Operador de Reynolds Generalizado

Amelia Álvarez Sánchez
Universidad de Extremadura

Seminario de Geometría Tórica IV
15-18 de noviembre de 2007
Jarandilla de la Vera, Cáceres

Trabajo común junto a
Carlos Sancho y Pedro Sancho

Índice

Los grupos linealmente semisimples tienen dos propiedades fundamentales que los hacen muy útiles desde el punto de vista de la teoría de invariantes:

1. G es linealmente semisimple si y sólo si el funtor "tomar invariantes" es exacto.
2. G is linealmente semisimple si y sólo si admite un operador de Reynolds.

Un operador Reynolds se define como un retracto funtorial de G-módulos

$$\rho_G(M) : M \to M^G$$

para cada G-módulo M.

En particular, si $G = \operatorname{Spec} A$, uno tiene un retracto

$$\omega : A \longrightarrow k$$

de la inclusión natural de G-módulos $k \subset A$. Este morfismo verifica que:

1. es un morfismo G-invariante;
2. es la identidad sobre $A^G = k$.

Y ω es la única 1-forma sobre A verificando estas condiciones. Entonces, ω se llama una *integral invariante normalizada*, pues $\omega(1) = 1$.

Además, el operador de Reynolds coincide con la homotecia por ω en los G-módulos, cuando se los considera como A^*-módulos:

$$\rho_G(m) = \omega * m.$$

Entonces, esta integral invariante es la herramienta para calcular los invariantes de un G-módulo.
Nuestro objetivo es encontrar esta integral invariante y, por lo tanto, obtener el operador de Reynolds en el contexto de los funtores separados de G-módulos, donde $G = \operatorname{Spec} A$ es un k-monoide afín semisimple.

Índice

Resultados preliminares I

Sea k un anillo conmutativo con unidad y sea E un k-módulo. E define un funtor de k-módulos sobre las k-álgebras conmutativas

$$\mathbf{E}(B) = E \otimes_k B$$

que se llama k-módulo cuasi-coherente. Los funtores

$$E \rightsquigarrow \mathbf{E} \text{ y } \mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}(k)$$

establecen una equivalencia entre la categoría de los k-módulos y la categoría de los k-módulos cuasi-coherentes (**[ASS, 1.12]**).
Si F y H son funtores de k-módulos, entonces definimos

$$\mathbf{Hom}_k(F, H)(B) := \mathrm{Hom}_B(F_{|B}, H_{|B}).$$

Resultados preliminares II

El funtor $F^* := \mathbf{Hom}_k(F, \mathbf{k})$ se dice que es un *funtor dual*. Llamamos a $\mathbf{E}^* = \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{k})$ un esquema de k-módulos. Tenemos el Teorema de Reflexividad (**[ASS, 1.10]**):

$$\mathbf{E}^{**} = \mathbf{E}.$$

Por ejemplo, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ son funtores duales.
Podemos considerar un k-monoide afín $G = \operatorname{Spec} A$ como un funtor of monoides sobre las k-álgebras conmutativas:

$$G^{\cdot}(B) := \operatorname{Hom}_{k-esq}(\operatorname{Spec} B, G) = \operatorname{Hom}_{k-\acute{a}lg}(A, B).$$

Un funtor de G-módulos (resp. $\mathbf{A}^*$-módulos) es un funtor de k-módulos dotado de una acción lineal de $G^{\cdot}$ (resp. de $\mathbf{A}^*$).

Resultados preliminares III

Teorema ([ASS, 5.5])

La categoría de G-módulos cuasi-coherentes es equivalente a la categoría de $\mathbf{A}^*$-módulos cuasi-coherentes.

Hay un morfismo natural $G^\cdot \to \mathbf{A}^*$ que extiende a un único morfismo de funtores de k-álgebras $k[G^\cdot] \to \mathbf{A}^*$.
$\mathbf{A}^*$ se llama *esquema de álgebras envolvente* de G porque $\mathbf{A}^*$ es el representante del funtor $\mathrm{Hom}_{k-álg}(k[G^\cdot], -)$ en la categoría de funtores duales de álgebras (**[ASS, 5.3]**).
Si k es un cuerpo, entonces G es semisimple si y sólo si $\mathbf{A}^*$ es un esquema de k-álgebras semisimple, i.e.,

$$G \text{ es semisimple } \Leftrightarrow \mathbf{A}^* = \prod_i \mathbf{A}_i^*.$$

El resultado principal

Dado un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$, probamos que G es semisimple si y sólo si $\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*$. Entonces, si G es semisimple la forma lineal $\omega_G := (1,0) \in k \times B^* = A^*$ se llamará la *integral invariante* de G.

