DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
06071-BADAJOZ (Spain)

Apuntes de

Matemáticas II

Escuela de Ingenierías Agrarias. Universidad de Extremadura

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Badajoz, febrero 2013

Índice

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Parte I

Bloque I: Ecuaciones Diferenciales

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales

1.1. Introducción: crecimiento de poblaciones

Supongamos que $x(t)$ es el número de individuos de una población (de personas, animales, bacterias, virus, etc.) en un cierto instante t medido en tiempo continuo (minutos, días, semanas, meses, años, etc., que podrían tomar cualquier valor dentro de un intervalo). Malthaus (1766-1834) propuso que la tasa de incremento de la población en un periodo de tiempo h es proporcional al número de individuos del que se parte, es decir:

$$\frac{\text{incremento de población}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = Kx(t),$$

donde K es la constante de proporcionalidad que dependerá en cada caso del entorno en el que se encuentre la población. Si hacemos que el periodo de tiempo transcurrido h tienda a 0 tendremos

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = x(t),$$

es decir,

$$x'(t) = Kx(t),$$

lo que significa que, en cada instante, la velocidad a la que varía la población es proporcional al número de individuos de la población en ese instante.

Ejercicio: Según el modelo de Malthaus, si $K = 1$ y medimos el tiempo en semanas, partiendo de $x(0) = 123$ individuos, ¿cuál es la velocidad de variación de la población en $t = 0$? ¿Y en $t = 1$ y $t = 2$?

Si en el ejercicio anterior nos planteamos calcular cuántos individuos habrá 1 o 2 semanas después de instante inicial, necesitaremos conocer una expresión de $x(t)$ en función *solo* del tiempo t, es decir, tendremos que resolver la ecuación:

$$x'(t) = Kx(t)$$

sabiendo la condición $x(0) = 123$. El planteamiento anterior es una ecuación diferencial con valor inicial.

Existen numerosos fenómenos de la naturaleza (desintegración radiactiva, movimientos de osciladores armónicos, transmisión de calor, transmisión de ondas, caída retardada de cuerpos, etc.) cuyo comportamiento viene regido por una ecuación diferencial.

1.2. Nociones básicas

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una relación de igualdad entre una variable independiente (llamada x, t, etc.), otra dependiente de la primera (lamada $y(x)$, $x(t)$, etc.) y derivadas de distinto orden de la segunda respecto de la primera ($x'(t)$, $y'(x)$, $y''(x)$, ...). Se puede presentar en

Forma implícita

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0,$$

Forma normal:

$$y^{n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1)})$$

Forma diferencial:

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{cc} x'(t) = 2x(t) & x^3y'' - 3xy = 0 \\ y'' = 4xy + \operatorname{sen} x & (x-1)dx - (x^2+y^2)dy = 0 \end{array}$$

□

El *orden* de una EDO es el orden de derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. El *grado* de una EDO es el mayor exponente de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Ejemplo:

ecuación	orden	grado
$y' = y\tan(x+3)$	1	1
$(y')^2 = y\tan(x+3)$	1	2
$y'' = y\tan(x+3)$	2	1
$y'' - y^3\tan(x+3)$	2	1

$\square$

Una *solución particular* de una EDO es un función que verifica la ecuación diferencial. Un conjunto de soluciones particulares se pueden agrupar en una *solución general*, que es una familia de funciones que verifican la EDO. En general, la solución general de una EDO de orden d dependerá de d parámetros. Si le damos distintos valores a los parámetros de la solución general, obtendremos distintas soluciones particulares.

Ejemplo: La solución general de $y' = \operatorname{sen}(x)$ es $y = -\cos(x) + k$ con $k \in \mathbb{R}$. La solución general de $y'' = -y$ es $y = a\operatorname{sen}(x) + b\cos(x)$, con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.

$\square$

Una *solución singular* es una función que verifica la EDO pero que no está recogida en una solución general.

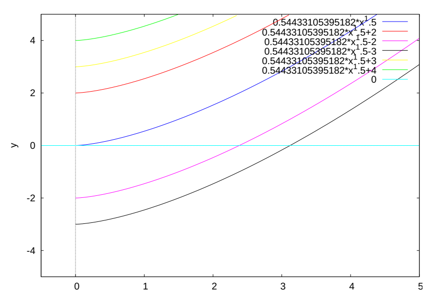


Figura 1.1: Solución singular y algunas soluciones particulares de $y' = y^{1/3}$

Ejemplo: La ecuación $y' = y^{1/3}$ tiene como solución general $y = (\frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}} + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Una solución particular es $y = (\frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}} + 4$ y una solución singular es $y = 0$.

$\square$

En general, una ecuación diferencial no tiene por qué tener solución, y en el caso que la tenga, ésta no tiene por qué ser única. Además, la búsqueda de soluciones exactas de una ecuación diferencial es un problema difícil. Veremos cómo se pueden resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas, pero es habitual tener que recurrir a métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas. El planteamiento típico de una ecuación diferencial ordinaria de grado 1 con valor inicial es

$$y' = f(x, y(x)) \quad y(x_0) = y_0.$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación diferencial que aparece en el modelo de crecimiento de poblaciones de Malthaus cuando $K = 2$ y $x(0) = 123$:

$$x'(t) = 2x(t), \qquad x(0) = 123.$$

Solución. Si $x'(t) = 2x(t)$, entonces

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 2$$

e integrando a ambos lados de la igualdad respecto de t

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int 2dt$$

obtenemos

$$\mathrm{L}(x(t)) = 2t + C.$$

Para despejar $x(t)$ usamos la función exponencial

$$e^{\mathrm{L}(x(t))} = e^{2t+C}$$

de modo que $x(t) = e^{2t}e^C$. Si lamamos $M = e^C$, la solución general será

$$x(t) = e^{2t}M$$

con $M > 0$. En nuestro caso, $x(0) = e^0 M = 123$, por tanto, $M = 123$ y la solución sería $x(t) = e^{2t}123$. $\square$

Ejemplo: Resuelve la ecuación

$$y' = \frac{-y}{x}, \quad y(2) = -1.$$

Solución. Si $y' = \frac{-y}{x}$, suponiendo que $y \neq 0$ se tiene que

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx \;\Rightarrow\; \text{Ł}|y| = -\text{Ł}|x| + a$$

con $a \in \mathbb{R}$. Denotando $b = e^a$, la solución general se puede expresar así:

$$|y| = \frac{1}{|x|} b$$

siendo[1] $b > 0$, es decir

$$y = \frac{c}{x} \quad c \in \mathbb{R} - 0.$$

De todas las soluciones recogidas en la solución general nos interesa aquella que verifica $y(2) = -1$, es decir:

$$y(2) = \frac{c}{2} = -1 \Rightarrow c = -2$$

Nuestra solución particular sería $y = \frac{-2}{x}$.

Una solución singular no recogida en la solución general sería la función

$$y = 0,$$

que habíamos descartado al razonar dividiendo por y en la ecuación diferencial pero que también verifica la ecuación diferencial.

□

En lo que sigue plantearemos ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = f(x, y(x))$$

donde $y(x)$ será una función que dependa de x, y buscaremos la solución general de algunas EDO de primer orden de este tipo.

---

[1] Hay que tener en cuenta que $b = e^a > 0)$)

1.3. Ecuaciones en variables separadas

Una EDO en variables separadas se puede expresar $y'g(y) = f(x)$, que en forma normal quedaría así

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

y en forma diferencial como

$$F(x)G(y)dx + H(x)J(y)dy = 0$$

Se pueden resolver integrando por separado las expresiones que dependen de x y por otro las que dependen de y:

$$\int y' \ g(y) \ dx = \int f(x) \ dx$$

Ejemplo: Las ecuaciones $x'(t) = 2x(t)$ y $y' = \frac{-y}{x}$, $\quad y(2) = -1$ ya resueltas son ejemplos de EDO en variables separadas. Otros ejemplos:

1. $y' = \cos(3x) + 5$ 2. $2y \ dx + 3x \ dy = 0$ 3.$(x^2 + 4)y' = xy$

1.4. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una EDO homogénea se puede expresar en forma normal así

$$y' = f(y/x),$$

es decir, la derivada y' se puede expresar como una función que depende de y/x.

Ejemplo: Las ecuaciones diferenciales siguientes son homogéneas:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \qquad\qquad (x^2 - y^2) + 3xyy' = 0.$$

Las ecuaciones homogéneas se pueden resolver transformándolas en EDO en variables separadas mediante el cambio de variable $y = u(x) \cdot x$, teniendo en cuenta que $u(x)$ debe ser una función de x, por lo que

$$y' = u'(x) \cdot x + u$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación

$$(x^2 - 3y^2)\ dx + 2xy\ dy = 0$$

Solución. La ecuación $(x^2 - 3y^2)\ dx + 2xy\ dy = 0$ se puede expresar

$$y' = \frac{-x^2 + 3y^2}{2xy}.$$

Dividimos por x^2 numerador y denominador:

$$y' = \frac{-1 + 3(\frac{y}{x})^2}{2\frac{y}{x}},$$

aplicamos el cambio de variable $y = u(x) \cdot x$, teniendo en cuenta que $y' = u' \cdot x + u$:

$$u' \cdot x + u = \frac{-1 + 3u^2}{2u}$$

y la ecuación obtenida es de variables separadas

$$(u' \cdot x + u)2u = -1 + 3u^2 \quad \Rightarrow \quad 2uu'x = -1 + u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2uu'}{-1 + u^2} = \frac{1}{x}$$

que se resuelve integrando ambos términos

$$\mathrm{L}|u^2 - 1| = \mathrm{L}|x| + c \quad \Rightarrow \quad |u^2 - 1| = |x| \cdot e^c \quad \Rightarrow \quad u^2 - 1 = \pm x e^c$$

Si llamamos $k = \pm e^c$, la solución sería

$$u = \pm\sqrt{kx + 1}, \qquad k \neq 0$$

Deshaciendo el cambio $y = u(x) \cdot x$

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{kx + 1} \quad \Rightarrow \quad y = \pm x\sqrt{kx + 1}$$

$\square$

1.4.1. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Una EDO que en forma normal se puede presentar así

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

siendo a, b, c, a', b' y c' números reales, se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea mediante alguno de los siguientes cambios de variable:

1. Si las rectas $y = ax + by + c$, $y = a'x + b'y + c'$ se cortan en un punto (x_0, y_0), el cambio sería

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

2. Si las rectas $y = ax + by + c$, $y = a'x + b'y + c'$ son paralelas, el cambio sería

$$u = ax + by.$$

Ejemplo: Resuelve las ecuaciones

1. $y' = \dfrac{6x-7y-4}{3x+y-2}$ 2. $y' = e^{\frac{4x+3y-2}{5x-y+1}}$ 3. $(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy = 0$

1.5. Ecuaciones diferenciales lineales

Una EDO lineal se puede presentar así

$$y' = p(x)y + r(x),$$

siendo $p(x)$ y $r(x)$ funciones de la variable independiente x.

Si $r(x) = 0$, la EDO lineal es de variables separadas

$$y' = p(x)y$$

y tiene fácil solución

$$\frac{y'}{y} = p(x) \Leftrightarrow \int \frac{y'}{y}\,dy = \int p(x)\,dx \Leftrightarrow \mathrm{L}|y| = \int p(x)\,dx + c.$$

Despejando y y llamando $k = e^c$ se obtiene

$$y = k\ e^{\int p(x)\ dx}.$$

Para encontrar una solución de la ecuación lineal completa

$$y' = p(x)y + r(x),$$

primero obtendremos la solución de la ecuación lineal correspondiente cuando cuando $r(x) = 0$, que será

$$y = k\ e^{\int p(x)\ dx},$$

y después buscaremos la solución de la EDO lineal completa entre las funciones de la forma

$$y = k(x)\ e^{\int p(x)\ dx},$$

exigiendo que $k(x)$ sea una función de la variable x en lugar de constante.

Ejemplo: Resuelve la ecuación:

$$y' - y\ \mathrm{tg}(x) = \cos(x).$$

Solución. Como es una ecuación lineal, primero resolveremos la ecuación

$$y' - y\ \mathrm{tg}(x) = 0$$

que es de variables separadas

$$\frac{y'}{y} = \mathrm{tg}(x)$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int \mathrm{tg}(x) dx$$

$$\mathrm{L}|y| = -\mathrm{L}|\cos(x)| + c$$

$$|y| = e^{-\mathrm{L}|\cos(x)|} e^c = \frac{1}{e^{\mathrm{L}|\cos(x)|}} e^c = \frac{e^c}{|\cos(x)|},$$

con lo que, llamando $k = \pm e^c$, la solución es

$$y = \frac{k}{\cos(x)}$$

Para obtener la solución de la ecuación lineal completa $y' - y\ \mathrm{tg}(x) = \cos(x)$, imponemos que la solución buscada sea de la forma $y = \frac{k(x)}{\cos(x)}$, siendo $k(x)$ una función de x. Como tiene que cumplir la ecuación diferencial completa, se tiene que

$$y' - y\ \mathrm{tg}(x) = \cos(x)$$

$$\left(\frac{k(x)}{\cos(x)}\right)' - \frac{k(x)}{\cos(x)}\ \mathrm{tg}(x) = \cos(x)$$

$$\frac{k'(x)\cos(x) - k(x)(-\mathrm{sen}(x))}{\cos^2(x)} - \frac{k(x)}{\cos(x)}\ \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = \cos(x)$$

$$\frac{k'(x)}{\cos(x)} = \cos(x)$$

$$k'(x) = \cos^2(x)$$

$$k(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Por tanto la solución general de la ecuación es

$$y = \frac{k(x)}{\cos(x)} = \frac{x}{2\cos(x)} + \frac{\sin(2x)}{4\cos(x)} + \frac{C}{\cos(x)}.$$

□

Ejemplo: Resuelve la ecuación:

$$y' + 2xy = 4x$$

1.6. Ecuaciones de Bernoulli

Una EDO de tipo Bernoulli se puede expresar en forma normal así:

$$y' = p(x)y + q(x)y^n$$

siendo $n \neq 0, 1$ porque en estos dos casos la EDO sería lineal. En forma diferencial quedaría así:

$$dy = (p(x)y + q(x)y^n)\ dx$$

Si dividimos toda la ecuación por y^n y aplicamos el cambio de variable

$$u = \frac{1}{y^{n-1}}$$

la ecuación de Bernoulli se transformará en lineal[2]:

$$\frac{dy}{y^n} = \left(p(x)\frac{1}{y^{n-1}} + q(x)\right) dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{1-n} = (p(x)u + q(x))\, dx$$

es decir

$$\frac{u'}{1-n} = p(x)u + q(x)$$

que es la ecuación lineal $u' = (1-n)p(x)u + (1-n)q(x)$.

Ejemplo: Resuelve la ecuación:

$$y' + xy = x^3y^3.$$

[2]Aplicando el cambio anterior se obtiene que $\frac{dy}{y^n} = \frac{du}{1-n}$

Parte II

Bloque II: Estadística

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Capítulo 2

Introducción a la Estadística. Estadística descriptiva.

2.1. Definición de Estadística

No hay una definición internacionalmente aceptada. La definición más extendida es: *Es la ciencia cuya finalidad es el estudio del conjunto de procedimientos destinados a recoger, clasificar, representar y resumir datos (Estadística Descriptiva), así como los conducentes a la obtención de inferencias científicas y extrapolación de resultados a partir de esos datos (Estadística Inferencial)*.

La Estadística estudia los resultados de experimentos aleatorios, es decir, aquellos experimentos en los que repetidos en las mismas condiciones iniciales pueden dar lugar a resultados distintos. No se ocupa de experimentos determinísticos.

Ejemplos de experimentos aleatorios:

- Estudio de los factores de riesgo para la plaga de la "seca" de las encinas.
- Estudio de la eficacia de un fertilizante.
- Estudio de alturas de plantas de trigo.

Los experimentos aleatorios tienen aplicaciones en agricultura, ganadería, física, ingeniería, negocios, ciencias biológicas y de la salud, ciencias sociales, etc.

2.2. Población y muestra.

Individuo es el elemento o unidad objeto de estudio en el experimento aleatorio.

Población es el conjunto de individuos sobre el que nos interesa obtener conclusiones. La población tiene que estar perfectamente delimitada. Normalmente es demasiado grande para estudiar a todos sus individuos. Por ello se trabaja con un grupo menor de individuos extraídos de la población y que se llamará muestra.

Ejemplos:

- Población: encinas afectadas por la enfermedad conocida como "la seca".
- Población: manzanas recolectadas en una explotación.

Muestra es un subconjunto de la población al que se tiene acceso y sobre el que realmente se hacen las observaciones (mediciones). Está formada por individuos de la población objeto de estudio y debe ser representativa de la población.

Se llama Tamaño muestral al número de individuos de la muestra.

Para elegir la muestra se usan técnica de elección que se denominan muestreo. El muestreo puede ser:

- Muestreo probabilístico: se conoce a priori cual es la probabilidad de que una determinada muestra salga elegida. Ejemplos: aleatorio simple, estratificado (grupos homogéneos), sistemático, por conglomerados (grupos heterogéneos).
- Muestreo no probabilístico: a priori, la probabilidad de elección de cada muestra posible no es conocida. Ejemplos: la persona que muestrea elige a los individuos según su gusto.

2.3. Estadística descriptiva e inferencial

Estadística descriptiva: se encarga de la recogida, clasificación, representación gráfica y resumen de los de los datos referentes a un fenómeno que presenta variabilidad o incertidumbre para su estudio metódico.

Ejemplo: se quiere estudiar la producción de arroz por hectárea en Extremadura. Se elige una muestra de 30 parcelas y se calcula la media de producción por hectárea.

Estadística inferencial: se encarga de extrapolar (hacer inferencias de) los resultados de la muestra a toda la población para hacer previsiones sobre los mismos, tomar decisiones u obtener conclusiones. Para poder aplicar la estadística inferencial es necesario la teoría de probabilidad.

Ejemplo: se quiere estudiar la producción de arroz por hectárea en Extremadura. Se elige una muestra de 30 parcelas y se desea contrastar si es razonable aceptar que la media de producción por hectárea de los cultivos de Extremadura es similar o no a la media del resto de España.

2.4. Etapas en un estudio estadístico

Ejemplo: Se quiere determinar si la edad de las encinas de la provincia de Badajoz es aproximadamente 100 años.

Etapa 1: Planteamiento del problema. ¿Qué objetivos perseguimos? ¿Cuál es la población? ¿Qué parámetros son de interés?

Ejemplo: La población sería el conjunto de encinas de la provincia de Badajoz; el objetivo sería estimar la edad de esa población y contrastar si es aceptable o no afirmar que la edad es 100 años; el parámetro de interés podría ser la edad media de la población.

Etapa 2: Elección del modelo estadístico que se ajuste a nuestros objetivos.

Ejemplo: Podemos suponer que las edades de las encinas de la provincia de Badajoz se distribuyen de forma simétrica respecto de la media y que la distribución de edades es gaussiana o normal; o por el contrario suponer que hay muchas encinas viejas y muy pocas jóvenes.

Etapa 3: Recogida de la información muestral. Debemos establecer el tipo de muestreo (muestreo aleatoria simple, estratificado, etc.), el tamaño de la muestra (¿100? ¿300?) y el método de recogida de datos.

Etapa 3: Aplicación de técnicas estadísticas: análisis descriptivos, estimación de parámetros, contrastes de hipótesis.

Ejemplo: Representaríamos gráficamente los datos de la muestra, calcularíamos algunos valores representativos como la media, contrastaríamos la hipótesis de trabajo ”la edad de las encinas de la provincia de Badajoz es 100 años”, etc.

Etapa 5: Diagnosis del modelo para saber si el modelo aplicado es correcto para el problema planteado.

Ejemplo: Tras la toma de datos de las edades de las encinas y una vez visto el análisis de los mismos, quizás hubiera que replantearse alguna de las suposiciones que se hicieron en la etapa 2.

Etapa 6: Interpretación de los resultados: previsiones y decisiones o revisión del modelo.

Ejemplo: Una vez aceptado el método de trabajo y contrastada la hipótesis de trabajo "la edad de las encinas de la provincia de Badajoz es 100 años", tomaríamos una decisión sobre si aceptar esa hipótesis como cierta, rechazarla como falsa o decidir rehacer el estudio porque no es concluyente. Si fuera aceptada, podríamos, por ejemplo, proponer regenerar la dehesa por considerar que esta vieja.

Un esquema de las etapas de un estudio estadístico aparece en la figura 2.1.

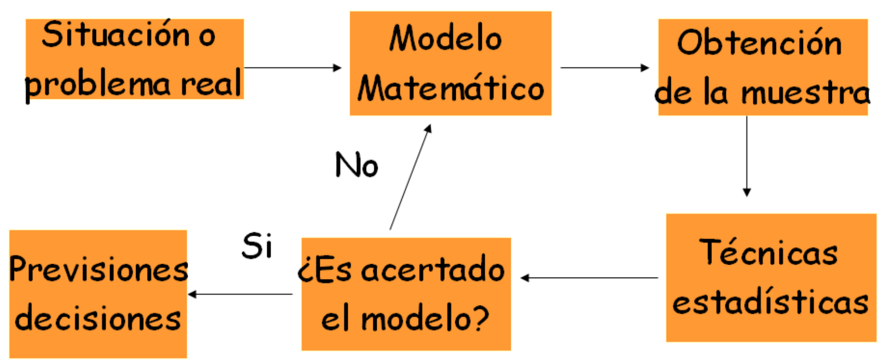


Figura 2.1: Etapas de un estudio estadístico

2.5. Distribuciones unidimensionales de frecuencias

El fenómeno o característica de la población sometido a estudio se denomina variable.

Ejemplos de variables: edad, peso, altura, especies de cereales, producción por hectárea, tipos de suelos, etapas de una enfermedad, etc.

Las variables pueden ser cualitativas (con valores no numéricos como razas, procedencias, etc.) y variables cuantitativas (de naturaleza numérica).

Ejemplos:

- Variables cualitativas: especie de cereales, tipo de suelo, etapas de una enfermedad.

- Variables cuantitativas: edad, peso, altura, producción por hectárea.

Las variables cualitativas se dividen en variables nominales (no existe orden entre las categorías) y ordinales (existe orden entre las categorías).

Las variables cuantitativas se dividen en variables discretas (toman valores en una clase fija de distintos valores) y continuas (pueden tomar cualquier valor en un rango continuo)

Ejemplos:

- Variable cualitativa nominal: especies de cereales arroz, maíz, trigo, avena, sorgo, cebada, centeno, mijo
- Variable cualitativa ordinal: etapa de una enfermedad primera etapa, segunda etapa, tercera etapa
- Variable cuantitativa discreta: edad en años de un árbol 0,1,2,3,...
- Variable cuantitativa continua: Altura de una planta 1.62,1.74,1.54,...

Se llama:

- Frecuencia: número total de datos

- Frecuencia absoluta de un valor (n_i): número de veces que aparece el valor.
- Frecuencia relativa de un valor (f_i): número de veces que aparece el valor dividido por el número total de datos.
- Frecuencia absoluta acumulada de un valor (N_i): es la suma de la frecuencia absoluta del valor y de todas las frecuencias absolutas de cualquier valor previo.
- Frecuencia relativa acumulada de un valor (F_i): es la suma de la frecuencia relativa del valor y de todas las frecuencias relativas de cualquier valor previo.
- Distribución de frecuencias es el conjunto de valores o modalidades de la variable (categorías, valores numéricos o clases) junto con las frecuencias correspondientes a cada una de ellas.

Ejemplo: Los ingresos anuales de 20 familias en miles de euros son:
$18, 20, 22, 19, 18, 20, 18, 19, 21, 20, 20, 21, 18, 20, 21, 19, 20, 21, 18, 20$
Su distribución de frecuencias es:

x_i	Ingresos	Absoluta n_i	Abs.Acumulada N_i	Relativa f_i	Rel. Acumulada F_i
X_1	18	5	5	0.25	0.25
X_2	19	3	8	0.15	0.40
X_3	20	7	15	0.35	0.75
X_4	21	4	19	0.20	0.95
X_5	22	1	20	0.05	1
		$N = 20$		1	

Si los valores no se repiten un número suficiente de veces, es decir, hay muchos valores distintos, se puede construir la distribución de frecuencias agrupando los valores en intervalos o clases.

