Resoluciones graduadas de ideales monomiales asociados a grafos

Oscar Fernández Ramos

Universidad de Valladolid

17 de Noviembre de 2007

Outline

Dado un ideal monomial $I \subset S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, existe una resolución libre graduada minimal que será de la forma

$$0 \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{l,j}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\varphi_1} \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0 .$$

donde $\beta_{i,j}(I)$ es el (i,j)-ésimo número de Betti graduado correspondiente al número de generadores minimales de grado j en el término i-ésimo, que también se puede ver como

$$\beta_{i,j}(I) = \dim_{\mathbb{K}} Tor_i^S(I, \mathbb{K})_j \ .$$

	0	...	i	...	l
1	$\beta_{0,1}$	...	$\beta_{i,1}$	...	$\beta_{l,1}$
...	...	...	...	...	...
j	$\beta_{0,j}$	...	$\beta_{i,j}$	...	$\beta_{l,j}$
...	...	...	...	...	...
$\max\{j\}$	$\beta_{0,\max\{j\}}$	...	$\beta_{i,\max\{j\}}$	...	$\beta_{l,\max\{j\}}$

En este contexto, la minimalidad de la resolución se puede entender como que la imagen de una base es un conjunto minimal de generadores del siguiente término o como que $\mathrm{Im}(\varphi_i) \subset (x_1, \dots, x_n) \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i-1,j}}$, por el lema de Nakayama.

Estos números de Betti cumplen la siguiente propiedad

Proposición

Sean $\{\beta_{i,j}\}$ los números de Betti graduados de un ideal monomial I. Fijado un índice i, si existe un $J \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{i,j} = 0,\ \forall j < J$, entonces también $\beta_{i+1,j+1} = 0,\ \forall j < J$.

	0	$\dots$	i	$\dots$	l
1	0	$\dots$	0	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\min\{j\}$	$\beta_{0,\min\{j\}}$	$\dots$	0	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$\beta_{0,j}$	$\dots$	$\beta_{i,j}$	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\max\{j\}$	$\beta_{0,\max\{j\}}$	$\dots$	$\beta_{i,\max\{j\}}$	$\dots$	$\beta_{l,\max\{j\}}$

Lo que sugiere una reordenación para una mejor exposición en una tabla más compacta que llamaremos **diagrama de Betti**.

	0	$\dots$	i	$\dots$	l
$j_{\min}$	$\beta_{0,j_{\min}}$	$\dots$	$\beta_{i,j_{\min}+i}$	$\dots$	$\beta_{l,j_{\min}+l}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$\beta_{0,j}$	$\dots$	$\beta_{i,j+i}$	$\dots$	$\beta_{l,j+l}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j_{\max}$	$\beta_{0,j_{\max}}$	$\dots$	$\beta_{i,j_{\max}+i}$	$\dots$	$\beta_{l,j_{\max}+l}$

De esta forma, además podemos leer directamente otros invariantes del ideal como son la regularidad, que vendría dada por la etiqueta de la última fila, y la dimensión proyectiva, la etiqueta de la última columna.

A un complejo simplicial Δ le podemos asociar dos ideales:

- $I(\Delta)$ generado por los productos de las variables que etiquetan las caras maximales (facets) de Δ, llamado **facet ideal**.
- I_Δ generado por los productos de las variables que etiquetan las no-caras minimales de Δ, llamado **ideal de Stanley-Reisner**.

Lo que nos da dos posibles correspondencias

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{complejos simpliciales } \Delta \\ \text{sobre } n \text{ vértices} \end{array} \right\} \overset{\mathbf{1-1}}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{ideales monomiales libres} \\ \text{de cuadrados} \end{array} \right\}.$$

que en ambos casos son biunívocas.

Notación

Sea $m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ un monomio de S, lo identificaremos con su multigrado $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Teorema (Hochster)

Sea $I_\Delta \subset S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal de Stanley-Reisner. Entonces $Tor_i^S(I_\Delta, \mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{Z}^n$-graduado cuyas componentes no nulas corresponden al multigrado de un monomio libre de cuadrados $m \in S$ para el que se verifica

$$Tor_i^S(I_\Delta, \mathbb{K})_m = \widetilde{\mathcal{H}}_{deg(m)-i-2}(|m|, \mathbb{K})$$

donde $|m|$ es el subcomplejo completo de Δ cuyos vértices corresponden a las variables que dividen a m.

