Pedro Sancho de Salas
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Dualidad de Cartier Funtorial y Variedades Tóricas

Seminario de Geometría Tórica IV

Noviembre, 2007

Conjuntos

X un conjunto.
$k[X] := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ x_i \in X,\ \lambda_i \in k\}$. $X \hookrightarrow k[X]$, $x \mapsto 1 \cdot x$.

Conjuntos

X un conjunto.
$k[X] := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ x_i \in X,\ \lambda_i \in k\}$. $X \hookrightarrow k[X]$, $x \mapsto 1 \cdot x$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & E \\
& k[X] \arrow[ur, dashed, "\exists !"'] &
\end{tikzcd}$$

Conjuntos

X un conjunto.
$k[X] := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,\ x_i \in X,\ \lambda_i \in k\}$. $X \hookrightarrow k[X]$, $x \mapsto 1 \cdot x$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & E \\ & k[X] \arrow[ur, dashed, "\exists^{\cdot}"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir,

$$\mathrm{Hom}_{conj}(X, E) = \mathrm{Hom}_{k-lin}(k[X], E)$$

En particular, $A_X := \mathrm{Hom}_{conj}(X, k) = k[X]^*$ Por tanto, si X es un conjunto finito

$$\boxed{k[X] = A_X^*}$$

Grupos Abstractos

G un grupo abstracto. Entonces $k[G]$ es una k-álgebra.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & B \\ & k[G] \arrow[ur, dashed, "\exists\cdot"'] & \end{tikzcd} \qquad (B \text{ es una } k\text{-álgebra})$$

Es decir,

$$\mathrm{Hom}_{mon}(G, B\cdot) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[G], B)$$

Grupos Abstractos

G un grupo abstracto. Entonces $k[G]$ es una k-álgebra.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & B \\ & k[G] \arrow[ur, dashed, "\exists\cdot"'] & \end{tikzcd} \qquad (B \text{ es una } k\text{-álgebra})$$

Es decir,

$$\mathrm{Hom}_{mon}(G, B\cdot) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[G], B)$$

Si G es un grupo conmutativo finito entonces

$$G^* := \mathrm{Hom}_{mon}(G, \mathbb{C}\cdot) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-alg}(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}) = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[G]$$
$$= \mathrm{Spec}\, A_G^*$$

Grupos Abstractos

G un grupo abstracto. Entonces $k[G]$ es una k-álgebra.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & B \\ & k[G] \arrow[ur, dashed, "\exists\cdot"'] & \end{tikzcd}$$

(B es una k-álgebra)

Es decir,

$$\mathrm{Hom}_{mon}(G, B\cdot) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[G], B)$$

Si G es un grupo conmutativo finito entonces

$$G^* := \mathrm{Hom}_{mon}(G, \mathbb{C}\cdot) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-alg}(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[G]$$
$$= \mathrm{Spec}\, A_G^*$$

Dualidad de Cartier: $\boxed{G = G^{**}}$.

Funtores

$\mathcal{C}_{k-alg.conm.}$	$\rightsquigarrow$	$\mathcal{C}_{conj}$	Funtor de conjuntos
		$\mathcal{C}_{grupos}$	Funtor de grupos
		$\mathcal{C}_{algebras}$	Funtor de álgebras
		$\mathcal{C}_{modulos}$	Funtor de módulos

Funtor de puntos de una variedad algebraica

Puntos de una variedad algebraica

$$X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r) \equiv \begin{cases} p_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Funtor de puntos de una variedad algebraica

Puntos de una variedad algebraica

$$X = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r) \equiv \left\{ \begin{array}{l} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

$$X^{\cdot} : \qquad A \rightsquigarrow X^{\cdot}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Soluciones con valores en } A \\ \text{del sistema } p_1 = \cdots = p_r = 0 \end{array} \right.$$