Teorema

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ k-grupo semisimple y sea $\omega_G \in A^*$ la integral invariante de G. Sea F un funtor separado de $\mathbf{A}^*$-módulos. Entonces:

1. $F^G = \omega_G \cdot F$.
2. *F rompe de modo único como suma directa de F^G y otro subfuntor de G-módulos. Explícitamente,*

$$F = \omega_G \cdot F \oplus (1 - \omega_G) \cdot F.$$

Otros resultados

- Probaremos que para cada funtor H de G-módulos existe su cociente maximal separado G-invariante y que el morfismo cociente coincide con el operador de Reynolds cuando H es un funtor dual.
- Probamos los principales resultados de **[FR]** sobre Ω-procesos generalizados.
- Dada una G-álgebra R y dados E y V dos RG-módulos, en **[CHK]** se define un operador de Reynolds en $\mathrm{Hom}_R(E, V)$, generalizando algunos resultados de **[M]**. Probamos que este resultado es un caso particular del teorema anterior.

Índice

Definición

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-monoide afín y F un funtor de k-módulos. F es un funtor de G-módulos (resp. de $\mathbf{A}^*$-módulos) si está dotado de una acción de G (resp. de $\mathbf{A}^*$).

Teorema

La categoría de funtores duales de G-módulos es equivalente a la categoría de functores duales $\mathbf{A}^*$-módulos.

Definición

Dado F funtor de G-módulos, definimos

$$F^G(A) := \{f \in F(A), \text{ tal que } g \cdot f = f \text{ para cada } g \in G\}.$$

Si F y H son funtores de G-módulos, entonces también lo es $\mathbf{Hom}_k(F, G)$ y se verifica que $\mathbf{Hom}_k(F, G)^G = \mathbf{Hom}_G(F, G)$.

Definición

Un funtor de monoides G se dice que es semisimple (por la izquierda) si para cualquier sucesión exacta de funtores duales de G-módulos (por la izquierda)

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0,$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow F_1^G \longrightarrow F_2^G \longrightarrow F_3^G \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-monoide afín. Sea $\Theta : G \to \mathbf{k}$ el carácter trivial, que induce la representación trivial $\Theta : \mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$.

Teorema

Un k-monoide afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple por la izquierda y por la derecha si y sólo si $\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*$ como esquemas de k-álgebras, donde $\mathbf{A}^* \to \mathbf{k}$ es Θ.

Ejemplo

El k-semigrupo de matrices $M_n(k) = \operatorname{Spec} A$ es semisimple por la izquierda y por la derecha, porque

$$\mathbf{A}^* = \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{S}^m \mathbf{End}_k(\mathbf{k}^n) = \mathbf{k} \times \prod_{m > 0} \mathbf{S}^m \mathbf{End}_k(\mathbf{k}^n).$$

Corolario

Un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple si y sólo si $\mathbf{A}^* = \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*$ como esquemas de k-álgebras.

Teorema

Un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple si y sólo si existe una aplicación lineal G-invariante por la izquierda $\omega : A \longrightarrow k$ tal que $\omega(1) = 1$. Además, ω es única, es G-invariante por la derecha y $*(\omega) = \omega$ (donde $*$ es el morfismo inducido en $\mathbf{A}^*$ por $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.)

Cuando k es un cuerpo y G es un grupo algebraico linealmente reductivo, este resultado se puede encontrar en **[BS]** y **[C]**.

Teorema

Un k-monoide afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple por la izquierda y por la derecha si y sólo si exite una aplicación lineal G-invariante por la izquierda y por la derecha $\omega : A \to k$ tal que $\omega(1) = 1$.

Teorema

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. G es semisimple si y sólo si el funtor "tomar invariantes" conserva sucesiones exactas de esquemas de G-módulos.