Ejemplo: Longitud en centímetros de 60 cilindros de motor:

$$239, 254, 255, 248, 246, 249, 242, 250, 249, 244, 253, 248, 250, 258, 252,$$
$$251, 250, 253, 247, 243, 245, 251, 247, 250, 248, 250, 259, 249, 249, 250,$$
$$251, 253, 241, 251, 249, 252, 250, 247, 251, 259, 250, 246, 252, 238, 251,$$
$$238, 236, 260, 249, 257, 249, 247, 251, 246, 245, 243, 250, 249, 242, 238.$$

Su distribución de frecuencias podría ser:

Intervalos	**Marca de clase c_i**	**Frecuencias absolutas**		**Frecuencias relativas**	
		n_i	N_i	f_i	F_i
235.5, 240.5	238	5	5	0.08	0.08
240.5, 245.5	243	8	13	0.13	0.22
245.5, 250.5	248	27	40	0.45	0.67
250.5, 255.5	253	15	55	0.25	0.92
255.5, 260.5	258	5	60	0.08	1
Total		60		1	

Ejemplo: Causas de muerte en árboles de una explotación: r (falta de riego), e (enfermedad), p (pedrisco), o (otras).

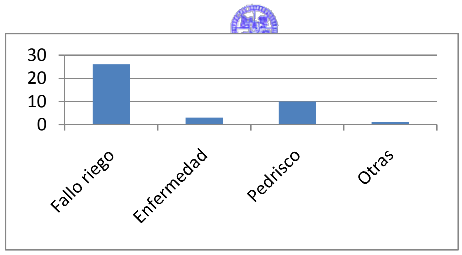
r, p, r, r, o, r, p, r, p, p, p, r, r, e, r, p, e, r, r, p, r, r, r, e, r, r, p, r, r, p, r, p, r, r, r, r, r, r, r, r.

Causas	ni	fi	Ni	Fi
Fallo Riego (r)	26	26/40=0.650	26	26/40=0.650
Enfermedad (e)	3	3/40=0.075	29	29/40=0.725
Pedrisco (p)	10	10/40=0.25	39	39/40=0.975
Otras (o)	1	1/40=0.025	40	1
Total	40	1		

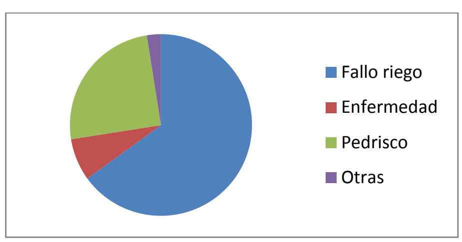
2.6. Representación gráfica.

Para variables cualitativas:

- Diagrama de rectángulos:



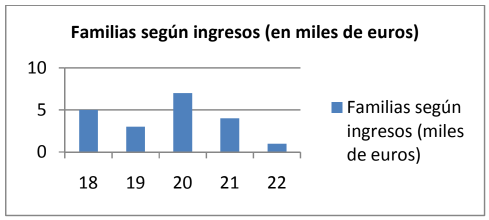
- Diagrama de sectores



- Pictogramas.

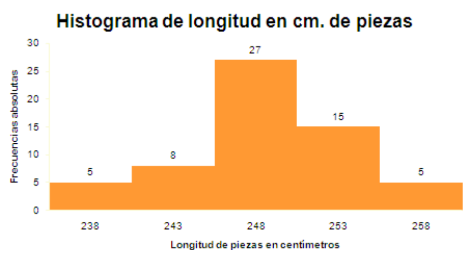
Para variables cuantitativas discretas:

- Diagramas de barras o de frecuencias (acumuladas o no):

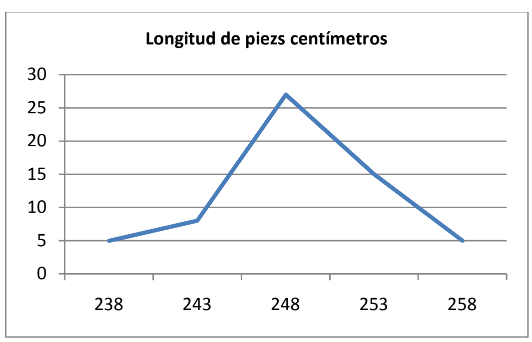


Para variables cuantitativas continuas:

- Histogramas.



- Polígonos de frecuencias



2.7. Estadísticos descriptivos

Los estadísticos descriptivos son valores numéricos que intentan resumir las características de unos datos y que se calculan a partir estos. Pueden ser:

2.7.1. Estadísticos de posición.

Centrales

Media. Solo para variables numéricas. Es la media aritmética de los datos y representa el centro de gravedad de los datos. Es sensible a cambios en la magnitud de cualquier dato.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{n}$$

Ejemplo: La media de ingresos en el ejemplo de las familias es 19.65 miles de euros.

Si los datos están agrupados en intervalos y solo tenemos la tabla de frecuencias la media se calculará usando las marcas de clase y la frecuencia de cada clase.

Ejemplo: En el caso de las piezas de motor, si solo disponemos de la tabla de frecuencias, usando las marcas de clase la media sería 248.58.

Mediana. Solo para variables cuantitativas. Es el valor que, tras ordenar los datos de menor a mayor, divide a estos datos en dos grupos con el mismo número de datos cada uno. Utiliza el orden de los datos y no la magnitud. No es sensible a cambios importantes en el valor de algún dato.

Ejemplo: Mediana de 1,2,2,2,4,5,6,6,6,8,9 es 5.

Mediana de 1,3,3,3,4,5,6,6,8,10,10,10 es (5+6)/2=5.5

La mediana de los datos de ingresos por familia es 20.

Si los datos estuvieran agrupados en clases y solo tenemos la tabla de frecuencias, usaremos las frecuencias de las clases para localizar el intervalo que contiene a la mediana. Podemos elegir como mediana la marca de clase del intervalo que la contenga, aunque hay métodos de interpolación más sofisticados.

Ejemplo: En el caso de las piezas de motor, si solo disponemos de la tabla de frecuencias, dado que la mitad de los datos es 30, la mediana estaría en el intervalo (240.5, 250.5), que es el primer intervalo que tiene una frecuencia acumulada de más de 30 datos.

Moda. Tanto para variables cualitativas como cuantitativas. Es el valor de la variable al que le corresponde mayor frecuencia. Puede haber más de una.

Ejemplo: La moda de los datos de ingresos por familia es 20.

Si los datos están agrupados y solo tenemos la tabla de frecuencias, localizaremos el intervalo modal, que es el que tiene mayor número de datos en proporción a su amplitud (número de datos del intervalo/amplitud del intervalo).

Ejemplo: En el caso de las piezas de motor, si solo disponemos de la tabla de frecuencias, la mediana y la moda estarían en el intervalo (240.5, 250.5).

No centrales

Solo para variables cuantitativas.

Cuantiles Son valores posibles de la variable que superan un cierto porcentaje del total de datos, tras ser ordenados estos datos en orden creciente. Por ejemplo:

- Percentiles. El percentil de orden 5 es el valor numérico tal que menor que él solo están el 5 % de los valores de los datos. El percentil de orden 30 es el valor numérico tal que menor que él solo están el 30 % de los valores de los datos. Hay 99 percentiles.

- Deciles. El primer decil es el percentil de orden 10 y, por tanto, es el valor numérico tal que menor que él solo están el 10 % de los valores de los datos. El tercer decil es igual que el percentil 30. Hay 9 deciles.

- Cuartiles. El primer cuartil es el percentil de orden 25 y, por tanto, es el valor numérico tal que menor que él solo están el 25 % de los valores de los datos. El segundo cuartil es la mediana, el quinto decil o el percentil 50. Hay 3 cuartiles.

  Para el cálculo de cuantiles hay que fijarse en la frecuencia acumulada de los valores. Ejemplo de cálculo de cuartiles a partir de una tabla de frecuencias:

x_i	n_i	N_i
0	14	14
1	10	24
2	15	39
3	26	65
4	20	85
5	15	100
$n = 100$		

primer cuartil = número de datos $*$ 25 % = 25;
$N_{i-1} = 24 < 25 < N_i = 39;$ luego $Q_1 = 2$

segundo cuartil = número de datos $*$ 50 % = 50;
$N_{i-1} = 39 < 50 < N_i = 65;$ luego $Q_2 = 3$

tercer cuartil = número de datos $*$ 75 % = 75;
$N_{i-1} = 65 < 75 < N_i = 85;$ luego $Q_3 = 4$

En esta otra tabla:

x_i	n_i	N_i
0	14	14
1	11	25
2	14	39
3	36	75
4	10	85
5	15	100
$n = 100$		

primer cuartil = número de datos $*$ 25 % = 25;
$N_{i-1} = 25 < N_i = 39;$ luego $Q_1 = 1{,}5$

segundo cuartil = número de datos $*$ 50 % = 50;
$N_{i-1} = 39 < 50 < N_i = 65;$ luego $Q_2 = 3$

tercer cuartil = número de datos $*$ 75 % = 75;
$N_{i-1} = 75 < N_i = 85;$ luego $Q_3 = 3{,}5$

2.7.2. Estadísticos de dispersión

Rango, recorrido o amplitud es la diferencia entre el valor mínimo y máximo de los datos de la variable. Es sensible a observaciones extremas.

Rango o recorrido intercuartílico es la diferencia entre el primer y tercer cuartil. Es poco sensible a observaciones extremas.

Varianza es la media de las diferencias cuadráticas de las observaciones con respecto a su media aritmética. Siempre es una cantidad positiva. Su unidad es el cuadrado de las unidades de la variable. Es sensible a valores extremos. Se puede calcular de cualquiera de estas dos formas:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \qquad\qquad s^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right) - (\bar{x})^2$$

La raíz cuadrada s de la varianza se llama desviación típica.

Cuasivarianza es simlar a la varianza y sus valores son casi iguales cuando n es grande. Es muy útil en inferencia estadística.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2$$

La raíz cuadrada de la cuasivarianza es la **cuasidesviación típica** S.

Ejemplo: La media de $3, 3, 4, 4, 5$ (datos medidos en metros), es 3,8 metros. La varianza, la cuasivarianza, la desviación típica y la cuasidesviación típica son:

$$s^2 = 0{,}56 \text{ m}^2 \quad S^2 = 0{,}7 \text{ m}^2 \quad s = 0{,}7483 \text{ m} \quad S = 0{,}8366 \text{ m}.$$

Coeficiente de variación de Pearson: Es la razón entre la desviación típica y la media (multiplicado por 100). Mide el tamaño que tiene la desviación típica con respecto a la media. Si la media es 80 y la desviación típica 20 entonces $CV = 20/80 \times 100 = 25\,\%$ (variabilidad relativa). También sirve para comparar la variabilidad de diferentes variables. Si el peso tiene $CV = 30\,\%$ y la altura tiene $CV = 10\,\%$, los individuos presentan más dispersión en peso que en altura.

2.7.3. Estadísticos de forma.

Simetría

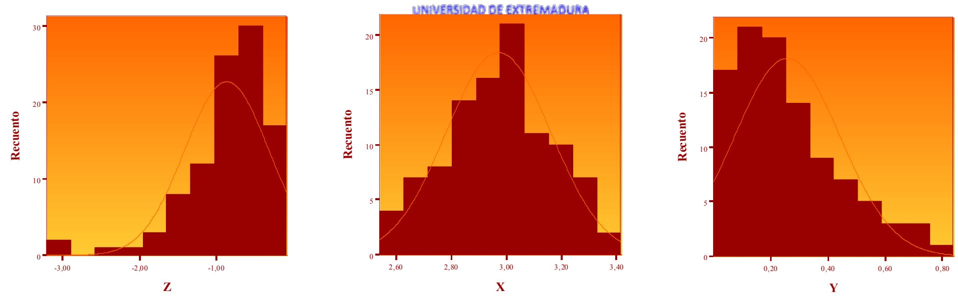


Figura 2.2: Histogramas de datos con simetría negativa, simétricos y con simetría positiva

Una distribución de datos es simétrica si dividiendo por la mediana, las dos mitades del gráfico son iguales. La simetría exacta es poco probable, por tanto, se habla de simetría cuando existe simetría aproximada. La asimetría será:

- **Asimetría positiva**: si las frecuencias más altas se encuentran en el lado izquierdo de la mediana, mientras que en el lado derecho hay frecuencias más pequeñas (cola a la derecha).
- **Asimetría negativa**: cuando la cola está en el lado izquierdo.

Coeficiente de asimetría de Pearson:

$$A_P = \frac{\bar{x} - \text{Mediana}}{s}$$

Si es muy negativo, los datos presentan asimetría negativa, con cola a la izquierda; si es 0 o casi 0, los datos son aproximadamente simétricos; si es muy positivo, los datos presentan asimetría positiva, con cola a la derecha. Hay otros coeficientes de asimetría, como el **coeficiente de Fisher**, con la misma interpretación que el anterior:

$$A_F = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^3}{nS^3}$$

Curtosis o apuntamiento

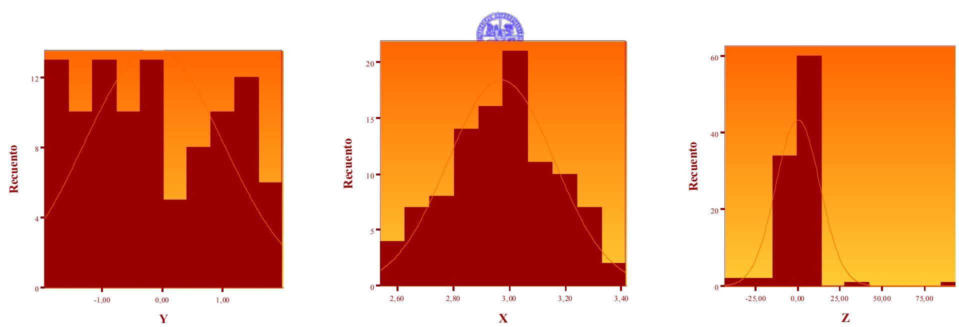


Figura 2.3: Histogramas de datos con platicurtosis, mesocurtosis y leptocurtosis

El coeficiente de **curtosis** indica el grado de apuntamiento o aplastamiento) de una distribución con respecto a la distribución normal o gaussiana, que es una distribución de referencia en Estadística porque a ella se ajustan muchos datos extraídos de fenómenos de la naturaleza. Una forma de comparar la curtosis de unos datos es hacer el cálculo

$$A_4 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^4}{nS^4} - 3$$

Si sale muy positivo, los datos están más apuntados que la normal (leptocurtosis); si sale 0 o casi 0, los datos están aproximadamente igual de apuntados que los de una distribución normal (mesocurtosis); si sale muy negativo, los datos están más aplastados que los de una distribución normal (platicurtosis). Hay otros coeficientes para medir la curtosis, con la misma interpretación.

2.8. Distribuciones bidimensionales. Regresión y correlación.

Cuando a individuos de una misma muestra les medimos dos variables, obtenemos una **distribución bidimensional**. En este caso, nuestra distribución de frecuencias será una tabla de doble entrada, como por ejemplo, datos con tamaños de empresas y tipo de actividad comercial:

		Actividad exterior		
		No exportadora	Exportadora	
Tamaño	Pequeña	15	23	38
	Mediana	10	38	48
	Grande	2	46	48
		27	107	134

O bien, los datos de número de hijos e hijas de distintas familias:

		Número	de	hijas	(Y)	
		0	1	2	3	
	0	10	15	15	3	43
	1	10	12	7	2	31
Número de hijos (X)	2	8	4	3	1	16
	3	3	2	1	0	6
	4	2	1	1	0	4
		33	34	27	6	100

Las **distribuciones marginales** son los valores de cada variable de forma independiente, con sus frecuencias por separado. En el caso del número de hijos/hijas por familia, la distribución marginal de la variable número de hijos es

Número de hijos (X)	0	43
	1	31
	2	16
	3	6
	4	4
		100

La distribución de una variable se puede condicionar a un determinado valor de la otra variable (**distribución condicionada**). Por ejemplo, en el caso anterior, podemos extraer los datos del número de hijos de familias que tienen 2 hijas:

$X \mid Y = 2$	n_i
0	15
1	7
2	3
3	1
4	1
	27

Si las dos variables son numéricas podemos plantearnos estudiar si es posible establecer una relación entre ambas, es decir, si son dependientes la una de la otra. Para ello, el primer paso es dibujar una gráfica que represente la **nube de puntos** o **diagrama de dispersión** de los datos.

Ejemplo: Los siguientes son datos de longitud y anchura de 10 bellotas en milímetros:

anchura	longitud
17,5	39,3
17,15	41,35
16,95	42,1
17,4	43,55
16,35	38,9
17	40,2
18,5	45,35
15,9	39,85
16,65	39,6
16,65	40,6

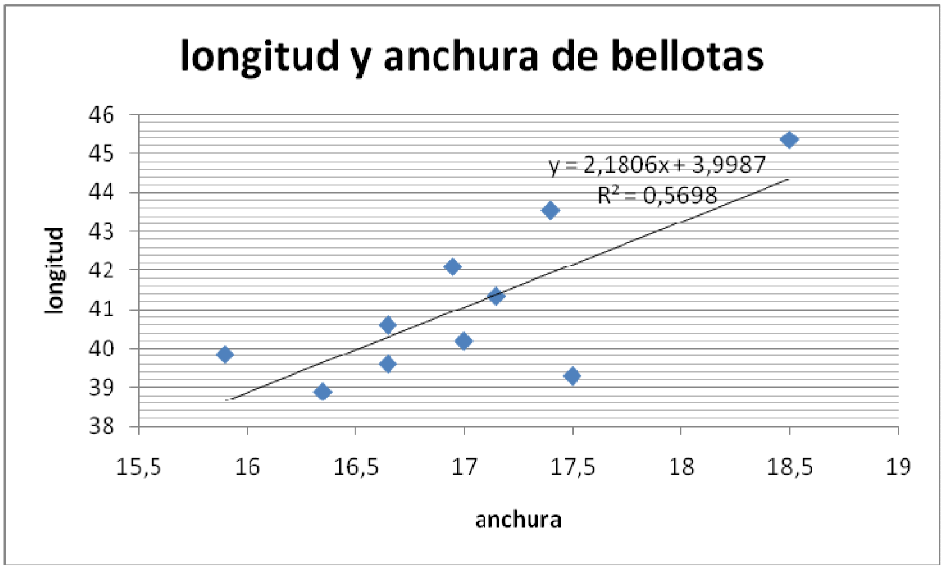


Figura 2.4: Nube de puntos y recta de regresión

La relación entre las dos variables debe ser estadística, no funcional (una relación funcional es la que hay entre una variable que mide altura en centímetros y otra que mide la altura en metros). La relación estadística más sencilla entre dos variables numéricas es la lineal, del tipo:

$$y = \beta x + \alpha + e$$

donde β y α son dos números reales. En el ejemplo de la figura 2.4, x sería la anchura e y sería la longitud. De ser acertada la relación lineal anterior entre x e y, significará que para una bellota que tuviese una anchura x_i se espera una longitud $\beta x_i + \alpha$, más una cantidad aleatoria e (que deberá ser pequeña si la relación es verdaderamente lineal) que llamaremos error (puede ser positivo o negativo). Puede haber otros tipos de relación entre x e y: cuadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, etc. Incluso puede ocurrir que no haya una dependencia entre x e y, con lo que no tendría sentido intentar encontrar la función que las relacione.

La covarianza es una herramienta para intuir si dos variables numéricas están o no relacionadas:

$$Cov(x,y) = s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

$$Cov(x,y) = s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Si $Cov(x,y) > 0$, a medida que x aumenta y aumenta.
Si $Cov(x,y) < 0$, a medida que x aumenta y disminuye.
Si $Cov(x,y) = 0$ (o casi 0), si x aumenta y puede aumentar o disminuir (el crecimiento de x y de y no están relacionados).

Dos variables que sean independientes tendrán covarianza casi 0. Sin embargo, puede ocurrir que tengan covarianza 0 pero que sean dependientes (figura 2.5). Por ejemplo, eso es lo que ocurre si la relación es $y = x^2 + e$. De existir una

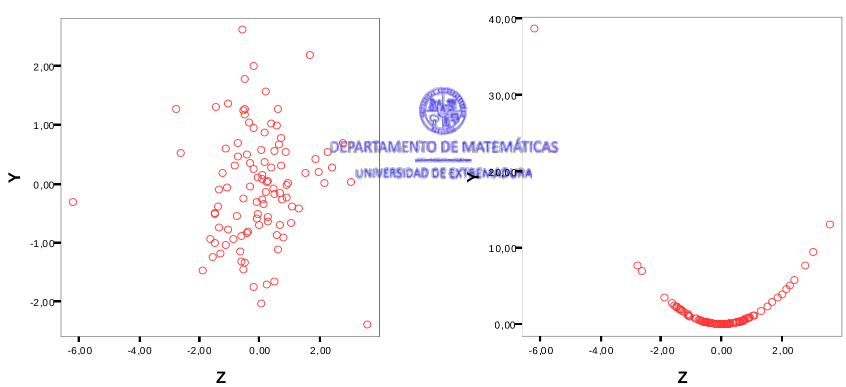


Figura 2.5: Datos con covarianza próxima a 0

verdadera relación estadística lineal entre x e y, la ecuación $y = \beta x + \alpha$ de la "mejor recta"que explica esta relación será la de la **recta de mínimos cuadrados**. Los coeficientes de la recta de mínimos cuadrados se calculan así:

$$\hat{\beta} = \frac{Cov(x,y)}{s_x^2} \qquad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}.$$

Elegido un individuo i cualquiera, si llamamos

y_i al valor verdadero de la variable y en el individuo número i

x_i la valor verdadero de la variable x en el individuo número i

entonces $\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i + \hat{\alpha}$ será el valor previsto para el individuo usando la recta de mínimos cuadrados.

De todas las rectas posibles, la recta de mínimos cuadrados es la que hace mínima la suma de los cuadrados de las diferencias $y_i - \hat{y}_i$. En este sentido es la "mejor recta posible"para explicar la relación entre x e y. Es decir, *la recta de mínimos cuadrados es la que hace mínima la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores verdaderos y los valores que les adjudica la recta.*

Ejemplo: En el caso de las bellotas, la recta de mínimos cuadrados es

$$y = 2{,}180x + 3{,}998$$

El coeficiente de **correlación lineal de Pearson** mide el grado de dependencia lineal entre dos variables:

$$r = \frac{Cov(x, y)}{s_x s_y}.$$

Su signo es el mismo que el de la covarianza y su valor siempre está en el intervalo $[-1, 1]$. La relación entre x e y es perfecta cuando $r = +1$ o $r = -1$, aunque en ese caso no sería una relación estadística. Si r se acerca a -1 o a $+1$, la dependencia lineal es fuerte y, por tanto, se puede usar la recta de regresión para hacer predicciones de valores de y. Si r se acerca a 0 la dependencia lineal es débil y, por tanto, no deben hacerse predicciones a partir de la recta de mínimos cuadrados.

El **coeficiente de determinación** R^2 es el cuadrado de r. Su valor está entre 0 y 1. Si es cercano a 1, habrá un buen ajuste lineal entre x e y. Si es cercano a 0, el ajuste lineal no será bueno.

Ejemplo: En el ejemplo de las bellotas $R^2 = 0{,}569$ y $r = 0{,}754$.

Capítulo 3

Variables aleatorias. Modelos de probabilidad

3.1. Variables aleatorias unidimensionales

En el tema anterior se nombraron los fenómenos aleatorios (aquellos sucesos en cuyos resultados interviene el azar). Se puede asignar una probabilidad (medida de la certidumbre) a los posibles resultados de un fenómeno aleatorio. Esa probabilidad será un número entre 0 y 1, que nos permitirá afirmar, por ejemplo, que "la probabilidad de obtener una cara al lanzar una moneda es 0.5 o el 50 %". La asignación de probabilidades a los distintos resultados se puede hacer desde criterios diferentes: por conocimientos o experiencias previos (si ya he lanzado la moneda 1000000 de veces puedo intuir cual es la probabilidad de cada resultado), por deducciones lógicas (si observo que la moneda es simétrica puedo deducir que la probabilidad de que salga cara es la mitad), etc.

Se llama suceso elemental a cada posible resultado del fenómeno aleatorio que no se puede descomponer en otros más sencillos. El conjunto de sucesos elementales de un fenómeno aleatorio se llama espacio muestral.