Funtor de puntos de una variedad algebraica

Puntos de una variedad algebraica

$$X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r) \equiv \begin{cases} p_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$X^{\cdot} : \qquad A \rightsquigarrow X^{\cdot}(A) = \begin{cases} \text{Soluciones con valores en } A \\ \text{del sistema } p_1 = \cdots = p_r = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Hom}_{k-esq}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{funt.}(X^{\cdot}, Y^{\cdot})$$

$$X \simeq Y \iff X^{\cdot} \simeq Y^{\cdot}$$

Funtor de puntos de una variedad algebraica

Dos comentarios marginales

$$X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r)$$

1. Se puede definir el funtor de puntos de una variedad no afín.

$$\begin{aligned} X^{\cdot}(A) &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r), A) \\ &= \operatorname{Hom}_{k-esq}(\operatorname{Spec} A, X) \end{aligned}$$

Funtor de puntos de una variedad algebraica

Dos comentarios marginales

$$X = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)$$

1. Se puede definir el funtor de puntos de una variedad no afín.

$$\begin{aligned} X^{\cdot}(A) &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r), A) \\ &= \operatorname{Hom}_{k-esq}(\operatorname{Spec} A, X) \end{aligned}$$

2. Espectro primo $\sim$ Funtor de puntos:

$$\operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r) = X^{\cdot}(\bar{k})/\sim$$

Funtor de puntos de una variedad algebraica

Puntos de una variedad algebraica

$$X = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) \equiv \begin{cases} p_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}$$

$$X^{\cdot}: \qquad A \rightsquigarrow X^{\cdot}(A) = \begin{cases} \text{Soluciones con valores en } A \\ \text{del sistema } p_1 = \cdots = p_r = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Hom}_{k-esq}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{funt.}(X^{\cdot},Y^{\cdot})$$

$$X \simeq Y \iff X^{\cdot} \simeq Y^{\cdot}$$

$$G = \operatorname{Spec} B \text{ es un } k\text{-grupo} \iff G^{\cdot} \text{ es un funtor de grupos.}$$

Funtor de espacios vectoriales asociado a un espacio vectorial

Sea E un k-espacio vectorial.

$$\begin{array}{llcl} & \mathbf{E}: \quad A & \rightsquigarrow & E \otimes_k A \\ E = \oplus_I k, & \oplus_I \mathbf{k}: \quad A & \rightsquigarrow & \oplus_I A \end{array}$$

Funtor de espacios vectoriales asociado a un espacio vectorial

Sea E un k-espacio vectorial.

$$E = \oplus_I k, \qquad \begin{array}{lccc} \mathbf{E}: & A & \rightsquigarrow & E \otimes_k A \\ \oplus_I \mathbf{k}: & A & \rightsquigarrow & \oplus_I A \end{array}$$

Theorem

$$\{Cat.de\ los\ k\text{-}esp.\ vect.\ E\} = \{Cat.\ de\ los\ funtores\ \mathbf{E}\}$$

Funtor de espacios vectoriales asociado a un espacio vectorial

Sea E un k-espacio vectorial.

$$E = \oplus_I k, \qquad \begin{array}{llcl} \mathbf{E}: & A & \rightsquigarrow & E \otimes_k A \\ \oplus_I \mathbf{k}: & A & \rightsquigarrow & \oplus_I A \end{array}$$

Theorem

$$\{Cat.de\ los\ k\text{-}esp.\ vect.\ E\} = \{Cat.\ de\ los\ funtores\ \mathbf{E}\}$$

Theorem

$G = \operatorname{Spec} A$, E k-espacio vectorial.

$$\{Cat.\ de\ los\ G\text{-}mód.\ E\} = \{Cat.\ los\ funtores\ de\ G^{\cdot}\text{-}mód.\ \mathbf{E}\}$$

Funtor de dual

F, F' functores de módulos

$$\mathbf{Hom}_k(F, F')(A) := \mathrm{Hom}_A(F_{|A}, F'_{|A})$$

Funtor de dual

F, F' functores de módulos

$$\mathbf{Hom}_k(F, F')(A) := \mathrm{Hom}_A(F_{|A}, F'_{|A})$$

$F^* := \mathbf{Hom}_k(F, \mathbf{k})$. $\mathbf{E}^* = \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{k})$.
Si $E = \oplus_I k$, entonces $E^* = \prod_I k$, $\mathbf{E}^* = \prod_I \mathbf{k}$, $\mathbf{E}^*(A) = \prod_I A$.

