{k1}$, para $k = 1, \ldots, n$, es decir,

$$f_{11} \cdot c_{11} + f_{12} \cdot c_{21} + \ldots + f_{1n} \cdot c_{n1} = \sum_{k=1}^{n} f_{1k} \cdot c_{k1}.$$

El producto de una matriz $A = (a_{ik})$ de orden $m \times n$ por vector columna $\vec{v}$ de orden $n \times 1$ es el vector columna de orden $m \times 1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} v_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} v_k \end{pmatrix}.$$

El producto de una matriz $A = (a_{ik})$ de orden $m \times n$ por una matriz $B = (b_{kj})$ de orden $n \times p$ (el número de columnas de A debe coincidir necesariamente con el de filas de B) es la matriz C de orden $m \times p$ que tiene en el lugar ij el producto de la fila i-ésima de A por la columna j-ésima de B. Es decir,

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot c_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Matriz traspuesta: Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$, se llama matriz traspuesta de A, y se denota A^{T}, a la matriz que tiene como filas a las columnas de A y como columnas, a las filas de A. Es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces,

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{i1} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{i2} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{in} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz se llama **simétrica** cuando es igual que su traspuesta, es decir, A es simétrica si, y sólo si, $A^{\mathrm{T}} = A$.

Nota V.1.3. En determinadas ocasiones, por comodidad, en el texto escribiremos $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$ en lugar de $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Veamos un primer ejemplo del uso de las operaciones anteriores.

Ejemplo V.1.4. El producto $B = A^{\mathrm{T}}A$, donde

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

es

$$\begin{aligned} B = A^{\mathrm{T}}A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1^2+1^2+1^2+1^2 & x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \end{pmatrix} \end{aligned},$$

lo que también se puede escribir

$$B = \begin{pmatrix} 4 & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos que $x_1, \ldots, x_4$ corresponden a unas ciertas medidas, podemos interpretar los elementos del producto $B = A^{\mathrm{T}}A$ de la siguiente manera: $b_{11} =$ *número de medidas tomadas*, $b_{12} = b_{21} =$ suma de todas las medidas y $b_{22} =$ suma de los cuadrados de las medidas.

Estas tres cantidades son de gran interés en problemas de estadística. En efecto,

$$\overline{x} = \frac{b_{12}}{b_{11}}$$

es la media aritmética de las medidas y

$$\sigma = \sqrt{b_{22} - \overline{x}^{\,2}} = \sqrt{b_{22} - \left(\frac{b_{12}}{b_{11}}\right)^2}$$

es la desviación típica.

Veamos ahora una serie de interesantes ejemplos en los que se usan matrices y operaciones con matrices para modelar determinadas situaciones reales relacionadas con la Biología.

Ejemplo V.1.5. **Modelo matricial de crecimiento de poblaciones.** La fecundidad y la probabilidad de muerte de los individuos de una población varían con la edad. Para desarrollar un modelo que contemple este hecho se utilizan matrices, que permiten aplicar distintas tasas de fecundidad y mortalidad a los distintos grupos de edades. Es frecuente recoger estos datos exclusivamente para las hembras. Aquí vamos a referirnos a la población en términos generales, sin hacer separación de sexos.

Hagamos una primera aproximación a este tipo de modelo, que más tarde describiremos de forma general (véase la sección 6 de este tema).

Una población de cierta especie de aves se divide en dos grupos: jóvenes (inmaduras) y adultas. Denotamos por $n_1(t)$ y $n_2(t)$, respectivamente, a las poblaciones de aves jóvenes y adultas en el año t. Cada primavera ocurren los siguientes hechos:

- La probabilidad de que un ave joven sobreviva para llegar a ser adulta la primavera siguiente es s_1.
- La probabilidad de que un ave adulta sobreviva de una primavera a la siguiente es s_2.
- Por cada ave adulta, se obtienen una media de f individuos jóvenes la primavera siguiente.

Estos datos nos dicen cómo calcular la población en el año t a partir de la población del año anterior, $t-1$:

$$n_1(t) = f \cdot n_2(t-1)$$
$$n_2(t) = s_1 \cdot n_1(t-1) + s_2 \cdot n_2(t-1)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial. Si llamamos

$$\vec{n}_t = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix} \text{ y } \quad A = \begin{pmatrix} 0 & f \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix},$$

entonces:

$$\vec{n}_t = A\vec{n}_{t-1}.$$

Si partimos de una población inicial, que recogemos en el vector $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \end{pmatrix}$, la población en los años sucesivos será :

$$\text{en el primer año } \vec{n}_1 = A\vec{n}_0.$$

$$\text{en el segundo año } \vec{n}_2 = A\vec{n}_1 = A(A\vec{n}_0) = A^2\vec{n}_0 \ldots.$$

y así sucesivamente obtenemos:

$$\vec{n_t} = A^t\vec{n_0}.$$

El ejemplo anterior no es más que un caso particular y simplificado de lo que se conoce como **cadenas de Markov**[4], que se utilizan en campos tan diversos como la Economía o la Sociología.

Ejercicio V.1.6. Calcular $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ cuando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

y se parte de una población con 10 aves adultas y ninguna joven.

Ejercicio V.1.7. Se supone que una población de cierta especie de mamíferos se divide en grupos por edades. El grupo 1 está formado por las menores de 15 años (no tienen descendencia). El grupo 2 por las que tienen entre 15 y 30 años, y el grupo 3 por quienes tienen entre 30 y 45 años. La población se censa cada 15 años. En cada intervalo de 15 años ocurre que:

- La probabilidad de que un individuo sobreviva hasta el siguiente periodo es 0,9 en el grupo 1, 0,8 en el grupo 2 y cero en el grupo 3.
- Cada individuo del grupo 2 tiene, una media de, 1 hijo, mientras que los del grupo 3 tienen 0,5 hijos.

Partimos de una población formada por 1000 individuos en el primer grupo, 500 en el segundo y 100 en el tercero. Se pide:

1. Escribir el vector de población inicial $\vec{n_0}$.
2. Escribir la matriz A que permite calcular el vector de población en un periodo cualquiera t, a partir de la población dada en el momento inicial.
3. Calcular los vectores de población al cabo de 15 y 30 años.

Ejemplo V.1.8. **Un problema de genética.** Un gen particular puede presentar varias formas o alelos. Consideraremos aquí un gen que presenta dos alelos A y B. Los genes se agrupan en cromosomas y en cada célula de un organismo, excepto en las reproductoras, ocurren en pares y se encuentran en cromosomas pareados. Los tres posibles pares de este gen, AA, AB y BB, determinan los tres posibles genotipos del organismo en relación con tal gen. Las células reproductoras, o gametos, son haploides, es decir tienen cromosomas no pareados y sólo tienen una copia de cada gen. Los genes de la descendencia son el resultado del pareamiento de los genes de las dos células reproductoras, una de cada uno de los padres. Si los dos progenitores son homocigóticos, por ejemplo AA y AA ó AA y BB, el genotipo de la descendencia queda completamente determinado: toda la descendencia será AA en el primer caso, y AB en el segundo. Si uno de los padres es homocigótico, por ejemplo AA, y el otro heterocigótico es decir, AB, la mitad de la descendencia tendrá genotipo AA y la

[4]Que deben su nombre al matemático Ruso A. Markov (1856-1922).

otra mitad AB. Por último, si ambos progenitores son heterocigóticos, un 25 % de los descendientes serán AA, un 50 % serán AB y el 25 % restante BB.

Supongamos que en una población han podido clasificarse los individuos en cuanto a los genotipos AA, AB y BB y se ha obtenido la proporción de genotipos de cada clase. Llamemos g_1, g_2 y g_3 a las proporciones de genotipos AA, AB y BB, respectivamente. Observemos que $g_1 + g_2 + g_3 = 1$. En el siguiente ejemplo estudiaremos cómo varían las proporciones de estos genotipos cuando se realizan apareamientos no aleatorios.

En un experimento controlado, se aparean caballos de tipo AA con yeguas escogidas al azar. Las yeguas de la descendencia se aparean después con machos de tipo AA, y este proceso continúa. A la proporción inicial de madres de genotipo AA, AB y BB lo llamaremos $g_1(0)$, $g_2(0)$ y $g_3(0)$, respectivamente. Utilizaremos el producto para calcular el porcentaje de cada genotipo en las sucesivas generaciones.

Empecemos viendo qué ocurre en la primera generación:

$$g_1(1) = 1g_1(0) + \frac{1}{2}g_2(0) + 0g_3(0) = g_1(0) + \frac{1}{2}g_2(0)$$

$$g_2(1) = 0g_1(0) + \frac{1}{2}g_2(0) + 1g_3(0) = \frac{1}{2}g_2(0) + g_3(0)$$

$$g_3(1) = 0g_1(0) + 0g_2(0) + 0g_3(0) = 0$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} g_1(1) \\ g_2(1) \\ g_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_3(0) \end{pmatrix}$$

Si $\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} g_1(1) \\ g_2(1) \\ g_3(1) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{g}_0 = \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_3(0) \end{pmatrix}$, escribimos $\vec{g}_1 = A\vec{g}_0$.

Razonando de la misma manera, si llamamos $\vec{g}_m$ al vector de proporciones de los distintos genotipos en la m-ésima generación, encontramos que

$$\vec{g}_2 = A\vec{g}_1 = A(A\vec{g}_0) = A^2\vec{g}_0$$

$$\vec{g}_3 = A\vec{g}_2 = A(A^2\vec{g}_0) = A^3\vec{g}_0$$

y en general,

$$\vec{g}_m = A\vec{g}_{m-1} = A(A^{m-1}\vec{g}_0) = A^m\vec{g}_0.$$

2. Determinantes

El determinante de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n es un número que denota[5] $|A| = |(a_{ij})|$ y que se calcula según las reglas que explicaremos a continuación.

El determinante de una matriz cuadrada de orden 1, $A = (a_{11})$ es

$$|A| = |(a_{11})| = a_{11}.$$

El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de orden 2 es

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Supuesto que sabemos calcular el valor del determinante de las matrices de orden $n-1$, para una matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})$, llamaremos $A(i|j)$ a la matriz cuadrada de orden $n-1$ que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A y llamaremos ij-ésimo menor adjunto de A a $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$. Se define el determinante de A por

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \ldots + a_{n1}\alpha_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\alpha_{k1}.$$

Es decir, el determinante de A es igual a la suma de los elementos de la primera columna de A multiplicado cada uno de ellos por su correspondiente adjunto. Esta fórmula se conoce como **desarrollo de Laplace**[6] del determinante de A por la primera columna. No obstante, este método no se suele usar en la práctica debido al elevado número de operaciones que requiere. Generalmente, se usan variantes del método de Gauss (véase la sección 4) en los que el número de operaciones es considerablemente inferior, y se reserva el método anterior para argumentos teóricos donde no es aplicable el método de Gauss.

Ejemplos V.2.1.

i) **Regla de Sarrus**[7] El determinante de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden 3 es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

[5] Esta notación para el determinante de una matriz (dos líneas verticales delante y detrás de una tabla de números) fue introducida por el matemático inglés A. Cayley (1821-1895) en 1841.

[6] Por el matemático francés P.S. Laplace (1749-1827)

[7] P. F. Sarrus (1798-1861) fue un matemático frances

ii) El determinante de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden 4 es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

que es igual a

$$(+1) \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1) \cdot a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ (+1) \cdot a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1) \cdot a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

iii) El determinante de la matriz identidad I_n es 1

iv) El determinante de una matriz diagonal D es el producto de los elementos de su diagonal principal, es decir, si $D = \operatorname{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn})$, entonces

$$|D| = d_{11} \cdots d_{nn}.$$

La definición rigurosa de determinante no es en absoluto elemental, sobre todo si se pretende relacionar con su significado geométrico. Este y otros temas relacionados con los determinantes puede hallar en el capítulo 5 de [**BCR07**].

El cálculo del determinante de una matriz puede simplificarse bastante aplicando las propiedades que enunciamos a continuación.

Propiedades de los determinantes *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) *Si tres matrices, A, A' y A'' son iguales salvo en que la i-ésima fila (o columna) de A es igual a la suma de las correspondientes filas (o columnas) de A' y A'', entonces $|A| = |A'| + |A''|$.*

(b) *Si dos filas (o columnas) de A son iguales entonces $|A| = 0$.*

(c) *Si en A se intercambian dos filas (o columnas), el determinante de la matriz obtenida es $-|A|$.*

(d) *Si todos los elementos de una fila (o columna) de A se multiplican por un número c, entonces el determinante de la matriz resultante es $c|A|$.*

(e) *Si todos los elementos de una fila (o columna) son nulos, entonces $|A| = 0$.*

(f) *El valor de $|A|$ no varía si a una fila (o columna) de A se le suma otra fila (o columna) de A multiplicada por un número.*

(g) *Si una fila (o columna) de A es igual a la suma de otras filas (o columnas) de A multiplicadas cada una de ellas por un número, entonces $|A| = 0$.*

(h) *El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de los factores.*

(i) *El determinante de A es igual al determinante de su traspuesta.*
(j) *El determinante de una matriz puede obtenerse desarrollando por cualquiera de sus columnas o filas:*

$$|A| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \ldots + a_{nj}\alpha_{nj} = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in}$$

Demostración. La demostración de estas propiedades puede consultarse en las páginas 45-50 de [**MS06**]. ∎

3. La matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que A es una matriz **regular** o **invertible** si existe una matriz, que llamaremos **inversa** de A y denotaremos A^{-1}, que cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Es importante tener en cuenta las siguientes observaciones:

- No toda matriz cuadrada tiene inversa. Si el determinante de una matriz cuadrada A es cero, entonces no tiene inversa, pues si existe A^{-1}, como $A \cdot A^{-1} = I_n$, tenemos $|A| \cdot |A^{-1}| = |I_n| = 1$ y esto no puede ocurrir si $|A| = 0$.
- Si una matriz cuadrada A tiene inversa, entonces A^{-1} debe tener el mismo orden que A y su determinante es $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$.
- Cuando una matriz A tiene inversa A^{-1}, ésta es única. Es decir, no existe otra matriz B que cumpla la condición de la inversa, pues si $B \cdot A = A \cdot B = I_n$, entonces $B = B \cdot I_n = B \cdot A \cdot A^{-1} = (B \cdot A) \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} = A^{-1}$.

Ejemplo V.3.1. Consideremos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $X = (x_{ij})$ es la matriz inversa de A, entonces se tiene que cumplir $AX = I_2$, esto es,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_{11} + x_{21} & 3x_{12} + x_{22} \\ 2x_{11} + 4x_{21} & 2x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualando los elementos correspondientes obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 3x_{11} & + & x_{21} & = & 1 \\ 2x_{11} & + & 4x_{21} & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{rcrcl} 3x_{12} & + & x_{22} & = & 0 \\ 2x_{12} & + & 4x_{22} & = & 1 \end{array}\right\},$$

y resolviendo ambos sistemas de ecuaciones lineales que

$$x_{11} = \frac{4}{10},\ x_{12} = -\frac{1}{10},\ x_{21} = -\frac{2}{10}, \quad \text{y} \quad x_{22} = \frac{3}{10}.$$

De donde se sigue que

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Este método se puede extender en principio a cualquier matriz regular de orden n, cualquiera que sea n. Sin embargo, aunque es un procedimiento directo, es bastante tedioso para matrices de orden mayor que 3. En la práctica se usan otros métodos más sofisticados (más adelante, al final de la sección 4, comentaremos uno de ellos)[8].

Una fórmula que nos permite calcular la inversa de una matriz invertible viene dada por los adjuntos.

Definiciones V.3.2. Dada una matriz A cuadrada de orden n, llamaremos ij-**ésimo menor adjunto** de A a

$$\alpha_{ij} := (-1)^{i+j}|A(i|j)|,$$

donde $A(i|j)$ es la matriz cuadrada de orden $n-1$ que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A. Se llama **adjunta** de la matriz $A = (a_{ij})$, y se denota $\mathrm{adj}(A)$, a la matriz:

$$\mathrm{adj}(A) = (\alpha_{ij}).$$

Es decir,

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teorema V.3.3. *Si A es una matriz cuadrada con $|A| \neq 0$, entonces es invertible y*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))^{\mathrm{T}} = \frac{1}{|A|}adj(A^{\mathrm{T}}).$$

Demostración. Puede consultarse en las páginas 105-106 de [**Her94**]. ■

Conviene advertir que la fórmula que nos proporciona el teorema anterior tiene un elevado coste computacional cuando el orden de la matriz es alto (por ejemplo, cuando n es mayor que 5), por lo que en la práctica no se suele utilizar para calcular la inversa de una matriz. Sin embargo, dado que las matrices que usaremos en la asignatura serán siempre de órdenes bajos, adoptamos esta fórmula como método para el cálculo de la inversa. El lector interesado en conocer otros métodos para calcular la inversa de una matriz invertible puede consultar la sección 4 del primer capítulo de [**MS06**].

[8]La primera constancia escrita del cálculo de una matriz inversa data de 1853 y se debe a Cayley.

4. Sistemas de ecuaciones lineales

Al terminar la enseñanza secundaria, todos los alumnos conocen los métodos tradicionales para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Suponemos también que estos alumnos saben estudiar la compatibilidad de los sistemas y determinar si un sistema compatible es determinado (tiene solución única) o no. No obstante, por su importancia para el resto de la asignatura, vamos a recordar algunos conceptos y resultados así como el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Regla de Cramer. *Si en un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $A\vec{x} = \vec{b}$ el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, $|A| \neq 0$, entonces, el sistema tiene solución única y ésta viene dada por:*

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

donde A_j es la matriz que se obtiene sustituyendo la columna j de A por la columna formada por los términos independientes del sistema.

Demostración. La demostración puede consultarse en las páginas 107-108 de [**Her94**].
■

Sistemas homogéneos. Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo cuando todos los términos independientes valen cero. Es decir, cuando el sistema de ecuaciones es de la forma

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & 0 \end{array}\right\}$$

lo que en forma matricial se escribe $A\vec{x} = \vec{0}$.

Es evidente que estos sistemas siempre tienen, al menos, una solución $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$.