Ejemplo: En el lanzamiento de una moneda, el espacio muestral es

$$\Omega = \{\text{cara}(c), \text{cruz}(r)\}$$

Si lanzamos la moneda tres veces el espacio muestral será:

$$\Omega = \{ccc, ccr, crc, rcc, crr, rcr, rrc, rrr\}$$

Ejemplo: En la observación del fenómeno consistente en sembrar tres plantas y ver si germinan (g) o no germinan (n), el espacio muestral será:

$$\Omega = \{ggg, ggn, gng, ngg, gnn, ngn, nng, nnn\}$$

En la práctica, el estudio de un determinado fenómeno aleatorio no suele consistir en la descripción exhaustiva de todos los resultados posibles, sino en el analizar uno o varios caracteres cuantitativos considerados.

Ejemplo: En el lanzamiento de una moneda 3 veces nos puede interesar

$$X = \text{número de caras que salen}$$

Ejemplo: En la siembra de tres plantas nos puede interesar

$$X = \text{número de plantas que germinan.}$$

La observación de cualquier carácter numérico X como posible resultado de un fenómeno aleatorio se denomina variable aleatoria.

Ejemplos de variables aleatorias:

1. Lanzar una moneda y ver el número de caras que salen.
2. Número de plantas que germinan de tres que se siembran.
3. Medida en centímetros de una pieza de motor fabricada por una empresa.
4. Número de piezas defectuosas en un envío de total de 100 piezas.
5. Número de quejas recibidas en una cooperativa por parte de los cooperativistas.
6. Altura de un frutal de una explotación.
7. Altura de 1 alumno de una clase.
8. Media de las alturas de 3 alumnos de una clase.
9. Número de hermanos de un alumno.
10. Media del número de hermanos de 3 alumnos de una clase.

Las variables aleatorias pueden ser discretas (si solo pueden tomar valores que no abarquen todo un intervalo) o continuas (si pueden tomar todos los valores de un intervalo).

3.2. Distribución de probabilidad

Si nuestro estudio se centró en una determinada característica numérica (variable aleatoria) lo que nos importará será saber los valores que puede tomar la variable y con qué probabilidad toma cada uno de esos valores. La información anterior se denomina distribución de probabilidad de la variable aleatoria, y se presentará de forma diferente según la variable sea discreta o continua. La distribución de probabilidad es el modelo matemático que se asigna al carácter en estudio.

3.2.1. Distribución de probabilidad en el caso discreto

Una distribución de probabilidad en el caso discreto es el conjunto de todos los valores posibles de la variable junto con las probabilidades asociadas.

Ejemplo: Lanzamos una moneda y estudiamos la variable

$$X = \text{número de caras.}$$

¿Cuál sería su distribución de probabilidad?

Si suponemos que la moneda no está trucada, podemos asignarle la siguiente distribución:

X	Probabilidad
0	0.5
1	0.5

Si sospechamos que la moneda está trucada, podemos lanzar la moneda muchas veces y estudiar la distribución de frecuencias. Supongamos que la distribución de frecuencias tras muchos lanzamientos es

X	Frecuencia relativa
0	0.25
1	0.75

Podemos asignarle la distribución de probabilidad:

X	Probabilidad
0	0.25
1	0.75

En este último sentido, la distribución de probabilidad se puede considerar como la extensión la distribución de frecuencias de unos datos cuando se consideran todos los posibles resultados y se asignan probabilidades como límites de frecuencias relativas.

En todo caso, cualquier distribución de probabilidad de una variable discreta del tipo

X	Probabilidad
x_1	p_1
x_2	p_2
$\dots$	
x_k	p_k

tiene que cumplir que $p_i \geq 0$ para todo i y además $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

La representación gráfica de la distribución de frecuencias se puede hacer en un diagrama de barras.

Ejemplo:

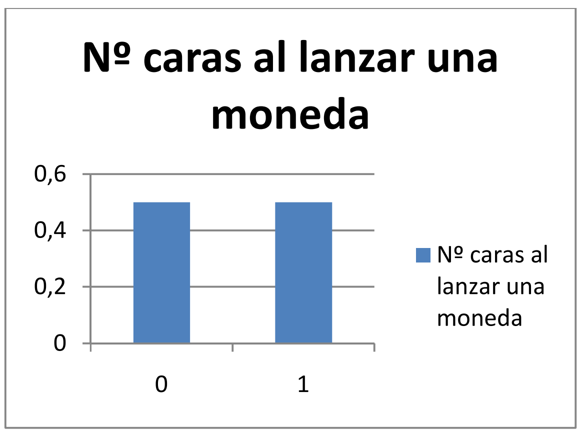


Figura 3.1: Diagrama de barras

Ejemplo: Si lanzamos una moneda tres veces y observamos el número de caras, la distribución de probabilidad será:

a) Si la moneda no está trucada, la probabilidad de que al lanzarla una vez salga cara será p=0.5. Como la lanzamos tres veces

$$P[x=0] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} 0{,}5^0 0{,}5^3 = 1/8 \quad P[x=1] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} 0{,}5^1 0{,}5^2 = 3/8$$
$$P[x=2] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} 0{,}5^2 0{,}5^1 = 3/8 \quad P[x=3] = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} 0{,}5^3 0{,}5^0 = 1/8$$

Su diagrama de barras será el siguiente:

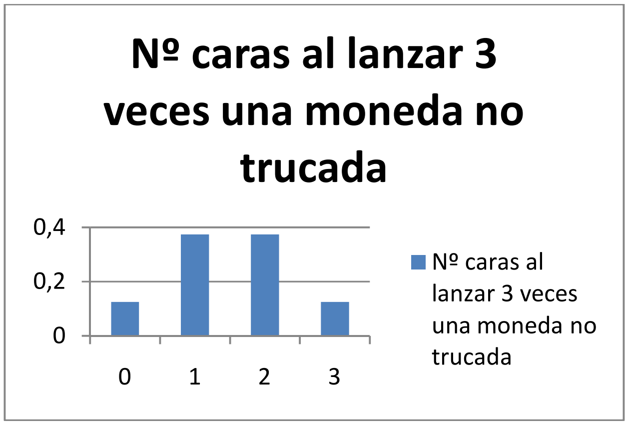


Figura 3.2: Diagrama de barras

b) Si la moneda está trucada, la probabilidad de que al lanzarla una vez salga cara será p. Como la lanzamos tres veces

$$p[X = x] = \binom{3}{x} p^x (1-p)^{3-x}$$

La **función de masa o de probabilidad** es la que nos proporciona la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria discreta.

Ejemplo: La función de masa o probabilidad de contar el número de caras en el lanzamiento de una moneda tres veces es

$$p[X = x] = \binom{3}{x} p^x (1-p)^{3-x}$$

La **función de distribución** es la que adjudica a cada valor de la variable la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual al valor dado:

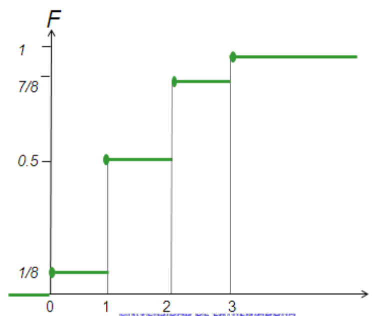
$$F(x) = p[X \leq x]$$

Ejemplo: En el número de caras al lanzar tres veces una moneda no trucada la función de distribución en los punto $0, 1, 2,$ y 3 es:

$$
\begin{aligned}
F(0) &= p(X \leq 0) = 1/8 \\
F(1) &= p(X \leq 1) = 1/8 + 3/8 = 1/2 \\
F(2) &= p(X \leq 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8 \\
F(3) &= p(X \leq 3) = 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1
\end{aligned}
$$

y en el total de los puntos:

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}
$$



3.2.2. Distribución de probabilidad en el caso continuo

A diferencia del caso discreto, en el caso continuo hay un conjunto infinito no numerable de valores posibles para la variable, por ello no tiene sentido asignar probabilidades a cada uno de los valores ($p[X = 16{,}305] = 0$) sino a los intervalos que se pueden formar ($p[X < 16{,}305]$, $p[16{,}301 < X?17{,}019]$).

Una distribución de probabilidad en el caso continuo será el conjunto de probabilidades asociadas a los intervalos de la variable aleatoria continua. En la práctica no se puede expresar todas las probabilidades de forma explícita porque existen infinitos intervalos posibles. Por ello se trabaja con la **función de densidad o función de masa**. Una función de densidad $f(x)$ de una variable aleatoria X debe cumplir las dos siguientes condiciones:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad f(x) \geq 0
$$

La función de densidad de una variable aleatoria continua se usa para calcular las probabilidades de que la variable tome los valores de un intervalo:

$$p(a < X < b) = p(a \leq X < b) = p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$p(-\infty < X < b) = p(\infty \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)\ dx$$

$$p(a < X < \infty) = p(a \leq X < \infty) = p(a \leq X \leq \infty) = \int_a^\infty f(x)\ dx$$

La función de densidad se puede entender como el límite del histograma de la variable cuando tiende a infinito el número de datos y tiende a 0 la amplitud de los intervalos usados para agrupar los datos.

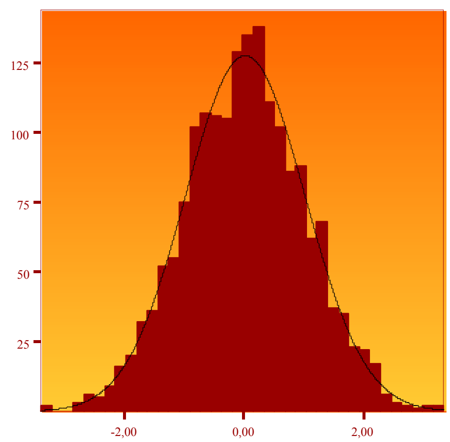


Figura 3.3: La función de densidad como límite de histogramas

Ejemplo: Sea X=”*longitud de la hoja de una planta en cm.*”, que tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

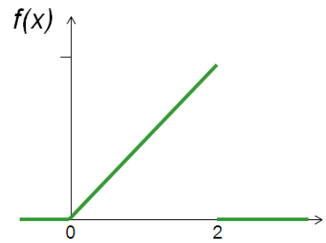


Figura 3.4: Función de densidad de la longitud de una hoja

f(x) es función de densidad porque cumple las dos condiciones requeridas. Para calcular, por ejemplo, la probabilidad de que la variable X tome valores en el intervalo $[0{,}5, 0{,}75]$ se procedería así:

$$p[0{,}5 < X < 0{,}75] = \int_{0{,}5}^{0{,}75} f(x)\ dx = \int_{0{,}5}^{0{,}75} \frac{x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0{,}5}^{0{,}75} = 0{,}5$$

La función de distribución en el caso continuo se define igual que en el caso discreto:

$$F(x) = p[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

y se verifica que $F'(x) = f(x)$.

Con la función de distribución también se pueden calcular probabilidades:

$$p[X \leq b] = p[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = F(b)$$

$$p[X \geq a] = p[X > a] = 1 - p[X \leq a] = 1 - \int_{a}^{-\infty} bf(x)\ dx = 1 - F(a)$$

$$\begin{aligned} p[a < X < b] &= p[a \leq X \leq b] = p[a < X \leq b] = p[a \leq x < b] = \\ &= \int_{a}^{b} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Ejercicio: Para el ejemplo de la longitud de un hoja de planta en centímetros, determina la función de distribución y la probabilidad de la que la hoja mida

1. menos de 1.2cm.;

2. igual o más que 0.8;

3. igual o más de 1cm. y menos de 3 cm.

3.3. Características de una variable aleatoria.

Se denominan **parámetros** de una variable aleatoria a valores numéricos que caracterizan a la variable. En un estudio estadístico, los parámetros son propios de las poblaciones y son magnitudes que permanecen invariantes durante el experimento aleatorio.

Ejemplo: Supongamos que se está estudiando la altura de los árboles de una explotación hortofrutícola. Aunque nos sea desconocida, existirá una media (μ) de altura de la población de árboles de la explotación. Esa media μ será un parámetro, en principio desconocido, que caracteriza a la población. Si tomamos una muestra de 20 árboles y medimos su altura, podemos calcular su media muestral $\bar{x}$. Este valor podría cambiar si elegimos una muestra distinta y calculamos su correspondiente media muestral. Ambas medias muestrales serían distintas estimaciones del parámetro μ, que, sin embargo no habrá cambiado su valor a lo largo del proceso.

Parámetros importantes de una variable aleatoria son la media o esperanza matemática de la variable (μ) y la varianza de la variable (σ^2) que se calculan así:

	Variables discretas
Media μ	$\sum_i x_i p_i$
Varianza σ^2	$\sum_i (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - \mu^2$

	Variables continuas
Media μ	$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
Varianza σ^2	$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$

La desviación típica σ es la raíz de la varianza.

Ejemplo: Calcula la media y la varianza de la variable X resultado de observar los resultados de un dado trucado, sabiendo que X puede tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 y con probabilidades 1/36, 3/36, 5/36, 7/36, 9/36, 11/36, respectivamente.

$$\mu = 1\frac{1}{36} + 2\frac{3}{36} + 3\frac{5}{36} + 4\frac{7}{36} + 5\frac{9}{36} + 6\frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4{,}4722$$

$$\sigma^2 = \left(1^2\frac{1}{36} + 2^2\frac{3}{36} + 3^2\frac{5}{36} + 4^2\frac{7}{36} + 5^2\frac{9}{36} + 6^2\frac{11}{36}\right) - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = 1{,}9714$$

Ejemplo: Calcula la media y la varianza para la variable aleatoria *"longitud en cm. de la hoja de una planta"*.

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx = \int_0^2 x\frac{x}{2}\ dx = \frac{4}{3}$$

$$\sigma^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx\right) - \mu^2 = \int_0^2 x^2\frac{x}{2}\ dx = 2 - (\frac{4}{3})^2 = 0{,}2222$$

Otros parámetros de interés

Moda: en las variables discretas es el valor que tiene mayor probabilidad asociada. En las continuas es el valor máximo relativo de la función de densidad.

Mediana: en las variables discretas es el valor m_e tal que la función de distribución en ese valor verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{2} + P[X = m_e] \geq F(m_e) \geq \frac{1}{2}$$

En las distribuciones continuas es el valor tal que $F(m_e) = \frac{1}{2}$.

El sesgo o coeficiente de asimetría (γ_3) es:

$$\gamma_3 = \sum_i \frac{(x_i - \mu)^3 \cdot p(X = x_i)}{\sigma^3}$$

en el caso discreto y

$$\gamma_3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x)\ dx}{\sigma^3}$$

en el caso continuo. Si es 0, la variable es simétrica; si es mayor que 0 es asimétrica a la derecha, es decir, tiene una cola a la derecha; si es negativo es asimétrica a la izquierda, es decir, tiene una cola a la izquierda.

El coeficiente de curtosis (γ_4) es:

$$\gamma_4 = \sum_i \frac{(x_i - \mu)^4 \cdot p(X = x_i)}{\sigma^4} - 3$$

en el caso discreto y

$$\gamma_4 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x)\ dx}{\sigma^4} - 3$$

en el caso continuo. Si es 0, la curtosis es normal; si es positivo la distribución de la variable es más apuntada que la normal; si es negativo la distribución de la variable es más achatada que la normal.

3.4. Algunas distribuciones notables: distribuciones discretas y distribuciones continuas

En esta sección estudiaremos algunas variables aleatorias que se adaptan a muchos fenómenos de la naturaleza.

3.4.1. Distribuciones discretas

Distribución Uniforme

Es la correspondiente a un experimento aleatorio cuyos valores son equiprobables. Si el número de valores posibles es n, la probabilidad asignada a cada valor será 1/n.

Ejemplo: 1. La extracción de un individuo al azar de entre 1543 es un fenómeno aleatorio que se adapta a una distribución uniforme. Numeramos los individuos del 1 al 1543 y al extraerlos al azar, la probabilidad de extraer cada individuo concreto es 1/1543.

2. Lanzar una moneda al azar se puede adaptar a una uniforme con $n = 2$. El tirar un dado y observa el número de puntos obtenidos se adapta a una uniforme con $n = 6$.

Distribución Bernoulli

Es la correspondiente a un experimento aleatorio que puede tomar solo dos valores: 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad $1 - p$.

Ejemplo: Sea $p = 0{,}15$ la probabilidad de que una cereza sufra daño tras una lluvia torrencial. Observar si una cereza está dañada o no tras una lluvia torrencial se adapta a una Bernoulli de parámetro p, siendo $p = 0{,}15$.

Distribución Binomial

Es la correspondiente a un experimento aleatorio consistente en contar el número de individuos en los que ocurre algo que interesa. Para construir la distribución de probabilidad, se necesita conocer la probabilidad p de que el fenómeno de interés ocurra en 1 individuo concreto que se observe; también es necesario conocer el número de individuos total n en los que se observa el fenómeno. La función de probabilidad de una distribución binomial de parámetros n y p ($Bi(n,p)$) es

$$p[X = x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

siendo p la probabilidad de que el fenómeno ocurra en un individuo observado; n el número total de individuos observados; y $q = 1 - p$.

Ejemplo: En el caso anterior de las cerezas dañadas, observar 10 cerezas y contar el número de cerezas dañadas se adapta a una binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}15$. Así, podremos calcular la probabilidad de que 2 cerezas de las 10 estén dañadas:

$$p[X = 2] = \binom{10}{2} 0{,}15^2 0{,}85^8 = 0{,}2759$$

Ejemplo: Si en una población, la probabilidad de que un ternero recién nacido sea hembra es 0,48, la variable aleatoria X=”*número de hembras en 5 nacimientos*”, se regiría por un modelo Binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0{,}48$. Así, la probabilidad de que haya 2 hembras de 5 nacimientos es

$$p[X = 2] = \binom{5}{2} 0{,}48^2 0{,}52^3 = 0{,}324$$

El diagrama de barras para esta distribución se representa en la figura 3.5. Algunos de los valores de la binomial se pueden encontrar en tablas.

Otra distribución discreta importante es la de Poisson, que no vamos a tratar en este texto.

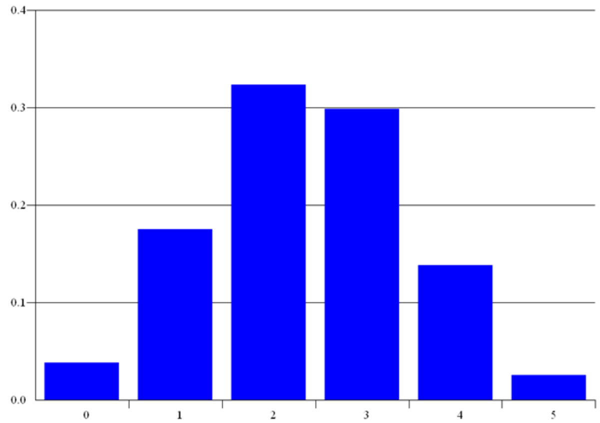


Figura 3.5: Diagrama de barras de una distribución Bi(5,2)

3.4.2. Distribuciones continuas

Distribución uniforme

La distribución uniforme $U[a,b]$ en el caso continuo describe los fenómenos de variables que pueden tomar todos los valores de un cierto intervalo $[a,b]$. La función de densidad será

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{en el recto de valores} \end{cases}$$

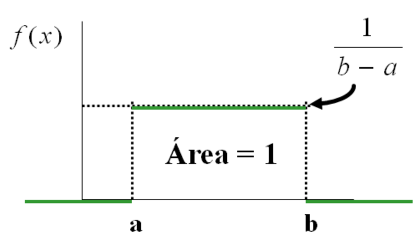


Figura 3.6: función de densidad de la Uniforme $[a,b]$

Distribución normal

Una variable aleatoria X se distribuye según una Normal $N(\mu, \sigma)$ de parámetros μ y σ, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La media y la varianza de la normal son μ y σ^2. La gráfica de la normal se llama campana de Gauss y es simétrica respecto de la media, por tanto, su coeficiente de asimetría vale 0. El coeficiente de curtosis vale 0 también. Toma distintas formas según su varianza σ^2 y según su media μ (ver figura 3.7)

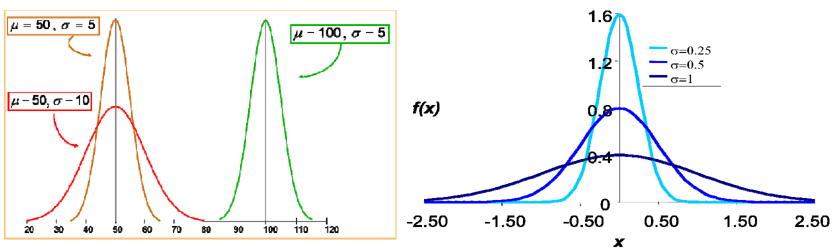


Figura 3.7: funciones de densidad de distribuciones normales

Ejemplos: La distribución Normal aparece de forma natural en gran cantidad de situaciones. Por ejemplo, - Variables morfológicas (tallas, pesos, diámetros, perímetros, ...) de individuos (personas, animales, plantas, ...) de una especie. - Variables sociológicas, por ejemplo: cantidad que consumen de un cierto producto por un mismo grupo de individuos, puntuaciones de examen, etc. - Variables fisiológicas, por ejemplo: efecto de una dosis de un fármaco. - Variables que miden errores cometidos al medir una magnitud.

Los valores de la normal $Z = N(0, 1)$ están recogidos en tablas. Los cálculos de probabilidades de cualquier otra normal $X = N(\mu, \sigma)$ se pueden obtener a partir de la Z tipificando:

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = Z$$

Ejemplo: Sea $X = N(6, 3)$. Calcula la probabilidad de que

1. $X > 9$;

2. $X > -2$;

3. $X < -1$;

4. $6 < X < 8$.

a)

$$p[X > 9] = p[\frac{x-6}{3} > \frac{9-6}{3}] = p[Z > 1] = 0{,}1587$$

b)

$$p[X > -2] = p[\frac{x-6}{3} > \frac{-2-6}{3}] = p[Z > -2{,}6667] =$$
$$= 1 - p[Z > 2{,}6667] = 1 - 0{,}0038 = 0{,}9962$$

De forma similar para los otros dos apartados.

Relacionadas con la normal están las siguientes distribuciones.

Distribución Chi-2

La distribución Chi-cuadrado de n grados de libertad (χ^2_n) tiene una función de densidad como las de la figura 3.8.

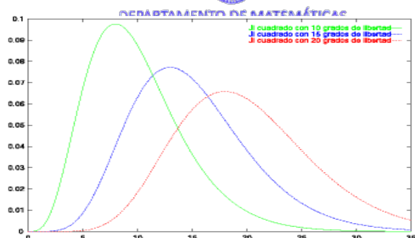


Figura 3.8: funciones de densidad de distribuciones χ^2_n

Distribución T-Student

La distribución T-Student de n grados de libertad (t_n) tiene una función de densidad como las de la figura 3.9. Cuando n tiende a infinito la función de densidad de la distribución t_n es similar a una normal de media 0 y desviación 1. Por tanto, para n grande, cuando no se dispone de información sobre los valores de la t_n se pueden aproximar por los valores de la Z.

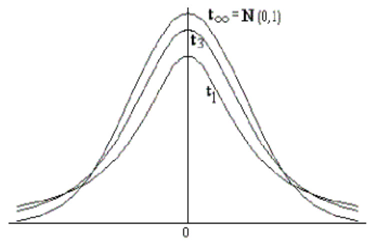


Figura 3.9: funciones de densidad de distribuciones t_n

Distribución F-Fisher-Snedecor

La distribución F-Fisher-Snedecor de n y m grados de libertad tiene una función de densidad como la de la figura 3.10.

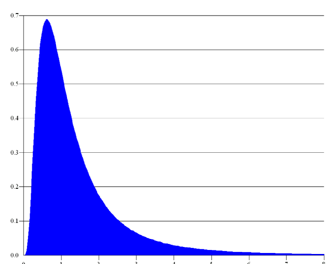


Figura 3.10: funciones de densidad de una distribución $F_{n,m}$

3.5. Introducción a estimación de parámetros, intervalos de confianza y test de hipótesis

En cualquier estudio estadístico hay tener bien claro si se está trabajando con una muestra o con el total de la población. Lo habitual es trabajar con una muestra representativa de la población y a partir de los datos de la muestra hacer estimaciones de los parámetros (media, varianza, simetría, curtosis, etc.) de la población.

Muestra: estimadores de los parámetros	Población: parámetros
$\bar{x}$	μ
s^2, S^2	σ^2
A_F, A_P	γ_3
A_4	γ_4

Los valores numéricos de cada muestra cambiarán si cambia la muestra. Los valores de los parámetros no cambian, son números fijos.

Si la población es muy grande o infinita, el número de muestras será también muy grande o infinito. (¿Cuántas muestras de tamaño 100 se pueden extraer de la población formada por las encinas de Extremadura?).