Funtor de dual

F, F' functores de módulos

$$\mathbf{Hom}_k(F, F')(A) := \mathrm{Hom}_A(F_{|A}, F'_{|A})$$

$F^* := \mathbf{Hom}_k(F, \mathbf{k})$. $\mathbf{E}^* = \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{k})$.
Si $E = \oplus_I k$, entonces $E^* = \prod_I k$, $\mathbf{E}^* = \prod_I \mathbf{k}$, $\mathbf{E}^*(A) = \prod_I A$.

Theorem

$$\mathbf{E}^{**} = \mathbf{E}.$$

Funtor de dual

F, F' functores de módulos

$$\mathbf{Hom}_k(F, F')(A) := \mathrm{Hom}_A(F_{|A}, F'_{|A})$$

$F^* := \mathbf{Hom}_k(F, \mathbf{k})$. $\mathbf{E}^* = \mathbf{Hom}_k(\mathbf{E}, \mathbf{k})$.
Si $E = \oplus_I k$, entonces $E^* = \prod_I k$, $\mathbf{E}^* = \prod_I \mathbf{k}$, $\mathbf{E}^*(A) = \prod_I A$.

Theorem

$$\mathbf{E}^{**} = \mathbf{E}.$$

$\mathbf{E}^* = \varprojlim_i \mathbf{V}_i$, $\dim_k V_i < \infty$ "Funtores de módulos profinitos".

Theorem

$$\{Cat. de\ los\ k\text{-}esp.\ vect.\ E\} \overset{ANTIEQUIV}{=} \{Cat.\ de\ los\ funt.\ \mathbf{E}^*\}$$

Funtor Espectro

Definition

Sea $\mathcal{A}$ un funtor de k-álgebras.

$$\operatorname{Spec} \mathcal{A}(B) := \operatorname{Hom}_{k-alg}(\mathcal{A}, \mathbf{B})$$

Funtor Espectro

Definition

Sea $\mathcal{A}$ un funtor de k-álgebras.

$$\operatorname{Spec}\mathcal{A}(B) := \operatorname{Hom}_{k-alg}(\mathcal{A}, \mathbf{B})$$

Ejemplos fundamentales:

1. $(\operatorname{Spec} A)^{\cdot} = \operatorname{Spec}\mathbf{A}$.

Funtor Espectro

Definition

Sea $\mathcal{A}$ un funtor de k-álgebras.

$$\operatorname{Spec}\mathcal{A}(B) := \operatorname{Hom}_{k-alg}(\mathcal{A}, \mathbf{B})$$

Ejemplos fundamentales:

1. $(\operatorname{Spec} A)^{\cdot} = \operatorname{Spec}\mathbf{A}$.
2. $\mathbf{C}^*$ functor de álgebras $\Rightarrow \mathbf{C}^* = \lim\limits_{\substack{\longleftarrow \\ i}} \mathbf{A_i}$, con $\dim_k A_i < \infty$ y

$$\operatorname{Spec}\mathbf{C}^* = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i}} \operatorname{Spec}\mathbf{A_i} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i}} (\operatorname{Spec} A_i)^{\cdot}$$

Diremos que $\operatorname{Spec}\mathbf{C}^*$ es un esquema inductivo finito.

Dualidad de Cartier Funtorial

E, $\mathbf{E}$; $\mathbf{E}^*$.
$X = \operatorname{Spec} A$, $X^{\cdot} = \operatorname{Spec} \mathbf{A}$; $\operatorname{Spec} \mathbf{C}^*$ (esquema inductivo finito)

Dualidad de Cartier Funtorial

E, $\mathbf{E}$; $\mathbf{E}^*$.
$X = \operatorname{Spec} A$, $X^\cdot = \operatorname{Spec} \mathbf{A}$; $\operatorname{Spec} \mathbf{C}^*$ (esquema inductivo finito)
$\mathcal{A} = \mathbf{A}, \mathbf{C}^*$.