Por otra parte, si en un sistema homogéneo el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas ($n = m$) y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero entonces, por la Regla de Cramer, la única solución del sistema es la nula, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Por lo tanto, para que un sistema homogéneo tenga soluciones no nulas, tiene que ocurrir que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema sea cero.

Finalmente, también es cierto que si el determinante de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas es cero, entonces el sistema tiene soluciones no nulas.

Nota V.4.1. *En resumen: un sistema homogéneo con igual número de ecuaciones que de incógnitas, $A\vec{x} = \vec{0}$, tiene soluciones no nulas, si, y sólo si, $|A| = 0$.*

Resolución de sistemas lineales de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x+3y & = & 11 \\ 5y & = & 10 \end{array}\right\}$$

es extraordinariamente fácil de resolver, pues de la segunda ecuación se obtiene que

$$y = \frac{10}{5} = 2$$

y sustituyendo en la primera ecuación obtenemos

$$2x + 3\cdot 2 = 11; \longrightarrow 2x = 11 - 6 \longrightarrow 2x = 5; \longrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Por otra parte, el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x-3y+2z & = & 7 \\ 5y+2z & = & -3 \\ 4z & = & -6 \end{array}\right\}$$

se resuelve de forma análoga: de la tercera ecuación se obtiene el valor de z ($z = -\frac{3}{2}$, en nuestro caso) que se sustituye en la segunda. Con esta sustitución obtenemos el valor de y ($y = 0$, en nuestro caso). Y ya sólo nos falta conocer el valor de x que se obtiene sustituyendo los valores de z e y en la primera ecuación. En este caso, solución del sistema es $x = \frac{5}{2}, y = 0, z = -\frac{3}{2}$.

El proceso por el cual en cada paso calculamos el valor de una incógnita se puede realizar debido a la **forma escalonada** del sistema; cada ecuación tiene menos incógnitas que la anterior. Sería, pues, muy deseable poder transformar cualquier sistema de ecuaciones en otro con las mismas soluciones que tenga forma escalonada. Veamos con unos ejemplos cómo puede hacerse.

Ejemplo V.4.2. Supongamos que queremos transformar el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x-3y & = & 4 \\ 3x-7y & = & 7 \end{array}\right\}$$

en un sistema en forma escalonada con idéntica solución. Para ello, a la segunda ecuación le restamos tres veces la primera, de tal modo que se obtiene

$$\left.\begin{array}{rcr} x-3y & = & 4 \\ 2y & = & -5 \end{array}\right\}.$$

Este sistema ya está puesto en forma escalonada, y ahora es fácil comprobar que su solución: $x = -\frac{7}{2}$ e $y = -\frac{5}{2}$, coincide con la del sistema de partida.

Ejemplo V.4.3. Supongamos que ahora queremos transformar el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{lcrcrcrcr} E_1 & : & x & + & 5y & - & 3z & = & 7 \\ E_2 & : & 2x & - & y & + & z & = & 11 \\ E_3 & : & 4x & + & 3y & - & 4z & = & 3 \end{array}\right\}$$

en un sistema en forma escalonada con idéntica solución. Para lo cual procederemos como sigue:

Paso 1. A la segunda ecuación le restamos dos veces la primera ($E_2 \to E_2 - 2E_1$).
Paso 2. A la tercera ecuación le restamos cuatro veces la primera ($E_3 \to E_3 - 4E_1$).

Estas transformaciones producen el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{lcrcrcrcr} E_1' = E_1 & : & x & + & 5y & - & 3z & = & 7 \\ E_2' = E_2 - 2E_1 & : & & - & 11y & + & 7z & = & -3 \\ E_3' = E_3 - 4E_1 & : & & - & 17y & + & 8z & = & -25 \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Paso 3. Multiplicamos la segunda ecuación por 17 ($E_2' \to 17E_2'$).
Paso 4. Multiplicamos la tercera ecuación por -11 ($E_3' \to -11E_3'$).

Estas transformaciones producen el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{lcrcrcrcr} E_1'' = E_1' & : & x & + & 5y & - & 3z & = & 7 \\ E_2'' = 17E_2' & : & & - & 187y & + & 119z & = & -51 \\ E_3'' = -11E_3' & : & & & 187y & - & 88z & = & 275 \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Paso 5. A la tercera ecuación le sumamos la segunda ($E_3'' \to E_2'' + E_3''$).

Obteniéndose de este modo el siguiente sistema en forma escalonada

$$\left.\begin{array}{lcrcrcrcr} E_1''' = E_2'' & : & x & + & 5y & - & 3z & = & 7 \\ E_2''' = E_2'' & : & & - & 187y & + & 119z & = & -51 \\ E_3''' = E_2'' + E_3'' & : & & & & & 31z & = & 224 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

cuya solución es $x = \frac{134}{31}$, $y = \frac{151}{31}$ y $z = \frac{224}{31}$.

Como se ya comentó en la introducción, el procedimiento mostrado en los ejemplos anteriores se llama **método de Gauss**.

Veamos a continuación como se puede agilizar, más aún, este proceso.

Ejemplo V.4.4. Volvemos a considerar el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo V.4.3

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 5y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & y & + & z & = & 11 \\ 4x & + & 3y & - & 4z & = & 3 \end{array}\right\}$$

que es lo mismo que escribir

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \\ 4 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{r} x \\ y \\ z \\ -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right).$$

En la expresión anterior, la matriz de la izquierda se llama **matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales** .

La matriz ampliada recoge la misma información que el sistema de partida; cada una de las filas de la matriz corresponde a una de las ecuaciones del sistema, las tres primeras columnas corresponden a los coeficientes de x, y y z, respectivamente, y la última columna son los términos independientes. Repitamos entonces las mismas transformaciones realizadas en el ejemplo V.4.3 pero con las filas de la matriz ampliada.

Paso 1. A la segunda fila le restamos dos veces la primera ($F_2 \to F_2 - 2F_1$).
Paso 2. A la tercera fila le restamos cuatro veces la primera ($F_3 \to F_3 - 4F_1$).

Estas transformaciones producen la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -11 & 7 & -3 \\ 0 & -17 & 8 & -25 \end{array}\right),$$

que es la matriz ampliada del sistema (7).

Paso 3. Multiplicamos la segunda fila por 17 ($F_2 \to 17F_2$).
Paso 4. Multiplicamos la tercera fila por -11 ($F_3 \to -11F_3$).

Estas transformaciones producen la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -187 & 119 & -51 \\ 0 & 187 & -88 & 275 \end{array}\right),$$

que es la matriz ampliada del sistema (8).

Paso 5. A la tercera fila le sumamos la segunda ($F_3 \to F_3 + F_2$).

De modo que finalmente obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -187 & 119 & -51 \\ 0 & 0 & 31 & 224 \end{array}\right),$$

que es precisamente la matriz ampliada del sistema (9).

Según lo anterior, el método de Gauss aplicado a la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales produce la matriz ampliada de un sistema en forma escalonada con idénticas soluciones que el de partida. Para ello, hemos efectuado las siguientes operaciones con las filas de la matriz ampliada:

- Sumar o restar a una fila el resultado de multiplicar o dividir otra por un número; por ejemplo, los pasos 1, 2 y 5 del ejemplo V.4.4.
- Multiplicar o dividir una fila por un número distinto de cero; por ejemplo, los pasos 3 y 4 del ejemplo V.4.4.
- Intercambiar los elementos de dos filas.

Estas operaciones se llama **operaciones elementales por filas**.

Se dice que dos matrices A y B son **equivalentes** si se puede pasar de A a B (y viceversa) mediante operaciones elementales por filas. Es por esto que se dice que *el método de Gauss sobre una matriz A produce una matriz en forma escalonada equivalente a A.*

Hasta el momento hemos visto ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con solución única (sistemas compatibles determinados). Sin embargo, ni todos los sistemas tienen solución, ni la solución, cuando exista, tiene que ser única.

Veamos un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución (sistema incompatible) y otro de un sistema con infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado).

Ejemplo V.4.5. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 1 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & -1 \end{array}\right\}$$

buscamos un sistema en forma escalonada con idéntica solución.

En primer lugar, escribimos la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{array}\right).$$

Realizando operaciones elementales por filas obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

que corresponde a un sistema en forma escalonada con idénticas soluciones que el primero, concretamente

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & -3y & - & 6z & = & -3 \\ & & & & 0 & = & -2 \end{array}\right\}.$$

Observamos que la última ecuación requiere que cero sea igual a -2, lo que es del todo imposible. Luego, el sistema en forma escalonado no tiene solución, y concluimos por tanto que el sistema original tampoco tendrá solución.

En general, siempre que en la matriz ampliada de un sistema aparezca una fila de ceros a la izquierda de la línea vertical y un número distinto de cero a la derecha, podemos afirmar que el sistema no tiene solución.

Ejemplo V.4.6. Supongamos que queremos resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right\}$$

buscando un sistema en forma escalonada con idéntica solución.

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Realizando operaciones elementales por filas obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales con las mismas soluciones que el de partida. En nuestro caso, el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Observamos que la última ecuación del sistema no aporta ninguna información (pues evidentemente cero es igual a cero). Por lo tanto, podemos prescindir de ella y considerar el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 3 \end{array}\right\}.$$

Este sistema está en forma escalonada, pero a diferencia de los ejemplos anteriores la última ecuación depende de más de una incógnita; luego el sistema es compatible indeterminado. En nuestro caso las (infinitas) soluciones son $x = \frac{3-5t}{4}, y = \frac{3+3t}{4}, z = t$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Terminamos esta sección mostrando, mediante un ejemplo, un segundo método más rápido para calcular la matriz inversa usando una variante del método de Gauss; el lector interesado en este tema puede consultar el capítulo I de [**MS06**]. Esta variante del método de Gauss se debe al matemático frances C. Jordan (1838-1922), por lo que se conoce como **método de Gauss-Jordan**.

Ejemplo V.4.7. Queremos calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

para ello realizaremos una serie operaciones elementales por filas tanto en A como en la matriz identidad del orden de A, en este caso I_3. Pero en primer lugar comprobamos que $|A| = 3 \neq 0$ para asegurarnos de que efectivamente A tiene matriz inversa.

Comenzamos con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación realizaremos una serie de operaciones elementales por filas en las dos matrices de forma simultánea hasta conseguir que la matriz de la izquierda se transforme en la matriz identidad.

Paso 1. $F_2 \to F_2 - 4F_1$, es decir, restamos a los elementos de la segunda fila de cada una de las matrices anteriores los elementos correspondientes de la primera fila multiplicados por cuatro y escribimos esos nuevos elementos en la segunda fila.

Paso 2. $F_3 \to F_3 - 7F_1$.

Con estas operaciones A e I_3 se transforman en

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente

Paso 3. $F_2 \to F_2/(-3)$. Dividimos por menos tres los elementos de la segunda fila de cada una de las matrices anteriores y escribimos esos nuevos elementos en la segunda fila.

Así obtenemos dos nuevas matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4. $F_1 \to F_1 - 2F_2$.

Paso 5. $F_3 \to F_3 + 6F_2$.

Con lo que se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 6. $F_1 \to F_1 + F_3$.

Paso 7. $F_2 \to F_2 - 2F_3$.

Finalmente obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que esta serie de operaciones elementales por filas sobre la matriz A la han transformado en la matriz identidad de orden 3, mientras que la misma serie de operaciones elementales por filas sobre I_3 han producido una nueva matriz que llamaremos B. Se comprueba fácilmente que $AB = BA = I_3$, de donde se sigue que $B = A^{-1}$ es la matriz inversa de A.

5. Forma diagonal de una matriz

PARA estudiar muchos de los modelos (biológicos, económicos, ...) elaborados con matrices es necesario calcular potencias de matrices cuadradas (recordemos los ejemplos V.1.5 y V.1.8 dados al inicio de este capítulo). Como veremos más adelante, también interesa estudiar el comportamiento asintótico o límite de estas potencias, es decir, determinar si, para valores muy grandes de n las matrices A^n se aproximan a una cierta matriz L. El cálculo de las potencias de una matriz y el estudio de su comportamiento límite son especialmente sencillos en el caso de las matrices diagonales. Uno de los problemas clásicos del Álgebra Lineal es el de la diagonalización de matrices cuadradas. Este problema consiste en determinar, dada una matriz cuadrada A, si existe una matriz diagonal D de manera que las potencias de A puedan calcularse, de forma sencilla, en términos de las potencias de D y por consiguiente, el comportamiento límite de A^n venga dado por el de D^n. Esta matriz D, cuando exista, se llamará diagonalización o forma diagonal de A. La relación entre una matriz A y su diagonalización D es de la forma: $A = UDU^{-1}$, donde U es una matriz invertible. Cuando dos matrices guardan una relación de este tipo se dice que son semejantes. Para el lector familiarizado con la teoría de aplicaciones lineales, podemos decir que dos matrices semejantes representan, en distintas bases o con distintas coordenadas, a la misma aplicación lineal. El problema de la diagonalización consiste pues en determinar si una matriz dada A es semejante a alguna matriz diagonal, es decir, si existen matrices U invertible y D diagonal tales que $A = UDU^{-1}$. Cuando la respuesta es afirmativa, el cálculo de las potencias de A se simplifica notablemente pues

$$A^2 = (UDU^{-1})(UDU^{-1}) = UD^2U^{-1},$$
$$A^3 = A^2A = (UD^2U^{-1})UDU^{-1} = UD^3U^{-1}$$

y en general

$$A^n = UD^nU^{-1}.$$

Una vez planteado el problema de la diagonalización y antes de proceder a resolverlo (dentro de los límites de este curso) proponemos al lector realizar el siguiente ejercicio, a partir del cual empezaremos a ver el camino a seguir.

Ejercicio V.5.1. Sea U una matriz invertible de orden n de columnas $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ y sea D una matriz diagonal con elementos en la diagonal $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

- Comprobar que si $A = UDU^{-1}$ entonces, para los vectores $\vec{u}_j$ se cumple que
$$A\vec{u}_j = \lambda_j \vec{u}_j.$$
- La columna j-ésima de la matriz UD es $\lambda_j \vec{u}_j$. Es decir,
$$UD = (\lambda_1 \vec{u}_1, \ldots, \lambda_n \vec{u}_n).$$
- Si para la matriz A se cumple que $A\vec{u}_j = \lambda_j \vec{u}_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces
$$AU = UD, \quad \text{es decir,} \quad A = UDU^{-1}.$$

A partir del ejercicio V.5.1 se concluye que para determinar si una matriz cuadrada A es diagonalizable debemos calcular en primer lugar los vectores $\vec{u}_j$ y los números reales λ_j que cumplan la igualdad $A\vec{u}_j = \lambda_j\vec{u}_j$. Tales vectores y números reales se llamarán, respectivamente, autovectores o vectores propios y autovalores o valores propios de A. Si puede formarse una matriz invertible U, del mismo orden que A, utilizando como columnas autovectores de A, entonces esta matriz será diagonalizable y su forma diagonal D tendrá a los autovalores como elementos de la diagonal principal.

Puede ocurrir que una matriz cuadrada no tenga autovectores o que tenga algunos pero no los suficientes como para formar con ellos una matriz invertible. Es decir, no toda matriz cuadrada es diagonalizable. Aun en el caso de que una matriz no sea diagonalizable, el conocimiento de sus autovalores y autovectores es interesante de por sí ya que, cuando se modela un sistema a partir de una matriz, sus autovectores y autovalores nos proporcionan información sobre el comportamiento del sistema. Veremos un ejemplo de esto cuando estudiemos el modelo matricial de Leslie.

Además de las diagonales, otras matrices sencillas de manejar son las llamadas matrices diagonales por bloques, que tienen la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_n \end{pmatrix},$$

donde cada J_i es a su vez una matriz y cada 0 representa a la matriz nula del orden correspondiente. Un resultado fundamental del Álgebra Lineal consiste en probar que toda matriz cuadrada A es semejante a una matriz diagonal por bloques J donde cada bloque J_i de la diagonal principal tiene una cierta forma sencilla. Es decir, existe una matriz invertible P tal que $A = PJP^{-1}$. La matriz J se llama forma canónica de Jordan de A y las columnas de P forman una base de Jordan para A. Una matriz será diagonalizable cuando los bloques de su forma de Jordan sean de orden 1.

La forma diagonal de una matriz, y en general la forma canónica de Jordan, tiene una importante aplicación en en el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio en los sistemas de ecuaciones diferenciales y en la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Lamentamos no poder abordar estas cuestiones en este curso, por falta de tiempo, pues hay importantes modelos biológicos basados en ellas.

En esta asignatura solamente nos ocuparemos de las matrices diagonalizables. Para el caso no diagonalizable véase el capítulo IV de [**MS06**].

5.1. Autovectores y autovalores de una matriz.

Se dice que dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ e $\vec{y} = (y_1, y_2 \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$ son **proporcionales** si existe un número λ tal que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, es decir,

$$y_1 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda x_2, \quad \dots, \quad \text{e} \quad y_n = \lambda x_n.$$

Recordemos que si A es una matriz cuadrada de orden n y $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ es un vector columna con n coordenadas, entonces el producto $A\vec{x}$ es también un vector columna con n coordenadas.

Definición V.5.2. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Un vector no nulo $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^{\mathrm{T}}$ es un **autovector** o un **vector propio** de A si el producto $A\vec{u}$ es proporcional a $\vec{u}$. Es decir, si existe algún número λ tal que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$.

Ejemplos V.5.3.

i) El vector $(1,0)^{\mathrm{T}}$ es autovector de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pues

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) Compruébese que el vector $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ es autovector de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y que lo mismo ocurre con cualquier vector no nulo $(0,\alpha,0)^{\mathrm{T}}$ proporcional a $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

iii) Compruébese que los vectores $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ y $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ son autovectores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición V.5.4. Un número real λ es **autovalor**, o **valor propio**, de una matriz cuadrada A si existe un vector no nulo $\vec{u}$ tal que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Diremos entonces que $\vec{u}$ es un **autovector asociado al autovalor** λ.