Si, por ejemplo, nuestro interés es estimar la media de la población μ, podremos usar la media muestral $\bar{x}$ como estimador de μ. Acertaremos o no acertaremos con valores próximos al verdadero valor μ según la suerte que hayamos tenido al elegir la muestra.

Puesto que se pueden elegir distintas muestras, habrá distintas probabilidades de obtener distintos valores de $\bar{x}$ y podremos hablar de la variable aleatoria "*media muestral* $\bar{X}$".

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Muestras} & \xrightarrow{\bar{X}} & \textbf{Media muestral} \\ \text{Muestra 1} & \mapsto & \bar{x_1} \\ \text{Muestra 2} & \mapsto & \bar{x_2} \\ \ldots & & \end{array}$$

Esta variable aleatoria es la que a cada muestra posible le asigna el valor numérico de su media muestral $\bar{x}$. Como es una variable aleatoria tendrá una distribución de probabilidad.

Está demostrado que dado cualquier variable estadística X de media μ y varianza σ^2, cuando el tamaño muestral n tiende a infinito, $\bar{X}$ tiende a ser una variable con distribución de probabilidad normal de media μ y varianza σ^2/n. Es decir, que la variable $\bar{X}$ tiene como valor esperado medio μ y su dispersión irá disminuyendo a medida que n aumenta.

Ejemplo 1: Los datos de la figura 3.11 representan una muestra de más de 1000 números aleatorios generados mediante una distribución uniforme en el intervalo $[2, 10]$ (cada número del intervalo $[2, 10]$ tiene la misma probabilidad de salir elegido cada vez que generamos un número). Los histogramas de la figura 3.12 representan las medias muestrales de más de 1000 muestras de

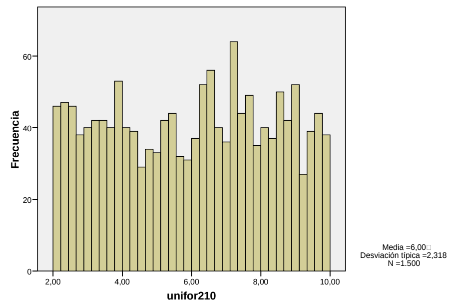


Figura 3.11: histograma de 1500 números aleatorios generados según $U[2,10]$

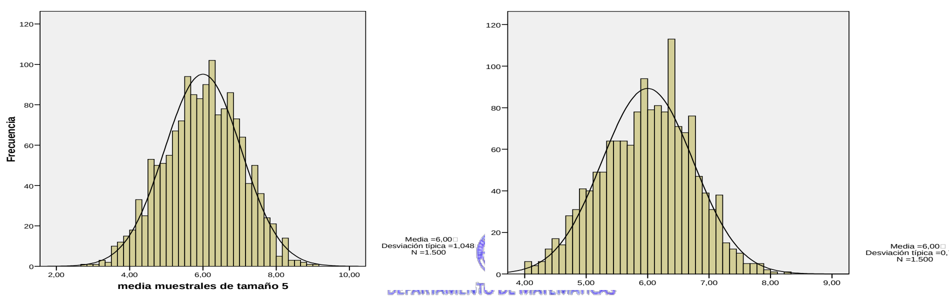


Figura 3.12: histograma de medias muestrales de tamaño 5 de los datos de la figura 3.11

tamaño 5 y de tamaño 10 construidas a partir de los datos representados en la figura 3.11.

Además, si la variable original X es normal, entonces $\bar{X}$ (no es que tienda a ser sino que) es una variable con distribución de probabilidad normal con la media y la varianza especificadas antes.

Ejemplo 1: Supongamos que la probabilidad de que un lechón de una explotación nazca macho es $p = 0{,}52$. La distribución de la variable

X= "*número de machos por cada 10 lechones*"

será una distribución binomial de media 5,2 y varianza 2,50. Tomemos 100 grupos de 10 lechones cada uno y observemos el número de machos de cada grupo:

X_1, número de machos del grupo 1
X_2, número de machos del grupo 2
...
X_{100}, número de machos del grupo 100.

La variable

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

tendrá una distribución aproximadamente como una normal de media igual a la media de cada X_i, es decir, 5,2, y de varianza igual a la varianza de X_i dividido por n, es decir 2,50/100:

$$\bar{X} \text{ es aproximadamente una } N(5{,}2, 0{,}16)$$

Ejemplo 2: Supongamos que la distribución de la variable

$$X = \text{"pesos al nacer de los lechones de una explotación"}$$

es una distribución normal de media 250 gramos y varianza 50^2 gramos. Tomemos 100 lechones al nacer y observemos el peso de cada uno de ellos:

X_1: peso del lechón 1
X_2: peso del lechón 2
...
X_100: peso del lechón 100.

La variable

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

tendrá una distribución normal con media igual a la media de cada X_i, es decir, 250 gramos, y de varianza igual a la varianza de X_i dividido por n, es decir $50^2/100$:

$$\bar{X} \text{ es } N(250, 5)$$

Está demostrado matemáticamente que

Si X es normal, entonces $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = N(0,1)$

Si X es cualquier distribución, entonces $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$

Si X es normal, entonces $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} = t_{n-1}$

Si X es cualquier distribución, entonces $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \to N(0,1)$

Los anteriores resultados y otros parecidos permiten hacer estimaciones de los parámetros con intervalos de confianza y construir test de hipótesis.

Intervalos de confianza

Un método de construcción de ïntervalos de confianza al 95 % para la media μ”será un proceso que al aplicarlo a distintas muestras origine para cada una de ellas un intervalo, y que de cada 100 intervalos que se construyan usando ese método, aproximadamente 95 de ellos contendrán el verdadero valor de la media μ.

Métodos de construcción de intervalos de confianza al 95 % para la media μ en distintas situaciones, es decir, a nivel $\alpha = 0{,}05$ $(1 - \alpha = 0{,}95)$:

Si X es normal, σ conocida	$[\bar{x} \pm z_{0,025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
Si X no es normal, σ conocida, muestras grandes $(n \geq 30)$	$[\bar{x} \pm z_{0,025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
Si X es normal, σ desconocida	$[\bar{x} \pm t_{n-1;0,025} \frac{S}{\sqrt{n}}]$
Si X no es normal, σ desconocida, muestras grandes $(n \geq 100)$	$[\bar{x} \pm z_{0,025} \frac{S}{\sqrt{n}}]$

siendo $z_{0,025}$ es el valor de la Z que deja a la derecha valores con probabilidad 0,025 y $t_{n-1;0,025}$ es el valor de la t_{n-1} que deja a la derecha valores con probabilidad 0,025

Si el lugar de construir el intervalo al 95 % se quiere construir a nivel α, lo haríamos así:

Si X es normal, σ conocida	$[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
Si X no es normal, σ conocida, muestras grandes $(n \geq 30)$	$[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
Si X es normal, σ desconocida	$[\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}]$
Si X no es normal, σ desconocida, muestras grandes $(n \geq 100)$	$[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}]$

siendo $z_{\alpha/2}$ es el valor de la Z que deja a la derecha valores con probabilidad $\alpha/2$ y $t_{n-1;\alpha/2}$ es el valor de la t_{n-1} que deja a la derecha valores con probabilidad $\alpha/2$.

Ejercicio: Localizar $z_{\alpha/2}$ y $t_{n-1;\alpha/2}$ para diferentes valores de n y de α buscando en las tablas de la distribución de la normal y de la t-Student.

Ejemplo: En el caso del peso al nacer de los lechones de una explotación, suponiendo que el peso al nacer sigue una distribución normal, la estimación de la media con intervalo de confianza a nivel de confianza $\alpha = 0{,}05$ (intervalo al 95 %) se calcularía así:

$$[\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

siendo $t_{n-1,0,025}$ el valor de la distribución t de Student que deja a la derecha valores con probabilidad $\alpha/2 = 0{,}025$. La expresión ïntervalo de confianza al 95 %”significa que aproximadamente de cada 100 intervalos que construya usando la expresión anterior, 95 de ellos contendrán el verdadero valor de la media μ.

Si de una muestra de tamaño $n = 100$ obtenemos que $\bar{x} = 238$ y $S = 45$, como $t_{99,0,025} = 1{,}98$, entonces la estimación de la media de la población con intervalo de confianza al 95 % sería:

$$[238 \pm 1{,}98 * 45/10] = [229{,}09, 246{,}91]$$

Test de hipótesis

Un test de hipótesis es una herramienta para decidir si una afirmación acerca de una característica de una población es aceptable o no en función de los resultados obtenidos en una muestra.

Ejemplo: En el ejemplo del peso de los lechones al nacer, queremos contrastar si es aceptable afirmar que la media de la población de lechones recién nacidos de la explotación es $\mu = 250$ gramos o no. Procedemos así:

1. Planteamos las hipótesis:

$$H_0 : \mu = 250$$
$$H_1 : \mu \neq 250$$

2. Fijamos el nivel de confianza, que habitualmente es $\alpha = 0{,}05$.

3. . Elegimos una muestra y calculamos el intervalo de confianza al 95 %, suponiendo que la variable X sigue una distribución normal:

$$[\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

   En la situación anterior, [229.09, 246.91] sería el intervalo de confianza a nivel 0.05 para la muestra.

4. Si 250 estuviera contenido en el intervalo de confianza construido, sería razonable aceptar H_0. Si 250 no está en el intervalo construido, como es el caso, rechazaríamos H_0 a nivel 0,05. Esto último no quiere decir que la media verdadera sea o no 250. Pudiera ser que la causa por la que el intervalo de confianza no contenga el valor 250 sea porque la muestra elegida sea "mala", es decir, habríamos tenido "mala suerte.^{el}igiendo la muestra.

Ejemplo: De una muestra de 150 sacos de pienso para el ganado de una cierta marca se obtuvieron los siguientes datos en relación al peso: media muestral $\bar{x} = 49{,}5$ kg., cuasivarianza muestral $S = 2$ kg. Obteniendo un intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los sacos comercializados por la marca, queremos contrastar si es aceptable afirmar que el peso medio de los sacos que produce la empresa es 50 kilos, tal y como asegura la empresa. Procedemos así:

1. Planteamos las hipótesis:

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu \neq 50 \end{array}$$

2. Fijamos el nivel de confianza, que habitualmente es $\alpha = 0{,}05$.

3. . Elegimos una muestra y calculamos el intervalo de confianza al 95 %. En este caso no supondremos que X sea normal, pero como la muestra es grande ($n \geq 100$), podemos calcular el intervalo así:

$$[\bar{x} \pm z_{0{,}025} \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

   Buscamos en las tablas el valor z0.025=1.96 y se obtiene el intervalo

$$[49{,}18, 49{,}82]$$

4. Si 50 estuviera en el intervalo de confianza construido, es razonable aceptar H_0. Si no está en el intervalo construido, como es el caso, rechazaríamos H_0 a nivel 0,05. Esto último no quiere decir que la media verdadera de los sacos sea o no 50 kg. Pudiera ser que la causa por la que el intervalo de confianza construido no contenga el valor 50 sea porque la muestra elegida sea "mala", es decir, habríamos tenido "mala suerte.eligiendo la muestra.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Parte III

Bloque III: Álgebra Lineal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Capítulo 4

Matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales

4.1. Matrices y operaciones

Una matriz A de números reales de orden $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ números reales ordenados en m filas y n columnas.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene orden 2×3.

a_{ij} denotará al elemento de la fila i y la columna j. En la matriz anterior $a_{12} = 5$ y $a_{21} = 2$.

La matriz se denotará $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ o simplemente A.

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ se denotará $\mathcal{M}_{m \times n}$. Así

$$\mathcal{M}_{2 \times 3} = \{ \text{ todas las matrices de orden } 2 \times 3\}$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y A y B son dos matrices, podemos realizar las siguientes operaciones:

- Multiplicar una matriz por un número: $\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Por ejemplo

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

- Sumar dos matrices A y B, siempre que sean del mismo orden ($A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$): $A + B = (a_{i,j} + b_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

- Multiplicar dos matrices, siempre que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$: $A \cdot B = (\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+40+0 & 6+5-2 \\ -2+8+0 & 4+1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

En el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$, la suma de matrices es una operación que da como resultado otra matriz del conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$, por lo que se dice que la suma es una operación interna en el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Además, la suma de matrices dentro del conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$ verifica las propiedades:

- Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Tiene elemento neutro, que es la matriz con todos los elementos 0,
- Cada matriz tiene su elemento opuesto (la matriz opuesta de $A = (a_{ij})$ es $-A = (-a_{ij})$)
- Conmutativa $A + B = B + A$.

El producto de un un número real por una matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}$ también da como resultado otra matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}$, por lo que se dice que el producto de una matriz por un número real es una operación externa sobre los números reales.

Una matriz A es cuadrada si el número de filas es igual que el número de columnas ($A \in \mathcal{M}_{n\times n}$).

El producto de dos matrices del conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}$ es una operación interna en $\mathcal{M}_{n\times n}$ que verifica la propiedades

- Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Tiene elemento neutro (que es la matriz llamada identidad, con todos sus elementos 0 salvo los $a_{ii} = 1$)

- No tiene elemento elemento inverso, es decir, dada una matriz $A \in M_{n\times n}$ no siempre existe otra matriz que multiplicada por ella dé el elemento neutro. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ no tiene un inverso.
- El producto de matrices no es conmutativo.

4.1.1. Tipos de matrices

La matriz traspuesta de A es la matriz A^t que resulta de intercambiar las filas de A por las columnas de A. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se verifica que:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
4. $(\alpha A)^t = \alpha A^t \ \forall \alpha \in R$

A es simétrica si $A^t = A$. A es antisimétrica si $A^t = -A$. La siguiente matriz es simétrica: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Una matriz A es cuadrada si $m = n$: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Los elementos a_{ii} de una matriz forma la diagonal principal. : $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 5 \\ 5 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Una matriz A es diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

La matriz identidad (Id) es la matriz diagonal con los elementos $a_{ii} = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Una matriz A es triangular superior (equivalentemente, triangular inferior) si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (equivalentemente, $i < j$): $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ es triangular superior.

Dos matrices A y B son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

La matriz A es nula si $a_{ij} = 0$ para todo i, j: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 3×3.

4.1.2. Matriz invertible. Rango de una matriz

La matriz identidad de orden $n \times n$ es

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $A \cdot Id = Id \cdot A = A, \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

B es una matriz inversa de A por la derecha si $B \cdot A = Id$

B es una matriz inversa de A por la izquierda si $A \cdot B = Id$.

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, entonces la inversa por la izquierda es también inversa por la derecha. Por tanto, la inversa de una matriz cuadrada es única y se denota A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = Id.$$

Si A tiene inversa se denomina invertible, regular o no singular. No todas las matrices tiene inversa.

Ejemplo: Comprueba que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propiedades

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ invertibles. Entonces:

1. A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. $A \cdot B$ es invertible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

3. Si $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

4. Si A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

¿Será invertible $(A + B)$? ¿Cuánto vale su inversa?

Se llaman operaciones elementales de una matriz al intercambio de dos filas o columnas, al producto de una fila o columna por un número distinto de 0, a la suma de una fila o columna otra fila o columna multiplicada por un número, o cualquier combinación finita de las operaciones anteriores.

Cada operación elemental en una matriz A se puede expresar mediante producto de A por otra matriz, que se llama matriz fundamental.

El intercambio de la segunda y tercera filas se puede expresar así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

El producto de la segunda fila por un número α se puede expresar así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Y la suma a la tercera fila de la segunda fila multiplicada por un número α es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

¿Qué cambios produce en A la siguiente operación?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Sustituir la fila segunda por la tercera multiplicada por α.
- Multiplicar la tercera fila por $\alpha\lambda$ y sumarle la segunda.

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tiene inversa, entonces existe un conjunto de matrices fundamentales E_k con $k = 1, \ldots, p$, tales que

$$E_p E_{p-1} \ldots E_1 A = Id,$$

con lo que multiplicando por A^{-1} por la derecha en ambos términos se obtiene que

$$E_p E_{p-1} \ldots E_1 Id = A^{-1},$$

es decir, aplicando las mismas operaciones fundamentales a la matriz Id obtendremos la matriz inversa A^{-1}.

Ejemplo: *Calcula la inversa de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Partimos de A y la matriz Id. El primer cambio consiste en restar a la segunda fila la primera (correspondiente al producto por una cierta matriz fundamental E_1):

$$E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad E_1 \cdot Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El segundo cambio (multiplicar por E_2) consiste en restar a la tercera dos veces la primera:

$$E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 \cdot E_1 \cdot Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A la primera le resto dos veces la segunda (E_3):

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot Id = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A la primera le resto tres veces la tercera (E_4):

$$E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y hemos obtenido la inversa de A.

$\square$

Se dice que un grupo de **filas** de una matriz de números reales son **independientes** si ninguna fila del grupo se puede obtener aplicando operaciones elementales al resto de las filas del grupo, es decir, no es posible obtener ninguna fila multiplicando el resto de filas del grupo por números reales y sumándolas.

Las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

no son independientes porque

$$fila\ 2 = fila\ 1 + fila\ 3$$

De forma similar, se define la **independencia de las columnas** de una matriz.

Se llama **rango de una matriz** A al mayor número de filas (o columnas) independientes de A.

$$\operatorname{rg} A = \text{número máximo de filas independientes}$$

Se verifica que

1. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $P \in \mathcal{M}_{m\times m}$ y $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son invertibles, entonces

$$\operatorname{rg}(PAQ) = \operatorname{rg} A$$

es decir, el rango de una matriz no cambia si se multiplican por matrices cuadradas invertibles.

2. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^t$

Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son equivalentes:
1. A^{-1} existe.
2. Las n filas de la matriz A son independientes.
3. Las n columnas de la matriz A son independientes.
4. A es producto de matrices elementales.
5. El rango de A es n.

4.2. Determinante de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. El determinante de $|A|$ es la suma de todos los productos posibles de n elementos de A, de modo que:

- en cada sumando hay un elemento y solo uno de cada fila y de cada columna de A,
- cada sumando es precedido del signo $+$ si la permutación que indica las filas de las que provienen los elementos del sumando y la que indica las columnas son de la misma clase. En caso contrario, el sumando es precedido de signo $-$.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ejercicio: Usando la definición, calcula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

y justifica a qué será igual el determinante de cualquier matriz triangular.

4.2.1. Propiedades de los determinantes

A partir de la definición de determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se deducen las siguientes propiedades:

1. *Una matriz A y su traspuesta A^t tienen el mismo determinante.*

Los posibles productos de los elementos de A y de A^t tomando uno de cada fila y uno de cada columna son iguales. De una a otra matriz cambiará que la permutación que antes indicaba fila en A ahora indicará permutación de columnas en A^t; y lo que en A era permutación de columnas ahora será permutación de filas en A^t. Sin embargo si ambas permutaciones eran de la misma clase en A, seguirán siendo de la misma clase en A^t; y si eran de clase distinta en A ahora serán de clase distinta también en A^t.

Como consecuencia, toda propiedad enunciada para filas es válida también para columnas y recíprocamente.

Ejercicio: Comprueba la propiedad en la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. *Si una matriz tiene una fila o columna con todos sus elementos* 0, *su determinante es* 0.

Si A tiene una fila con todos los elementos 0, en cada producto posible tomando un elemento de cada fila habrá algún 0.

Ejercicio: Comprueba la propiedad en una matriz con todos los elementos de la segunda fila iguales a 0.

3. *Si en una matriz A se permutan entre sí dos filas o dos columnas, se obtiene otra matriz cuyo determinante es* $-|A|$.

Los posibles productos de elementos de A y de la matriz B que resulta de intercambiar las dos filas iguales son los mismos, porque son los mismos elementos. La diferencia están en que cambia la clase de los productos porque la permutaciones que indican fila en A y en B tendrá una inversión más en un caso que en el otro, la que corresponde a intercambiar las filas. Por tanto cambiará el signo de cada producto.

Ejercicio: Comprueba la propiedad intercambiando dos filas de la matriz A anterior.

4. *Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, su determinante es* 0.

Supongamos que A tiene la primera fila igual a la segunda y que su determinante es igual a un número k. Si intercambiamos la primera y la segunda fila vuelve a salir A, pero aplicando la propiedad anterior el determinante cambiará de signo, es decir, se tiene que:

$$k = |A| = -k \Rightarrow k = 0$$

5. *Si se multiplican por un número $\lambda \in \mathbb{R}$ todos los elementos de una fila o columna de una matriz $|A|$, el determinante de la matriz obtenida es igual a* $\lambda|A|$.

Si multiplicamos una fila por un número α, todos los posibles productos que podamos formar para calcular el determinante estarán multiplicados por α, por tanto, el determinante que resulte será el de la matriz inicial multiplicado por α.

Ejercicio: Calcula el determinante de la siguiente matriz y compáralo con el de A:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. *Si una matriz tiene dos filas o columnas proporcionales, su determinante es igual* a 0.

Aplicando la propiedad anterior:

$$\left| \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \alpha \cdot \text{fila 1} \\ \ldots \\ \text{fila n} \end{pmatrix} \right| = \alpha \cdot \left| \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \text{fila 1} \\ \ldots \\ \text{fila n} \end{pmatrix} \right| = 0$$

Ejercicio: Comprueba la propiedad calculando el determinante de una matriz con dos filas iguales.

7. *Si A, B y C son tres matrices iguales excepto en la fila i, de forma que la fila i de C es suma de las fila i de A y de la fila i de B, entonces* $|C| = |A| + |B|$.

Ejercicio: Comprueba la propiedad con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2-1 & 1+1 & 1+8 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. *Si una matriz tiene una fila o columna que es suma de otras filas o columnas multiplicadas por números, su determinante es* 0.

Supongamos que la matriz tiene tres filas y que la fila 3 es suma de $\alpha\cdot$ fila 1 y de $\beta\cdot$ fila 2, siendo α y β dos números reales. Aplicando la propiedad anterior:

$$\left|\begin{pmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \alpha\cdot\text{fila } 1+\beta\cdot\text{fila } 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \alpha\cdot\text{fila } 1 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \beta\cdot\text{fila } 2 \end{pmatrix}\right| = 0+0=0$$

9. *Si a los elementos de una fila (o de una columna) de una matriz se le suman los de otra fila (respectivamente, otra columna), multiplicados por un número, se obtiene otra matriz que tiene el mismo determinante que A.*

Supongamos que a la fila 3 de una matriz A le sumamos la fila 1 por α y la fila 3 por β:

$$\left|\begin{pmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \text{fila } 3+\alpha\cdot\text{fila } 1+\beta\cdot\text{fila } 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \text{fila } 3 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \alpha\cdot\text{fila } 1+\beta\cdot\text{fila } 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \text{fila } 1 \\ \text{fila } 2 \\ \text{fila } 3 \end{pmatrix}\right|$$

Como consecuencia, a los elementos de una fila se les puede sumar una combinación lineal de los elementos de las restantes filas de A y se obtiene otra matriz con el mismo determinante.

10. *Aplicando las propiedades anteriores sucesivas veces, toda matriz A se puede transformar en otra matriz triangular que tiene el mismo determinante.*

4.2.2. Métodos de cálculo de determinantes

Método de Gauss

Se basa en

- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

- Aplicando las propiedades de los determinantes, toda matriz se puede transformar en otra matriz triangular que tiene el mismo determinante.

Podemos calcular el valor del determinante de una matriz aplicando las propiedades para obtener una matriz triangular y finalmente relacionar el determinante de la matriz triagular con el determinante de la matriz inicial.

Ejercicio: Calcula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollo por una fila o columna

Dado el elemento a_{ij} de la matriz A, se define

- **menor complementario de** a_{ij} como el determinante de la matriz que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j.

- **adjunto de** a_{ij}, que denotaremos A_{ij}, como el menor complementario de a_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

Podemos obtener el valor del determinante de una matriz calculando la suma de los elementos de una fila (o columna) multiplicado cada uno de ellos por su adjunto.

Ejercicio: Calcula el determinante del ejercicio anterior desarrollando por los elementos de la primera fila.

Ejercicio: Comprueba que la suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra fila paralela es siempre 0. ¿Por qué ocurre esto?

Ejercicio: Calcula el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

4.2.3. Cálculo de la matriz inversa usando determinantes

Para calcular la inversa de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, puedo seguir estos pasos:

- Calculo la matriz formada por los adjuntos de cada elemento.
- Hallo la traspuesta de la matriz anterior.
- Divido la matriz de los adjuntos traspuesta por $|A|$.