Theorem

$$\operatorname{Hom}_{funt}(\operatorname{Spec} \mathcal{A}, \mathbf{E}) = \operatorname{Hom}_k(k[\operatorname{Spec} \mathcal{A}], \mathbf{E}) = \operatorname{Hom}_k(\mathcal{A}^*, \mathbf{E})$$

Dualidad de Cartier Funtorial

E, $\mathbf{E}$; $\mathbf{E}^*$.
$X = \operatorname{Spec} A$, $X^\cdot = \operatorname{Spec} \mathbf{A}$; $\operatorname{Spec} \mathbf{C}^*$ (esquema inductivo finito)
$\mathcal{A} = \mathbf{A}, \mathbf{C}^*$.

Theorem

$$\operatorname{Hom}_{funt}(\operatorname{Spec} \mathcal{A}, \mathbf{E}) = \operatorname{Hom}_k(k[\operatorname{Spec} \mathcal{A}], \mathbf{E}) = \operatorname{Hom}_k(\mathcal{A}^*, \mathbf{E})$$

Theorem

Si $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$ *es un funtor de grupos.*

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{funt.gr.}(\operatorname{Spec} \mathcal{A}, \mathbf{B}\cdot) &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[\operatorname{Spec} \mathcal{A}], \mathbf{E}) \\ &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(\mathcal{A}^*, \mathbf{B})\end{aligned}$$

Dualidad de Cartier Funtorial

E, $\mathbf{E}$; $\mathbf{E}^*$.
$X = \operatorname{Spec} A$, $X^{\cdot} = \operatorname{Spec} \mathbf{A}$; $\operatorname{Spec} \mathbf{C}^*$ (esquema inductivo finito)
$\mathcal{A} = \mathbf{A}, \mathbf{C}^*$.

Theorem

$$\operatorname{Hom}_{funt}(\operatorname{Spec} \mathcal{A}, \mathbf{E}) = \operatorname{Hom}_k(k[\operatorname{Spec} \mathcal{A}], \mathbf{E}) = \operatorname{Hom}_k(\mathcal{A}^*, \mathbf{E})$$

Theorem

Si $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$ *es un funtor de grupos.*

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{funt.gr.}(\operatorname{Spec} \mathcal{A}, \mathbf{B}\cdot) &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[\operatorname{Spec} \mathcal{A}], \mathbf{E}) \\ &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(\mathcal{A}^*, \mathbf{B})\end{aligned}$$

Corollary

$\{$*Cat. de* $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$*-módulos*$\} = \{$*Cat. de* $\mathcal{A}^*$*-mód.*$\}$

Dualidad de Cartier Funtorial

Spec $\mathcal{A}$ un funtor de grupos abelianos.

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{Spec}\mathcal{A})^* &:= \mathbf{Hom}_{grp}(\operatorname{Spec}\mathcal{A}, \mathbf{k}\cdot) = \mathbf{Hom}_{k-alg}(\mathcal{A}^*, \mathbf{k}) \\
&= \operatorname{Spec}\mathcal{A}^*
\end{aligned}
$$

Dualidad de Cartier Funtorial

$\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ un funtor de grupos abelianos.

$$\begin{aligned}(\operatorname{Spec}\mathcal{A})^* := \mathbf{Hom}_{grp}(\operatorname{Spec}\mathcal{A}, \mathbf{k}\cdot) &= \mathbf{Hom}_{k-alg}(\mathcal{A}^*, \mathbf{k}) \\ &= \operatorname{Spec}\mathcal{A}^*\end{aligned}$$

Por tanto, $\boxed{(\operatorname{Spec}\mathcal{A})^{**} = \operatorname{Spec}\mathcal{A}}$.