Algunas observaciones a tener en cuenta sobre estas definiciones:

- Cada autovector de una matriz está asociado a un único autovalor: si el autovector $\vec{u}$ está asociado a λ y a μ entonces $A\vec{u} = \lambda\vec{u} = \mu\vec{u}$ y como $\vec{u} \neq 0$ la igualdad $\lambda\vec{u} = \mu\vec{u}$ sólo puede darse cuando $\lambda = \mu$.
- Si $\vec{u}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ, entonces cualquier vector no nulo proporcional a $\vec{u}$, es decir, $\alpha\vec{u}$ con $\alpha \neq 0$, es también autovector de A ya que si $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, entonces $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u}) = \alpha(\lambda\vec{u}) = \lambda(\alpha\vec{u})$.
- El vector cero cumple que $A \cdot \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$, para cualquier matriz A y cualquier número real λ por lo que por definición *el vector cero no se admite como autovector en ningún caso.* El número 0 sí será autovalor para algunas matrices, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplos V.5.5.

i) Un autovalor asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es 0 pues

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Un autovalor de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es 2 y un autovector a él asociado es $(1,0)^{\mathrm{T}}$ pues

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Son también autovectores de A asociados a 2 todos vectores proporcionales a $(1,0)^{\mathrm{T}}$, es decir, los de la forma $(\alpha,0)^{\mathrm{T}}$, con $\alpha \neq 0$.

iii) Compruébese que el vector $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2. Cálculo de autovalores y autovectores.

Un número real λ es autovalor de una matriz A de orden n y tiene al vector $\vec{u}$ como autovector asociado cuando se cumple la igualdad vectorial $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Esta igualdad, escrita coordenada a coordenada, da lugar a n igualdades:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}u_1 & + & a_{12}u_2 & + & \dots & + & a_{1n}u_n & = & \lambda u_1 \\ a_{21}u_1 & + & a_{22}u_2 & + & \dots & + & a_{2n}u_n & = & \lambda u_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}u_1 & + & a_{n2}u_2 & + & \dots & + & a_{nn}u_n & = & \lambda u_n \end{array}$$

Es decir, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^{\mathrm{T}}$ es autovector de la matriz A asociado a λ si, y sólo si, $u_1, u_2, \dots, u_n$ es solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & \lambda x_n \end{array}\right\},$$

que puede escribirse también de la forma

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Para cualquier valor de λ, este sistema homogéneo tendrá la solución nula $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, pero recordemos que los autovectores deben ser siempre vectores no nulos. Según la nota V.4.1, este sistema homogéneo tendrá alguna solución no nula cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea cero. Observemos que dicha matriz es $A - \lambda I_n$. Luego, el sistema tiene soluciones no nulas cuando

$$\boxed{|A - \lambda I_n| = 0.}$$

Definición V.5.6. Se llama **ecuación característica** de una matriz cuadrada A, de orden n, a la ecuación

$$|A - xI_n| = 0.$$

que es equivalente a

$$|xI_n - A| = 0.$$

Los autovalores de una matriz A son los números reales[9] λ para los que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I_n)\vec{x} = 0$ tiene soluciones no nulas luego *los autovalores de una matriz cuadrada de orden* n *son las soluciones de la ecuación característica* $|A - xI_n| = 0$.

De lo dicho hasta ahora se sigue que para calcular los autovalores y autovectores de una matriz A de orden n debemos proceder en el siguiente orden:

Paso 1. Calculamos el determinante de $A - xI_n$.

Paso 2. Calculamos los autovalores, es decir, resolvemos la ecuación característica

$$|A - xI_n| = 0.$$

Paso 3. Para cada autovalor λ obtenido en el paso anterior, calculamos los autovectores asociados. Es decir, obtenemos las soluciones no nulas del sistema de ecuaciones:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

que podemos escribir también como

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}.$$

Recordemos que si λ es autovalor de A este sistema debe tener necesariamente soluciones no nulas.

Ejemplo V.5.7. **Ecuación característica y autovalores de matrices de orden** 2. La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

[9]Generalmente, se suelen llamar autovalores a todas las soluciones (reales o complejas) de la ecuación característica. Dada la naturaleza de esta asignatura, consideraremos solamente las soluciones reales y sólo a esta llamaremos autovalores.

es $|A - xI_2| = 0$, es decir,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{vmatrix} &= (a_{11}-x)(a_{22}-x) - a_{12}a_{21} \\ &= x^2 - (a_{11}+a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0\end{aligned}$$

Los autovalores de A serán las raíces de ese polinomio de segundo grado.

Un polinomio de segundo grado puede tener dos raíces reales distintas, una única raíz real o puede carecer de raíces reales. Como supondremos siempre que los autovalores son números reales, concluimos que una matriz de orden cuadrada de orden 2 puede tener dos autovalores, un único autovalor, o no tener ninguno.

Ejemplo V.5.8. **Ecuación característica y autovalores de matrices de orden** 3. Para obtener la ecuación característica de una matriz A de orden 3 calculamos $|A - xI_3|$,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} &= (a_{11}-x)\begin{vmatrix} a_{22}-x & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} \\ &- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-x \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-x \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= -x^3 + (a_{11}a_{22}a_{33})x^2 + \dots\end{aligned}$$

Este determinante, $|A - xI_3|$, es un polinomio en x de tercer grado.

La ecuación característica $|A - xI_3| = 0$, por ser polinómica de grado 3, tiene siempre al menos una solución real, y puede tener, a lo sumo tres soluciones distintas. Por lo tanto, una matriz de orden 3 puede tener uno, dos o tres autovalores distintos.

Ejemplo V.5.9. **Ecuación característica y autovalores de matrices de orden** n**:** Con un procedimiento totalmente análogo al realizado para las matrices de orden 3, se puede comprobar que, si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $|A - xI_n|$ es un polinomio de grado n en x.

La ecuación característica $|A - xI_n| = 0$ puede tener, a lo sumo, n soluciones distintas. Luego, la matriz A tendrá, como mucho, n autovalores distintos.

Examinemos ahora algunos ejemplos concretos.

Ejemplo V.5.10. Calculemos los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La ecuación característica es

$$|xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & x-\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x-\frac{1}{2})x = 0$$

Los autovalores de A son las soluciones de esta ecuación. Es decir,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lambda = 0.$$

Calculemos ahora un autovector asociado a cada uno de estos autovalores.
Para obtener un autovector asociado a $\lambda_1 = 1$ hemos de resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}y & & & = & 0 \\ -\frac{1}{2}y & + & z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es $\vec{u}_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$.
Para obtener un autovector asociado a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ hemos de resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{2}y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ es $\vec{u}_2 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.
Para obtener un autovector asociado a $\lambda_3 = 0$ hemos de resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \frac{1}{2}y & & & = & 0 \\ & & \frac{1}{2}y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Un autovector asociado al autovalor $\lambda_3 = 0$ es $\vec{u}_3 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

Ejemplo V.5.11. Calculemos los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
La ecuación característica es $x^2 - 0{,}5x - 0{,}6 = 0$.
Las soluciones de esta ecuación son

$$\lambda_1 = \frac{0{,}5 + \sqrt{2{,}65}}{2} = 1{,}06394103\ldots$$

y

$$\lambda_2 = \frac{0{,}5 - \sqrt{2{,}65}}{2} = -0{,}5639410298\ldots$$

Para determinar un autovector asociado a λ_1, resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -\lambda_1 x & + & 2y & = & 0 \\ 0{,}3x & + & (0{,}5-\lambda_1)y & = & 0 \end{array}\right\}$$

Obtenemos que los autovectores asociados a λ_1 son de la forma $(x, \frac{\lambda_1}{2}x)$, con $x \neq 0$. Un autovector asociado a λ_1 es, por ejemplo, $(2, \lambda_1)$.

De manera análoga obtenemos que los autovectores asociados a λ_2 son los de la forma $(x, \frac{\lambda_2}{2}x)$, con $x \neq 0$. Uno de ellos es $(2, \lambda_2)$.

Nota V.5.12. A veces ocurre que los autovalores de una matriz son números con infinitas cifras decimales, como en el ejemplo anterior $\lambda_1 = \frac{0{,}5+\sqrt{2{,}65}}{2}$ y $\lambda_1 = \frac{0{,}5-\sqrt{2{,}65}}{2}$. En muchas ocasiones es conveniente tomar una aproximación de estos números, por ejemplo $\lambda_1 = 1{,}06$ y $\lambda_2 = -0{,}56$. Pero, a la hora de calcular los autovectores asociados, no podemos tomar estas aproximaciones ya que si las tomamos, el sistema a resolver no es exactamente el mismo que el original (ciertamente, $\lambda_1 = \frac{0{,}5+\sqrt{2{,}65}}{2}$ no es exactamente igual a 1,06). Este nuevo sistema, es compatible determinado y tiene como única solución $x = 0$ e $y = 0$. En el ejemplo anterior, si tomamos $\lambda_1 = 1{,}06$ y resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -1{,}06x & + & 2y & = & 0 \\ 0{,}3x & + & (0{,}5-1{,}06)y & = & 0 \end{array}\right\}$$

obtenemos que $y = \frac{1{,}06}{2}\,x$, y sustituyendo en la segunda ecuación, $0{,}3x + 0{,}56 \cdot \frac{1{,}06}{2} x = 0$, es decir, $0{,}0032x = 0$, luego $x = 0$ e $y = 0$.

Cuando tengamos autovalores con infinitas cifras decimales, para calcular los autovectores debemos proceder como en el ejemplo V.5.11: obtenemos los autovectores en función de los autovalores y, si es necesario, se toma una aproximación de los autovalores y de los autovectores al final del proceso.

Ejercicio V.5.13. Calcular los autovalores y los autovectores de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3. Diagonalización de una matriz.

Definición V.5.14. Si A es una matriz cuadrada de orden n con n autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, llamaremos **diagonalización** o **forma diagonal** de A a la matriz

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Nota V.5.15. El número de autovalores distintos de una matriz cuadrada de orden n puede ser estrictamente menor que n. En este caso, que no estudiaremos en este curso, puede que la matriz sea diagonalizable o que no lo sea. En resumen: *si una matriz cuadrada de orden n tiene n autovalores distintos, entonces tiene una forma diagonal; si el número de autovalores es menor que n, no es seguro que tenga forma diagonal* (véase el capítulo IV de [**MS06**] para más detalles).

Estudiemos ahora la relación que existe entre una matriz y su forma diagonal.

Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n con n autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sea D la diagonalización de A, es decir, la matriz diagonal con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en la diagonal principal. Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ autovectores de A asociados, respectivamente, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Llamemos U a la matriz que tiene como columnas a los autovectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ y denotemos D la matriz diagonal. Utilizaremos el siguiente resultado, que no demostraremos.

Proposición V.5.16. *Sea A una matriz cuadrada de orden n con n autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ autovectores de A asociados, respectivamente, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. La matriz U que tiene como columnas a los autovectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ es invertible.*

Demostración. Puede consultarse en las páginas 205-215 de [**MS06**]. ■

Según vimos en el ejercicio V.5.1, $AU = UD$. Aplicando la proposición anterior, concluimos que

$$\boxed{A = UDU^{-1}}$$

Nota V.5.17. Es importante tener en cuenta que para que se cumpla $AU = UD$, o equivalentemente, $A = UDU^{-1}$, al escribir los autovectores de A como columnas de U deben colocarse en el mismo orden que los correspondientes autovalores en D. Es decir, si los elementos de la diagonal de D son, por ese orden, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces la primera columna de U debe ser un autovector $\vec{u}_1$ asociado a λ_1, la segunda un autovector $\vec{u}_2$ asociado a λ_2, y así sucesivamente.

Ejercicio V.5.18. Para cada una de las siguientes matrices, escribir una matriz diagonal D y matrices invertibles U y U^{-1} tales que $A = UDU^{-1}$.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 32 & 48 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad d)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

5.4. Potencias de una matriz diagonalizable.

Sea A una matriz cuadrada de orden n con n autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sea D la diagonalización de A. Tomemos autovectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ de A asociados, respectivamente, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sea U la matriz cuadrada de orden n que tiene como columnas a los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$. Sabemos que

$$A = UDU^{-1}$$

luego,

$$A^2 = (UDU^{-1})(UDU^{-1}) = UD^2U^{-1}$$
$$A^3 = A^2A = (UD^2U^{-1})UDU^{-1} = UD^3U^{-1}$$

y en general

$$\boxed{A^t = UD^tU^{-1}.}$$

Esta fórmula resulta útil porque las potencias de una matriz diagonal se calculan fácilmente. Si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$D^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{pmatrix}$$

Ejemplo V.5.19. En un experimento controlado, se aparean caballos de tipo AA con yeguas escogidas al azar. Las yeguas de la descendencia se aparean después con machos de tipo AA, y este proceso continúa. A la proporción inicial de madres de genotipo AA, AB y BB lo llamaremos $g_1(0)$, $g_2(0)$ y $g_3(0)$, respectivamente.

Vamos a calcular el porcentaje de cada genotipo en una generación cualquiera n y después vamos a probar que, a la larga, la proporción de individuos del tipo AA es prácticamente 1.

Según vimos en el ejemplo V.1.8, el vector de proporciones de genotipos en la n-ésima generación $\vec{g}_n$ es

$$\vec{g}_n = A^n\vec{g}_0.$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular A^n utilizamos la forma diagonal de A, que obtendremos mediante los siguientes cálculos (compruébese que son correctos):

- La ecuación característica de A es $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = x(x - \frac{1}{2})(x - 1) = 0$.
- Los autovalores de A son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_3 = 1$.
- Estos autovalores tienen como autovectores asociados, respectivamente, a $\vec{u}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$ y $\vec{u}_3 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.
- La diagonalización de A es $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Una matriz de autovectores es $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- La matriz inversa de U es $U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos ya $\vec{g}_n = UD^nU^{-1}\vec{g}_0$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} g_1(n) \\ g_2(n) \\ g_3(n) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_3(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g_3(0) \\ -g_2(0) - 2g_3(0) \\ g_1(0) + g_2(0) + g_3(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{1}{2})^n(-g_2(0) - 2g_3(0)) \\ g_1(0) + g_2(0) + g_3(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n(-g_2(0) - 2g_3(0)) + (g_1(0) + g_2(0) + g_3(0)) \\ (\frac{1}{2})^n(g_2(0) + 2g_3(0)) \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned}
g_1(n) &= g_1(0) + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) g_2(0) + \left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) g_3(0), \\
g_2(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n g_2(0) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n g_3(0), \\
g_3(n) &= 0.
\end{aligned}$$

Observemos que $g_1(n) + g_2(n) + g_3(n) = 1$.

Cuando n es muy grande, el valor de $(\frac{1}{2})^n$ es muy pequeño, por lo que podemos decir que, al cabo de muchas generaciones, $g_1(n)$ es prácticamente igual a $g_1(0) + g_2(0) + g_3(0)$, es decir, igual a 1, mientras que $g_2(n)$ es prácticamente igual a 0. Es decir, a la larga, casi toda la población será del tipo AA.

Ejercicio V.5.20. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, comprobar que

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^t & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^t \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^t & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^t \end{pmatrix}$$

Para valores muy grandes de t, ¿qué aproximación podemos tomar de A^t?

6. Modelo matricial de Leslie

El modelo de crecimiento de la población de aves descrito en ejemplo V.1.5 es una variante del modelo de crecimiento de población de Leslie, desarrollado alrededor de 1940.

En el modelo de Leslie, los individuos se clasifican en m clases por edades. Se supone que todas las clases son de igual amplitud. Así, si la vida más larga se estima en L años, la amplitud de cada grupo de edades es de L/m años. Llamamos $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_m$ a los m grupos de edades. El grupo G_1 está formado por los individuos cuya edad está en el intervalo $[0, L/m)$ es decir, que tienen menos de L/m años. El siguiente grupo por edades G_2, lo forman los individuos cuya edad está en el intervalo $[L/m, 2L/m)$. El siguiente grupo lo forman los individuos con edad en $[2L/m, 3L/m)$, y así, hasta llegar al último grupo formado por los individuos cuya edad está comprendida en el intervalo $[(m-1)L/m, L]$.

Los censos de población se realizan en intervalos de tiempo iguales a la amplitud de los grupos de edades. Si, por ejemplo, se estima que la máxima edad que puede alcanzar un individuo de una especie es de 45 años y se divide la población por edades en 3 grupos, el primer grupo estará formado por los individuos menores de 15 años, el segundo grupo por los que tienen 15 o más años y menos de 30 y el tercero lo componen los de 30 o más años. Los censos de población se realizarán en este caso cada 15 años.

Para recoger los datos de la población consideramos las siguientes variables:

$$n_i(t) = \text{número de individuos en el grupo } i \text{ al final del periodo } t$$

$$\vec{n}_t = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix} = \text{vector de población en el periodo } t.$$

Denotaremos por f_i el término medio (o promedio) de descendientes por individuo del grupo G_i (esto es la tasa de fecundidad específica del grupo G_i). Llamaremos s_i a la fracción de individuos del grupo G_i que sobreviven al intervalo entre censos y pasan a formar parte del grupo G_{i+1}, es decir, a la probabilidad de que un individuo del grupo G_i sobreviva un periodo más y pase a formar parte del grupo G_{i+1} en el siguiente periodo.

A partir de estos datos, calculemos la población al final del periodo t, a partir de la población que había al final del periodo $t-1$. El número de individuos que habrá, al final del periodo t, en el grupo G_1 es:

$$n_1(t) = f_1 \cdot n_1(t-1) + f_2 \cdot n_2(t-1) + \ldots + f_m \cdot n_m(t-1).$$

Para $i > 1$, el número de individuos que habrá en el periodo de tiempo t en el grupo G_i será igual al número de componentes del G_{i-1} en el periodo $t-1$ que sobrevivieron para pasar a G_i. Es decir,

$$n_i(t) = s_{i-1} \cdot n_{(i-1)}(t-1).$$

Estas ecuaciones son más manejables si se escriben en forma matricial. Para ello consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

El producto de esta matriz por el vector de población en un cierto periodo es el vector de población en el periodo siguiente:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1(t-1) \\ n_2(t-1) \\ n_3(t-1) \\ \vdots \\ n_m(t-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix}.$$

Así pues, $\vec{n}_t = A\vec{n}_{t-1}$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= A\vec{n}_0 \\ \vec{n}_2 &= A\vec{n}_1 = A^2\vec{n}_0 \\ \vec{n}_3 &= A\vec{n}_2 = A^3\vec{n}_0 \end{aligned}$$

y así sucesivamente obtenemos,

$$\vec{n}_t = A\vec{n}_{t-1} = A^t\vec{n}_0.$$

Definición V.6.1. Cuando una población dividida en m grupos de edad sigue el modelo de Leslie, llamaremos **matriz de Leslie** a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix},$$

con $s_i \geq 0, i = 1, \ldots, m-1$, y $f_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m-1$

En una matriz de Leslie supondremos siempre que $s_i > 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, pues si algún s_i es igual a cero, al cabo de un número finito de periodos de tiempo la población estaría formada sólo por individuos de los i primeros grupos de edad. Supondremos también que algún f_i es estrictamente positivo, pues en caso contrario ocurriría que $A^m = 0$, es decir, que al cabo de m periodos de tiempo la población se habrá extinguido completamente.