Se obtiene la matriz

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

La anterior es la matriz A^{-1} porque

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

En el producto anterior, los elementos de la diagonal son iguales a 1:

$$\frac{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}}{|A|} = \frac{|A|}{|A|} = 1.$$

y el resto de elementos son 0:

$$\frac{a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0.$$

Ejercicio: Calcula la inversa de la matriz A usando el método descrito:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio: Calcula el valor de la matriz X que verifica $AX = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2.4. Cálculo del rango de una matriz

Sea $A \in M_{m\times n}$.

- Un **menor de orden** h de la matriz A es cualquier determinante de una matriz de orden $h \times h$ obtenida con los elementos comunes a h filas y h columnas de A.
- **Orlar un menor de orden** h es añadir a ese menor los elementos comunes a una fila y una columna de A distintas a las que formaban el menor. El menor obtenido se llama menor orlado.
- El rango de la matriz A es el máximo número de filas o columnas de A independientes.

Teorema: *Si M es un menor de orden h de A no nulo y todos los menores que se obtienen orlando M con la fila k y todas y cada una de la restantes columnas de A son nulos, se puede asegurar que la fila k se puede obtener multiplicando por números y sumando las h filas de A utilizadas para formar M.*

Ejemplo: En la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

el menor $M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ es no nulo. Al orlarlo con la fila 3 obtenemos dos menores

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

que son ambos 0. Por tanto, la fila 3 es igual a un número por la fila 1 más otro número por la fila 2, dado que las filas 1 y 2 son las que se usaban para forma el menor M.

Consecuencia: *Si el rango de A es r y M es un menor de orden r no nulo de A, cada fila o columna de A se puede obtener multiplicando por números y sumando las h filas de A utilizadas para formar M.*

Método de cálculo del rango de una matriz $A \in M_{m\times n}$

1. Se elige un menor de orden 2 no nulo. Si no lo hay, el rango es 1, salvo que la matriz sea nula.

2. Si tengo un menor de orden k no nulo, se busca un menor no nulo de orden $k+1$ orlando el anterior. Si no lo hay, el rango es k.

3. Se repite el paso anterior.

Ejercicio: Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

o en forma matricial $A \cdot X = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{R}$ los coeficientes, x_j las incógnitas a calcular y $c_i \in \mathbb{R}$ los términos independientes.

Una solución del sistema $AX = C$ es un conjunto de números reales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que verifican las ecuaciones.

Ejemplos:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 2 \\ 2x-y+2z &=& 3 \\ 3x+2y+z &=& 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 5 \\ x+y+z &=& 6 \\ -3x+4y+z &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2x-5y+4z+y &=& -3 \\ x-2y+z-t &=& 5 \\ x-4y+6z+2t &=& 10 \\ 2x-6y+7z+t &=& 15 \end{array}$$

Un sistema de ecuaciones lineales pueden ser

1. **Compatible**: tienen alguna solución

   a) **Determinado**: la solución es única.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 &=& 0 \\ x_2 &=& 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{-1}{2} \\ x_2 &=& 1 \end{array}$$

   b) **Indeterminado**: hay varias soluciones.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{-\alpha}{2} \\ x_2 &=& \alpha \end{array} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **Incompatible**: no tiene solución

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 0 \\ x_1 + x_2 &=& 1 \end{array}$$

Dos sistemas $AX = C$ y $A'X = C'$ son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Si en el sistema $AX = C$ realizamos algunas o varias de las siguientes operaciones resulta un sistema $A'X = C'$ equivalente:

1. Suprimir o añadir un ecuación que es igual a la suma de otras ecuaciones multiplicadas por números.

2. Multiplicar una ecuación por un número distinto de 0.

3. Sumar a una ecuación otras ecuaciones multiplicadas por números.

4.3.1. Sistemas de Cramer. Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones es de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y no es nulo el determinante de la matriz de los coeficientes.

Teorema: *Todo sistema de Cramer $AX = C$ tiene solución única y se calcula así*

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Demostración. La solución será

$$X = A^{-1}C =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \dots + c_n A_{n1} \\ c_1 A_{12} + c_2 A_{22} + \dots + c_n A_{n2} \\ \dots \\ c_1 A_{1n} + c_2 A_{2n} + \dots + c_n A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Para demostrar el enunciado, basta tener en cuenta que

$$c_1 A_{1i} + c_2 A_{2i} + \dots + c_n A_{ni} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo: El sistema

$$\begin{aligned} x+y-z &= 2 \\ 2x-y+2z &= 3 \\ 3x+2y+z &= 5 \end{aligned}$$

es de Cramer porque tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

La soluciones serán:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{7}{4} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{4}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x-5y+4z &= -3-a \\ x-2y+z &= 5+a \\ x-4y+6z &= 10-2a \end{aligned}$$

es un sistema de Cramer porque tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas y

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

La soluciones serán:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3-a & -5 & 4 \\ 5+a & -2 & 1 \\ 10-2a & -4 & 6 \end{vmatrix}}{1} = 16a+24 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3-a & 4 \\ 1 & 5+a & 1 \\ 1 & 10-2a & 6 \end{vmatrix}}{1} = 9a+75$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & -3-a \\ 1 & -2 & 5+a \\ 1 & -4 & 10-2a \end{vmatrix}}{1} = 3a+31$$

4.3.2. Teorema de Rouché-Frobenius

Dado el sistema $AX = C$, consideramos la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Teorema (de Rouché-Frobenius): *El sistema $AX = C$ es compatible si y solo si el rango de A es igual al rango de A^*.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $AX = C$ es compatible, existe una solución $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

es decir, la columna C es dependiente de las columnas de la matriz A. Por tanto, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = h$, hay h columnas de A linealmente independientes, que podemos suponer que son las h primeras columnas de A (si fuesen otras, las reordenamos para seguir el razonamiento). Si a esas h columnas le añadimos la columna c_j, el rango sigue siendo h, porque $\text{rango}(A^*) = h$. Se concluye que la columna c_j es dependiente de las h primeras columnas de A:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_h \begin{pmatrix} a_{1h} \\ a_{2h} \\ \dots \\ a_{mh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

es decir, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, 0, \dots, 0$ es solución del sistema $AX = C$.

$\square$

Dado el sistema $AX = C$

1. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) =$ número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

2. Si rango(A) = rango(A^*) < número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

3. Si rango$(A) \neq$ rango(A^*), el sistema es incompatible.

Ejemplo: Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} 2x-5y+4z+t & = & -3 \\ x-2y+z-t & = & 5 \\ x-4y+6z+2t & = & 10 \\ 2x-6y+7z+t & = & 15 \end{array}$$

Dado que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 1 & 15 \end{pmatrix} = 3$$

el sistema es compatible indeterminado.

Utilizaremos solo tres ecuaciones y una de las incógnitas como parámetro, asegurándonos de que que los coeficientes de las incógnitas que dejemos sigan teniendo rango 3.

Podemos quedarnos con las tres primeras ecuaciones y las tres primeras incógnitas. En ese caso la matriz de los coeficientes sigue teniendo rango 3:

$$\begin{array}{rcl} 2x-5y+4z & = & -3-t \\ x-2y+z & = & 5+t \\ x-4y+6z & = & 10-2t \end{array}$$

La solución de ese sistema ya la habíamos obtenido en un ejercicio anterior. Añadiendo $t = a \in \mathbb{R}$ la solución del sistema inicial será:

$$x = 16a + 24 \qquad y = 9a + 75 \qquad z = 3a + 31 \qquad t = a \in \mathbb{R}$$

$\square$

Ejercicio: Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 5 \\ x+y+z & = & 6 \\ -3x+4y+z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+2z & = & 2 \\ 3x+3y+3z & = & 4 \end{array}$$

4.3.3. Método de Gauss de resolución de sistemas

Para discutir y resolver un sistema de ecuaciones, podemos ransformar el sistema $AX = C$ en un sistema equivalente $A'X = C'$ donde A' es triangular, haciendo uso de las siguientes operaciones:

1. Intercambiando de ecuaciones
2. Multiplicando una ecuación por un número distinto de 0.
3. Sumando a una ecuación una combinación lineal de otras ecuaciones.

Ejemplo: *Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{array}{rcr} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 12 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 & = & 34 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 & = & 27 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 & = & -38. \end{array}$$

En forma matricial es sistema sería

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{pmatrix}.$$

Paso 1. Elegimos como elemento pivote el término 6 de la primera fila y efectuamos las siguientes operaciones:

$$(\text{fila } 2^a) - 2(\text{fila } 1^a) \quad (\text{fila } 3^a) - 1/2(\text{fila } 1^a) \quad (\text{fila } 4^a) - (-1)(\text{fila } 1^a)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Paso 2. Elegimos como elemento pivote el término -4 de la segunda fila y efectuamos las siguientes operaciones:

$$(\text{fila } 3^a) - 3(\text{fila } 2^a) \quad (\text{fila } 4^a) - (-1/2)(\text{fila } 2^a)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Paso 3. Elegimos como elemento pivote el término 2 de la tercera fila y efectuamos la siguiente operación:

$$(\text{fila } 4^a) - 2(\text{fila } 3^a)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

que es el sistema de ecuaciones triangular superior:

$$\left.\begin{array}{rcl} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 12 \\ -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 10 \\ 2x_3 - 5x_4 & = & -9 \\ -3x_4 & = & -3 \end{array}\right\}$$

es compatible determinado porque el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada es igual al número de incógnitas. Además es un sistema equivalente al inicial. La solución es:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1/6(12 - 4x_4 - 2x_3 + 2x_2) = 1 \\ x_2 = -1/4(10 - 2x_4 - 2x_3) = -3 \\ x_3 = 1/2(-9 + 5x_4) = -2 \\ x_4 = 1 \end{array}$$

4.3.4. Sistemas lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones de la forma $AX = 0$, siendo 0 la matriz nula, es un sistema lineal homogéneo. Un sistema homogéneo siempre es compatible porque la matriz nula $X = 0$ siempre es solución. Puede ser:

1. Compatible determinado si rango A =número de incógnitas.

2. Compatible indeterminado si rango A <número de incógnitas.

Capítulo 5

Espacio vectorial euclídeo

5.1. Definición y propiedades de espacio vectorial

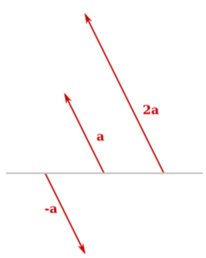


Figura 5.1: Producto por un escalar

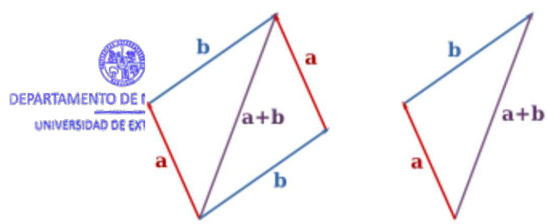


Figura 5.2: suma de vectores

Un conjunto V dotado de una operación interna ($+ : V \times V \to V$, normalmente llamada suma) y otra operación externa sobre los números reales ($\cdot\mathbb{R} : \mathbb{R} \times V \to V$, normalmente llamada producto por escalares) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ si se verifican las siguientes propiedades:

1. $(V, +)$ es un grupo conmutativo:

   a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \ \ \forall\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \in V$ (propiedad asociativa).

   b) Existe un elemento neutro ($\vec{0}$, vector cero o nulo) tal que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro).

   c) Para cada vector no nulo $\vec{u}$ existe un elemento opuesto $(-\vec{u})$ que sumado con $\vec{u}$ da el neutro (elemento opuesto).
   d) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}\ \forall\vec{u},\vec{v}\in V$ (conmutativa).

2. $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v},\ \ \forall\,\alpha\in\mathbb{R},\forall\vec{u},\vec{v}\in V$ (propiedad distributiva respecto de la suma de vectores).

3. $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u},\ \ \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall\vec{u}\in V$ (propiedad distributiva respecto de la suma de escalares).

4. $(\alpha\beta)\vec{u}=\alpha(\beta\vec{u}),\ \ \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall\vec{u}\in V$ (asociativa mixta).

5. $1\vec{u}=\vec{u}$, $\forall\vec{u}\in V$.

En lo que sigue, $(V,+,\cdot\mathbb{R})$ denotará al espacio vectorial V sobre los números reales.

5.1.1. Ejemplos de espacios vectoriales

- Los vectores del plano V_2 y los vectores del espacio V_3 con la suma habitual de vectores y el producto de vectores por un número real.

- El conjunto $\mathbb{R}^2=\{(x,y)/\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \qquad \alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$$

  siendo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

- El conjunto $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)/\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n\}$ con las operaciones

$$(x_1,\ldots,x_n)+(x'_1,\ldots,x'_n)=(x_1+x'_1,\ldots,x_n+x'_n)$$
$$\alpha(x_1,\ldots,x_n)=(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$$

  siendo $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Los polinomios de grado menor o igual que 3 ($P_3[x]$) con la suma habitual de polinomios y el producto de un polinomio por un número real. Los polinomios de grado 3 no son espacio vectorial.

Las siguientes son algunas propiedades que se deducen de la definición de espacio vectorial:

1. $0\vec{u} = \vec{0}\ \forall\ \vec{u} \in V$

   porque $0\vec{u} = (0+0)\vec{u} = 0\vec{u} + 0\vec{u} \Rightarrow 0\vec{u} = \vec{0}$)

2. $\alpha\vec{0} = \vec{0}\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

   porque $\alpha\vec{0} = \alpha(\vec{0}+\vec{0}) = \alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{0} = \vec{0}$).

3. Si $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, entonces o bien $\alpha = 0$, o bien $\vec{u} = \vec{0}$

   porque si $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{u} = (\alpha^{-1}\alpha)\vec{u} = \alpha^{-1}(\alpha\vec{u}) = \alpha^{-1}\vec{0} = \vec{0}$).

4. $-(\alpha\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u})$, en particular $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$

   porque

   $(-\alpha)\vec{u} + \alpha\vec{u} = (-\alpha+\alpha)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$

   y

   $\alpha(-\vec{u}) + \alpha\vec{u} = \alpha(-\vec{u}+\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$.

5. Si $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$, o bien $\alpha = 0$, o bien $\vec{u} = \vec{v}$

   porque si $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{0} = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} = \alpha(\vec{u} - \vec{v})$ y por la propiedad 3, se deduce que $\vec{u} = \vec{v}$.

5.2. Subespacio vectorial y operaciones

Sea $(V, +\cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial. Un subconjunto U de V es un subespacio vectorial de $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ si el subconjunto U con las mismas operaciones suma y producto por escalares verifica las propiedades necesarias para ser espacio vectorial.

Teorema: *Si $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ es un espacio vectorial, para que un subconjunto U de V sea subespacio vectorial de V basta que se verifiquen estas dos propiedades:*

1. *La suma es operación interna en el conjunto U:*

$$\vec{u} + \vec{v} \in U,\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in U.$$

2. *La multiplicación por escalares es una operación externa en U:*

$$\alpha\vec{u} \in U,\ \forall\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\vec{u} \in U.$$

Demostración. Excepto la propiedad del elemento neutro y la del opuesto, el resto de propiedades que tienen que cumplir los elemento de U para que el subconjunto sea un espacio vectorial se cumplen porque los elementos de U son elementos de V, y V es espacio vectorial.

Además, se verifica que si $\vec{u}$ es un elemento de U no nulo, entonces
$\vec{0} = 0\vec{u} \in U$ (U contiene al elemento neutro) y
$(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ (el elemento opuesto de $\vec{u}$ está contenido en U)
con lo que $(U, +, \cdot\mathbb{R})$ verifica todas las propiedades requeridas para ser espacio vectorial.

$\square$

5.2.1. Ejemplos de subespacios vectoriales

1. En cualquier espacio vectorial $(V, + \cdot \mathbb{R})$, el vector $\vec{0}$ y el total V son subespacios vectoriales.

2. En cualquier espacio vectorial $(V, +\cdot\mathbb{R})$, si $\vec{u} \in V$ y $\vec{v} \in V$, son subespacios vectoriales los conjuntos

$$< \vec{u} >= \{\alpha\vec{u}/\ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad < \vec{u}, \vec{v} >= \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}/\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

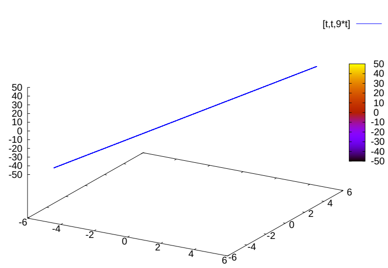


Figura 5.3: Subespacio generado por 1 vector en el espacio

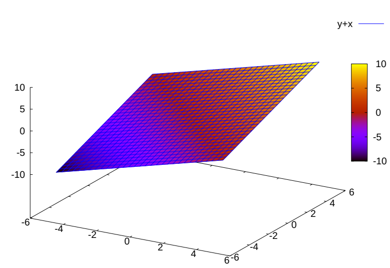


Figura 5.4: Subespacio generado por 2 vectores en el espacio

3. En $(V_2, + \cdot \mathbb{R})$, los vectores que están contenidos en una misma recta forma un subespacio vectorial si la recta pasa por el origen del plano. Sin embargo, si la recta no pasa por el origen no es subespacio vectorial.

4. En $(V_3, + \cdot \mathbb{R})$, los vectores que están contenidos en una misma recta (equivalentemente, en un mismo plano) forman un subespacio vectorial si la recta (equivalentemente, el plano) pasa por el origen del espacio. Sin embargo, si la recta (o el plano) no pasa por el origen no es subespacio vectorial.

5. En $(\mathbb{R}^2, + \cdot \mathbb{R})$,

   $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2x + y = 0\}$ es un subespacio vectorial

   $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2x + y = 3\}$ no es un subespacio vectorial.

6. En $(\mathbb{R}^3, + \cdot \mathbb{R})$,

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y = 2z\}$ es un subespacio vectorial

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y = 2z,\ 2x + y = 0\}$ es un subespacio vectorial

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y + 1 = 2z\}$ no es un subespacio vectorial.

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y + 1 = 2z,\ 2x + y = 0\}$ no es un subespacio vectorial

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x^2 = y\}$ no es un subespacio vectorial

7. Los polinomios de grado menor o igual que 2 forma un subespacio de los polinomios de grado menor o igual que 3.

Ejemplo: *Justifica si* $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y = 2z\}$ *es o no es un subespacio vectorial del espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$

Dado que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial, según el teorema presentado basta demostrar lo siguiente:

1. La suma es operación interna en el conjunto U.

   Tomamos dos vectores genéricos de U: $(x, y, z) \in U$ y $(x', y', z') \in U$.

   Como son de U verifican $x + y = 2z$ y $x' + y' = 2z'$.

   Sumamos los dos vectores y resulta el vector $(x + x', y + y', z + z')$.

   Comprobamos que la suma da como resultado un vector de U:

$$¿(x+x')+(y+y')=2(z+z')?$$

$$\begin{aligned}(x+x')+(y+y') &= \\ &= x+y \ + \ x'+y' = 2z+2z' &= \\ && = 2(z+z')\end{aligned}$$

2. La multiplicación por escalares es una operación externa en U.

   Tomamos un número $\alpha \in \mathbb{R}$ y un vector $(x,y,z) \in U$.

   Como el vector es de U verifica $x+y=2z$.

   El resultado del producto es $\alpha \cdot (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.

   Comprobamos si $\alpha \cdot (x,y,z)$ resulta un vector de U:

$$¿\alpha \cdot (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in U?$$

$$\begin{aligned}\alpha x + \alpha y &= \\ &= \alpha\ (x+y) = \alpha\ 2z &= \\ && = 2\ \alpha z\end{aligned}$$

Puesto que U verifica las dos condiciones del teorema, U es un subespacio vectorial.

□

5.2.2. Operaciones con subespacios

Sea $(V,+.\cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial y U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales de V.

La intersección $U_1 \cap U_2$ es el conjunto de vectores que pertenecen a U_1 y a U_2.

$$U_1 \cap U_2 = \{u \in V/\ u \in U_1,\ u \in U_2\}$$

$U_1 \cap U_2$ es un subespacio vectorial de V y es el mayor subespacio vectorial que está contenido en U_1 y U_2.

Ejemplos:

1. La intersección en el espacio de dos planos distintos que pasan por el origen es una recta que pasa por el origen, que es un subespacio vectorial.

2. La intersección en el espacio de un plano y una recta que pasan ambos por el origen es un subespacio. Será el punto origen si la recta es secante o bien la propia recta si ésta está contenida en el plano.

□

En general, cualquier intersección de subespacios vectoriales (no necesariamente dos subespacios sino más) es un subespacio vectorial.

La unión $U_1 \cup U_2$ es el conjunto de vectores que, o bien son de U_1, o bien son de U_2.

$U_1 \cup U_2$ no es, en general, un subespacio vectorial.

$$U_1 \cup U_2 = \{u \in V / \ u \in U_1 \ o' \ u \in U_2\}$$

El conjunto de vectores que resultan de sumar un vector de U_1 y otro de U_2 se denomina $U_1 + U_2$.

$$U_1 + U_2 = \{u \in V / \ u = u_1 + u_2, \ u_1 \in U_1, \ u_2 \in U_2\}$$

$U_1 + U_2$ es un subespacio vectorial de V y es el menor subespacio vectorial que contiene a U_1 y U_2.

En general, la suma de cualquier número finito de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Ejemplos: En el espacio, la suma de dos planos distintos que pasan por el origen será todo el espacio.

La suma de una plano en el espacio y una recta, que pasen ambos por el origen, será un subespacio vectorial. Resultará el propio plano si la recta están contenida en el plano. En caso contrario, será todo el espacio.

□

5.3. Dependencia e independencia lineal. Sistemas generadores

Sea $(V, +. \cdot \mathbb{R})$ un espacio vectorial.

Se denomina familia o sistema de vectores a cualquier conjunto de vectores contenidos en V.

Se dice que un vector $\vec{v} \in V$ es **combinación lineal** de los vectores del sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ (o que $\vec{v}$ se puede construir a partir de

$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ por combinación lineal) si existen unos números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n}.$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ el vector $(1,2,5)$ es combinación lineal de los vectores $(1,2,0)$ y $(0,0,3)$, porque

$$(1,2,3) = (1,2,0) + \frac{5}{3}(0,0,3)$$

También se puede justificar comprobando que

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad y \quad \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

El vector $\overrightarrow{0}$ es siempre combinación lineal de cualquier sistema de vectores. $\square$

Se dice que un sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es **ligado** (o que los vectores del sistema son linealmente dependientes) si se verifica alguna de estas condiciones:

- El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ con **algún** escalar α_i distinto de 0.
- **Alguno** de los vectores del sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es combinación del resto de vectores.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ el sistema formado por los vectores

$$\{(1,2,3), (1,2,0), (0,0,5)\}$$

es ligado, porque el vector $(1,2,3)$ es combinación lineal de los otro dos vectores.

En $\mathbb{R}^3$ cualquier sistema que contenga al vector $(0,0,0)$ es ligado. ¿Por qué?

$\square$

Se dice que un sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es **libre** (o que los vectores del sistema son linealmente independientes) si se verifica alguna de estas condiciones:

- El vector $\vec{0}$ **solo** es combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ con **todos** los escalares iguales a 0.
- **Ninguno** de los vectores del sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ es combinación del resto de vectores.

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, para comprobar si un sistema es libre o ligado, o si alguno de los vectores es combinación lineal de los demás, se puede calcular el rango de la matriz de las componentes de los vectores (el rango es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes).

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ el sistema formado por los vectores

$$\{(1,2,3),(1,2,0),(3,2,-1)\}$$

es libre porque el rango de la matriz de sus coordenadas dispuestas por filas es 3, es decir, ninguna fila es combinación lineal de las demás.

$\square$

Se dice que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\} \subset V$ es un **sistema generador** de V (o que los vectores del sistema generan V) si todos los vectores de V son combinación lineal de los vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$.

Ejemplo: El sistema formado por los vectores $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$. También $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,-1,1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

$\square$

Ejercicio: Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, considera el subconjunto

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y\}$$

1. Demuestra que es subespacio vectorial.
2. Encuentra, si es posible, sistemas generadores con 1, 2, 3 y 4 vectores.
3. Encuentra, si es posible, un sistema generador libre.

El conjunto total de vectores que se pueden poner como combinación lineal de un sistema de vectores se denomina **subespacio generado** por el sistema y es un subespacio vectorial.

Ejemplos: Los sistemas

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \qquad \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,-1,1)\}$$

son ambos sistemas generadores de $\mathbb{R}^3$.