Dualidad de Cartier Funtorial

$\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ un funtor de grupos abelianos.

$$(\operatorname{Spec}\mathcal{A})^* := \mathbf{Hom}_{grp}(\operatorname{Spec}\mathcal{A}, \mathbf{k}\cdot) = \mathbf{Hom}_{k-alg}(\mathcal{A}^*, \mathbf{k})$$
$$= \operatorname{Spec}\mathcal{A}^*$$

Por tanto, $\boxed{(\operatorname{Spec}\mathcal{A})^{**} = \operatorname{Spec}\mathcal{A}}$.

Theorem

$\{$Cat. de k-grupos abelianos $\operatorname{Spec} A\} = \{$Cat. de grupos finito inductivos abelianos, $\operatorname{Spec}\mathbf{C}^*\}$.

Descomposición de un k-Monoide Abeliano

Sea $\operatorname{Spec} A$ un k-monoide abeliano, k algebraicamente cerrado.

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A \arrow[r, equal] & \text{Parte Multiplicativa} \arrow[d, equal] & \times & \text{Parte Unipotente} \arrow[d, equal, "\text{car } k=0"] \\
& k\text{-Mon. Semisimple} & & G_a \times \ldots \times G_a
\end{tikzcd}
$$

Descomposición de un k-Monoide Abeliano

Sea $\operatorname{Spec} A$ un k-monoide abeliano, k algebraicamente cerrado.

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A \arrow[r, equal] & \text{Parte Multiplicativa} \arrow[d, equal] & \times & \text{Parte Unipotente} \arrow[d, equal, "\text{car } k=0"] \\
 & k\text{-Mon. Semisimple} & & G_a \times \ldots \times G_a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \mathbf{A}^* \arrow[r, equal] & \text{Parte Discreta} \arrow[d, equal] & \times & \text{Parte Infinitesimal} \arrow[d, equal] \\
 & \operatorname{Spec} \prod_M \mathbf{k} = \mathcal{M} & & \lim\limits_{\substack{\to \\ i}} \text{esq.inf.fin.}
\end{tikzcd}
$$

Descomposición de un k-Monoide Abeliano

Sea $\operatorname{Spec} A$ un k-monoide abeliano, k algebraicamente cerrado.

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Spec} A = & \text{Parte Multiplicativa} & \times & \text{Parte Unipotente} \\
& \Vert & & \Vert \, {\scriptstyle \text{car } k=0} \\
& k\text{-Mon. Semisimple} & & G_a \times \ldots \times G_a
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Spec} \mathbf{A}^* = & \text{Parte Discreta} & \times & \text{Parte Infinitesimal} \\
& \Vert & & \Vert \\
& \operatorname{Spec} \prod_M \mathbf{k} = \mathcal{M} & & \varinjlim_i \text{esq.inf.fin.}
\end{array}$$

Teoría de los k-Monoides Abelianos $=$ Teoría de las Variedades Tóricas Afines $+$ Teoría de los Grupos Abelianos Infinitesimales.

Variedades Tóricas Afines

$$\{\text{Monoides abelianos}\} = \{k\text{-monoides abelianos semisimples}\}$$

$$\mathcal{M} = \operatorname{Spec} \prod_M \mathbf{k} \longmapsto \mathcal{M}^* = \operatorname{Spec} \oplus_M k = \operatorname{Spec} k[M]$$

$$M = \operatorname{Hom}_{mon}(\mathcal{M}^*, \mathbf{k}\cdot) \longleftarrow\!\shortmid \mathcal{M}^*$$

Variedades Tóricas Afines

$$\{\text{Monoides abelianos}\} = \{k\text{-monoides abelianos semisimples}\}$$

$$\{\text{Monoides finito gen.}\} = \{k\text{-monoides algebraicos semisimp.}\}$$