Ejemplo V.6.2. Para estudiar el crecimiento de una población de focas, se dividen por edades en tres grupos, todos de una amplitud igual a diez años. Se sabe que los individuos del primer grupo no son fértiles, es decir, $f_1 = 0$, y que, cada diez años, los del segundo tienen, una media de siete crías, $f_2 = 7$, y las del tercero cuatro, $f_3 = 4$. Un cuarto de los miembros del primer grupo y tres cuartos de los del segundo sobrevive diez años o más ($s_1 = 1/4$ y $s_2 = 3/4$). La matriz de Leslie de esta población es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio V.6.3. Calcular, para la población del ejemplo anterior, la proporción de focas que sobrevive 20 años o más, es decir, calcular la probabilidad de que una foca recién nacida llegue a vivir 20 años o más.

Vamos a usar ahora la teoría sobre matrices para abordar las siguientes cuestiones:

- Calcular el vector de población en un año cualquiera, $\vec{n}_t$.
- Calcular los vectores de distribución que permanecen estables, es decir, que mantienen estable la proporción de individuos entre los distintos grupos en las sucesivas generaciones.
- Estudiar el comportamiento asintótico de la población. Es decir, estudiar la evolución de la población a muy largo plazo.

Cálculo del vector de población $\vec{n}_t$.

Sabemos que si $\vec{n}_0$ es el vector de población inicial y A es la matriz de Leslie, entonces el vector de población al final del t-ésimo periodo es $\vec{n}_t = A^t\vec{n}_0$. Si la matriz de Leslie es diagonalizable[10], $A = UDU^{-1}$, entonces,

$$\vec{n}_t = A^t\vec{n}_0 = UD^tU^{-1}\vec{n}_0.$$

Si llamamos $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_m)^{\mathrm{T}}$ al producto de la matriz U^{-1} por el vector $\vec{n}_0$, es decir, $\vec{c} = U^{-1}\vec{n}_0$ entonces,

$$\vec{n}_t = UD^tU^{-1}\vec{n}_0 = UD^t\vec{c}$$

El producto de la matriz diagonal D^t por el vector $\vec{c}$ es $D^t\vec{c} = (\lambda_1^t c_1, \lambda_2^t c_2, \ldots, \lambda_m^t c_m)^{\mathrm{T}}$. Para hacer el producto de este vector $D^t\vec{c}$ por la matriz U, llamamos $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2 \ldots, \vec{u}_m$ a los vectores que forman las columnas de U, es decir, a los autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ de A, y obtenemos

$$\vec{n}_t = UD^t\vec{c} = \lambda_1^t c_1\vec{u}_1 + \lambda_2^t c_2\vec{u}_2 + \lambda_3^t c_3\vec{u}_3 + \ldots + \lambda_m^t c_m\vec{u}_m.$$

[10]Cuando la matriz no es diagonalizable los cálculos se realizan de forman similar utilizando la forma canónica de Jordan en lugar de la forma diagonal.

Nota V.6.4. *El razonamiento anterior se resume en la siguiente cadena de igualdades que nos permiten determinar el vector de población $\vec{n}_t$,*

$$\vec{n}_t = UD^tU^{-1}\vec{n}_0 = UD^t\vec{c} = U\begin{pmatrix} \lambda_1^t c_1 \\ \lambda_2^t c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m^t c_m \end{pmatrix} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)\begin{pmatrix} \lambda_1^t c_1 \\ \lambda_2^t c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m^t c_m \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1^t c_1\vec{u}_1 + \lambda_2^t c_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_m^t c_m\vec{u}_m.$$

Veamos un ejemplo que ilustre este proceso.

Ejemplo V.6.5. Una población de conejos en un laboratorio de investigación tiene las siguientes características:

a.) La cuarta parte de los conejos sobreviven el primer año. De éstos, la mitad sobrevive el segundo año. El límite de vida es 3 años.
b.) Durante el primer año, los conejos no tienen descendencia. El número medio de descendientes es 13 en el segundo año y 12 en el tercero.

La población actual es de 24 conejos en la primera clase de edad, 24 en la segunda y 20 en la tercera. Es decir, en el momento actual, el vector de distribución por edad de la población es

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

La matriz de Leslie es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que dentro de un año y dentro de dos, los vectores de distribución por edad serán, respectivamente:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 552 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 222 \\ 138 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Para calcular el vector de población en un año cualquiera, $\vec{n}_t$ debemos hacer previamente los siguientes cálculos (como ejercicio, compruébense los resultados obtenidos):

- La ecuación característica de A es
$$x^3 - 3{,}25x - 1{,}5 = 0.$$
- Las raíces de este polinomio, es decir, los autovalores de A, son
$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1{,}5 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -0{,}5$$

- La forma diagonal de A es
$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & -1{,}5 & 0\\ 0 & 0 & -0{,}5\end{pmatrix}$$
- Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1=2$ son los vectores de la forma
$$(32t,4t,t),\quad t\neq 0.$$
- Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2=-1{,}5$ son los vectores
$$(18s,-3s,s),\quad s\neq 0.$$
- Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_3=-0{,}5$ son los vectores
$$(2r,-r,r),\quad r\neq 0.$$
- Tomando como autovectores
$$\vec{u}_1=(32,4,1)^{\mathrm{T}},\ \vec{u}_2=(18,-3,1)^{\mathrm{T}} \text{ y } \vec{u}_3=(2,-1,1)^{\mathrm{T}},$$
formamos la matriz
$$U=\begin{pmatrix} 32 & 18 & 2\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
- La inversa de U es la matriz
$$U^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{70} & \frac{4}{35} & \frac{3}{35}\\ \frac{1}{28} & -\frac{3}{14} & -\frac{2}{7}\\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}$$
- La potencia t-ésima de la matriz A es
$$A^t=UD^tU^{-1}=\begin{pmatrix} 32 & 18 & 2\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^t & 0 & 0\\ 0 & (-1{,}5)^t & 0\\ 0 & 0 & (-0{,}5)^t\end{pmatrix}U^{-1}$$
- El producto $U^{-1}\vec{n}_0$ es
$$\vec{c}=U^{-1}\vec{n}_0=\begin{pmatrix} \frac{1}{70} & \frac{4}{35} & \frac{3}{35}\\ \frac{1}{28} & -\frac{3}{14} & -\frac{2}{7}\\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24\\ 24\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{118}{35}\\ -10\\ \frac{126}{5}\end{pmatrix}$$

Podemos calcular ya $\vec{n}_t$:
$$\vec{n}_t=UD^tU^{-1}\vec{n}_0=U\begin{pmatrix} 2^t & 0 & 0\\ 0 & (-1{,}5)^t & 0\\ 0 & 0 & (-0{,}5)^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{118}{35}\\ -10\\ \frac{126}{5}\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} 32 & 18 & 2\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{118}{35}2^t\\ -10\,(-1{,}5)^t\\ \frac{126}{5}\,(-0{,}5)^t\end{pmatrix}=$$

$$\frac{118}{35}2^t \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 10\,(-1{,}5)^t \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{126}{5}\,(-0{,}5)^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio V.6.6. En la población de conejos descrita en el ejemplo anterior, ¿cuál es el número medio de hijos que tendrá cada individuo durante su esperanza de vida?

Vectores que mantienen estable la distribución por edades.

Observando los primeros vectores de la población de conejos en el ejemplo V.6.5, $\vec{n}_0 = (24, 24, 20)^{\mathrm{T}}$, $\vec{n}_1 = (552, 6, 12)^{\mathrm{T}}$ y $\vec{n}_2 = (222, 138, 3)^{\mathrm{T}}$, comprobamos que el porcentaje de individuos en cada clase cambia de año en año. Sin embargo, cuando la población inicial viene dada por un autovector, por ejemplo si $\vec{n}_0 = (32, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, entonces $\vec{n}_1 = A\vec{n}_0 = 2\vec{n}_0 = (64, 8, 2)^{\mathrm{T}}$, $\vec{n}_2 = A\vec{n}_1 = 2^2\vec{n}_0 = (128, 16, 4)^{\mathrm{T}}$ y en general, $\vec{n}_t = A\vec{n}_{t-1} = 2^t\vec{n}_0 = (2^t 32, 2^t 4, 2^t)^{\mathrm{T}}$. Es decir, cada año se duplica la población de todos y cada uno de los grupos y por tanto el reparto de la población entre los distintos grupos permanece estable.

Si una población sigue el modelo de Leslie, para mantener estable el porcentaje de población de los distintos grupos de edad, es decir, para que siempre haya la misma proporción de individuos en cada grupo de edad, el vector de población de cada año, $\vec{n}_t$, debe ser múltiplo escalar del vector del año anterior:

$$\vec{n}_t = \lambda\vec{n}_{t-1},$$

luego el vector de población inicial $\vec{n}_0$ debe cumplir que:

$$\vec{n}_1 = A\vec{n}_0 = \lambda\vec{n}_0.$$

Esta condición $A\vec{n}_0 = \lambda\vec{n}_0$ se cumple si, y sólo si, λ es un autovalor de la matriz de Leslie A y $\vec{n}_0$ es un autovector asociado a λ. Cuando se cumple esta condición tendremos que

$$\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_0. \quad \vec{n}_2 = \lambda^2\vec{n}_0. \;\ldots\;, \vec{n}_t = \lambda^t\vec{n}_0.$$

Nota V.6.7. En conclusión: *los vectores que mantienen estable la distribución por edad de la población en las sucesivas generaciones son los autovectores de la matriz de Leslie asociados a autovalores positivos.* Obviamente, todas las coordenadas de estos vectores deben ser no negativas.

En el ejemplo de los conejos (ejemplo V.6.5), los autovalores de A, son

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1{,}5 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -0{,}5$$

Como λ_2 y λ_3 son negativos, no tiene sentido elegir como vectores de distribución estables los autovectores asociados a estos autovalores.

Los vectores que mantienen estable la distribución de la población serán los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 2$, es decir los vectores de la forma $(32t, 4t, t)^{\mathrm{T}}$. Por tanto, para conseguir una distribución de población que mantenga estable el porcentaje de individuos en cada grupo de edad, el laboratorio debe partir de una población dada por un vector de la forma

$$\begin{pmatrix} 32s \\ 4s \\ s \end{pmatrix},$$

con $s > 0$.

Observemos que si el vector de población es de la forma $(32s, 4s, s)^{\mathrm{T}}$ entonces, el número de individuos de la primera clase de edad es ocho veces el número de individuos de la segunda y esta clase tiene a su vez el cuádruple de individuos que la tercera.

Si tomamos, por ejemplo, $s = 1$, tenemos el vector de población inicial $\vec{n}_0 = (32, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, que al año siguiente da lugar al vector $\vec{n}_1 = (64, 8, 2)^{\mathrm{T}}$, y al cabo de dos años, $\vec{n}_2 = (128, 16, 4)^{\mathrm{T}}$, y de tres, $\vec{n}_3 = (256, 32, 8)^{\mathrm{T}}$. Y, en general,

$$\vec{n}_t = 2^t \vec{n}_0 = 2^t \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que esta fórmula es enteramente análoga a la que rige el crecimiento de población en el modelo discreto de Malthus, que hemos estudiado en el tema sobre ecuaciones diferenciales.

Es natural plantearse si para cualquier población regida por el modelo matricial de Leslie existirá alguna distribución por edades que permanezca estable. Es decir, si toda matriz de Leslie tiene algún autovalor positivo que tenga asociados autovectores con todas las coordenadas positivas.

En el siguiente enunciado se da una respuesta positiva a esta cuestión y se establece además una propiedad que utilizaremos al estudiar el comportamiento asintótico del modelo.

Teorema V.6.8. *Sea A una matriz de Leslie*

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix},$$

con $s_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, m-1$ y algún $f_i > 0$.

- *La ecuación característica de A es*

$$x^m - f_1 x^{m-1} - f_2 s_1 x^{m-2} - f_3 s_1 s_2 x^{m-3} - \ldots - f_m s_1 \cdots s_{m-1} = 0.$$

- *La matriz A tiene un único autovalor mayor que cero, λ_1, que tiene como autovectores asociados a los vectores proporcionales a*

$$u_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^{m-1} \\ \lambda_1^{m-2} s_1 \\ \lambda_1^{m-3} s_1 s_2 \\ \vdots \\ \lambda_1 s_1 s_2 \cdots s_{m-2} \\ s_1 \cdots s_{m-1} \end{pmatrix}$$

- *Si además las tasas de fecundidad de dos grupos consecutivos son distintas de cero, esto es, $f_i \cdot f_{i+1} \neq 0$, para algún i, entonces λ_1 es el autovalor dominante, es decir, $\lambda_1 > |\lambda|$, para cualquier otro autovalor λ de A.*

Demostración. La demostración de este resultado puede consultarse en el capítulo 8 de [**Mey00**]. ∎

Nota V.6.9. Para matrices de Leslie de orden 2, basta con que f_1 sea estrictamente positivo para que se cumpla el teorema V.6.8

Ejercicio V.6.10.

- Expresar, en términos de autovalores de la matriz de Leslie, qué tiene que ocurrir para que exista un vector de población que permanezca constante en las sucesivas generaciones, es decir para que $\vec{n}_0 = \vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_t = \vec{n}_{t+1} = \ldots$.
- Demostrar que una condición necesaria y suficiente para exista un vector de población que permanezca constante en las sucesivas generaciones es que

$$f_1 + f_2 s_1 + f_3 s_1 s_2 + \ldots + f_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} = 1.$$

Los siguientes ejercicios consisten en comprobar algunos de los enunciados del teorema V.6.8.

Ejercicio V.6.11. Calcular la ecuación característica de las matrices de Leslie de orden 2 y 3.

Ejercicio V.6.12. Comprobar que si λ_1 es un autovalor de una matriz de Leslie, entonces $u_1 = (\lambda_1^{m-1}, \lambda_1^{m-2} s_1, \lambda_1^{m-3} s_1 s_2, \ldots, s_1 \cdots s_{m-1})^{\mathrm{T}}$ es autovector asociado a λ_1.

Estudio asintótico de la distribución de población.

Supongamos que el vector de población inicial $\vec{n}_0$ es un autovector de la matriz de Leslie asociado al autovalor positivo λ_1, entonces $\vec{n}_t = \lambda^t \vec{n}_0$, de manera que la proporción de individuos en los distintos grupos de edad se mantiene estable a lo largo del tiempo. Examinemos qué ocurre cuando se parte de un vector inicial cualquiera.

Recordemos la expresión de $\vec{n}_t$:

$$\vec{n}_t = \lambda_1^t c_1 \vec{u}_1 + \lambda_2^t c_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_m^t c_m \vec{u}_m$$

(véase la nota V.6.4 y los comentarios que la preceden).

Supongamos que λ_1 es el autovalor positivo de A. Por el teorema V.6.8 sabemos que este autovalor es el dominante, es decir, el autovalor de mayor módulo. Si en la expresión anterior sacamos λ_1^t como factor común, obtenemos:

$$\vec{n}_t = \lambda_1^t \left(c_1\vec{u}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t c_2\vec{u}_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^t c_m\vec{u}_m \right).$$

Los números $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ (para $i = 2, \ldots, m$) tienen módulo menor que 1, por lo que, cuando t tiende a infinito, $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t$ tiende a cero, para $i = 2, \ldots, m$. Por lo tanto, para valores muy grandes de t, podemos tomar como una buena aproximación del vector de población:

$$\vec{n}_t = \lambda_1^t c_1 \vec{u}_1.$$

A partir de esta aproximación podemos sacar las siguientes conclusiones:

- *Transcurrido un tiempo suficientemente largo, la proporción entre el número de individuos de los distintos grupos tiende a estabilizarse, aproximándose a la distribución dada por los autovectores asociados al autovalor de mayor módulo.* Por el teorema V.6.8, la existencia de este autovalor está garantizada siempre que las tasas de fecundidad de dos grupos consecutivos sean estrictamente positivas.
- *La evolución de la población a largo plazo está determinada por el autovalor de mayor módulo λ_1. Si $\lambda_1 > 1$ la población crecerá, si $\lambda_1 < 1$ disminuirá y si $\lambda_1 = 1$ permancerá prácticamente estable.*

Nota V.6.13. Los resultados obtenidos son ciertos en general, incluso cuando la matriz A no es diagonalizable. Además, aunque no se ha dicho explícitamente, a lo largo del desarrollo anterior, para sacar factor común λ_1^t en la expresión de $\vec{n}_t$, hemos supuesto $c_1 \neq 0$.

Veamos, como ejemplo qué ocurre cuando ha transcurrido un tiempo suficientemente largo con la población de conejos que venimos estudiando (ejemplo V.6.5). Habíamos obtenido que el vector de población en un año cualquiera t se escribe:

$$\vec{n}_t = UD^tU^{-1}\vec{n}_0 = UD^t\vec{c} =$$

$$\begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} 2^t c_1 + \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1{,}5)^t c_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-0{,}5)^t c_3$$

Sacando factor común 2^t (por ser 2 el autovalor de mayor valor absoluto), escribimos

$$\vec{n}_t = 2^t \left(c_1 \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1{,}5/2)^t c_2 \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-0{,}5/2)^t c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Cuando t tiende a infinito, $(-1{,}5/2)^t$ y $(-0{,}5/2)^t$ tienden a cero. Por lo tanto, para valores muy grandes de t, podemos tomar como una buena aproximación del vector de distribución por edades de la población,

$$\vec{n}_t = 2^t c_1 \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que obtenemos de nuevo una ecuación enteramente análoga a la que rige el crecimiento de población en el modelo discreto de Malthus.