Teorema

Sea k un cuerpo y sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín. G es semisimple si y sólo si el funtor "tomar invariantes" es exacto en la categoría de los G-módulos cuasi-coherentes.

Definición

Sea $\chi : G \to \mathbf{k}$ un carácter multiplicativo y E un G-módulo. Un vector $e \in E$ se dice χ-semi-invariante (por la izquierda) si $g \cdot e = \chi(g) \cdot e$ para cada $g \in G$.

Teorema

Un k-grupo afín $G = \operatorname{Spec} A$ es semisimple si y sólo si existe una aplicación lineal χ-semi-invariante por la izquierda $\omega : A \to k$ tal que $\omega(\chi) = 1$. Además, ω es única, es χ-semi-invariante por la derecha y $*(\omega) = \omega$ (donde $*$ es el morfismo inducido en $\mathbf{A}^*$ por $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.)

Índice

Definición

Diremos que un funtor de k-módulos H es separado si el morfismo $H \to H^{**}$ es inyectivo, es decir, $h \in H$ es nulo si y sólo si $w(h) = 0$ para cada $w \in H^*$.

Ejemplo

Funtores duales de k-módulos y subfuntores de k-módulos de un funtor separado de k-módulos son separados.

Definición

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín semisimple. Llamaremos integral invariante de G a la única 1-forma $\omega \in \mathbf{A}^*$ que es invariante por la izquierda (y por la derecha) y tal que $\omega(1) = 1$.

Teorema

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ *un* k*-grupo semisimple y sea* $\omega_G \in \mathbf{A}^*$ *la integral invariante de* G*. Sea* F *un funtor separado de* $\mathbf{A}^*$*-módulos. Se verifica que:*

1. $F^G = \omega_G \cdot F$.
2. F *rompe de modo único como suma directa de* F^G *y otro subfuntor de* G*-módulos, explícitamente,*

$$F = \omega_G \cdot F \oplus (1 - \omega_G) \cdot F.$$

Definición

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ *un* k*-grupo afín semisimple y sea* $\omega_G \in \mathbf{A}^*$ *la integral invariante de* G*. Sea* F *un funtor separado de* $\mathbf{A}^*$*-módulos. El morfismo* $F \to F^G$, $f \mapsto \omega_G \cdot f$ *se llamará el operador de Reynolds de* F*.*

Definición

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo afín semisimple y sea $\chi : G \to G_m$ un carácter multiplicativo. Llamaremos integral χ-semi-invariante de G a la única 1-forma $\omega_\chi \in \mathbf{A}^*$ que es χ-semi-invariante por la izquierda (y por la derecha) y tal que $\omega_\chi(\chi) = 1$.

Ejemplo

Sea $M = \operatorname{Spec} A$ un k-monoide afín y sea $\chi : M \to \mathbf{k}$ un carácter multiplicativo. Un Ω-proceso asociado a χ (véase **[FR, 3.1]***) es un operador lineal no nulo $\Omega : A \to A$ tal que*

$$\left.\begin{aligned} \Omega(m \cdot a) &= \chi(m) \cdot m \cdot \Omega(a) \\ \Omega(a \cdot m) &= \chi(m) \cdot \Omega(a) \cdot m \end{aligned}\right. \qquad \forall a \in A,\ m \in M.$$

Ejemplo

Supongamos que $M - (\chi)_0$ *es denso en* M*. Entonces,* $A \xrightarrow{\chi\cdot} A \xrightarrow{\Omega} A$ *es un morfismo de* M*-módulos por la izquierda y por la derecha. Como*

$$\mathrm{Hom}_{izq-der-M-m\acute{o}d}(A, A) = \mathrm{Hom}_{izq-der-\mathbf{A}^*-m\acute{o}d}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}^*) = Z(A^*),$$

entonces $\Omega \circ \chi\cdot = z\cdot$ *para algún* $z \in Z(A^*)$ *(véase* **[FR, 4.4]***).*
Supongamos que $0 \in M$ *y que* $\Omega(\chi) = 1$*. La composición* ω *de*

$$A \xrightarrow{\chi\cdot} A \xrightarrow{\Omega} A \quad y \quad A \to k,\ a \mapsto a(0)$$

es invariante por la izquierda y por la derecha y $\omega(1) = 1$*, luego* M *es un* k*-monoide semisimple y* $\omega = \omega_M$*.*