Variedades Tóricas Afines

$$\{\text{Monoides abelianos}\} = \{k\text{-monoides abelianos semisimples}\}$$

$$\{\text{Monoides finito gen.}\} = \{k\text{-monoides algebraicos semisimp.}\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Monoides fin. gen. } M \\ M \hookrightarrow M_M,\ M_M \text{ sin torsión} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} k\text{-monoides algebraicos} \\ \text{semisimples íntegros} \end{array} \right\}$$

Variedades Tóricas Afines

$$\{\text{Monoides abelianos}\} = \{k\text{-monoides abelianos semisimples}\}$$

$$\{\text{Monoides finito gen.}\} = \{k\text{-monoides algebraicos semisimp.}\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Monoides fin. gen. } M \\ M \hookrightarrow M_M,\ M_M \text{ sin torsión} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} k\text{-monoides algebraicos} \\ \text{semisimples íntegros} \end{array} \right\}$$

$M \hookrightarrow M_M = \mathbb{Z}^n$ equivale por dualidad $G_m^n \hookrightarrow \mathcal{M}^*$.

Variedades Tóricas Afines

$$\{\text{Monoides abelianos}\} = \{k\text{-monoides abelianos semisimples}\}$$

$$\{\text{Monoides finito gen.}\} = \{k\text{-monoides algebraicos semisimp.}\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Monoides fin. gen. } M \\ M \hookrightarrow M_M,\ M_M \text{ sin torsión} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} k\text{-monoides alg.} \\ \text{semisimples íntegros} \end{array}\right\}$$

$$\| $$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Var. Tóricas Afines} \\ \text{Con un punto fijado} \\ \text{en la órbita densa} \end{array}\right\}$$

Variedades Tóricas Afines

$$\{\text{Monoides finito gen.}\} = \{k\text{-monoides algebraicos semisimp.}\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Monoides fin. gen. } M\\ M \hookrightarrow M_M,\ M_M \text{ sin torsión}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}k\text{-monoides alg.}\\ \text{semisimples íntegros}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c}\|\\ \left\{\begin{array}{l}\text{Var. Tóricas Afines}\\ \text{Con un punto fijado}\\ \text{en la órbita densa}\end{array}\right\}\end{array}$$

Variedades Tóricas Afines

$$\{\text{Monoides finito gen.}\} = \{k\text{-monoides algebraicos semisimp.}\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Monoides fin. gen. } M \\ M \hookrightarrow M_M,\ M_M \text{ sin torsión} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} k\text{-monoides alg.} \\ \text{semisimples íntegros} \end{array} \right\}$$

$$\| $$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Var. Tóricas Afines} \\ \text{Con un punto fijado} \\ \text{en la órbita densa} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Monoides fin. gen. } M \\ M_M \text{ sin torsión,} \\ M \hookrightarrow M_M \text{ saturado} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Var. Tóricas Afines normales} \\ \text{Con un punto fijado} \\ \text{en la órbita densa} \end{array} \right\}$$

Órbitas de una Variedad Tórica Afín y Caras de un Monoide

$M = \mathbb{Z}^n \times M'$, $\operatorname{Inv} M' = \{1\}$ luego $\mathcal{M}^* = G_m^n \times \mathcal{M}'^*$ y existe un $0 \in \mathcal{M}'^*$.

Órbitas de una Variedad Tórica Afín y Caras de un Monoide

$M = \mathbb{Z}^n \times M'$, $\mathrm{Inv}\, M' = \{1\}$ luego $\mathcal{M}^* = G_m^n \times \mathcal{M}'^*$ y existe un $0 \in \mathcal{M}'^*$.