Hemos visto que, cuando ha transcurrido tiempo suficiente, podemos escribir $\vec{n}_t = 2^t c_1 \vec{u}_1$, es decir, $\vec{n}_t = 2\vec{n}_{t-1}$. Esto significa que cada año, la población de cada grupo de edad se multiplica por 2 (que es el autovalor de mayor valor absoluto), y por lo tanto, la distribución por edad de la población se estabiliza:

$$n_1(t) = 2n_1(t-1) \quad n_2(t) = 2n_2(t-1) \quad n_3(t) = 2n_3(t-1),$$

luego,

$$\frac{n_1(t)}{n_1(t-1)} = \frac{n_2(t)}{n_2(t-1)} = \frac{n_3(t)}{n_3(t-1)} = 2.$$

Ejercicio V.6.14. Consideremos una población de conejos como la descrita en el ejemplo V.6.5. Si en cierto momento la población total es de 444000 conejos, ¿cuántos conejos habrá en cada grupo de edad?

Si partimos de una población inicial $\vec{n}_0 = (24, 24, 20)^{\mathrm{T}}$, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que la población total sea, aproximadamente, de unos 444000 conejos.

Ejemplo V.6.15. Estudiemos una población de mamíferos dividida por edades en tres grupos, cada uno de los cuales abarca 15 años. Las tasas de supervivencia y de natalidad en cada intervalo de 15 años se recogen en la matriz de Leslie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ \frac{25}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{75}{100} & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la población en un año cualquiera, los vectores que mantienen estable la distribución de la población por edades y el comportamiento de la población a largo plazo. para ello, debemos hacer en primer lugar los siguientes cálculos:

- La ecuación característica de A es
$$x^3 - \frac{7}{4}x - \frac{3}{4} = (x+1)(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}) = 0.$$
- Los autovalores de A son: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ y $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.
- Tomamos los autovectores asociados a cada uno de ellos: $\vec{u}_1 = (16, -4, 3)^{\mathrm{T}}$, $\vec{u}_2 = (12, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ y $\vec{u}_3 = (4, -2, 3)^{\mathrm{T}}$.
- La diagonalización de A es $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- La matriz de autovectores es $U = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- La matriz inversa de U es

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{80} & \frac{9}{40} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vectores que mantienen estable la distribución de la población. El único autovalor positivo de la matriz de transición A es $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Los vectores que mantienen estable la distribución de población son los autovectores asociados a este autovalor y que tengan todas sus componentes positivas. Es decir, los de la forma $(12s, 2s, s)$ con $s > 0$; por ejemplo, $(12, 2, 1)$, $(1200, 200, 100)$, ...

Cálculo de la población en un año cualquiera. Para calcular la población en un año t, a partir de una población inicial dada $\vec{n}_0$, tenemos que hacer el producto de matrices

$$\vec{n}_t = UD^tU^{-1}\vec{n}_0.$$

Para simplificar, llamemos $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ al vector $U^{-1}\vec{n}_0$. Es decir,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{20}n_1(0) - \frac{1}{5}n_2(0) - \frac{1}{5}n_3(0) \\ c_2 &= \frac{3}{80}n_1(0) + \frac{9}{40}n_2(0) + \frac{1}{10}n_3(0) \\ c_3 &= -\frac{1}{16}n_1(0) + \frac{1}{8}n_2(0) + \frac{1}{2}n_3(0) \end{aligned}$$

El vector de población $\vec{n}_t$ es

$$\begin{aligned} \vec{n}_t = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} (-1)^t & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2}\right)^t & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 12 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^t c_1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t c_2 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16\,(-1)^t c_1 + 12\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3 \\ -4\,(-1)^t c_1 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3 \\ 3\,(-1)^t c_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^t c_2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos pues,

$$n_1(t) = 16\,(-1)^t\,c_1 + 12\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3$$

$$n_2(t) = -4\,(-1)^t\,c_1 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3$$

$$n_3(t) = \quad 3\,(-1)^t\,c_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^t c_2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3$$

Evolución de la población a largo plazo: Para calcular $n_1(t)$ $n_2(t)$ y $n_3(t)$, con valores muy grandes de t, podemos hacer un par de simplificaciones que nos permiten hacer los cálculos de manera más cómoda sin que el error cometido sea apreciable.

Observemos que, para valores grandes de t, las potencias $\left(-\frac{1}{2}\right)^t$ están muy próximas a cero ($\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -0{,}0073125$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}00091406...$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{14} = 0{,}000057...$). Las cantidades $4\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3$, $2\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3$ y $3\left(-\frac{1}{2}\right)^t c_3$ serán también muy pequeñas, cuando t sea muy grande, por lo que podemos despreciarlas para calcular el valor de $n_1(t)$ $n_2(t)$ y $n_3(t)$.

En el cálculo de $n_1(t)$ $n_2(t)$ y $n_3(t)$ para valores grandes de t, puede despreciarse también el primer sumando de cada uno de ellos, es decir, $16\,(-1)^t\,c_1 = \pm 16c_1$, $-4\,(-1)^t\,c_1 = \pm 4c_1$ y $3\,(-1)^t\,c_1 = \pm 3c_1$ pues estas cantidades son muy pequeñas en comparación con el segundo sumando: $12\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2$, $2\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2$ y $\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2$ respectivamente, ya que las potencias $\left(\frac{3}{2}\right)^t$ van aumentando a medida que t aumenta y pueden llegar a ser tan grandes como se quiera sin más que tomar t suficientemente grande, al ser una función potencial de base mayor que 1 (véase el apéndice I).

Despreciando estas pequeñas cantidades, para valores muy grandes de t, una buena aproximación del vector de población es

$$n_1(t) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2,$$

$$n_2(t) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^t c_2,$$

$$n_3(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t c_2,$$

es decir,

$$\vec{n}_t = \left(\frac{3}{2}\right)^t c_2\vec{u}_2$$

Otra forma (más general) de realizar los cálculos para llegar a la misma conclusión es la siguiente:

Consideramos la expresión de $\vec{n}_t$:

$$\vec{n}_t = c_1 (-1)^t \vec{u}_1 + c_2 \left(\frac{3}{2}\right)^t \vec{u}_2 + c_3 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \vec{u}_3$$

Sacamos factor común $\left(\frac{3}{2}\right)^t$ (por ser $\frac{3}{2}$ el autovalor de mayor valor absoluto):

$$\left(\frac{3}{2}\right)^t \left(c_1 \frac{(-1)^t}{\left(\frac{3}{2}\right)^t} \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + c_3 \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^t}{\left(\frac{3}{2}\right)^t} \vec{u}_3 \right)$$

Los números $\frac{(-1)}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$ y $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$ son, en valor absoluto, menores que 1, por lo que, cuando t es muy grande, las potencias $\left(-\frac{2}{3}\right)^t$ y $\left(-\frac{1}{3}\right)^t$ están muy próximas a 0.

Así, cuando ha transcurrido un periodo de tiempo suficientemente largo, podemos tomar

$$\vec{n}_t = \left(\frac{3}{2}\right)^t c_2 \vec{u}_2$$

Esta ecuación nos indica que cada 15 años (es el intervalo de tiempo que hemos considerado), la población de cada grupo de edades se multiplica por $\frac{3}{2}$. Como $\frac{3}{2} > 1$, concluimos que con el paso del tiempo la población finalmente crece (aunque haya sufrido oscilaciones en los primeros periodos de tiempo).

Otra consecuencia de la ecuación obtenida es que a largo plazo se estabiliza la distribución de edades en un vector proporcional al autovector $\vec{u}_2$, asociado al autovalor de mayor valor absoluto $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. ¿Cuales serán, a la larga, los porcentajes de población de cada grupo del ejemplo considerado?.

Ejercicios de Álgebra Lineal

Ejercicios de repaso.

Ejercicio 1. Hallar los valores de x que hacen nulos los siguientes determinantes:

$$(a)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 2. Comprobar que la inversa de A es A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (d)\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(e)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (f)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las matrices anteriores tienen inversa? Calcúlense las matrices inversas en aquellos casos que sea posible.

Ejercicio 4. Determinar los valores del parámetro λ para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones no nulas

$$\left.\begin{array}{rcrl} (3-\lambda)x_1 & + & 2x_2 & = 0 \\ 4x_1 & + & (1-\lambda)x_2 & = 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 5. Resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 0 \\ 4x & + & 6y & + & 8z & = 2 \\ 7x & - & 4y & - & z & = -11 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & y & + & 3z & = 9 \\ 3x & - & 5y & + & z & = -4 \\ 4x & - & 7y & + & z & = 5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & z & - & t & = 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & + & t & = 2 \\ x & + & 9y & + & 2z & - & 4t & = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & + & z & = 1 \\ 5x & + & 3y & + & 3z & = 2 \\ x & + & y & - & z & = 1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & + & 3z & = 0 \\ 2x & + & 5y & + & 6z & = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = 0 \\ 2x & + & 5y & + & 6z & = 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = 0 \\ 2x & + & 5y & + & 6z & = 0 \\ 3x & + & 2y & + & 5z & = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcrl} 4x & - & y & + & 2z & + & t & = 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & - & 2t & = 0 \\ & & 7y & - & 4z & - & 5t & = 0 \\ 2x & - & 11y & + & 7z & + & 8t & = 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 7. Resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones en función del parámetro λ:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = 3 \\ \lambda x & + & 10y & & 4z & = 11 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrl} \lambda x & & & + & z & = 2 \\ \lambda x & & & - & z & = 1 \\ & & y & + & z & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 0 \\ -\lambda x & + & \lambda y & = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcrcrl} \lambda x & + & y & + & z & = 0 \\ (\lambda+1)x & + & y & - & \lambda z & = \lambda \\ & & (\lambda+1)y & & & = 2\lambda \end{array}\right\}$$

Ejercicio 8. Dadas las ecuaciones: $\left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 2y & + & z & = 5 \\ 2x & - & 3y & + & z & = -4 \end{array}\right.$

1. Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible.
2. Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justificar en cada caso el procedimiento seguido.

Ejercicio 9. Determinar para qué valores del parámetro a tiene soluciones no nulas el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrl} (10-a)x & - & 3y & + & 14z & = 0 \\ 6x & - & (1+a)y & + & 12z & = 0 \\ -3x & + & y & - & (3+a)z & = 0 \end{array}$$

Ejercicios del tema.

Ejercicio 10. En un experimento controlado, se aparean sementales de genotipo AB respecto a un gen que presenta dos alelos A y B, con hembras escogidas al azar. Las hembras de la descendencia se aparean después con sementales AB y así sucesivamente.

1. Si al comenzar el experimento partimos de una población en la que el 60 % es de tipo AA, el 20 % de tipo AB y el otro 20 % de tipo BB, ¿Cuál será el porcentaje de individuos de cada tipo en la tercera generación?
2. Determinar el porcentaje de cada genotipo cuando se ha realizado este proceso durante un número muy alto de generaciones.
3. ¿Cuántas generaciones deben transcurrir, como mínimo, para que el porcentaje de individuos del tipo AA sea menor que $\frac{1}{4} + 10^6$?

Ejercicio 11. Las bacterias son organismos haploides. Un gen de bacteria presenta dos alelos, A y B. El gen de alelo A es estable y el de alelo B es inestable, con una tasa de mutación del 15 % en cada unidad de tiempo. Supongamos que partimos de una población con 10^{10} bacterias con gen A y 10^7 bacterias con gen B. Se pide:

1. Calcular el número de bacterias de cada tipo al cabo de una y dos unidades de tiempo.
2. Escribir una fórmula que nos permita calcular con facilidad el número de bacterias al cabo de n unidades de tiempo.
3. Comprobar que al cabo de un tiempo suficientemente largo las bacterias con gen B desaparecen.
4. Calcular el tiempo necesario (número de unidades de tiempo) para que quede menos de una bacteria (o sea, ninguna) con gen B.

Ejercicio 12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, determinar los valores del parámetro a para que se cumpla cada una de las siguientes condiciones:

1. A sea invertible.
2. El determinante de A sea 2.
3. Un autovalor de A sea $\lambda = 2$.
4. A tenga dos autovalores positivos.

Ejercicio 13. Escribir una matriz que tenga como autovalores 1 y 2, y como autovectores asociados $(1, 0)$ y $(1, 1)$ respectivamente.

Ejercicio 14. Calcular los autovalores y los autovectores de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 14 \\ 6 & -1 & 12 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15. Escribir la información recogida en las siguientes matrices de Leslie: número de clases de edad de la población, probabilidad, para cada clase, de que un individuo sobreviva hasta la siguiente estación reproductiva, número medio de crías por individuo de cada clase.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 3{,}2 \\ 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 16. El crecimiento de una población de una cierta especie sigue el modelo de Leslie. Los individuos se dividen por edades en 3 grupos, todos de amplitud igual a un año. La matriz de transición de edades es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 24 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un animal que tiene entre 1 y 2 años sobreviva un año más?
2. ¿Cuál es el número promedio de hijos por año de los individuos que tienen más de dos años?
3. Si el vector de población de un año es $\vec{p_0} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ¿cuántos individuos habrá en cada grupo al año siguiente? ¿Cuántos años deben transcurrir para que haya algún individuo en el tercer grupo de edad?
4. Calcular los autovalores de la matriz A. De estos autovalores, ¿cuáles son positivos?
5. Calcular los autovectores asociados a los autovalores positivos de A y escribir los vectores de distribución por edades que mantienen estable la distribución por edades.

Ejercicio 17. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 0{,}08 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide

1. Escribir la ecuación característica y calcular los autovalores de A.
2. Hallar un autovector asociado a cada uno de los autovalores de A.
3. Escribir la matriz diagonal D y las matrices U y U^{-1} tales que $A = UDU^{-1}$.
4. Dar una expresión general para la potencia n-ésima de A.

   Supongamos ahora que A es la matriz de Leslie de transición de edades de una población y que el vector de distribución por edades inicial es

$$\vec{p_0} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

5. Calcular un vector de distribución por edades que mantenga estable la distribución de la población por edades.
6. Estudiar el comportamiento asintótico de la población, es decir, calcular el porcentaje de animales que, a la larga ($n \to \infty$), habrá en cada grupo.

Ejercicio 18. Para estudiar el crecimiento de una población de focas, éstas se dividen por edades en tres grupos, todos de una amplitud igual a diez años. Se sabe que los individuos del primer grupo no son fértiles y que, cada diez años, los del segundo tienen, en promedio, siete crías y las del tercero cuatro. Un cuarto de los miembros del primer grupo y tres cuartos de los del segundo sobrevive diez años o más.

1. Si en una población hay actualmente 25000 focas del primer grupo, 1000 focas del segundo y 500 del tercero, ¿Cuántas focas de cada grupo había hace 10 años? ¿Cuántas habrá dentro de 10 años?
2. Determinar el porcentaje de focas que, a la larga, habrá de cada grupo.

Ejercicio 19. La matriz de transición de edad de una cierta población es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar un vector de distribución por edades estable para dicha población.

Ejercicio 20. El crecimiento de una cierta población sigue el modelo de Leslie. Los individuos se dividen en tres clases de edad, todas de amplitud igual a un año. La reproducción se produce una vez al año y los censos se realizan al final de cada estación reproductiva. Se sabe que 1/3 de los individuos de la primera clase (de 0 a 1 año) y 2/5 de los de la segunda clase (de 1 a 2 años) sobrevive hasta el final de la siguiente estación reproductiva. Además, los individuos que tienen entre uno y dos años tienen un promedio de 69 crías y los que tienen más de dos años tienen un promedio de 75 crías.

1. Escribir la matriz de Leslie, a la que llamaremos A.
2. Si en un año la población consta de 2000 miembros de la primera clase de edad, 800 de la segunda y 200 de la tercera, obtener los vectores de población en los dos años siguientes.
3. Escribir la ecuación característica y calcular los autovalores de A.
4. Hallar un autovector asociado a cada uno de los autovalores de A.
5. Escribir los vectores que mantienen estable la distribución por edades de la población.
6. Escribir una matriz diagonal D y matrices invertibles U y U^{-1} tales que $A = UDU^{-1}$.
7. Escribir la expresión general del vector de población al cabo de t años, $\vec{n}_t$.
8. Calcular la aproximación que podemos tomar de $\vec{n}_t$ para valores muy grandes de t.

Ejercicio 21. El crecimiento de una cierta población sigue el modelo de Leslie. Los individuos se dividen por edades en dos grupos, los dos de amplitud igual a un año. La reproducción se produce una vez al año y los censos se realizan al final de cada estación reproductiva. Supongamos que los individuos del primer grupo tienen, en promedio 1,5 crías al año y los del segundo 2. Además, el 8 % de los componentes del primer grupo sobrevive un año más.

Con estos datos, responder a las preguntas 1-7 del problema anterior. Para el apartado 2, se supone que la población inicial es de 1000 individuos en el primer grupo y 500 en el segundo.

Ejercicio 22. Supongamos que una población se divide en cuatro clases de edad y que el 65 % de los individuos de edad 0, el 40 % de los de edad 1 y el 30 % de los de edad 2 sobreviven hasta el final de la siguiente estación reproductiva. Se supone también que los individuos de edad 1 tienen un promedio de 2,8 crías y que los de edad 2 tienen un promedio de 7,2 crías. Si en el instante 0 la población consta de 1500 individuos de edad 0, 500 de edad 1, 250 de edad 2 y 50 de edad 3, obtener la matriz de Leslie y la distribución de edades en el instante 3.

Ejercicio 23. Para estudiar el crecimiento de una población de una cierta especie, los individuos se dividen por edades en dos grupos, ambos de amplitud igual a un año. Se sabe que los componentes del primer grupo no son fértiles y que los del segundo grupo tienen, en promedio 5 crías al año. El 80 % de los animales del primer grupo sobrevive un año más y la edad máxima de la especie es de dos años.

1. Escribir la matriz de Leslie de transición de edades, a la que llamaremos A.
2. Escribir la ecuación característica y calcular los autovalores de A.
3. Hallar un autovector asociado a cada uno de los autovalores de A.
4. Escribir la matriz diagonal D y las matrices U y U^{-1} tales que $A = UDU^{-1}$.