Por tanto,

$$\beta_{i,j}(I_\Delta) = \sum_{\substack{m \text{ monomio} \\ \deg(m)=j}} \dim_{\mathbb{K}} \widetilde{\mathcal{H}}_{deg(m)-i-2}(|m|, \mathbb{K}) \; .$$

Definición

Diremos que un grafo no dirigido es **simple** si los extremos de cada arista son distintos y no hay más de una arista uniendo dos vértices concretos.

Definición

Dado un grafo simple, $G = (V_G, E_G)$, definimos el siguiente ideal monomial asociado a él:

$$I(G) := (x_i x_j : \{x_i, x_j\} \in E_G) \ .$$

Podemos restringir la correspondencia entre complejos simpliciales e ideales monomiales libres de cuadrados al caso de grafos simples.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{grafos simples } G \\ \text{con } n \text{ vértices} \end{array} \right\} \overset{\mathbf{1-1}}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{ideales monomiales libres de cuadrados} \\ \text{generados en grado } 2 \end{array} \right\}$$

Dado un grafo G, le podemos asociar un complejo simplicial $\Delta(G)$ formado por caras etiquetadas por conjuntos de vértices del grafo que induzcan un subgrafo completo (**clique complex**).

Como $I(G)$ es un ideal monomial libre de cuadrados es un ideal de Stanley-Reisner, $I(G) = I_\Delta$ para algún complejo simplicial Δ. De hecho, se tiene que $\Delta = \Delta(G^c)$.

Definición

Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$ y un subconjunto de vértices $S \subset V_G$, denotamos por G_S y llamaremos **subgrafo inducido por** S al subgrafo de G con vértices S y todas las aristas de G con extremos en S.

De esta forma, en el caso concreto en que partimos de un grafo simple G, podemos concretar la fórmula de Hochster en la forma

$$\beta_{i,j}(I(G)) = \beta_{i,j}(I_{\Delta(G^c)}) = \sum_{\substack{S \subseteq V_G \\ |S|=j}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{\mathcal{H}}_{j-i-2}(\Delta(G_S^c), \mathbb{K})$$

Como los generadores de $I(G)$ son de grado 2, si $j < i + 2$ se tiene que $\beta_{i,j}(I(G)) = 0$. Además,

Proposición (Roth-Van Tuyl, 2007)

Para $j = i + 2$,

$$\beta_{i,i+2}(I(G)) = \sum_{\substack{S \subseteq V_G \\ |S| = i+2}} (\#comp(G_S^c) - 1)$$

Proposición (Katzman, 2006)

Sea G un grafo simple. Si $2(i+1) < j$ entonces $\beta_{i,j}(I(G)) = 0$ y para $j = 2(i+1)$

$$\beta_{i,2(i+1)}(I(G)) = \#\left\{G' : \begin{array}{c} G' \text{ subgrafo inducido de } G \text{ formado} \\ \text{por } i+1 \text{ aristas disjuntas} \end{array}\right\}$$

Poder expresar estos números Betti en función únicamente de la combinatoria del grafo supone en particular su independencia respecto del cuerpo.

Existen otras fórmulas en las que se describen números de Betti en función únicamente de la combinatoria del grafo o de su complementario.

Teorema (Roth-Van Tuyl, 2007)

Sea G un grafo simple que no contenga 4-ciclos inducidos. Entonces

$$\beta_{i,i+2}(I(G)) = \sum_{v \in V_G} \binom{\deg(v)}{i+1} - k_{i+2}(G)\ .$$

donde $k_{i+2}(G)$ es el número de subgrafos inducidos de G isomorfos al grafo completo de $i+2$ vértices.

Ejemplo

Para un grafo completo K_n,

$$\beta_{i,i+2}(I(K_n)) = \sum_{v \in V_G} \binom{\deg(u)}{i+1} - k_{i+2}(K_n) = (i+1)\binom{n}{i+2}.$$

Ejemplo

Para un grafo completo bipartito $K_{n,m}$,

$$\beta_{i,i+2}(I(K_{n,m})) = \binom{n+m}{i+2} - \binom{n}{i+2} - \binom{m}{i+2}.$$

Además, estos son los únicos números de Betti distintos de 0.