El sistema $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es sistema generador del subespacio

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$$

.

$\square$

Estas son algunas propiedades que se deducen de todo lo anterior:

1. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es un sistema libre y $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}, \vec{w}\}$ es ligado, entonces $\vec{w}$ es combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$.

2. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es un sistema generador de V y $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_m}\}$ es un sistema libre de V con $m \leq n$, entonces el sistema libre se puede completar con $n - m$ vectores del sistema generador para que resulte también un sistema generador de V.

3. Todo sistema libre de V tiene igual o menor número de vectores que cualqier sistema generador de V.

Ejercicio: Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio generado por los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,2,3),(0,1,2)\}.$$

Ejercicio: Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio generado por los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,2,3),(0,1,2),(1,3,5)\}.$$

Ejercicio: Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio generado por los vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\{(2,1,-1,1),(1,-2,1,1),(3,-1,0,2)\}.$$

5.4. Base de un espacio vectorial. Dimensión

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial.

Definición 1: Se dice que un sistema de vectores $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es base de V si se verifican las dos condiciones siguientes:

- B es un sistema **libre**
- B es un sistema **generador** de V

Definición 2: Se dice que un sistema de vectores $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es base de V si todos los vectores de V se pueden expresar como **combinación lineal** de los vectores de B de forma **única**.

Las dos definiciones anteriores son equivalentes.

Ejemplos: Los vectores $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ forma una base del plano XY. Los vectores $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ forman una base de todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

$\square$

Un espacio vectorial V tiene dimensión finita si admite un sistema generador con un número finito de vectores.

$\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión finita. El espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales no es de dimensión finita.

Teorema: Todo espacio V de dimensión finita distinto del espacio nulo $\vec{0}$ tiene al menos una base y todas las bases del espacio tienen el mismo número de vectores. Se llama **dimensión** de V al número de vectores de una de sus bases.

$$\dim V = \{\text{número de vectores de una base}\}$$

Ejemplo: Dado que en $\mathbb{R}^3$ hemos encontrado una base formada por tres vectores, cualquier otra base de $\mathbb{R}^3$ también tendrá tres vectores. La dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3.

$\square$

El **rango** de un sistema de vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es la dimensión del subespacio generado por el sistema.

Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita. Esta son algunas propiedades que se deducen de todo lo anterior:

1. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\} \subset V$ es un sistema libre, siempre es posible completarlo hasta formar una base.

2. Si $\dim V = n$, todo sistema de más de n vectores es ligado.

3. Si $\dim V = n$, todo sistema generador tiene al menos n vectores.

4. Si $\dim V = n$, entonces $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\} \subset V$ es base si cumple **alguna** de estas condiciones
   - B es libre
   - B es sistema generador

5. Si $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ es una base de V y $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_p}\} \subset V$ es un sistema libre, se puede asegurar que hay $n-p$ vectores de B que añadidos a $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_p}\}$ forman una base.

6. El rango del sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ coincide con el máximo número de vectores independientes contenidos en el sistema.

7. Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V de dimensión finita, entonces
$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

5.5. Coordenadas de un vector en una base

Sea $(V, + \cdot \mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión n. Dada una base $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$, si $\vec{v} \in V$ existen unos únicos números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que
$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n}$$
Dichos números $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ son las **coordenadas** de $\vec{v}$ en la base B.

Ejemplo: El sistema $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ porque forma un sistema libre de tres vectores y el espacio tiene dimensión 3. En dicha base, el vector $v = (2,5,7)$ tiene coordenadas $-3, -2, 7$ porque:
$$(2,5,7) = (-3)(1,0,0) + (-2)(1,1,0) + 7(1,1,1)$$
Las coordenadas del mismo vector v en la base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ son $2, 5, 7$:
$$(2,5,7) = 2(1,0,0) + 5(0,1,0) + 7(0,0,1)$$

$\square$

Estas son algunas propiedades que se deducen de lo anterior:

1. Un mismo vector $\vec{v}$, en general, tiene unas coordenadas diferentes en cada base.

2. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es una base de V, las coordenadas de $\vec{v_i}$ son

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_i = 1,\ \ldots,\ \alpha_n = 0,$$

   es decir

$$\vec{v_1} = (1, 0, \ldots, 0),\ \vec{v_2} = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \vec{v_n} = (0, 0, \ldots, 1)$$

3. Se llama base canónica de $\mathbb{R}^n$ a la formada por los vectores

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$$

4. Fijada una base $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$, cualquier espacio vectorial de dimensión n se puede identificar con el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

5.6. Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo

Dada una base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ de un espacio vectorial V_n de dimensión n, el producto escalar habitual (que será el que utilicemos salvo que se indique lo contrario) se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

De este modo, a cada par de vectores se le asigna un número real.

La base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ la denominaremos base canónica.

Ejemplo El producto escalar de $(-1, 2, 3)$ y $(9, -3, 2)$ es

$$(-1, 2, 3) \cdot (9, -3, 2) = -9 - 6 + 6 = -9$$

$\square$

En general, si V es un espacio vectorial, un **producto escalar** sobre V es una aplicación

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ \vec{u}, \vec{v} & \mapsto & \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$

que verifique

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0 \ \forall \vec{u} \neq \vec{0}$. Además, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \ \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

4. $\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

Un espacio vectorial V dotado de un producto escalar es un **espacio vectorial euclídeo**.

Otra propiedades que se deducen en todo espacio vectorial euclídeo:

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}, \ \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

2. $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

3. $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0 \ \forall \vec{u} \in V$

5.6.1. Norma de un vector

En el espacio euclídeo con el producto escalar habitual, la norma de un vector $\vec{u}$ es

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

La norma de un espacio euclídeo es una forma de "medir"los vectores del espacio.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, los vectores $\frac{\pm\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ tienen norma 1 y se les denomina unitarios.

Ejemplo: La norma de los vectores $(-1, 2, 3)$ y $(9, -3, 2)$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\|(-1, 2, 3)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|(9, -3, 2)\| = \sqrt{9^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{94}$$

El vector $(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$ tiene norma 1.

□

En general, dado un espacio euclídeo $(V, \cdot)$, se denomina norma $\| \ \|$ a la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \| \ \| : V & \to & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \mapsto & \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \end{array}$$

Propiedades de la norma:

1. $\|\vec{u}\| > 0 \ \forall \vec{u} \neq \vec{0}$. Además, $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

2. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \ \|\vec{u}\| \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

3. $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \ \|\vec{u}\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{u} \in V$

4. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

La norma de un espacio euclídeo sirve para "medir" los vectores del espacio. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, los vectores $\frac{\pm \vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ tienen norma 1 y se les denomina unitarios.

5.6.2. Vectores ortogonales

Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales (se representa $\vec{u} \perp \vec{v}$) o que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ o que $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ los vectores $(-1, 2, 3)$ y $(9, -3, 2)$ en $\mathbb{R}^3$ no son ortogonales:

$$(-1, 2, 3) \cdot (9, -3, 2) = -9 - 6 + 6 = -9 \neq 0$$

Un vector (x, y, z) ortogonal a $(-1, 2, 3)$ tendrá que cumplir

$$(-1, 2, 3) \cdot (x, y, z) = -x + 2y + z = 0$$

Por ejemplo, los vectores $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, -2)$ son ortogonales a $(-1, 2, 3)$.

En $\mathbb{R}^2$ un vector (x, y) ortogonal a $(2, 3)$ tendrá que cumplir

$$(2, 3) \cdot (x, y) = 2x + 3y = 0$$

Por ejemplo los vectores $(-3, 2)$ y $(3, -2)$ son ortogonales a $(2, 3)$.

$\square$

Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\vec{0}$ es ortogonal a todos los vectores y es el único vector ortogonal a sí mismo.

2. Su $\vec{u} \perp \vec{v}$, lo mismo ocurre con todos sus proporcionales.

3. Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{u}$ es ortogonal a las combinaciones lineales de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

4. Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

Se dice que una base es

- **ortogonal** si los vectores que la forman son ortogonales dos a dos. $\{(2,0,0),(0,3,0),(0,0,-5)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
- **ortonormal** si los vectores que la forma son unitarios y ortogonales dos a dos. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

5.6.3. Ángulo determinado por dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos de un espacio euclídeo, se define ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (denotado $\widehat{uv}$) al único número real $\alpha \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|}$$

Si alguno de los vectores es $\vec{0}$, el ángulo determinado se dice que es nulo. Se deduce que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\cos(\widehat{uv})$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{v} = (-1,2,3)$ y $\vec{u} = (9,-3,2)$ forman el siguiente ángulo:

$$\cos(\widehat{uv}) = \frac{(-1,2,3)\cdot(9,-3,2)}{\|(-1,2,3)\|\;\|(9,-3,2)\|} = \frac{-9}{\sqrt{14}\sqrt{94}} \Rightarrow \widehat{uv} \approx 115{,}96^o$$

□

5.7. Producto vectorial y producto mixto en V_3

Sea V_3 un espacio vectorial de dimensión 3 y sea $B = \{\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$ una base de V_3. Consideremos tres vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_3$ linealmente independientes, cuyas coordenadas en la base son $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)$ y (c_1,c_2,c_3), respectivamente. Se dice que $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ están orientados positivamente respecto a la base B si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$$

En caso contrario, están orientados negativamente.

Ejemplo Los vectores $(2, -5, 4), (1, -2, 1), (1, -4, 6)$ están orientados positivamente:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

Los vectores $(1, -2, 1), (2, -5, 4), (1, -4, 6)$ están orientados negativamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -1$$

$\square$

5.7.1. Producto vectorial

Fijada una base, se llama producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos (denotado $\vec{u} \times \vec{v}$), al único vector de V_3 que verifica:

- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\| \; \operatorname{sen}(\widehat{uv})$

- $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ y $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$
- Los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ están orientados positivamente respecto a la base fijada.

Si algún vector es nulo, el producto vectorial se define como el vector $\vec{0}$.

Propiedades del producto vectorial:

1. Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, o algún vector es nulo o los vectores son paralelos.
2. Con el producto escalar habitual, si la base canónica es $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, entonces:
$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3} \qquad \vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1} \qquad \vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$$
3. Con el producto escalar habitual, si la base canónica es $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ y
$$u = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3} \quad v = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3},$$

entonces

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e_3}$$

Lo anterior puede memorizarse (aunque no es una expresión matemática correcta) como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

4. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3$

5. $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

6. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$

7. El producto vectorial no es asociativo.

Ejercicio: Comprueba las propiedades con los vectores $\vec{u} = (0, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, 0)$.

5.7.2. Producto mixto

Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, se define el producto mixto de los tres vectores como

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Propiedades del producto mixto:

1. En valor absoluto, el producto mixto es el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores.

2. Con el producto escalar habitual se verifica que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

3. Como consecuencia de las propiedades de los determinantes

$$\begin{aligned}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] =& [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = \\ =& -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]\end{aligned}$$

   $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_3$.

4. Si el producto mixto es 0, los tres vectores son linealmente dependientes.

5. $[\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u}',\vec{v},\vec{w}]$, $\forall \vec{u},\vec{u}',\vec{v},\vec{w} \in V_3$.

6. $[\lambda\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\lambda\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w}] = \lambda[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_3$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio: El producto mixto de los vectores $\vec{v} = (2,0,1)$, $\vec{u} = (0,2,3)$, $\vec{w} = (-1,1,0)$ es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

El volumen del paralelepípedo definido por esos tres vectores es 4.

El producto mixto de los vectores $\vec{v} = (2,0,1)$, $\vec{u} = (0,2,2)$, $\vec{w} = (-1,1,0)$ es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

por lo que los tres vectores son dependientes y están en el mismo plano.

$\square$

Capítulo 6

Espacio afín euclídeo

6.1. El espacio afín bidimensional y tridimensional

Sea E el conjunto de puntos del plano y V el conjunto de vectores del plano. Cada par de puntos $A, B \in E$ definen un único vector del plano $\vec{v} = [\vec{AB}]$. Es posible definir la aplicación

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow V \\ (A, B) &\longmapsto \vec{v} = [\vec{AB}] \end{aligned}$$

Figura 6.1: Dos puntos A y B

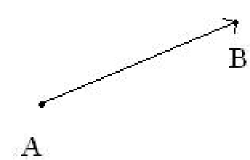


Figura 6.2: vector $\vec{AB}$

Esta aplicación verifica que

1. $\vec{AB} = \vec{0} \Rightarrow A = B$

2. Si $A, B, C \in E$, entonces $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

3. Dado un vector $\vec{v} \in V$ y un punto $A \in E$, existe un único punto $B \in E$ tal que $\vec{AB} = \vec{v}$.

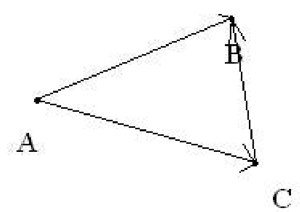


Figura 6.3: Vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{CB}$

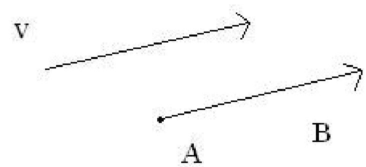


Figura 6.4: $\vec{AB} = v$

En las condiciones anteriores, siendo E el conjunto de puntos del plano y V el conjunto de vectores del plano, la terna (E, V, f) constituye el espacio afín bidimensional (simplificadamente, E_2).

Si E es el conjunto de puntos del espacio y V es el conjunto de vectores del espacio, la terna (E, V, f) constituye el espacio afín tridimensional (simplificadamente, E_3).

6.1.1. Espacio afín n-dimensional

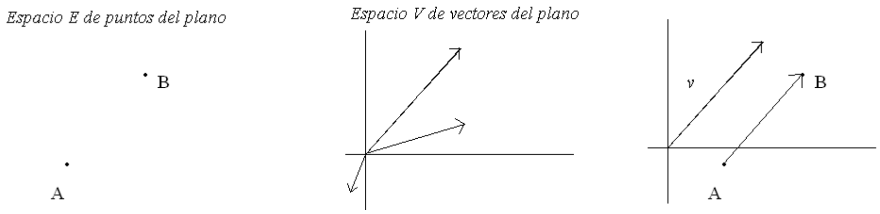
Si E es un conjunto no vacío cualquiera de puntos, V es un espacio vectorial de dimensión n y f es una aplicación que verifica las condiciones anteriores, la terna (E, V, f) constituye el espacio afín n-dimensional (simplificadamente, E_n).

En todo espacio afín E_n se verifica además que

1. $f(A, B) = -f(B, A)$.

2. Si $f(A, B) = f(C, D)$, entonces $f(A, C) = f(B, D)$.

Ejemplo: Si E es el conjunto de puntos del plano, V es el espacio vectorial de los vectores del plano y f es la aplicación que a cada dos puntos del plano



A, $B \in E$ le asigna el vector $\vec{AB}$, la terna (E, V, f) constituye el **espacio afín bidimensional** E_2.

Ejemplo: Si E es el conjunto de puntos del espacio, V es el espacio vectorial de los vectores del espacio y f es la aplicación que a cada dos puntos del espacio A, $B \in E$ le asigna el vector $\vec{AB}$, la terna (E, V, f) constituye el **espacio afín tridimensional** E_3.

6.1.2. Subespacio afín

Dado un espacio afín $E_n = (E, V, f)$, se llama subespacio afín de E_n determinado por un punto $p \in E$ y por un subespacio vectorial W de V, al conjunto de puntos

$$\{x = p + \vec{w} / \, \vec{w} \in W\}$$

Los subespacios afines en el espacio afín bidimensional son los puntos, las rectas y todo el espacio.

Los subespacios afines en el espacio afín tridimensional son los puntos, las rectas, los planos y todo el espacio.

6.2. Sistemas de referencia afín. Coordenadas de un punto.

Sea $E_n = (E, V, f)$ un espacio afín. Si $O \in E$ y $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ es una base de V, se denomina sistema de referencia afín de E_n a $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$.

Las rectas $O+ < \vec{u_1} >$, $O+ < \vec{u_2} >$, …,$O+ < \vec{u_n} >$ se denominan ejes coordenados.

Fijar un sistema de referencia afín es fijar un punto O como origen y una base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ del espacio vectorial correspondiente.

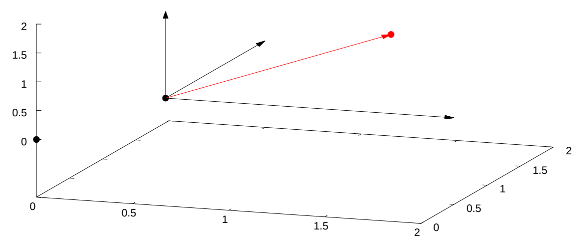


Figura 6.5: Sistema de referencia afín en E_3

Se llaman coordenadas cartesianas de un punto $P \in E$ en el sistema de referencia afín $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, a las coordenadas del vector $\vec{OP}$ en la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$:

$$\vec{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{u_n}$$

es decir, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las coordenadas cartesianas de P en el sistema de referencia $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$.

Si en el sistema $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ $P \in E_n$ y $Q \in E_n$ tienen coordenadas $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, respectivamente, entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene coordenadas $(q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, p_n - q_n)$:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P, \qquad P = Q + \overrightarrow{PQ}, \qquad Q = P - \overrightarrow{PQ}$$

Ejemplo: Si en el sistema de referencia $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ consideramos los puntos $P = (1, 2, 3)$ y $Q = (5, 2, 7)$, estos puntos determinan el vector $\vec{PQ}$

$$\vec{PQ} = Q - P = (5, 2, 7) - (1, 2, 3) = (4, 0, 4)$$

□

Ejercicio: Calcula

1. Las coordenadas del punto medio entre $A = (2, 1, 0)$ y $B = (4, 1, -2)$.
2. Las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

6.3. La recta en el espacio afín

Una recta en el espacio afín E_n queda determinada por un punto A contenido en la recta y un vector director $\overrightarrow{v}$ no nulo que determine la dirección.

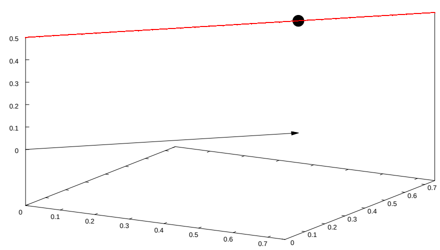


Figura 6.6: Una recta y su vector director

Todo punto X de la recta verifica que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{v} \qquad \text{o bien} \qquad X = A + \lambda \overrightarrow{v}$$

que son las ecuaciones vectoriales de la recta. Sustituyendo las coordenadas

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) + \lambda(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

nos queda

$$x_1 = a_1 + \lambda v_1,\ x_2 = a_2 + \lambda v_2,\ \dots,\ x_n = a_n + \lambda v_n$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta. Si $v_i \neq 0$ para todo $i \in 1, 2, \dots, n$

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{v_n}$$

que es la ecuación de la recta forma continua.

Como los vectores $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{v}$ son dependientes, la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 \\ \dots & \\ x_n - a_n & v_n \end{pmatrix}$$

tendrá rango 1. De esta última condición se obtienen las ecuaciones cartesianas o implícitas de la recta.

Por ejemplo, si $n = 3$, y $v_1 \neq 0$ quedarían así:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & v_3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 \\ x_3 - a_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

es decir:

$$v_2(x_1 - a_1) - v_1(x_2 - a_2) = 0, \quad v_3(x_1 - a_1) - v_1(x_3 - a_3) = 0$$

y simplificando obtenemos las ecuaciones implícitas

$$v_2x_1 - v_1x_2 = v_2a_1 - v_1a_2, \quad v_3x_1 - v_1x_3 = v_3a_1 - v_1a_3.$$

Ejercicio: Calcula en $\mathbb{R}^3$

1. Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A = (1, 2, 3)$ y tiene como dirección la del vector $1, 2, 0$.

2. Las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (2, 4, 3)$.

3. Calcula dos puntos de la recta distintos a los usados para determinar las ecuaciones.

4. Comprueba si los puntos $(4, 2, 3)$ y $(1, 5, -2)$ pertenecen a las rectas anteriores.

Ejercicio: Calcula las ecuaciones de la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto $A = (0, 5)$ y tiene la dirección del vector $(3, -1)$.

6.4. El plano en el espacio afín

Un plano en el espacio afín queda determinado por un punto A contenido en el plano y dos vectores directores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ que indican la dirección.

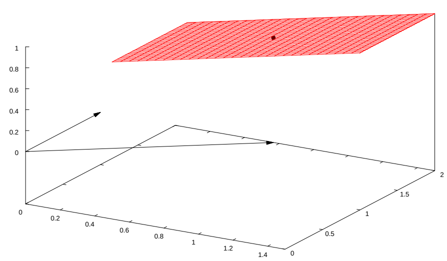


Figura 6.7: Un plano y dos de sus vectores directores

Si X es un punto del plano, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{u} \qquad \text{o bien} \qquad X = A + \lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{u}$$

que son las ecuaciones vectoriales del plano. Sustituyendo las coordenadas

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)& \\ &+\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \mu(u_1, u_2, \ldots, u_n)\end{aligned}$$

nos queda

$$\begin{aligned}x_1 = a_1 + \lambda v_1 + \mu u_1,\ x_2 = a_2 + \lambda v_2 + \mu u_2, \ldots& \\ \ldots,\ x_n = a_n + \lambda v_n + \mu u_n&\end{aligned}$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano.

Como los vectores AX, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ son dependientes, la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 & u_2 \\ \ldots & & \\ x_n - a_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

tendrá rango 2. De esta última condición se obtienen las ecuaciones cartesianas o implícitas del plano.

Por ejemplo, si $n = 3$ quedarían así:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & v_3 & u_3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificando lo anterior, se obtendría una expresión del tipo

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = D$$

que es la ecuación implícita de un plano en el espacio.

Ejercicio: Calcula en $\mathbb{R}^3$

1. Las ecuaciones del plano que pasa por el punto $A = (1, 0, 0)$ y tiene las direcciones de los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 0)$.

2. Las ecuaciones del plano que pasa por los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 0)$ y $C = (0, 2, 1)$.

3. Las ecuaciones del plano que contiene a la recta $x = 2 + \lambda$, $y = 3 - 3\lambda$, $z = 4 + 2\lambda$.

6.5. Incidencia, intersección y paralelismo en E_3

Consideremos el espacio afín E_3. Un punto $P \in E_3$ es incidente con una recta (o con un plano) si está contenido en la recta (o en el plano).

6.5.1. Puntos alineados y coplanarios

Tres puntos A, B, C están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

Tres puntos A, B, C están siempre en el mismo plano.

Cuatro puntos A, B, C, X son coplanarios si los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AX}$ son dependientes.

Ejercicio: Estudia la posición de los siguientes puntos: $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 5, 6)$, $C = (-2, -3, 0)$, $D = (3, -1, 2)$

6.5.2. Planos que pasan por una recta

En E_3, las ecuaciones implícitas de una recta son dos, cada una de ellas es la ecuación de un plano. La recta es la intersección de los dos planos.

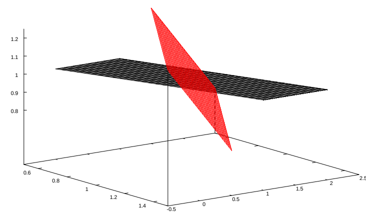


Figura 6.8: dos planos que determinan una recta

Se llama **haz de planos** que pasan por una recta de ecuación

$$\begin{array}{c} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array}$$

al conjunto de planos que contienen a esa recta. Si en la expresión

$$ax + by + cz + d + \ \lambda \ (a'x + b'y + c'z + d')$$

le damos valores al parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ obtendremos todos los planos del haz salvo el de ecuación $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Ejercicio: Calcula la ecuación del plano que pasa por la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right.$$

y por el punto $A = (1, 2, 3)$.

6.5.3. Planos y rectas que pasan por un punto

Se llama **radiación de planos** (equivalentemente, **radiación de rectas**) que pasan por un punto $P \in E_3$ al conjunto de planos (de rectas) que pasan por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$. La ecuación de cualquier plano que pasa por P es de la forma

$$Ax + By + Cz - (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) = 0$$

La ecuación de cualquier recta que pasa por $P = (p_1, p_2, p_3)$ es de la forma

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{x - p_2}{v_2} = \frac{x - p_3}{v_3}.$$

Ejercicio: Calcula la ecuación del plano que pasa por los $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, 0)$ y por el punto C determinando por los planos

$$\pi_1 \equiv x - y - z + 1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv 2x + z = 0 \qquad \pi_3 \equiv x + y - 2z - 2 = 0$$

6.5.4. Posiciones relativas de rectas y planos

Posición relativa de dos rectas

Dos rectas $A + \lambda\overrightarrow{v}$ y $B + \alpha\overrightarrow{u}$:

- Son paralelas si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ son proporcionales. Serán coincidentes si además tienen algún punto en común.
- Son secantes si tiene algún punto en común. En este caso, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{AB}$ serán linealmente dependientes. Los puntos comunes se calculan resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.
- Se cruzan si no son paralelas ni secantes. En este caso, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{AB}$ serán linealmente independientes.