Ejercicio 24. El crecimiento de una población de una cierta especie sigue el modelo de Leslie. Los individuos se dividen por edades en 3 grupos, todos de amplitud igual a dos años. La matriz de Leslie es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 32 & 16 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Escribir el número de hijos que, en promedio, tienen los individuos de cada grupo.
2. Calcular, para cada grupo, la probabilidad de que un individuo sobreviva hasta el siguiente censo.
3. El vector de población en el año 2006 es $\vec{n_0} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix}$. Calcular el vector de población en el año 2008.
4. Calcular los autovalores de la matriz A. De estos autovalores, ¿cuál tiene mayor valor absoluto?

5. Calcular los autovectores asociados al autovalor de mayor valor absoluto.
6. Decir si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa:

   Después de un tiempo suficientemente largo ($t \to \infty$), ocurrirá que:
   - El número de individuos entre 0 y 2 años será aproximadamente igual a doce veces el número de individuos entre 2 y 4 años.
   - El número de individuos entre 4 y 6 años será aproximadamente igual a cuatro veces el número de individuos entre 2 y 4 años.

Ejercicio 25. El crecimiento de una población de una cierta especie sigue el modelo de Leslie. Los individuos se dividen por edades en 4 grupos, todos de amplitud igual a un año. La matriz de Leslie es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Escribir el número de hijos que, en promedio, tienen anualmente los individuos de cada grupo.
2. Calcular, para cada grupo, la probabilidad de que un individuo sobreviva un año más.
3. El vector de población en el año 2006 es $\vec{n_0} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcular el vector de población en el año 2007.

Autoevaluación de Álgebra Lineal

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & + & z & = 0 \\ x & - & y & + & 2z & = 0 \\ x & + & 4y & - & z & = 0 \end{array},$$

determinar si cada una de las siguientes ternas es solución del sistema:
   (a) $x = 7, y = -3, z = -5$
   (b) $x = -14, y = 6, z = 10$
   (c) $x = 5, y = 3, z = -7$
   (d) $x = 10, y = 6, z = -14$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, determinar los valores del parámetro a para que se cumpla cada una de las siguientes condiciones:
   (a) A no sea invertible.
   (b) El sistema de ecuaciones $Ax = 0$ tenga soluciones no nulas.
   (c) Un autovalor de A sea igual a cero.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, determinar los valores del parámetro a para que se cumpla cada una de las siguientes condiciones:
   (a) El vector $(1, 1)$ sea autovector de A.
   (b) El vector $(1, -1)$ sea autovector de A.
   (c) El vector $(2, 1)$ sea autovector de A.

4. Indicar razonadamente si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:
   (a) Si λ es un autovalor de una matriz A y $\vec{u}$ es un autovector asociado a λ, entonces $2\vec{u}$ es también un autovector asociado a λ.
   (b) Si λ es un autovalor de una matriz A y $\vec{u}$ es un autovector asociado a λ, entonces 2λ es un autovalor de la matriz $2A$ y tiene a $2\vec{u}$ como autovector asociado.
   (c) Si λ es un autovalor de una matriz A y $\vec{u}$ es un autovector asociado a λ, entonces 2λ es un autovalor de la matriz $2A$ y tiene a $\vec{u}$ como autovector asociado.

5. Indicar cuales de las siguientes matrices tienen como autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y como autovectores asociados $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 0)$ respectivamente:
   (a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. El crecimiento de una población sigue el modelo de Leslie, dividiéndose por edades en cuatro grupos, todos de amplitud igual a un año. La matriz de Leslie es
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$
Indicar razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:
(a) En el segundo año de vida cada individuo tiene, en promedio, 2 hijos.
(b) Si $\vec{n}_0 = (10, 10, 10, 1)$ entonces $\vec{n}_1 = (71, 4, 8, 5)$.
(c) El 80 % de la población vive dos o más años.
(d) El 16 % de la población vive 3 o más años.

7. El crecimiento de una población sigue el modelo de Leslie, dividiéndose por edades en tres grupos, todos de amplitud igual a un año. La matriz de Leslie es
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 24 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$
Indicar razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:
(a) 3 es autovalor de A.
(b) 5 es autovalor de A.
(c) -4 es autovalor de A.
(d) Transcurrido un tiempo suficientemente largo, la población de cada grupo prácticamente se triplica cada año.

8. La matriz de Leslie de una población es
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$
Indicar razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:
(a) Si el vector de población inicial es $\vec{n}_0 = (16, 4, 3)$, entonces $\vec{n}_1 = \vec{n}_0$.
(b) Si el vector de población inicial es $\vec{n}_0 = (16, 4, 3)$, entonces $\vec{n}_t = \vec{n}_0, \forall t > 0$.
(c) Para cualquier vector de población inicial $\vec{n}_0$ ocurre que $\vec{n}_t = \vec{n}_0, \forall t > 0$.
(d) Un valor propio de la matriz A es $\lambda = 1$.

9. Al calcular la forma diagonal de la matriz de Leslie de una población se ha obtenido

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

(a) Si el vector de población inicial es $\vec{n}_0 = (12, 2, 1)$, entonces

$$\vec{n}_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Los vectores de población de la forma

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 12s \\ 2s \\ s \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad s > 0,$$

mantienen estable la distribución por edades de la población.

(c) Después de un tiempo suficientemente largo ($t \to \infty$) el número de individuos en el primer grupo de edad será aproximadamente igual a cuatro veces el número de individuos del segundo grupo de edad.

(d) Después de un tiempo suficientemente largo ($t \to \infty$) el número de individuos en el primer grupo de edad será aproximadamente igual a doce veces el número de individuos del tercer grupo de edad.

10. La matriz de Leslie de una población es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 14{,}5 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

(a) El autovalor dominante de A es $\lambda = 2$.

(b) Si $\vec{n}_3 = (512, 64, 24)$, entonces $\vec{n}_0 = (64, 8, 3)$.

(c) Si $\vec{n}_0 = (6, 8, 3)$, entonces $\vec{n}_1 = (12, 16, 6)$.

(d) Si al cabo de cierto tiempo la población está formada por 100000 individuos, aproximadamente 30000 estarán en el tercer grupo de edad.

Apéndices

Apéndice I. Algunas funciones elementales

En esta sección estudiaremos algunas funciones y familias funciones reales de variable real según su expresión analítica. De este modo, dispondremos de una amplia gama de funciones y de su propiedades que pueden servir de ilustración a lo estudiado en esta asignatura.

1.1. Funciones polinómicas.

Una **función** $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **polinómica** si su expresión analítica es un polinomio, es decir, si

$$f(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

con $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, para cada $i = 0, \ldots, n$. Recordamos que a_0 se llama **término independiente** y que si $a_n \neq 0$, entonces n se llama **grado**.

Propiedades: Una función polinómica cumple que:

- Es continua e indefinidamente diferenciable (n veces diferenciable, para todo $n \in \mathbb{N}$) en cada uno de los intervalos abiertos contenidos en su dominio, D.
- Si $n \geq 2$ y $a_n \neq 0$, entonces no tiene asíntotas (ni verticales, ni horizontales, ni oblicuas).
- Si $0 \in D$, corta al eje OY en $(0, f(0) = a_0)$. Como mucho, corta al eje OX en n puntos.
- Como mucho, tiene $n-1$ extremos relativos.
- Como mucho, tiene $n-2$ puntos de inflexión.

Ejemplo A.1.1. Consideremos la función polinómica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4$, y supongamos que queremos estudiar sus extremos relativos y puntos de inflexión.

Para ello, en primer lugar, calculamos su función derivada, $f'(x) = 4x^3$. La función f' se anula exclusivamente en $x = 0$, por lo tanto el punto $(0, f(0) = 0)$ es el único candidato a extremo relativo o punto de inflexión.

Como f es indefinidamente derivable en $D_f = \mathbb{R}$, siguiendo el criterio descrito en la sección anterior, debemos estudiar las sucesivas derivadas de f hasta dar con una que no se anule en $x = 0$. En nuestro caso tenemos que

$$f'(0) = f''(0) = f^{3)}(0) = 0, \quad \text{y} \quad f^{4)}(0) = 24 > 0,$$

luego podemos asegurar que f alcanza un mínimo relativo en $(0, f(0) = 0)$.

Ejemplo A.1.2. Consideremos la función polinómica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^5$, y supongamos que queremos estudiar sus extremos relativos y puntos de inflexión.

Para ello, en primer lugar, calculamos su función derivada, $f'(x) = 5x^4$. La función f' se anula exclusivamente en $x = 0$, por lo tanto el punto $(0, f(0) = 0)$ es el único candidato a extremo relativo o punto de inflexión.

Como f es indefinidamente derivable en $D_f = \mathbb{R}$, siguiendo el criterio descrito en la sección anterior, debemos estudiar las sucesivas derivadas de f hasta dar con una que no se anule en $x = 0$. En nuestro caso tenemos que

$$f'(0) = f''(0) = f^{3)}(0) = f^{4)}(0) = 0, \quad \text{y} \quad f^{5)}(0) = 120,$$

luego podemos afirmar que $(0, f(0) = 0)$ es un punto de inflexión de f.

A continuación vamos a estudiar detalladamente las funciones polinómicas de grado $0, 1$ y 2, es decir, las funciones constantes, lineales y cuadráticas.

1.1.1. Funciones constantes.

Una **función** $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **constante** si $f(x) = c \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D$. Observemos que la expresión analítica de una función constante es un polinomio de grado 0.

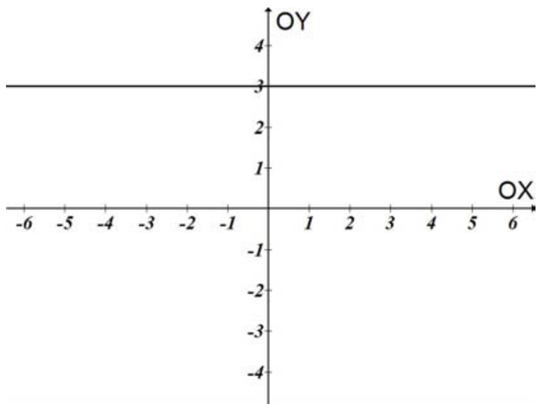
Ejemplo A.1.3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 7$ es una función constante, ya que, sea cual sea el valor de $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ siempre vale 7.

Propiedades: Sea $c \in \mathbb{R}$. La función constante $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, tiene las siguientes propiedades:

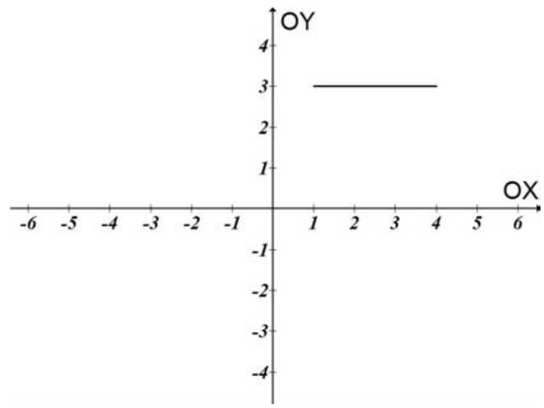
- Es continua e indefinidamente derivable en cada uno de los intervalos abiertos contenidos en su dominio, D.
- Una función constante es siempre simétrica par, pues, cualquiera que sea x tenemos que $f(x) = c = f(-x)$. Además, si $c = 0$, entonces es simétrica par e impar. De hecho la función constante $f(x) = 0$ es la única que presenta ambas simetrías.
- Tiene a la recta $y = c$ como asíntota horizontal, tanto cuando x tiende hacía $-\infty$ como cuando tiende hacia $+\infty$.
- Si $0 \in D$, corta al eje OY en el punto $(0, c)$.

  Si $c \neq 0$, no corta al eje OX; en cuyo caso, si $c > 0$, la función tiene signo positivo y si $c < 0$, la función tiene signo negativo. Si $c = 0$ corta al eje OX en todos los puntos de su dominio, en este caso ni es positiva ni es negativa.
- No es ni creciente ni decreciente, es constante.
- No es ni cóncava ni convexa.
- Su gráfica es la porción de la recta paralela al eje OX que pasa por el punto $(0, c)$ correspondiente su dominio.

Ejemplo A.1.4. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3$.



Ejemplo A.1.5. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3$.



1.1.2. Funciones lineales.

Una **función** $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **lineal** si su expresión analítica es un polinomio de grado 1, es decir, si $f(x) = b\,x + c$, con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D$.

Ejemplo A.1.6. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$ es una función lineal.

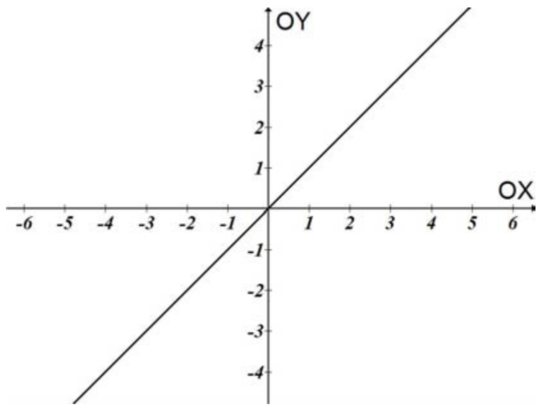
Propiedades: Sean $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$. La función lineal

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = b\,x + c$$

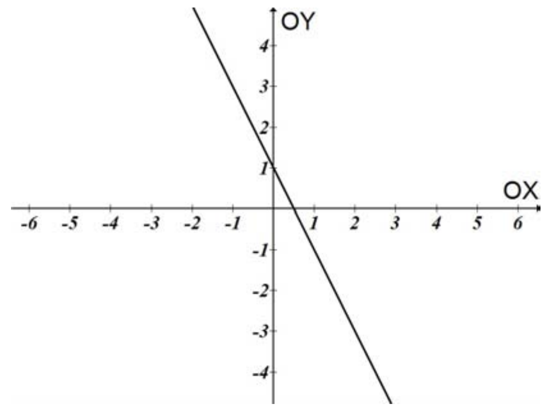
tiene las siguientes propiedades:

- Es continua e indefinidamente derivable en cada uno de los intervalos abiertos contenidos en su dominio, D.
- Si $c \neq 0$, es asimétrica. En cambio, si $c = 0$, entonces es simétrica impar. En efecto, $f(-x) = b(-x) = -b\,x = -f(x)$.
- No tiene ni asíntotas verticales ni horizontales. Tiene a la recta $y = b\,x + c$ como asíntota oblicua, tanto cuando x tiene hacia $-\infty$ como cuando tiende hacia $+\infty$.
- Si $0 \in D$, entonces corta al eje OY en el punto $(0, c)$.
  Si $-b/a \in D$, cota al eje OX en el punto $(-b/a, 0)$.
- Si $b > 0$, es creciente en todo su dominio, y si $b < 0$, es decreciente en todo su dominio.
- No es ni cóncava ni convexa.
- Su gráfica es la porción de la recta de **pendiente** b que pasa por el punto $(0, c)$ correspondiente a su dominio.

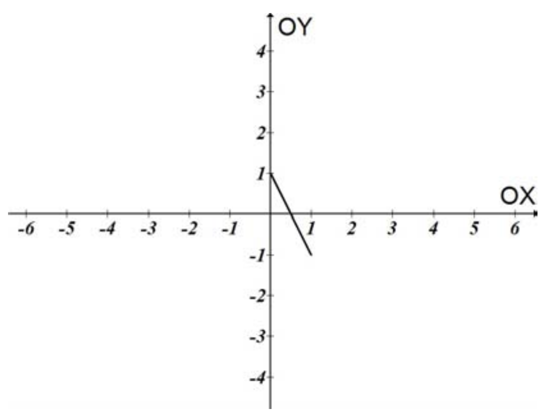
Ejemplo A.1.7. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.



Ejemplo A.1.8. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x + 1$.



Ejemplo A.1.9. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x + 1$.



Ejemplo A.1.10. Hallar la expresión analítica de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, -1)$.

Por un lado, como la gráfica de la función f es una recta podemos asegurar que se trata de una función lineal, entonces $f(x) = b\,x + c$ para ciertos números reales, $b \neq 0$ y c, a determinar. Por otra parte, tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & f(0) = b \cdot 0 + c \\ -1 & = & f(1) = b \cdot 1 + c \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcccc} 1 & = & & & c \\ -1 & = & b & + & c \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales obtenemos que $b = -2$ y $c = 1$. Luego $f(x) = -2x + 1$.

1.1.3. Funciones cuadráticas.

Una **función** $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **cuadrática** si su expresión analítica es un polinomio de grado 2, es decir, si $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $b,\ c \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D$.

Ejemplo A.1.11. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + x + 1$ es una función cuadrática.

<u>**Propiedades**</u>: Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $b,\ c \in \mathbb{R}$. La función cuadrática

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = a\,x^2 + b\,x + c,$$

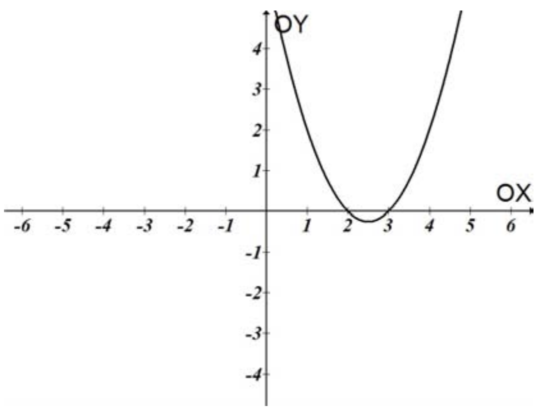
tiene las siguientes propiedades:

- Es continua e indefinidamente derivable en cada uno de los intervalos abiertos contenidos en su dominio, D.
- Si $b \neq 0$, es asimétrica. En cambio, si $b = 0$, entonces es simétrica par. En efecto, $f(-x) = a(-x)^2 + c = a\,x^2 + c = f(x)$.
- No tiene asíntotas.
- Sean $z_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $z_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Los números z_1 y z_2 son reales si y sólo si $b^2 - 4ac \geq 0$ (en otro caso serían números complejos y, para nuestros fines, no nos interesan).
  CORTE CON LOS EJES.
  - Corte con el eje OX.
    Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces no corta al OX.
    Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $z_1 = z_2$, en cuyo caso, si $z_1 = z_2 \in D$ corta al eje OX en el punto $(z_1, 0)$.
    Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $z_1 \neq z_2$, en cuyo caso, si $z_1 \in D$ corta al eje OX en el punto $(z_1, 0)$ y si $z_2 \in D$ corta al eje OX en el punto $(z_2, 0)$.
  - Corte con el eje OY.
    Si $0 \in D$, entonces corta al eje OY en el punto $(0, f(0) = c)$.

