Conjunto Independiente Máximo, Estrategia Codiciosa e Ideales Secuencialmente Cohen-Macaulay

Argimiro Arratia

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid

El problema de hallar un conjunto de vértices independientes (i.e. no adyacentes entre si) de mayor tama õ posible en un grafo es **NP**-completo, lo cual quiere decir que muy posiblemente no existe una solución algorítmica eficiente para este problema, y debamos conformarnos con soluciones algorítmicas aproximadas. La estrategia codiciosa C de seleccionar vértices según su grado de adyacencia (i.e. número de aristas que salen del vértice), a pesar de producir en muchos casos soluciones alejadas del óptimo por un factor logaritmico en el tamaño de las instancias de entrada, en otros varios casos produce la solución óptima. La pregunta que motiva mi investigación es el por qué de esto último. ¿Qué puedo decir de la estructura de un grafo G como garantia de que la estrategia codiciosa C antes descrita produzca una solución óptima?

En el Algebra Combinatoria existe un ideal asociado a G, que es su ideal de aristas $I(G)$, y este ideal está emparentado con un ideal de Stanley-Reisner sobre un complejo simplicial particular. Voy a demostrar:

(1) Si $I(G)$ es Cohen-Macaulay entonces la estrategia codiciosa C produce una solución óptima.

(2) Si $I(G)$ es Secuencialmente Cohen-Macaulay (y G es hereditario respecto a la propiedad de tener un vértice simplicial) entonces la estrategia C produce una solución óptima.

Una consecuencia de (1) y (2) es que en estos casos el problema de hallar un conjunto de vértices independientes es soluble (muy) eficientemente (está en PTIME); por otra parte podemos obtener criterios algoritmicos para decidir si un ideal de aristas no es (secuencialmente) Cohen-Macaulay.