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{Caras de } M\} & = & \{\text{Órb. en } \mathcal{M}^* \text{ por la acción de} \mathcal{M}^*\} \\
M' & \longmapsto & x \cdot \mathcal{M}^* \\
 & & x(m) := 1, \text{ si } m \in M' \\
 & & x(m) = 0, \text{ si } x \in M - M' \\
M' := \{m \in M \colon x(m) \neq 0\} & \longleftarrow & x \cdot \mathcal{M}^*
\end{array}$$

Órbitas de una Variedad Tórica Afín y Caras de un Monoide

$M = \mathbb{Z}^n \times M'$, $\mathrm{Inv}\, M' = \{1\}$ luego $\mathcal{M}^* = G_m^n \times \mathcal{M}'^*$ y existe un $0 \in \mathcal{M}'^*$.

$$\begin{array}{rcl}
\{\text{Caras de } M\} & = & \{\text{Órb. en } \mathcal{M}^* \text{ por la acción de} \mathcal{M}^*\} \\
M' & \longmapsto & x \cdot \mathcal{M}^* \\
 & & x(m) := 1, \ \text{si } m \in M' \\
 & & x(m) = 0, \ \text{si } x \in M - M' \\
M' := \{m \in M \colon x(m) \neq 0\} & \longleftarrow\!\shortmid & x \cdot \mathcal{M}^*
\end{array}$$

$x \cdot \mathcal{M}^* = \mathcal{M}^{*\mathcal{N}^*}$, donde $N = M/M'$.

Monoide dual

Sea $M^+ := \mathrm{Hom}_{mon}(M, \mathbb{N})$.

Monoide dual

Sea $M^+ := \mathrm{Hom}_{mon}(M, \mathbb{N})$.

$$
\begin{tikzcd}
M^+ \arrow[d, equal] & & (\mathbb{Z}^n)^* \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_{mon}(M, \mathbb{N}) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{mon}(M, \mathbb{Z}) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{grp}(M_M, \mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_{k-mon}(\mathbf{k}\cdot, \mathcal{M}^*) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{grp}(G_m, \mathcal{M}^*) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_{grp}(G_m, G_m^n)
\end{tikzcd}
$$

Definición de Variedad Tórica

Si $\{A_1, \dots, A_n\}$ es un conjunto de k-subálgebras de un anillo B tales que $A_i \cdot A_j = A_{i\,a_{ij}}$ entonces existe una variedad X, con un recubrimiento $\{U_1, \dots, U_n\}$ tal que

$$U_i = \operatorname{Spec} A_i \text{ y } U_i \cap U_j = \operatorname{Spec} A_{i\,aij}$$

Definición de Variedad Tórica

Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es un conjunto de k-subálgebras de un anillo B tales que $A_i \cdot A_j = A_{i\,a_{ij}}$ entonces existe una variedad X, con un recubrimiento $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tal que

$$U_i = \operatorname{Spec} A_i \text{ y } U_i \cap U_j = \operatorname{Spec} A_{i\,aij}$$

Definición-Proposición: Si $M_1, \cdots, M_n$ son submonoides abelianos de $\mathbb{Z}^n$ (de grupo asociado $\mathbb{Z}^n$) de modo que $M_{ij} = M_i \cdot M_j = M_{i\,m_{ij}}$ entonces existe una variedad X, con un recubrimiento U_i tales que $U_i = \mathcal{M}_i^*$ y $U_i \cap U_j = \mathcal{M}_{ij}^*$.

Theorem

X es una variedad completa $\iff \cup_i M_i^+ = (\mathbb{Z}^n)^*$.

- Álvarez, A., Sancho, C., Sancho, P., *Algebra schemes and their representations*, J. Algebra **296/1** (2006) 110-144.
- Álvarez, A., Sancho, C., Sancho, P., *Functorial Cartier Duality*,
- Demazure, M., Gabriel, P., *Groupes Algébriques*, North-Holland Publshing Company, 1970.
- Dieudonné, J., *Introduction to the Theory of Formal Groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Dekker, New York, 1973.
- Fulton, W., *Introduction to the Toric Varieties*, Annal of Mathematics studies, no 131, Princeton University Press, 1993.

- ODA, T., *Convex bodies and Algebraic Geometry*, A series of modern surveys in mathematics, vol. 15, Springer-Verlag, 1985.
- SANCHO,J., *Tangent algebraic subvarieties of vector fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 9, 3509–3523