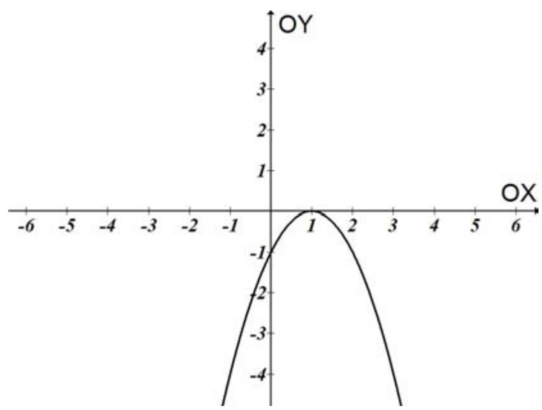
  SIGNO DE LA FUNCIÓN.
  - Si $a > 0$, entonces:
    Si $b^2 - 4ac < 0$, la función es positiva.
    Si $b^2 - 4ac = 0$, la función es positiva en $D \setminus \{z_1\}$.
    Si $b^2 - 4ac > 0$, la función es negativa en $D \cap (z_2, z_1)$ y positiva en $D \cap ((-\infty, z_2) \cup (z_1, +\infty))$.
  - Si $a < 0$, entonces:
    Si $b^2 - 4ac < 0$, la función es negativa.
    Si $b^2 - 4ac = 0$, la función es negativa en $D \setminus \{z_1\}$.
    Si $b^2 - 4ac > 0$, la función es positiva en $D \cap (z_1, z_2)$ y negativa en $D \cap ((-\infty, z_1) \cup (z_2, +\infty))$.
- $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$ y las siguientes derivadas son nulas.

- Si $a > 0$, entonces es decreciente en $D \cap (-\infty, -\frac{b}{2a})$ y creciente en $D \cap (-\frac{b}{2a}, +\infty)$. En cuyo caso alcanza un mínimo absoluto en $x = -\frac{b}{2a}$.
  Si $a < 0$, entonces es creciente en $D \cap (-\infty, -\frac{b}{2a})$ y decreciente en $D \cap (-\frac{b}{2a}, +\infty)$. En cuyo caso alcanza un máximo absoluto en $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $a > 0$, es siempre cóncava, y si $a < 0$, es siempre convexa.
- Su gráfica es la porción de una parábola de **vértice** $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$ correspondiente a su dominio.

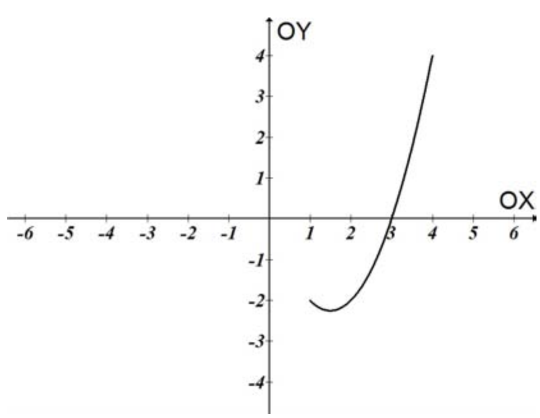
Ejemplo A.1.12. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$.



Ejemplo A.1.13. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.



Ejemplo A.1.14. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x$.



Ejemplo A.1.15. Hallar la expresión analítica de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica es la parábola que pasa por los puntos $(0, 6)$, $(-1, 12)$ y $(1, 2)$.

Por un lado, como la gráfica de la función f es una parábola podemos asegurar que se trata de una función cuadrática, entonces $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ para ciertos números reales, $a \neq 0,\ b$ y c, a determinar. Por otra parte, tenemos que

$$\left.\begin{array}{rclclclcl} 6 & = & f(0) & = & a\cdot 0 & + & b\cdot 0 & + & c \\ 12 & = & f(-1) & = & a\cdot(-1)^2 & + & b\cdot(-1) & + & c \\ 2 & = & f(1) & = & a\cdot 1^2 & + & b\cdot 1 & + & c \end{array}\right\},$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{rcccccc} 1 & = & & & & & c \\ 12 & = & a & - & b & + & c \\ 2 & = & a & + & b & + & c \end{array}\right\}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales obtenemos que $a = 1,\ b = -5$ y $c = 6$. Luego $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

1.2. Funciones racionales.

Una **función** $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **racional** si su expresión analítica es un cociente de polinomios, es decir, si

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 0$ y $Q(x)$ es un polinomio de grado $m > 0$.

Ejemplo A.1.16. La función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función racional.

Propiedades: Sean $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 0$ y $Q(x)$ es un polinomio de grado $m > 0$. La función racional $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = P(x)/Q(x)$ tiene las siguiente propiedades.

- Es continua e indefinidamente derivable en todos los puntos del interior de su dominio excepto en aquellos que anulan a su denominador.
- Si $P(x)$ y $Q(x)$ son simétricas con el mismo tipo de simetría, es decir, ambas son pares o ambas son impares, entonces f es simétrica par. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son simétricas pero con distinto tipo de simetría, es decir, una es par y la otra impar, entonces f es simétrica impar.
- Puede tener asíntotas verticales en los valores que anulan al denominador.

  Si el grado de $P(x)$ es menor o igual que el de $Q(x)$ puede tener asíntotas horizontales.

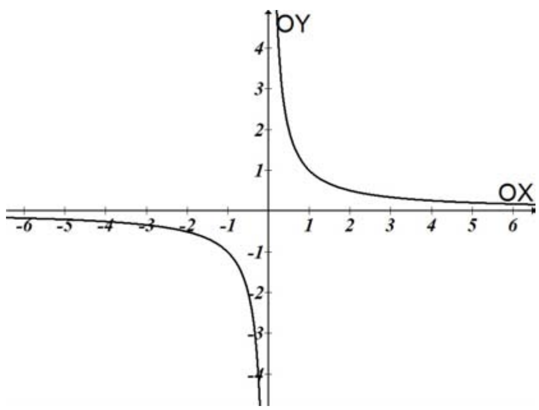
  Si $\text{grado}(P(x)) = \text{grado}(Q(x)) + 1$ puede tener asíntotas oblicuas.
- Si $0 \in D$, corta al eje OY en punto $(0, f(0) = P(0)/Q(0))$.

  Puede cortar al eje OX en los puntos correspondientes a las soluciones de $P(x) = 0$.
- La derivada de $f(x) = P(x)/Q(x)$ es también una función racional:

$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}.$$

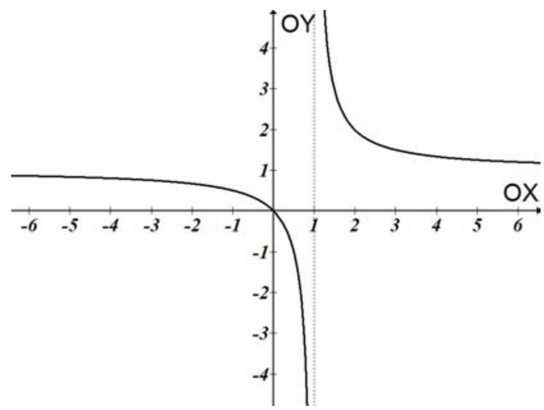
Ejemplo A.1.17. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



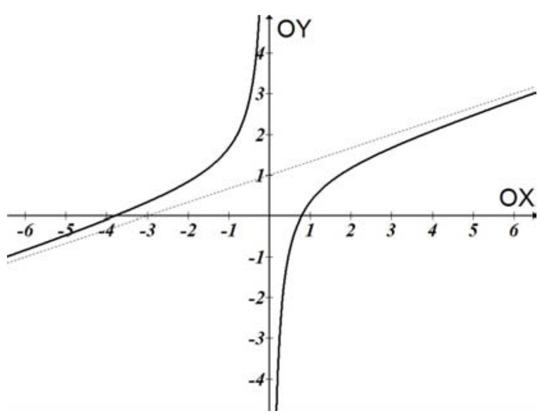
Ejemplo A.1.18. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{x-1}.$$



Ejemplo A.1.19. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x-3}{3x}.$$



1.3. Funciones potenciales.

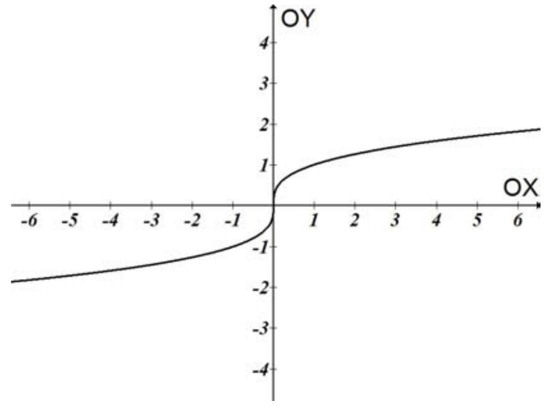
Una **función** $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **potencial de grado** $\alpha \in \mathbb{R}$ si su expresión analítica es

$$f(x) = x^{\alpha}.$$

Obsérvese que si α es un número natural, es decir, $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces se trata de una función polinómica, y que si α es un número entero negativo, es decir, $\alpha \in \mathbb{Z}_{-}$ entonces se trata de una función racional.

Ejemplo A.1.20. La gráfica de la derecha corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

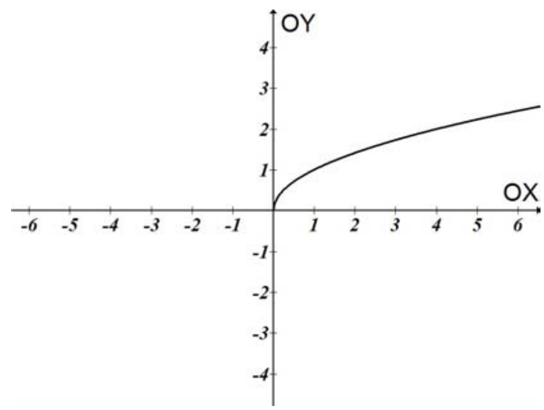
$$f(x) = x^{1/3}.$$



Ejemplo A.1.21. Un caso especial de las funciones potenciales ocurre cuando el grado es $\alpha = \frac{1}{2}$, en este caso, estamos considerando la función $f : D \subset [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x},$$

que se llama **función raíz cuadrada**, y cuya gráfica mostramos a la derecha.



Consideremos ahora la composición de una función g cualquiera con la función raíz cuadrada, y estudiemos algunas de sus propiedades.

Propiedades: Sean $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ y $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La función

$$h : D_h \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)},$$

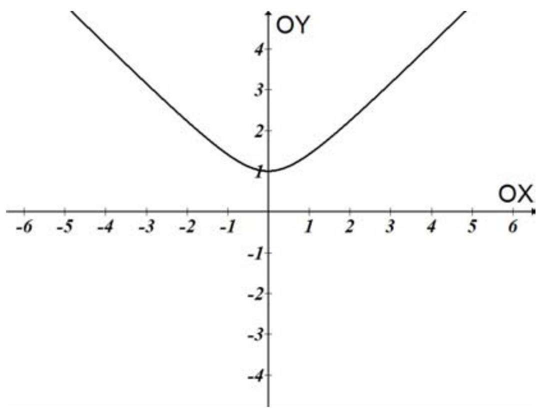
donde $D_h = \{x \in D_g \mid g(x) \geq 0\}$, tiene las siguiente propiedades.

- Es continua en todo su dominio, D_h.
- Si $g(x)$ es simétrica par, entonces $h(x)$ es simétrica par. Nunca es simétrica impar.
- Corta al eje OY en $(0, h(0) = \sqrt{g(0)})$ si $0 \in D_h$.
  Puede cortar al eje OX en los puntos correspondientes a los ceros de g.
  Siempre es positiva.
- $$h'(x) = (\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$
  El dominio de la derivada h' está formado por los puntos del dominio de g donde esta función g es estrictamente positiva.

- Es creciente en la porción de su dominio, D_h, donde g es creciente y decreciente en la parte de su dominio, D_h, donde g es decreciente.

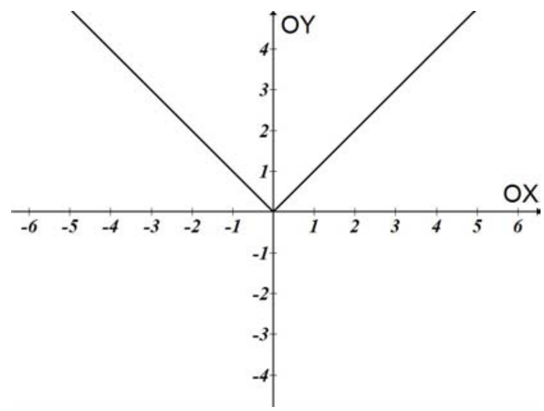
Ejemplo A.1.22. La gráfica de abajo corresponde a la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$



Ejemplo A.1.23. La gráfica de abajo corresponde a la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$



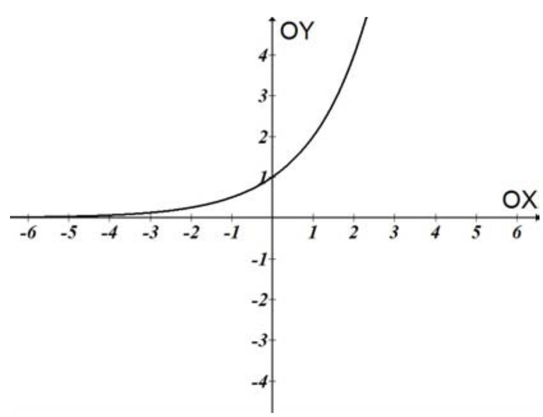
1.4. Funciones exponenciales.

Una **función** $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **exponencial de base** $a \in \mathbb{R}_+$ si su expresión analítica es

$$f(x) = a^x.$$

Ejemplo A.1.24. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2^x.$$

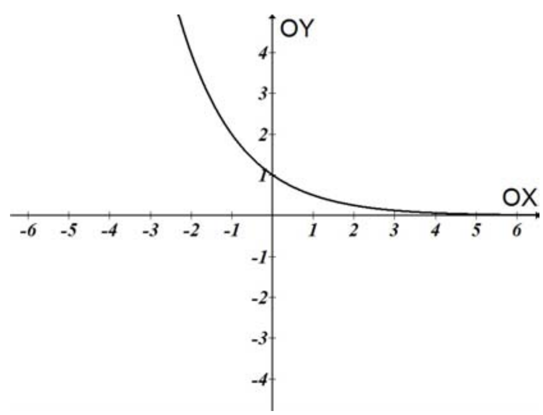


Recordemos algunas **propiedades de la funciones exponenciales:**

- $a^0 = 1, \quad a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$
- Si $a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$
- Si $a < 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- La función $f(x) = a^x$ puede definirse en toda la recta real, es decir $D_f = \mathbb{R}$, es continua e infinitamente derivable en todo su dominio. Es siempre positiva, no corta al eje OX y corta al eje OY en el punto $(0, 1)$
- La derivada de $f(x) = a^x$ es $f'(x) = a^x \cdot \mathrm{Ln}(a)$. En particular, si la base de la exponencial es el número e, tenemos que $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
- Si $a > 1$, la función exponencial $f(x) = a^x$ es siempre creciente.
- Si $a < 1$, la función exponencial $f(x) = a^x$ es siempre decreciente.
- la función exponencial es siempre cóncava.

Ejemplo A.1.25. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$



Consideremos ahora la composición de una función g cualquiera con una función exponencial y estudiemos sus propiedades.

<u>**Propiedades**</u>: Sean

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = a^x$$

y $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La función

$$h : D_h \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = a^{g(x)}$$

tiene las siguientes propiedades.

- Si $g(x)$ es simétrica par, entonces $h(x)$ es simétrica par. Nunca es simétrica impar.
- Si $a > 1$, entonces para todo $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que
  - $\lim_{x \longrightarrow b} g(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow b} h(x) = 0$.

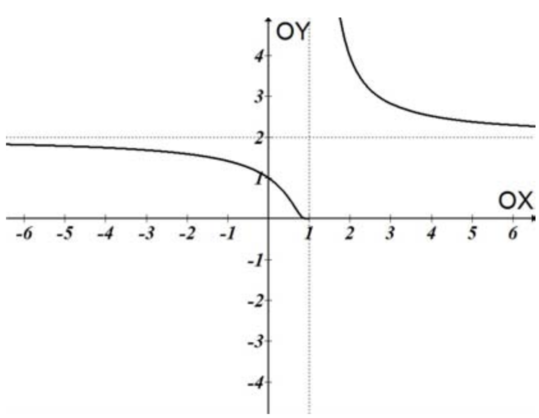
- $\lim_{x\longrightarrow b} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow b} h(x) = +\infty$.
- $\lim_{x\longrightarrow b} g(x) = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow b} h(x) = a^l$.

Si $a < 1$, entonces para todo $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que

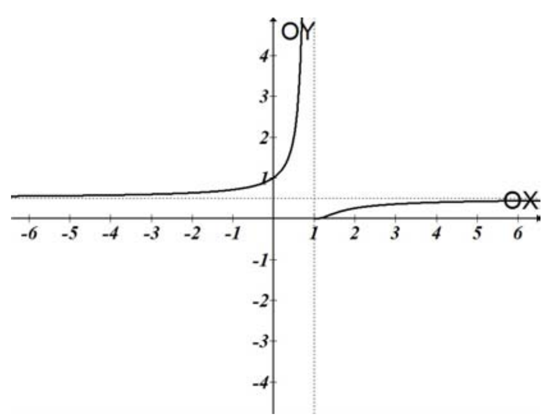
- $\lim_{x\longrightarrow b} g(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow b} h(x) = \infty$.
- $\lim_{x\longrightarrow b} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow b} h(x) = 0$.
- $\lim_{x\longrightarrow b} g(x) = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow b} h(x) = a^l$.