Notación

Denotaremos por C_r al grafo de r vértices y r aristas formando un ciclo.
Denotaremos por G_r al grafo cuyo complementario es $G^c = C_r$.

Teorema

La resolución graduada minimal de $I(G_r) \subset S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es de la forma

$$0 \longrightarrow R(-r) \longrightarrow R(-r+2)^{\beta_{r-4,r-2}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R(-2)^{\beta_{0,2}} \longrightarrow I(G_r) \longrightarrow 0$$

con $\beta_{i,i+2} = r\frac{i+1}{r-i-2}\binom{r-2}{i+2}$ *para todo* $0 \leq i \leq r-4$.

Ejemplo

Sea $G_8 = (C_8)^c$,

	0	1	2	3	4	5
2	20	64	90	64	20	0
3	0	0	0	0	0	1

Teorema

La resolución graduada minimal de $I(G_r) \subset S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es de la forma

$$0 \longrightarrow R(-r) \longrightarrow R(-r+2)^{\beta_{r-4,r-2}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R(-2)^{\beta_{0,2}} \longrightarrow I(G_r) \longrightarrow 0$$

con $\beta_{i,i+2} = r\frac{i+1}{r-i-2}\binom{r-2}{i+2}$ *para todo* $0 \leq i \leq r-4$.

Ejemplo

Sea $G_8 = (C_8)^c$,

	0	1	2	3	4	5
2	20	64	90	64	20	0
3	0	0	0	0	0	1

Lema

El número de subgrafos con i vértices y j componentes conexas del grafo C_n es $\frac{n}{j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{j-1}$.

Lema

Sean m y a enteros con $1 \leq a < m$. Se verifica la siguiente igualdad

$$\sum_{j=1}^{a} \frac{j}{j+1}\binom{m-a}{j}\binom{a}{j} = \frac{a}{m-a+1}\binom{m}{a+1}.$$

Definición

Dado un ideal I, decimos que tiene una **resolución lineal** (o d-lineal) si los generadores de I tienen grado d y $\beta_{i,j}(I) = 0$ si $j \neq i + d$. Esta condición quiere decir que el diagrama de Betti está formado por una única fila,que estará etiquetada por d.

Teorema (Fröberg, 1990)

$I(G)$ tiene una resolución (2-)lineal si y sólo si G^c es un grafo cordal (es decir, no contiene r-ciclos inducidos con $r \geq 4$).

Teorema (Eisenbud-Green-Hulek-Popescu, 2005)

Sea G un grafo simple. Si G^c contiene a C_r como subgrafo inducido entonces $\beta_{r-3,r}(I(G)) > 0$. Y recíprocamente, si $\beta_{r-3,r}(I(G)) > 0$ y r es el menor índice con esta propiedad, entonces G^c contiene a C_r como subgrafo inducido.

Teorema (Gasharov-Hibi-Peeva, 2002)

Sea I un ideal monomial minimalmente generado por $m_1, \ldots, m_s$. Sea $\mathcal{F}_I$ una resolución minimal $\mathbb{N}^n$-graduada de I y m un monomio de S. Denotaremos $I_m = (\{m_i : m_i | m\})$ y por $(\mathcal{F}_I)_{\leq m}$ el subcomplejo de $\mathcal{F}_I$ generado por los elementos de las bases $\mathbb{N}^n$-homogéneas que dividan a m. Entonces $\mathcal{F}_I$ no depende de la la elección de las bases y es una resolución minimal $\mathbb{N}^n$-graduada de I_m.

Este enfoque, junto con la descripción combinatoria de los números de Betti de los grafos del tipo G_n nos permite además determinar el valor del tal $\beta_{r-3,r}(I(G))$.

Teorema

Sea G un grafo simple. Si G^c contiene a C_r como subgrafo inducido entonces $\beta_{r-3,r}(I(G)) > 0$. Si $I(G)$ no tiene una resolución lineal y $r \geq 4$ es el índice más pequeño tal que G^c contiene a C_r como subgrafo inducido. Entonces

1. $\beta_{s-3,s}(I(G)) = 0 \ \forall s < r$, *y*
2. $\beta_{r-3,r}(I(G)) = \#\{G' \subset G^c : G' \cong C_r\}$