Para estudiar la posición relativa de dos rectas se puede estudiar el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{matrix} ax + by + cz + d = 0 & \qquad & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & \qquad & a'_1x + b'_1y + c'_1z_1 + d'_1 = 0 \end{matrix}$$

Si A es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las cuatro ecuaciones y A^* es la matriz ampliada, se tiene que:

1. Si $\text{rango}(A) = 3 \neq \text{rango}(A^*) = 4$, las rectas se cruzan.

2. Si rango(A) = rango$(A^*) = 3$, las rectas son secantes en un solo punto.

3. Si rango$(A) = 2 \neq$ rango$(A^*) = 3$, las rectas son paralelas.

4. Si rango(A) = rango$(A^*) = 2$, las rectas son iguales.

Ejercicio: Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \qquad s \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+4}{5}$$

y si son secantes calcula el punto de corte.

$\square$

Posición relativa de una recta y un plano

Dados una recta $A + \lambda\overrightarrow{v}$ y un plano $B + \alpha < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} >$, se dice que

- Son paralelos si $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.
- Son secantes si tienen algún punto en común.
- La recta están contenida en el plano si son paralelos y tienen algún punto en común.

Para estudiar la posición relativa de una recta y un plano se puede estudiar el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{array}{c} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$$

Si A es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las tres ecuaciones y A^* es la matriz ampliada, se tiene que:

1. Si rango(A) = rango$(A^*) = 3$, la recta y el plano se cortan en un solo punto.

2. Si rango$(A) = 2 \neq$ rango$(A^*) = 3$, la recta y el plano paralelos.

3. Si rango(A) = rango$(A^*) = 2$, la recta están contenida en el plano.

Ejercicio: Estudia la posición relativa del la recta r y el plano π:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3} \qquad \pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$$

y si son secantes calcula el punto de corte.

$\square$

Posición relativa de dos planos

Dados dos planos $A + \lambda < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ y $B + \alpha < \overrightarrow{m}, \overrightarrow{n} >$, se dice que

- Son paralelos si los vectores $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{n}$ son dependientes tomados de tres en tres.
- Son secantes si tienen algún punto en común.
- Son coincidentes si son paralelos y tienen algún punto en común.

Para estudiar la posición relativa de dos planos se puede estudiar el sistema que forman sus ecuaciones:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$$

Si A es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las dos ecuaciones y A^* es la matriz ampliada, se tiene que:

1. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, los planos se cortan en una recta.
2. Si $\text{rango}(A) = 1 \neq \text{rango}(A^*) = 2$, los planos son paralelos y no se cortan.
3. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 1$, los planos son coincidentes.

Ejercicio: Estudia la posición relativa de los planos

$$\pi \equiv 4x + y + z - 3 = 0 \qquad \pi' \equiv 2x + y + 5z - 1 = 0$$

y si son secantes calcula la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan.

$\square$

Posición relativa de tres planos

Dados tres planos de ecuaciones

$$ax+by+cz+d=0 \quad a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

si A es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las tres ecuaciones y A^* es la matriz ampliada, se tiene que:

1. Si $\text{rango}(A)=\text{rango}(A^*)=3$, los planos se cortan en un punto.
2. Si $\text{rango}(A)=2\neq\text{rango}(A^*)=3$, los planos no tienen ningún punto en común.
3. Si $\text{rango}(A)=\text{rango}(A^*)=2$, los planos se cortan en una recta.
4. Si $\text{rango}(A)=1\neq\text{rango}(A^*)=2$, los planos son paralelos (dos de ellos pueden coincidir).
5. Si $\text{rango}(A)=\text{rango}(A^*)=1$, los planos son coincidentes.

Ejercicio: Estudia la posición de los planos

$$\begin{aligned}\pi_1 \equiv &\quad 2x-y+3z=0\\ \pi_2 \equiv &\quad 4x-2y+6z+4=0\\ \pi_3 \equiv &\quad x+2y-z-1=0\end{aligned}$$

Estudia también la posición relativa de los planos tomados de dos en dos.

$\square$

6.6. Espacio afín euclídeo E_3

Un espacio afín euclídeo es aquel en el que el espacio vectorial asociado tiene definido un producto escalar.

En un espacio afín euclídeo es posible estudiar ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

Sea E_3 un espacio afín de dimensión 3 y $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ la base canónica para el producto escalar correspondiente, de modo que el producto escalar es

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

6.6.1. Vector normal a un plano

Un vector $\vec{n}$ es normal a un plano π si para cualesquiera dos puntos del plano A, B, se verifica que $\vec{n} \perp \vec{AB}$, es decir, $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$.

Ecuación del plano que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y es perpendicular la vector $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$:

$$\vec{n} \cdot \vec{PX} = 0 \Rightarrow n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0.$$

El plano de ecuación $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ tiene como vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$.

6.6.2. Ángulos

Ángulo entre dos rectas

Se llama ángulo determinado por las rectas $r : A + \lambda\vec{u}$ y $s : B + \alpha\vec{v}$ al siguiente

$$\widehat{r,s} = \text{mín}[\widehat{uv}, \widehat{-uv}] = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\|}$$

Las rectas r y s son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales.

Ángulo entre dos planos

Se llama ángulo determinado por los planos

$$\pi : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \qquad \pi' : A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 + D' = 0$$

al menor de los ángulos que forman sus vectores ortogonales, que es igual al ángulo diedro formado por los planos. Si $\vec{n} = (A, B, C)$ y $\vec{n}' = (A', B', C')$, entonces

$$\widehat{\pi, \pi'} = \text{mín}[\widehat{nn'}, \widehat{-nn'}] = \arccos \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{\|\vec{n}\| \; \|\vec{n}'\|}$$

Las planos π y π' son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales.

Ángulo entre recta y plano

Se llama ángulo determinado por una recta $r : A + \lambda\vec{u}$ y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ al complementario del ángulo formado los vectores $\vec{u}$

y $\vec{n} = (A, B, C)$, es decir:

$$\widehat{r\pi} = \operatorname{arc\,sen} \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \ \|\vec{n}\|}$$

Recta y plano son perpendiculares si $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son paralelos.

6.6.3. Distancias

Distancia entre dos puntos

Si A y B son dos puntos del espacio euclídeo E_3, se define distancia entre A y B a la norma del vector $\vec{AB}$:

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a un plano de ecuación $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ es la menor de las distancias entre P y los puntos del plano. Esta distancia se alcanza en el punto P' resultado de proyectar P ortogonalmente sobre el plano.

Si $\vec{n} = (A, B, C)$ y $X = (x_1, x_2, x_3)$ es un punto cualquiera del plano, se deduce que:

$$|\vec{PX} \cdot \vec{n}| = |(\vec{PP'} + \vec{P'X}) \cdot \vec{n}| = |\vec{PP'} \cdot \vec{n}| = \|\vec{PP'}\| \ \|\vec{n}\| \ \cos(\widehat{PP', n})$$

Como $\vec{PP'}$ y $\vec{n}$ son paralelos

$$|\vec{PX} \cdot \vec{n}| = \|\vec{PP'}\| \ \|\vec{n}\|$$

y

$$d(P, \pi) = \|\vec{PP'}\| = \frac{|\vec{PX} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Podemos calcular P' calculando previamente la recta perpendicular al plano π que pasa por P e intersecándola con el plano π.

Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a una recta $r : A+\lambda\vec{u}$ es la menor de las distancias entre P y los puntos de la recta. Esta distancia se alcanza en el punto P' resultado de proyectar P ortogonalmente sobre la recta.

Los vectores $\vec{AP}$ y $\vec{u}$ determinan un paralelogramo cuyo área es $\|\vec{AP} \times \vec{u}\|$ o bien $\|\vec{u}\| \cdot d(P, r)$. Por tanto

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Podemos calcular P' imponiendo la condición $\vec{PP'} \cdot \vec{u} = 0$.

Distancia entre dos rectas

Se llama distancia entre las rectas $r : A+\lambda\vec{u}$ y $B+\alpha\vec{v}$ a la mínima distancia entre dos puntos, uno de cada recta.

La distancia es 0 si las rectas se cortan

Si son paralelas, la distancia es la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra recta.

Si las rectas se cruzan, la distancia entre ambas es la distancia entre $P \in r$ y $Q \in S$, siendo P y Q puntos de la recta perpendicular común a r y s.

Los vectores $\vec{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinan un paralelepípedo cuyo volumen es $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$ o bien $\|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{PQ}\|$. Por tanto

$$d(r, s) = \|\vec{PQ}\| = \frac{[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Los puntos P y Q se pueden calcular como intersección de la recta perpendicular común con r y s, respectivamente. La perpendicular común a r y s es la recta definida por los planos

$$[\vec{AX}, \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}] = 0 \qquad [\vec{BX}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = 0$$

Distancia entre recta y plano

Se define como distancia entre una recta $r : A + \lambda\vec{u}$ y un plano $\pi : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ como la distancia mínima entre dos puntos, uno de la recta y otro del plano.

Si r y π se cortan, la distancia es 0.

Si r y π son paralelos, la distancia es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

Distancia entre dos planos

Se define distancia entre dos planos π y π' como la distancia mínima entre dos puntos, uno de cada plano.

Si π y π' se cortan, la distancia es 0.

Si π y π' son paralelos, la distancia es la distancia de un punto cualquiera de π a π'.

6.6.4. Áreas y volúmenes

Área de un paralelogramo definido por los puntos A, B, C, D:

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

siendo B y C los puntos contiguos al punto A en el paralelogramo. El triángulo de vértices A, B, C tiene área la mitad de lo anterior.

Volumen del paralelepípedo de aristas AB, AC y AD:

$$\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right|.$$

El tetraedro de vértices A, B, C, D tiene volumen la sexta parte de lo anterior.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Parte IV

Bloque IV: Ejercicios

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Capítulo 7

Ejercicios.

Ecuaciones diferenciales

1. Dado un circuito en el que hay una resistencia (R), una autoinducción (L) y al que se le suministra una tensión constante (V), la segunda ley de Kirchhoff afirma que las variables se relacionan así:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V$$

   donde i es la intensidad y t es el tiempo. Calcula cómo varía la intensidad en función del tiempo.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$

   b) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$

   c) $y' + 2y = x^2 + 2x$

3. *a*) Explica qué se entiende por solución general, solución particular y solución singular de una ecuación diferencial.

   b) Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$$

4. Dada la ecuación diferencial

$$(x^2+1)y' + 4xy = x$$

   a) Encuentra la solución general.
   b) Resuelve el problema de valor inicial

$$(x^2+1)y' + 4xy = x \qquad y(2) = 1$$

5. Transforma en una ecuación en variables separadas:

$$(x-y)dx + (x-4y)dy = 0,$$

6. Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$x(2x^2+y^2)dx + y(x^2+2y^2)dy = 0.$$

7. Transforma en una ecuación en variables separadas:

$$(x-2y)dx + (2x-4y)dy = 0,$$

8. Determina la solución general de la ecuación $x\,y' = 2\,y + x^2$

9. Dada la ecuación diferencial $(x-y) + (x+y)\,y' = 0$,
   a) Razona de qué tipo de ecuación se trata.
   b) Encuentra la solución general.

10. Resuelve la ecuación $y' = 3x^2y + x^2$.

11. Resuelve la ecuación $x^2 + y^2 + xyy' = 0$.

12. Resuelve la ecuación diferencial: $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

13. Determina la solución general de la ecuación $x^2 - 2\,y^2 + 2\,x\,y\,y' = 0$

14. Determina la solución general de la ecuación $y'\ \cos x + y\ \operatorname{sen} x = 1$

15. Dada la ecuación diferencial $y' - 2\,x\,y = x^3\,e^{x^2}$
    a) Razona de qué tipo de ecuación se trata.
    b) Encuentra su solución general.
    c) Halla una solución particular que verifique que $y(0) = 1$.

Estadística Descriptiva

1. La siguiente es una muestra de los ingresos anuales de 20 familias. :

   18, 20, 22, 19, 18, 20, 18, 19, 21, 20, 20, 21, 18, 20, 21, 19, 20, 21, 18, 20.

   Obtén:

   a) La tabla de frecuencias absolutas, relativas, absolutas acumuladas y relativas acumuladas.

   b) La media, moda, mediana, cuartiles y el tercer y séptimo decil.

   c) La varianza, la cuasivarianza, coeficiente de asimetría y curtosis.

   d) Los gráficos de barras de las frecuencias absolutas y gráfico de líneas de las frecuencias relativas acumuladas.

2. Las causas de muerte en los árboles de una explotación se han clasificado en falta de riego (r), enfermedad (e), pedrisco (p) y otras (o) y el recuento ha proporcionado los siguientes datos:

   r, p, r, r, o, r, p, r, p, p, p, r, r, e, r, p, e, r, r, p,
   r, r, r, e, r, r, p, r, r, p, r, p, r, r, r, r, r, r, r, r.

   Construye la tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama de sectores y otro de rectángulos.

3. Se han medido los niveles de colinestarasa en 34 agricultores expuestos a insecticidas agrícolas, obteniéndose los siguientes resultados:

10.6	12.5	11.1	9.2	11.5	9.9	11.9	11.6	14.9
12.5	12.5	12.3	12.2	10.8	16.5	15	10.3	12.4
9.1	7.8	11.3	12.3	9.7	12	11.8	12.7	11.4
9.3	8.6	8.5	10.1	12.4	11.1	10.2		

   Obtén:

   a) Un histograma de los datos agrupando los datos en 5 intervalos con las frecuencias absolutas y otro con las frecuencias relativas acumuladas.

b) La media, moda, mediana, cuartiles y el tercer y séptimo decil.

c) La varianza, la cuasivarianza, coeficiente de asimetría y curtosis.

4. Dados los siguientes datos:

Producción de leche	42,7	40,2	38,2	37,6	32,2	32,2	28
Concentración ácido	92	120	128	110	153	162	202
Producción de leche	27,2	26,6	23	22,7	21,8	21,3	20,2
Concentración ácido	140	218	195	180	193	238	213

Obtén

a) Las medias y las desviaciones típicas de las variables *Producción de leche* y *Concentración ácido*.

b) La covarianza de las dos variables y la recta de regresión lineal.

c) Los coeficientes de correlación lineal y de determinación.

d) La gráfica de la nube de puntos y de los puntos correspondientes a la recta de regresión.

5. Representa los siguientes datos en un diagrama de barras dobles y otro de barras apiladas:

Accidentes	Varones	Hembras
de transportes	1200	295
por sumersión	365	95
por caídas	280	125
por envenenamiento	40	37

6. Dados los siguientes datos:

Concentración de nitratos	21	32	15	40	27	18	26	50	33	51
Producción por hectárea	13.2	12.6	13	12.2	15	14.8	14.8	12.2	13.6	12.6
Concentración de nitratos	36	16	19	22	16	39	56	29	45	25
Producción por hectárea	13.1	14.9	13.9	13.2	15.1	14.1	13	13.5	12.7	14.2

Obtén

a) Las medias y las desviaciones típicas de las variables *Concentración de nitratos* y *Producción por hectárea*.

b) La covarianza de las dos variables y la recta de regresión lineal.

c) Los coeficientes de correlación lineal y de determinación.

d) La gráfica de la nube de puntos y de los puntos correspondientes a la recta de regresión.

7. Representa los siguientes datos sobre los trabajadores de una empresa en un diagrama de barras dobles y otro de barras apiladas:

Estado civil	Varones	Hembras
soltero	20	29
casado	40	38
viudo	5	11
separado	11	20

8. Se han medido los pesos y la longitudes de seis paquetes de paja, obteniéndose los datos siguientes:

Pesos	65	60	65	63	68	68
Longitudes	1.70	1.50	1.68	1.70	1.75	1.80

Determina qué medidas están más dispersas los pesos o las longitudes y si están relacionadas ambas variables.

9. En cada caso y siempre que sea posible, indica dos grupos de 5 datos cada uno, que presenten:

a) la misma media pero distinta desviación típica.

b) La misma desviación típica pero distinta media.

c) La misma media y distinta mediana.

d) La misma mediana y distinta media.

e) La misma media y varianza pero distinto coeficiente de variación.

Razona la respuesta en todos los casos.

10. Se midió la altura en 200 individuos adultos y la información recogida en dicha muestra se ha agrupado en 6 clases de la misma amplitud, resultando la siguiente tabla:

Altura (cm)	n_i	N_i	f_i	F_i
		2		
(100, 120]				0,06
	10			
	35			
			0,6	
			0,115	

Completar la tabla de frecuencias. Representar el histograma de frecuencias relativas acumuladas. Indica en qué intervalo se encuentra la mediana.

11. La siguiente tabla muestra los datos sobre grado y acidez de uva de diferentes explotaciones:

Grado	14,50	15,40	13,60	13,90	14,30	13,90	14,40	14,00	14,20	14,40	13,80
Acidez	4,30	3,81	5,14	4,73	5,34	4,96	6,43	5,20	4,59	6,67	5,65

Haz los cálculos y análisis gráficos necesarios para determinar si hay una cierta relación entre ambas variables y establece cual podría ser esta relación.

12. Se han tomado muestras de agua para medir la concentración en miligramos por litro de una sustancia tóxica obteniéndose los resultados siguientes:

12.5	13.5	13	13.5	13	12.5	13.5	14	13.5	13
13	14	14.5	13	12	13.5	13.5	12.5	12.5	12.5

a) Representa el diagrama de barras para las frecuencias relativas acumuladas.

b) Calcula la media, mediana, desviación típica y rango intercuartílico.

13. Se quiere estudiar si hay relación entre el tiempo que dura la impermeabilización de los estanques y la cantidad de cal que contiene el agua que recogen. Para ello se tienen los siguientes datos sobre duración del estanque sin filtraciones y cantidad de cal del agua que contiene el referido estanque:

Cantidad de cal	4	10	80	45	25	60	90
Duración impermeabilización	12	26	180	132	100	200	230

Determina:

a) La ecuación recta de regresión que relaciona las variables.

b) El coeficiente de determinación y el diagrama de puntos de dispersión, comentando la relación entre los valores numéricos obtenidos anteriormente y la gráfica de la nube de puntos.

14. Indica un ejemplo de 4 pares de datos que presenten un coeficiente de correlaciónlineal $r = -1$ y otro ejemplo de 4 pares de datos que presenten un coeficiente de correlación lineal $r = 0$.

15. En un estudio de regresión lineal se obtuvo, a partir de una muestra de tamaño $n = 12$, una recta de regresión lineal $y = 3{,}2 - 4{,}1x$, y un coeficiente de correlación lineal $r = +0{,}93$. ¿Existe alguna contradicción entre estos resultados?

16. La siguiente tabla representa el número de partos por día que se atendieron en una explotación ganadera durante 30 días:

Partos	0	1	2	3	4	5	6
f_i	2	3	8	11	2	3	1

a) Representa el diagrama de barras para frecuencias absolutas y frecuencias absolutas acumuladas.

b) Calcula la media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación de los datos anteriores.

c) Calcula la mediana y el rango intercuartílico.

17. Los datos de temperatura y consumo de energía de un invernadero durante 8 días son los siguientes:

Temperatura en grados	0	8	7.5	13.5	14	8.5	4.5	1.5
Consumo de energía	70	57	60	63	57	66	67	80

a) Representa los datos en un diagrama de puntos que represente el consumo de energía en función de la temperatura. Obtén la ecuación de la recta de regresión lineal simple y el coeficiente de correlación. Interpreta los resultados obtenidos.

b) Suponiendo que las variables son normales, determina un intervalo de confianza para la temperatura y otro para el consumo de energía a nivel de confianza 95 % (*esta última cuestión corresponde al tema siguiente*).

18. Los siguientes son datos de peso de animales vivos y a la canal:

Peso vivo	Peso canal	Sexo
138	125	macho
133	106	macho
169	103	macho
144	130	macho
136	106	macho
185	122	hembra
167	116	hembra
159	129	hembra
172	122	hembra
185	132	hembra

a) Calcula las rectas de regresión que relacionan el peso vivo y el peso a la canal distinguiendo por sexo (una recta para los machos y otra para las hembras).

b) Justifica cuál de las dos rectas anteriores describe mejor la relación entre las variables peso vivo y peso a la canal y si alguna de las dos debe ser usada para describir la relación entre ambas variables.

19. Se han tomado muestras de agua para medir la concentración en miligramos por litro de una sustancia tóxica obteniéndose los resultados siguientes:

12.5	13.5	13	13.5	13	12.5	13.5	14	13.5	13
13	14	14.5	13	12	13.5	13.5	12.5	12.5	12.5

a) Representa el diagrama de barras para las frecuencias relativas acumuladas.

b) Calcula la media, mediana, desviación típica y rango intercuartílico.

20. Se quiere estudiar si hay relación entre el tiempo que dura la impermeabilización de los estanques y la cantidad de cal que contiene el agua que recogen. Para ello se tienen los siguientes datos sobre duración del estanque sin filtraciones y cantidad de cal del agua que contiene el referido estanque:

Cantidad de cal	4	10	80	45	25	60	90
Duración impermeabilización	12	26	180	132	100	200	230

Determina:

a) La ecuación recta de regresión que relaciona las variables.

b) El coeficiente de determinación y el diagrama de puntos de dispersión, comentando la relación entre los valores numéricos obtenidos anteriormente y la gráfica de la nube de puntos.

c) Indica un ejemplo de 4 pares de datos que presenten un coeficiente de correlaciónlineal $r = -1$ y otro ejemplo de 4 pares de datos que presenten un coeficiente de correlación lineal $r = 0$.

d) En un estudio de regresión lineal se obtuvo, a partir de una muestra de tamaño $n = 12$, una recta de regresión lineal $y = 3{,}2 - 4{,}1x$, y un coeficiente de correlación lineal $r = +0{,}93$. ¿Existe alguna contradicción entre estos resultados?

21. La siguiente tabla representa el número de partos por día que se atendieron en una explotación ganadera durante 30 días:

Partos	0	1	2	3	4	5	6
f_i	2	3	8	11	2	3	1

a) Representa el diagrama de barras para frecuencias absolutas y frecuencias absolutas acumuladas.

b) Calcula la media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación de los datos anteriores.

c) Calcula la mediana y el rango intercuartílico.

22. Razona si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones (si son falsas, basta poner un ejemplo que lo ilustre; si son verdaderas, hay que justificar por qué):

a) Si una muestra de datos presenta media 0, su desviación típica será pequeña.

b) Cuanto mayor es el tamaño de la muestra, mayor es su varianza.

c) Cuanto mayor es el tamaño de la muestra, mayor es su media.

d) Si el coeficiente de asimetría es 0, la media y la mediana deben ser parecidas.

23. Razona si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones (si son falsas, basta poner un ejemplo que lo ilustre; si son verdaderas, hay que justificar por qué):

    a) Si una muestra de datos presenta media 0, su desviación típica será pequeña.

    b) Cuanto mayor es el tamaño de la muestra, mayor es su varianza.

    c) Cuanto mayor es el tamaño de la muestra, mayor es su media.

    d) Si el coeficiente de asimetría es 0, la media y la mediana deben ser parecidas.

24. Haz los cálculos que se piden a partir de la siguiente tabla de frecuencias de altura de plantas:

Altura en cm.	Número de plantas
$[140, 145)$	12
$[145, 150)$	35
$[150, 155)$	51
$[155, 160)$	?
$[160, 165)$	7

    a) La frecuencia desconocida, sabiendo que la altura media es de 151,5 cm. (2,5 puntos)

    b) La amplitud intercuartílica. (2,5 puntos)

    c) Mediana y la Moda. (2,5 puntos)

25. La determinación de la presencia de nitratos en el agua se hace de manera indirecta: se añade un reactivo al agua y posteriormente se hace pasar un haz de luz por la solución coloreada y se mide su *absorbancia*. Este método funcionará siempre que haya una relación lineal entre la absorbancia y la presencia de nitratos. Analiza esta última cuestión, gráficamente y con los cálculos estadísticos necesarios (hay que explicar claramente cómo se hacen los cálculos), a partir de los datos de la siguiente muestra:

Nitratos	50	50	100	200	400	800	1200	1600	2000	2000
Absorbancia	7	7,5	12,8	24	47	93	138	183	230	226

26. Completa la siguiente tabla de frecuencias y calcula la varianza, la cuasidesviación típica, la moda, la mediana y el séptimo decil:

N^o de suspensos	n	N
0	3	
1		10
2	12	
3		30
4		
N=	50	

Variables aleatorias y modelos de probabilidad

1. Los tres caballos de una granja contraen una enfermedad. La experiencia clínica indica que el 10 % de los animales no se recupera de la citada enfermedad. Calcula:

   a) La probabilidad de que la granja se quede sin caballos.

   b) La probabilidad de los tres caballos sanen.