- Corta al eje OY en el punto $(0, h(0) = a^{g(0)})$ si $0 \in D$.
  Nunca corta al eje OX y siempre es positiva.
- La derivada de esta función es
$$h'(x) = (a^{g(x)})' = a^{g(x)}\mathrm{Ln}(a)g'(x)$$
- Si $a > 1$, entonces h es creciente donde g es creciente y decreciente donde lo es g.
  Si $a < 1$, entonces h es creciente donde g es decreciente y decreciente donde g es creciente.

Ejemplo A.1.26. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = 2^{\frac{x}{x-1}}.$$



Ejemplo A.1.27. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}}.$$



1.5. Funciones logarítmicas.

Una **función** $f : D \subseteq (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es **logarítmica de base** $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ si su expresión analítica es
$$f(x) = \log_a(x).$$

Recordemos algunas **propiedades de la funciones logarítmicas:**

- $\log_a(1) = 0, \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1/x) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

- $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$.
- Si $a > 1$, entonces $\log_a(x)$ es positivo en $(1, +\infty)$ y es negativo en $(0, 1)$. Además,

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

- Si $a < 1$, entonces $\log_a(x)$ es positivo en $(0, 1)$ y es negativo en $(1, +\infty)$. Además,

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

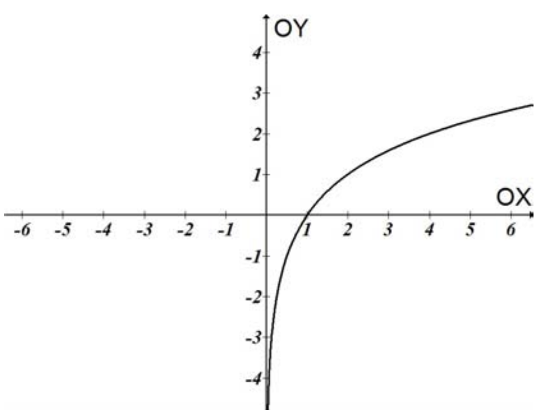
- La función $\log_a(x)$ es continua e infinitamente derivable en $(0, +\infty)$.
- La derivada de una función logarítmica es:

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\mathrm{Ln}(a)}$$

- Si $a > 1$, la función $\log_a(x)$ es creciente y convexa en todo su dominio.
  Si $a < 1$, la función $\log_a(x)$ es decreciente y cóncava en todo su dominio.

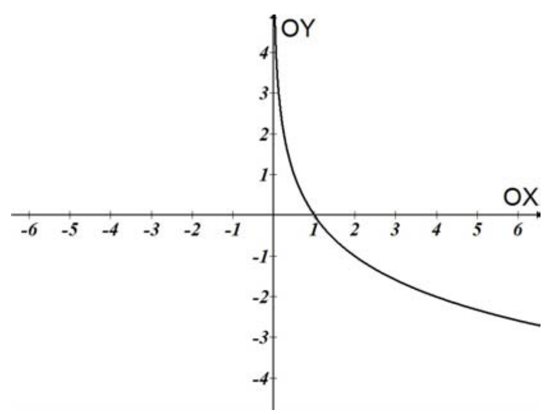
Ejemplo A.1.28. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log_2(x).$$



Ejemplo A.1.29. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x).$$



Nota A.1.30. Las funciones logarítmicas más importantes son las de base $10, 2$ y e. La importancia de la primera radica en que nuestro sistema de numeración es decimal y la de la segunda en la simple situación biológica de la división de una célula madre en dos hijas.

La función logarítmica en base e se llama **función logarítmica natural** ó **logaritmo neperiano** y se suele denotar por $\mathrm{Ln}(x)$ o por $\ln(x)$. Su importancia está justificada por el hecho de que las funciones exponenciales naturales aparecen en multitud de modelos biológicos (véase el apartado 3.5 del tema I).

Consideremos ahora la composición de una función g cualquiera con una función logarítmica, y estudiemos algunas de sus propiedades.

Propiedades: Sean

$$f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \log_a(x)$$

y $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La función

$$h : D_h \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_a(g(x)),$$

donde $D_h = \{x \in D_g \mid g(x) > 0\}$, tiene las siguientes propiedades.

- Si $g(x)$ es simétrica par, entonces $h(x)$ es simétrica par.
- Si $a > 1$, entonces para todo $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que
  - $\lim_{x \longrightarrow b} g(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow b} h(x) = -\infty$.
  - $\lim_{x \longrightarrow b} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow b} h(x) = +\infty$.
  - $\lim_{x \longrightarrow b} g(x) = l \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow b} h(x) = \log_a(l)$.

  Si $a < 1$, entonces para todo $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que
  - $\lim_{x \longrightarrow b} g(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow b} h(x) = +\infty$.
  - $\lim_{x \longrightarrow b} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow b} h(x) = -\infty$.
  - $\lim_{x \longrightarrow b} g(x) = l \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow b} h(x) = \log_a(l)$.
- Corta al eje OY en el punto $(0, h(0) = \log_a(g(0)))$ si $0 \in D_h$.

  Corta al eje OX en los puntos de su dominio, D_h, correspondientes a las soluciones de la ecuación $g(x) = 1$.
- La derivada de h es la función:

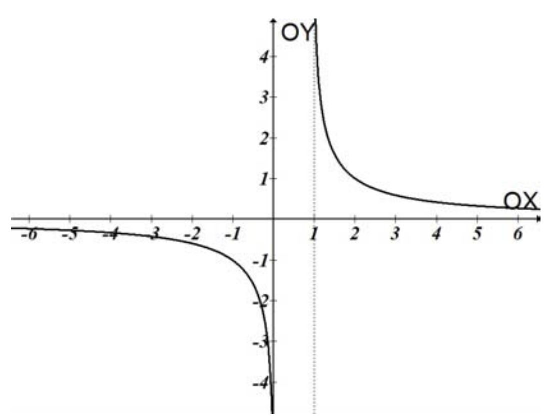
$$h'(x) = (\log_a(g(x)))' = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{\mathrm{Ln}(a)} \cdot g'(x).$$

- Si $a > 1$, entonces h es creciente donde g es creciente y decreciente donde lo es g.

  Si $a < 1$, entonces h es creciente donde g es decreciente y decreciente donde g es creciente.

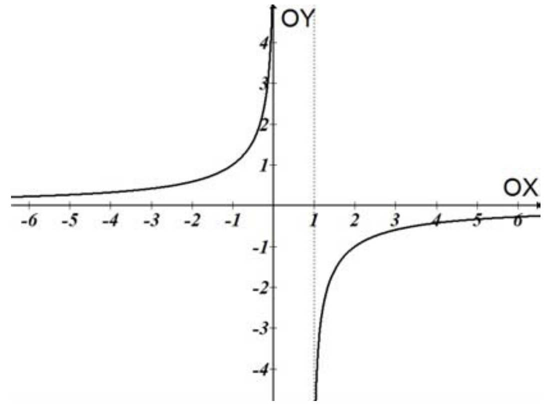
Ejemplo A.1.31. La gráfica de la derecha corresponde a la función $f : (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log_2\left(\frac{x}{x-1}\right).$$



Ejemplo A.1.32. La gráfica de la derecha corresponde a la función $f : (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{x-1}).$$



1.6. Funciones seno y coseno.

Para terminar esta sección estudiaremos las funciones seno y coseno, que como es sabido forman parte de una familia más amplia de funciones: las **trigonométricas**.

Propiedades: La función seno,

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = \text{sen}(x)$$

tiene las siguiente propiedades:

- Es continua e indefinidamente derivable.
- Es simétrica impar y periódica de periodo 2π.
- No tiene asíntotas.
- Corta al eje OY en el punto $(0, 0)$. Corta al eje OX en los puntos $(0, k\pi), \ k \in \mathbb{Z}$, es positiva en
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) = (2k\pi, (2k + 1)\pi),$$
y es negativa en el resto.
- La derivada de f es la función $f'(x) = \cos(x)$.
- Es creciente en
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}((4k - 1)\pi/2, (4k + 1)\pi/2),$$
y decreciente en
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}((4k + 1)\pi/2, (4k + 3)\pi/2).$$
Alcanza máximos absolutos en los puntos $((4k+1)\pi/2, 1), \ k \in \mathbb{Z}$, y mínimos absolutos en los puntos $((4k + 3)\pi/2, -1), \ k \in \mathbb{Z}$.
- Es convexa en
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) = (2k\pi, (2k + 1)\pi),$$

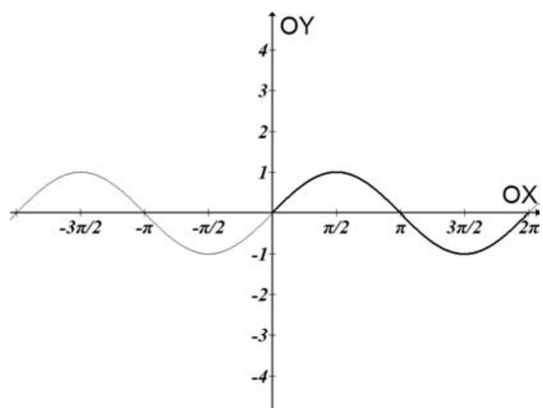
y cóncava en

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}((2k+1)\pi/2, (2k+2)\pi/2).$$

Los puntos $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, son puntos de inflexión.

Ejemplo A.1.33. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \text{sen}(x).$$



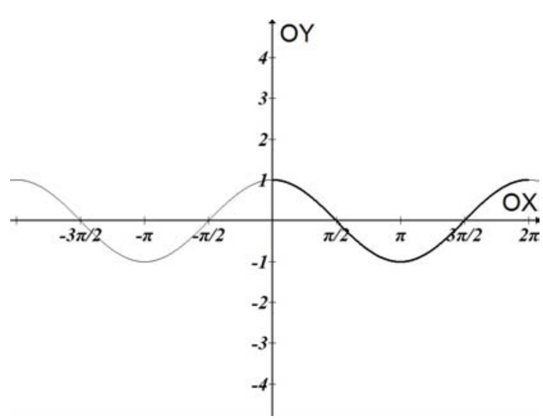
Ejercicio A.1.34. Realizar un estudio gráfico similar al realizado con la función seno, pero de la función coseno, es decir, de la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x).$$

NOTA: puede ser de utilidad recordar que $\cos(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$.

Ejemplo A.1.35. La gráfica de abajo corresponde a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cos(x).$$



Apéndice II. Tabla de derivadas y reglas de derivación.

Funciones constantes	
$y = k$	$y' = 0$
Funciones lineales	
$y = k \cdot x$	$y' = k$
Producto de un número por una función	
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
Funciones potenciales	
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = (f(x))^n$	$y' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
Producto de funciones	
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente de funciones	
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$y = \frac{1}{x-a}$	$y' = -\frac{1}{(x-a)^2}$
Regla de la cadena	
$y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$	$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
Funciones inversas	
$y = f^{-1}(x)$	$y' = \frac{1}{f'(y)}$
Funciones logarítmicas $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$	
$y = \mathrm{Log}_a(x)$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{Log}_a(\mathrm{e})$
$y = \mathrm{Ln}(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \mathrm{Log}_a(f(x))$	$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot \mathrm{Log}_a(\mathrm{e}) \cdot f'(x)$
Funciones exponenciales $a > 0$	
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \mathrm{Ln}(a)$
$y = \mathrm{e}^x$	$y' = \mathrm{e}^x$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot \mathrm{Ln}(a) \cdot f'(x)$
Potencias de funciones	
$y = f(x)^{g(x)}$	$y' = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x)$ $+ f(x)^{g(x)} \cdot \mathrm{Ln}(f(x)) \cdot g'(x)$

<u>Función seno</u>

$y = \mathrm{sen}(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \mathrm{sen}(f(x))$	$y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

<u>Función coseno</u>

$y = \cos(x)$	$y' = -\mathrm{sen}(x)$
$y = \cos(f(x))$	$y' = -\mathrm{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$

<u>Función tangente</u>

$y = \mathrm{tg}(x)$	$y' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$
$y = \mathrm{tg}(f(x))$	$y' = \frac{1}{\cos^2(f(x))} \cdot f'(x)$

<u>Función cotangente</u>

$y = \mathrm{cotg}(x)$	$y' = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)} = -1 - \mathrm{cotg}^2(x)$
$y = \mathrm{cotg}(f(x))$	$y' = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2(f(x))} \cdot f'(x)$

<u>Función Arco seno</u> $y \in (-\pi/2, \pi/2)$

$y = \mathrm{arcsen}(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{arcsen}(f(x))$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$

<u>Función Arco coseno</u> $y \in (0, \pi)$

$y = \arccos(x)$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos(f(x))$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$

<u>Función Arco tangente</u>

$y = \mathrm{arctg}(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \mathrm{arctg}(f(x))$	$y' = \frac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)$

<u>Función Arco cotangente</u>

$y = \mathrm{arccotg}(x)$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$y = \mathrm{arccotg}(f(x))$	$y' = -\frac{1}{1+f(x))^2} \cdot f'(x)$

Apéndice III. Tabla de integrales indefinidas inmediatas

$\displaystyle\int dx = x + C$, donde $\int dx$ quiere decir $\int 1\,dx$.

$\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$.

$\displaystyle\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$.

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \mathrm{Ln}(x) + C.$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \mathrm{Ln}(f(x)) + C.$

$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\mathrm{Ln}(a)} + C$ con $a > 0$.

$\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C.$

$\displaystyle\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\mathrm{Ln}(a)} + C$ con $a > 0$.

$\displaystyle\int \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \mathrm{e}^{f(x)} + C.$

$\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C.$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx = \sqrt{f(x)} + C.$

$\displaystyle\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,dx = \sqrt[n]{x} + C.$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}\,dx = \sqrt[n]{f(x)} + C.$

$\displaystyle\int \mathrm{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$

$\displaystyle\int f'(x) \cdot \mathrm{sen}(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + C.$

$\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x) + C.$

$\displaystyle\int f'(x) \cdot \cos(f(x))\,dx = \mathrm{sen}(f(x)) + C.$

$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \mathrm{tg}(x) + C.$

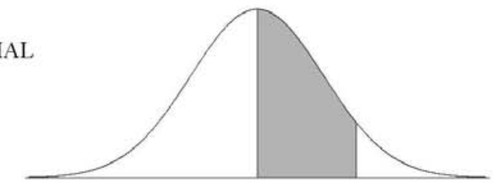
$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,dx = \mathrm{tg}(f(x)) + C.$

$$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \operatorname{cotg}(x) + C.$$
$$\int \frac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))}\,dx = \operatorname{cotg}(f(x)) + C.$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$$
$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C.$$
$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$$
$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C.$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$$
$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C.$$
$$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccotg}(x) + C.$$
$$\int \frac{-f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arccotg}(f(x)) + C.$$

Apéndice IV. Tabla de la distribución normal

ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL

TIPIFICADA DE 0 A Z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Bibliografía

[BL83] Benitez Rodríguez C.; López Ayuso, E. *El análisis matemático en B.U.P. y C.O.U.*. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Extremadura, 1983.

[Bor86] Borrego, J. y otros. *Iniciación a la Matemática superior*. Seminario de Matemáticas, I.B. Bárbara de Braganza, Badajoz, 1986.

[BCR07] Bolós, V.J.; Cayetano, J.; Requejo, B. *Álgebra lineal y geometría*. Manuales de Unex, vol. 50, Universidad de Extremadura, 2007.

[Bra93] Braun, M. *Differential equations and their applications*. Text in Applied Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1993.

[BR93] Brown, D.;Rothery, P. *Models in Biology*. John Wiley & Sons Inc., Chichester, 1993.

[Del04] Delgado de la Torre, R. *Iniciación a la probabilidad y la Estadística*. Servei de Publications de la Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2004.

[Dur96] Durán, A.J. *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Alianza Universidad, vol. 861, Alianza Editorial, Madrid, 1996.

[FV96] Fernández-Pérez C.; Vegas Montaner, J.M. *Ecuaciones diferenciales II*. Editorial Pirámide, S.A., Madrid, 1996.

[Gar04] García Nogales, A. *Bioestadística Básica*. Editorial @becedario, Badajoz, 2004.

[Gro87] Grossman, S.I. *Elementary linear algebra* (3^a ed.). Wadsworth Pub. Co., 1987.

[Gro88] ———, *Aplicaciones del álgebra lineal*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1988.

[Her94] Hernández, E. *Álgebra y Geometría* (2^a ed.). Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1994.

[LEF04] Larson, R.; Edwards, B.; Falvo, B. *Álgebra lineal*, (5^a ed.). Editorial Pirámide, S.A., Madrid, 2004.

[MP95] Martínez Calvo, M.C.; Pérez de Vargas Luque, A. *Problemas de biomatemática*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A., (1995)

[MS06] Merino, L.; Santos, E. *Álgebra lineal con métodos elementales*. Thomson Editores Spain, Madrid, 2006.

[Mey00] Meyer, C. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.

[Mur93] Murray, J.D. *Mathematical Biology* (2^a ed.). Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Neu04] Neuhauser, C. *Matemáticas para ciencias* (5^a ed.). Traducción de Ana Torres Suárez. Pearson Educación, S.A., Madrid, 2004

[RB05] Rius Díaz, F. Barón López, F.J. *Bioestadística*. Thomson Editores Spain, Madrid, 2005.

[Rod99] Rodríguez, J. *Ecología*. Editorial Pirámide, S.A., Madrid, 1999.

[Sim77] Simmons, G.F. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill, Madrid, 1977.

[Spi96] Spivak, M. *Cálculo infinitesimal* (5^a ed.). Editorial Reverté, Barcelona, 1996.

[Val89] Valderrama, M.J. *Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias Experimentales*. Editorial Pirámide, S.A., Madrid, (1989)

[Zil06] Zill, D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson Editores Spain, Madrid, 2006.

Índice alfabético