Ejemplo

La composición ω' *de*

$$A \xrightarrow{\Omega} A \quad y \quad A \to k,\ a \mapsto a(0)$$

es χ*-semi-invariante por la izquierda y por la derecha y* $\omega'(\chi) = 1$*, luego* $\omega' = \omega_\chi$.
Dado un M*-módulo* E*, calculemos la proyección* $E \to E^\chi$, $e \mapsto \omega_\chi \cdot e$ *(véase* **[FR, 5.1]***). El dual de* $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{A}^* \to \mathbf{E}^*$ *es* $\mu : E \to E \otimes A$*. Si* $\mu(e) = \sum_i e_i \otimes a_i$*, entonces* $g \cdot e = \sum_i a_i(g) e_i$ *para todo* $g \in M$*. Por lo tanto,*

$$\omega_\chi \cdot e = \sum_i a_i(\omega_\chi) \cdot e_i = \sum_i \omega_\chi(a_i) \cdot e_i = \sum_i \Omega(a_i)(0) \cdot e_i.$$

Generalicemos ahora el operador de Reynolds a todos los funtores de G-módulos.

Teorema

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un k-grupo semisimple, sea H un funtor de G-módulos y sea $H_1 \subset H$ el subfuntor de G-módulos definido por $H_1 := \{h \in H : \omega_G \cdot \tilde{h} = 0\}$, donde $\tilde{h}$ denota la imagen de h por el morfismo $H \to H^{**}$. Se verifica que:

1. *H/H_1 es el cociente G-invariante separado maximal de H.*
2. *El doble dual del morfismo $H \to H/H_1$ es el operador de Reynolds $H^{**} \to H^{**G}$.*
3. *Si H es un funtor dual, entonces $H/H_1 = H^G$ y el morfismo $H \to H/H_1$ es el operador de Reynolds de H.*

Definición

Sea $G = \operatorname{Spec} A$ *un* k*-grupo afín y sea* R *una* k*-álgebra. Decimos que* R *es una* G*-álgebra si existe* $G^{\cdot} \to \mathbf{End}_{k-alg}(\mathbf{R})$.

Definición

Sea R *una* G*-álgebra y* M *un funtor de* R*-módulos.* M *es un* RG*-módulo si tiene una estructura de* G*-módulo compatible con la de* R*-módulo.*

Teorema

Sean N *y* M *funtores de* RG*-módulos, donde* N *es un dual. Entonces:*

1. $\mathbf{Hom}_{\mathbf{R}}(M, N)$ *es un funtor separado de* $\mathbf{A}^*$*-módulos.*
2. *Si* G *es un grupo semisimple, entonces*
$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{R}}(M, N)^G = \omega_G \cdot \mathbf{Hom}_{\mathbf{R}}(M, N).$$

Índice

- "Esquemas de Álgebras y sus representaciones",
  tesis doctoral,
  7 de junio de 2006
- "Reynolds Operator",
  preprint, arXiv:math/0611311v2 [math.AG],
  7 de febrero de 2007
- "Geometric calculation of the invariant integral of classic groups",
  preprint, arXiv:math/0611312v1 [math.AG],
  10 de noviembre de 2006

Índice

ASS Álvarez, A., Sancho, C., Sancho,P., *Algebra schemes and their representations*, J. Algebra **296/1** (2006) 110-144.

BS Brion, M., Schwarz, G.W., Théorie des invariants et géometrie des variétés quotients, Travaux en cours, vol. 61, Hermann, Paris, 2000.

CHK Chu, H., Hu, S.-J., Kang, M.-C., *A variant of the Reynolds operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **133/10** (2005) 2865-2871.

FR Ferrer Santos, W., Rittatore, A., *Generalizations of Cayley's Ω-process*, Proc. Amer. Math. Soc. **135/4** (2007) 961-968.

M Magid, A.R., *Picard groups of rings of invariants*, J. Pure Appl. Algebra **17** (1980) 305-311.

S Sancho de Salas, C., Grupos algebraicos y teoría de invariantes, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2001.