2. La probabilidad de curación de un determinado tratamiento para una enfermedad del olivo es de 0.65. Calcula la probabilidad de que entre 100 árboles sanen la mitad.

3. Un rosal produce flores de color rojo y blanco con probabilidad 0.55 y 0.45, respectivamente. Calcula la probabilidad de que entre 8 flores recolectadas

   a) Todas las flores sean rojas.

   b) Al menos haya dos rojas.

   c) No haya flores rojas.

4. Se pretende conocer si una plantación está afectada por una plaga o no haciendo un muestreo. Se sabe que cuando la plantación está afectada, el porcentaje de individuos que la padecen se estabiliza rápidamente entorno al 60 % de las plantas. Calcula:

   a) La probabilidad de que en una muestra de 40 plantas extraída de una plantación afectada aparezcan 10 enfermas.

   b) La probabilidad de que en una muestra de 20 plantas extraída de una plantación afectada no aparezca ninguna enferma.

   c) ¿Cuántas plantas hemos de muestrear en cada plantación para tener una certeza superior al 99 % de detectar toda plantación afectada? Es decir, asegurar que la probabilidad de que en nuestra muestra no aparezca ninguna planta afectada, estando afectada la plantación de la que extraemos la muestra, sea inferior al 0.01.

5. En una empresa de envasado de vegetales se estudia un envase con dos precintos y se observan las siguientes frecuencias de rotura de precintos en una muestra de 500 envases:

Número de precintos rotos	0	1	2
frecuencia	220	160	120

Calcula:

a) El porcentaje total de precintos rotos de entre los 1000 precintos estudiados.

b) Siendo p la probabilidad de romperse que le adjudicamos a un precinto, establece la distribución de probabilidad teórica de la variable X=”*número de precintos rotos en un envase*”, suponiendo que la rotura de un precinto es independiente del otro.

c) Establece la distribución de probabilidad de la variable X anterior como límite de frecuencias relativas. ¿Qué conclusión se puede extraer de los dos apartados anteriores?

6. El tiempo que un árbol permanece con flores es un fenómeno aleatorio que obedece a una distribución normal de media 22.5 días y desviación 4.3 días. ¿Cuál es la probabilidad de que a las 9:00 horas del día 19 de marzo de 2010 tenga flores suponiendo que las primeras flores aparecieron a las 12:00 del 2 de marzo de 2010?

7. La altura de un frutal en centímetros se ajusta a una distribución normal con 170 centímetros de media y 5 centímetros de desviación típica. Calcula:

a) La probabilidad de que la altura sea mayor que 160 centímetros.

b) La probabilidad de que la altura sea menor que 150 centímetros.

c) La probabilidad de que la altura esté entre 150 y 160 centímetros.

8. Se pretende proteger los plantones de una repoblación forestal con cilindros de material plástico. Se determina por observación que la media de la circunferencia de la sección del tallo es un fenómeno aleatorio distribuido normalmente con media 14.25 centímetros y desviación típica 0.5 centímetros. Calcula la producción que se debe encargar para 100 árboles sabiendo que hay cilindros de talla 14, 14.25, 14.50, 14.75, 15, 15.25, 15.50, 15.75 y 16, y que para cada árbol se admite un cilindro de su talla o 0.25 centímetros mayor.

9. En una fábrica de madera se han recibido 1200 troncos de un tipo de árbol. De ellos 1000 tienen un peso superior a 680 Kg. y 10 con peso inferior a 600 Kg. Se sabe que el peso es una variable aleatoria que sigue una distribución normal. Se pide hallar la media y la desviación típica teóricas de la remesa de troncos.

10. Los pesos de los remolques recibidos por una cooperativa se distribuyen normalmente con media de 900 Kg. y desviación típica de 100 Kg. Calcula

    a) El valor del peso que deja entre la media y él mismo el 44 % de la distribución.
    b) El valor de la variable que deja por encima de él mismo el 95 % de la distribución.
    c) El valor de la variable que deja por encima el 20 % de la población.

11. El calibre de las piezas de unos frutales se distribuyen según una normal de media 6,4 centímetros y desviación típica 3,6 centímetros. Calcula la proporción de la población se esperaría que tenga el calibre:

    a) Mayor que 9 centímetros.
    b) Mayor que 3.56 centímetros.
    c) Entre 5.8 y 7.2 centímetros.

12. En una ganadería de 10000 reses se seleccionan las 2000 de mayor peso para el matadero, obteniéndose en la muestra un peso mínimo de 980 Kg. y una mediana de 995 Kg. Calcula la media y la desviación típica de la ganadería sabiendo que los pesos se distribuyen normalmente.

13. Por estudios previos, se ha concluido que la probabilidad de que curación de una enfermedad es de 1/3. Si consideramos tres plantas con la enfermedad elegidas al azar:

    a) Calcula la probabilidad de que ninguno, uno, dos o tres plantas se curen.
    b) Calcula la media, mediana y moda de la distribución de la variable número de plantas que se curan de entre las tres plantas.
    c) Determina se esta distribución tiene sesgo a la izquierda, a la derecha o es simétrica sin calcular ningún coeficiente de sesgo.

14. El porcentaje de árboles que no superan una enfermedad sigue una distribución normal. La probabilidad de encontrar que más del 36,1 % de los árboles de una plantación no superan la enfermedad es del 8 % y que la probabilidad de que el porcentaje de árboles que no superan la enfermedad sea menos del 28,7 % es del 1 %. Halla la media y desviación típica de esta distribución.

15. La probabilidad de que un determinado cultivo esté afectado por una plaga para la que no hay cura es de 0,04. Si examinamos 2000 cultivos, ¿Cuál es la probabilidad de que todos estén sanos? ¿Cuál es la probabilidad de encontrar alguno afectado?

16. En una plantación hortofrutícola los radios de las piezas de fruta madura se distribuyen en el intervalo $[1, 3]$ con función de densidad $f(x) = k(x-1)(3-x)$, donde la variable se mide en centímetros. Las piezas se retiran si el radio se desvía 8 milímetros de la media. Obtén:

    a) El valor del parámetro k.

    b) La media de la distribución.

    c) El porcentaje de piezas que se retiran.

    d) La probabilidad de escoger cinco piezas al azar y que su radio esté entre 1,7 y 2,4.

17. Sea la distribución discreta que toma los valores 0, 1 y 2, con media $\mu = 1$ y varianza $\sigma^2 = 1/3$.

    a) Halla los valores de la función de probabilidad.

    b) ¿Es simétrica la distribución?

    c) ¿Qué tipo de curtosis tiene?

18. Considera la función e^{-x}.

    a) Comprueba que cumple los requisitos exigidos para ser una función de densidad de una variable X en el intervalo $[0, \infty)$.

    b) Halla la mediana.

    c) Halla la probabilidad de que la variable X tome un valor superior a 1.

d) Calcula el valor X_0 de la variable que hace que solo en el 5 % de los casos $X \leq X_0$.

19. Sea X la variable aleatoria *porcentaje de ventas sobre producción* de una explotación agropecuaria, siendo 0 correspondiente a vender el 0 % y 1 correspondiente a vender el 100 % de la producción. Si dicha variable se regula según una función de densidad $f(x) = 3x^2$ en el intervalo $[0, 1]$, se pide:

    a) La probabilidad de vender entre el 30 % y el 50 % de la producción.

    b) El porcentaje de ventas X_1 tal que la probabilidad de vender menos de ese porcentaje es del 25 %.

    c) Un valor que indique la esperanza del porcentaje de ventas y la esperanza de la desviación cuadrática media respecto de ese valor.

    d) Un valor del porcentaje tal que vender menos o más de ese valor tiene la misma probabilidad.

    e) El porcentaje de ventas más probable.

20. Se desea estimar el calibre de las naranjas distribuidas por una empresa. Se sabe que la distribución del calibre es normal. Se seleccionó una muestra de 10 unidades con los siguientes calibres:

85.17	74.44	103.20	81.80	84.82	101.36	82.43	81.18	93.35	73.23

En estas condiciones,

a) Estima la media del calibre de las naranjas con un intervalo de confianza al 95 % en los siguientes casos:

1) Suponiendo que la varianza 144.
2) No conociendo la varianza.

b) El mercado solicita naranjas de un calibre medio de 90. Contrasta se las naranjas distribuidas por la empresa se adaptan o no a este requisito en función de los resultados anteriores.

21. Los siguientes datos son valores de miligramos de sodio por cada 100 gramos de leche de vaca de distintas granjas:

51.24	55.26	51.61	41.82	55.35	43.60	54.01	46.11	68.97	32.23
56.77	56.83	41.03	54.63	56.12	47.66	49.49	52.76	46.22	55.23
52.03	58.00	71.15	56.22	44.28	45.45	38.99	59.46	37.99	48.87
34.25	47.86	62.14	44.50	55.31	38.41	51.53	54.80	46.12	41.37

a) Representa en un histograma los datos anteriores.

b) Determina un intervalo de confianza al 95 % para para el valor medio de la cantidad de sodio por cada 100 gramos de leche de vaca, suponiendo que por estudios previos es conocida la desviación típica $\sigma = 8{,}5$.

c) Determina un intervalo de confianza al 95 % para para la varianza de la cantidad de sodio por cada 100 gramos de leche de vaca, suponiendo que la población se distribuyese como una normal.

d) En función de los resultados anteriores, contrasta si es aceptable afirma que el valor medio de sodio por cada 100 gramos es igual a 63 miligramos.

22. De una muestra de 150 sacos de pienso para el ganado de una cierta marca se obtuvieron los siguientes datos en relación al peso: $\bar{x} = 49{,}5$ kg., $S = 2$kg. Obtén un intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los sacos comercializados por la marca. ¿Es aceptable admitir que la media de los sacos es 50 kg.?

23. Una empresa quiere estimar el tiempo de duración de la implantación de un determinado proyecto que distribuye entre sus clientes. Se selecciona una muestra aleatoria de 10 proyectos ya desarrollados y se observa su duración:

290	275	290	325	285	365	375	310	290	300

Suponiendo que la duración de la implantación sigue una distribución normal:

a) Determina un intervalo de confianza para la media al 95 %.

b) Si un cliente constrasta con los datos de la muestra anterior si el tiempo de duración es de media 290 días, ¿cuál sería la conclusión a nivel $\alpha = 0{,}05$? ¿Y a nivel $\alpha = 0{,}01$?

24. En una fábrica de máquinas de ordeño, se afirma que la proporción de unidades defectuosas es del 5 %. Si la producción de cada máquina es un proceso independiente:

    a) Calcula la probabilidad de que un comprador examine 15 unidades y encuentre 4 defectuosas

    b) Calcula la probabilidad de que un comprador examine 8 unidades y encuentre más de 2 defectuosas.

25. La probabilidad de que un programador de riego funcione correctamente en la instalación inicial es de 0.9. Si se colocan 5 programadores que funcionan de forma independiente:

    a) Calcula la probabilidad de que por lo menos el 80 % funcione adecuadamente.

    b) Lo mismo que la cuestión anterior pero con 10 programadores.

26. Se han recogido datos para estudiar el tiempo que un producto envasado al vacío mantiene todas sus propiedades:

Tiempo en días	108	124	124	106	115	138	163	159	134	139

Suponiendo que el tiempo que el producto mantiene sus propiedades se distribuye normalmente, construye un intervalo de confianza al 95 % para la media ese tiempo y contrasta razonadamente si se puede aceptar que la media de ese tiempo es 125 días.

27. Una fábrica produce piezas de riego cuya longitud se distribuye normalmente. La pieza es válida si su longitud está entre los valores 4.998 y 5.002. Si la pieza mide menos de 4.998 se elimina y si mide más de 5.002 se reprocesa.

    a) Si la media de la longitud es 5 cm. y la desviación típica de 0.001 cm., ¿qué porcentaje de piezas se eliminan? ¿Qué porcentaje de piezas se reprocesan?

    b) A partir de la muestra siguiente:

$$4{,}999 \quad 5{,}001 \quad 4,873 \quad 5{,}003 \quad 5,020.$$

Calcula un intervalo de confianza al 95 % para la media y otro para la varianza de la longitud de la pieza a partir de esta muestra sin tener en cuenta los datos sobre media y desviación proporcionados en el apartado anterior. Contrasta si es razonable considerar que la media es 5 cm. y desviación es 0.001 a nivel 0.05.

28. La siguiente tabla muestra los datos sobre grado y acidez de uva de diferentes explotaciones:

Grado	14,50	15,40	13,60	13,90	14,30	13,90	14,40	14,00	14,20	14,40	13,80
Acidez	4,30	3,81	5,14	4,73	5,34	4,96	6,43	5,20	4,59	6,67	5,65

Calcula la media y un intervalo para la media al 95 % del grado y de la acidez, razonando el motivo por el que usas el método que decidas usar para hacer el cálculo.

29. Los datos de temperatura y consumo de energía de un invernadero durante 8 días son los siguientes:

Temperatura en grados	0	8	7.5	13.5	14	8.5	4.5	1.5
Consumo de energía	70	57	60	63	57	66	67	80

a) Representa los datos en un diagrama de puntos que represente el consumo de energía en función de la temperatura. Obtén la ecuación de la recta de regresión lineal simple y el coeficiente de correlación. Interpreta los resultados obtenidos.

b) Suponiendo que las variables son normales, determina un intervalo de confianza para la temperatura y otro para el consumo de energía a nivel de confianza 95 %.

30. Las normas de una cooperativa de cerezas establecen que un entrega se aceptará si al examinar una muestra de 5 unidades no aparece ninguna defectuosa. Calcula la probabilidad de aceptación de 4 entregas en las que las proporciones totales de unidades defectuosas sea de 5 %, 10 %, 15 % y del 20 %, respectivamente.

31. Una máquina debe introducir 375 gramos de cereales en cajas de envasado. La cantidad introducida es una variable aleatoria que se distribuye

normalmente con media 375 gramos y desviación típica 20 gramos. Para comprobar que el peso medio de cada caja se mantiene en 375 gramos, se toman periódicamente muestras aleatorias de 25 cajas y se pesan sus contenidos. El encargado tiene orden de parar el proceso y ajustar la máquina cada vez que el promedio del peso de las 25 cajas sea menor que 365 o mayor que 385 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de tener que detener el proceso cada vez que se toma una muestra?

32. Las puntuaciones de una cata de 1000 vinos se distribuyen normalmente. Sea X_1 la puntuación que supera al 84,13 % de las puntuaciones y X_2 la puntuación que es superada por el 84,13 % de las puntuaciones. Sabiendo que $X_1 - X_2 = 20$, calcula:

    a) La desviación típica de la distribución.

    b) La diferencia entre los valores que recogen al 50 % de las puntuaciones más normales (amplitud intercuartil).

33. La distribución de trigo de la Unión Europea para cada temporada se distribuye normalmente con media 131 millones de toneladas y desviación típica 30 millones. Responde a las siguientes cuestiones:

    a) Calcula el decil sexto y el cuartil primero. (2,5 puntos)

    b) Calcula los valores centrales entre los que queda comprendido el 40 % de la producción. (2,5 puntos)

    c) Enuncia e interpreta el Teorema central del límite. (2,5 puntos). Calcula la probabilidad de que la media de producción de 5 años consecutivos sea inferior al 140 millones de toneladas. (2,5 puntos)

34. La cantidad de sustancia S contenida en una dosis de cierta vacuna sigue una distribución normal con una media de 50 unidades. Se ha comprobado que la vacuna inmuniza si la dosis contiene una cantidad de S comprendida entre 46 y 54 unidades. Sabiendo que el 2,5 % de las dosis contienen una cantidad de S superior a 54 unidades,

    a) Calcula la desviación típica de la distribución de S.

    b) ¿Qué probabilidad hay de que un individuo al que se le administra una dosis elegida al azar no quede inmunizado?

Matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales

1. Halla, si existen, la inversas de las matrices

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Justifica que la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ siempre es invertible.

4. Determina el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Considera el conjunto de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in R$. Justifica que

a) Si sumamos dos matrices de ese tipo multiplicadas cada una de ellas por sendos números reales, el resultado es una matriz del mismo tipo.

b) Existen dos matrices A y B de la forma anterior, tal que cualquier matriz de esa forma se puede expresar siempre como $\alpha A + \beta B$.

6. Justifica que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

7. Se dice que una matriz A es idempotente, si y solo si $A^2 = A$. Probar que si A es una matriz idempotente, entonces $B = I - A$ es idempotente y además $A \cdot B = B \cdot A = 0$.

8. Una matriz se dice nilpotente de orden k si $A^k = 0$, siendo k el menor entero positivo para el cual es válida la igualdad. Prueba que
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
es nilpotente de orden 3.

9. Se dice que una matriz es simétrica si $S^t = S$, siendo S^t la traspuesta de S, y que es antisimétrica si $S^t = -S$. Sea A una matriz cuadrada y S una matriz cuadrada del mismo orden y simétrica. Demuestra si es cierto o pon un contraejemplo acerca de lo siguiente:

   a) $A \cdot A^t$ es simétrica.

   b) $A^t \cdot S \cdot A$ es simétrica.

   c) A es antisimétrica $\Longrightarrow A^2$ es simétrica.

10. Determina la expresión matricial de los sistemas de ecuaciones. Resuélvelos calculando la matriz inversa de la matriz de los coeficientes del sistema o de un sistema equivalente:
$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} 3x-y+z & = & 5 \\ x+y-z & = & -2 \\ -x+2y+z & = & 3 \end{array}\right\}$$

11. Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema
$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay & = & 1 \\ y-z & = & 2 \\ x+y+z & = & 2 \end{array}\right\}$$
sea de Cramer y resuélvelo para todo valor de a diferente de ese valor particular.

12. Discute y resuelve el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x - 5y + 2z + 4t & = & 2 \\ x - 4y + z + 3t & = & 5 \\ 5x + y - 4z - t & = & 3 \end{array}\right\}$$

13. Resuelve el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y - z + t & = & 0 \\ 2x + 2y - 2z - t & = & 0 \end{array}\right\}$$

14. Discute y resuelve para los valores de los parámetros que sea posible los siguientes sistemas de ecuaciones:

    a) $x + y + az = 1$
    $x + ay + z = 2$
    $y + az = 0$

    b) $x + ay + z = 0$
    $ax + y = 1$
    $x + 2y + z = 3$

    c) $ax + y + z = 1$
    $x + ay + z = 0$
    $x + y + az = -1$

    d) $(m + 1)x + y + z = 3$
    $x + 2y + mz = 4$
    $x + my + 2z = 2$

    e) $x + y + z = 1$
    $mx + y + z = 1$
    $x + my + nz = 1$

    f) $x + y + z + t = 0$
    $2x + 3y + mz + (m + 1)t = 0$
    $(m - 1)x + 4y + 5z + 6t = 0$
    $mx + (m + 1)y + 6z + 7t = 0$

    g) $(m + 2)x + y + z = m - 1$
    $mx + (m - 1)y + z = m - 1$
    $(m + 1)x + (m + 1)z = m - 1$

h) $x + y + z = 1$
$ax + by + cz = d$
$a^2x + b^2y + c^2z = d^2$

i) $3x + 2y + z = t$
$x - y + 2z = 1 + t^2$
$3x + 7y - 4z = -1 - t - t^2 - t^3$
$2x + y + bz = t^3$

j) $x - ay + z = 0$
$x - y - z = 0$
$2x - y - bz = 0$
$y + z = 0$

k) $x + 3y - az = 4$
$-ax + y + az = 0$
$-x + 2ay = a + 2$
$2x - y - 2z = 0$

15. Discute y resuelve, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $x + 2y - 3z + t = 2$
$2x - y - z - t = 1$
$-x + y + 2z - t = 0$
$3x + 2y - 4z - 3t = 1$

b) $x + 2y - z + t + u = 0$
$3x - y + t - u = 6$
$6x + y + t + u = 1$
$x - 2y + 2z - 2t = -5$

c) $2x - y + z = 5$
$-3x + 2y + 2z = 0$
$-x - 2y + 2z = 0$
$x + y + z = 0$
$5x - 6y - 2z = 0$

16. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sean A y B dos matrices tales que es posible calcular $A \cdot B$ y y $B \cdot A$. Entonces A y B son matrices cuadradas.

b) La suma de dos matrices triangulares del mismo orden es una matriz triangular.

c) Dada cualquier matriz A, la matriz $A \cdot A^t$ es simétrica.

d) La suma de dos matrices regulares es una matriz regular.

e) Si A es una matriz de orden $3x4$, el rango de A es 3 o 4.

17. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, halla $3A^t \cdot A - 2I$ y resuelve $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, halla una simétrica S y otra antisimétrica A tal que $M = S + A$.

19. Halla el rango de las siguientes matrices usando operaciones elementales hasta convertirlas en matrices triangulares.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

20. Calcula el determinante de A sabiendo que $A^t \cdot A = I$.

21. Calcula el determinante de A sabiendo que $A^2 = A$.

22. Calcula la condición que tiene que cumplir x para que la matriz siguientes sea invertible:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Calcula todas las matrices A de orden 2 tales que:

a) su cuadrado es la matriz nula,

b) su cuadrado es la identidad.

24. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \dots & & & & & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ \dots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b \end{vmatrix}$

25. Justifica que el determinante siguiente es nulo sin desarrollarlo: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

26. Justifica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

    a) Si un sistema de ecuaciones $AX = B$ es compatible determinado, la matriz A es cuadrada.

    b) Si $AX = B$ es un sistema incompatible de 5 ecuaciones con 4 incógnitas y el rango de A es 4, entonces el rango de la matriz ampliada es 5.

c) Si un sistema $AX = B$ tiene la solución $(0, 0, \ldots, 0)$, entonces es homogéneo.

d) Si el sistema $AX = B_1$ es compatible y $AX = B_2$ es incompatible, entonces el sistema $AX = B$ es compatible, siendo $B = B1 + B_2$.

e) Si A es una matriz triangular con determinante nulo, entonces el sistema $AX = B$ es compatible determinado.

27. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 3\,y - a\,z & = & 4 \\ -a\,x + y + a\,z & = & 0 \\ -x + 2\,a\,y & = & a + 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute sus soluciones en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvelo en los casos que sea posible.

28. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones (si son falsas, basta poner un ejemplo que lo ilustre; si son verdaderas, hay que justificar por qué):

a) Sean A y B dos matrices tales que es posible calcular $A \cdot B$ y y $B \cdot A$. Entonces A y B son matrices cuadradas.

b) La suma de dos matrices triangulares del mismo orden es una matriz triangular.

c) La suma de dos matrices con determinantes distinto de cero es una matriz con determinante distinto de cero.

d) Si A es una matriz de orden 3×4, el rango de A es 3 o 4.

29. Discute según el valor del parámetro α y resuelve, cuando sea posible, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x + 3\,y - \alpha\,z & = & 4 \\ -\alpha\,x + y + \alpha\,z & = & 0 \\ -x + 2\,\alpha\,y & = & \alpha + 2 \\ 2\,x - y - 2\,z & = & 0 \end{array}$$

30. A certain population of owls feeds almost exclusively on wood rats. Letting $o(k)$ and $r(k)$ denote the number in each population in year k, a

biologist estimates that $o(k+1) = 0{,}5o(k) + 0{,}05r(k)$ and $r(k+1) = -0{,}9o(k) + 50r(k)$. Write the matrix that describes the interaction of these two populations from year k to year $k+1$.

Assume the pattern described will continue in the future.

a) What would you calculate, and how would you interpret the results, to find out the number of individuals in each population five years from now?

b) How could you use eigenvalues and eigenvectors to describe the long term behavior of the owl rat population? Include any equations you need to discuss, and say what all your symbols mean.

31. A yogurt company makes three yogurt blends: LimeOrange, using 2 quarts of lime yogurt and 2 quarts of orange yogurt per gallon; LimeLemon, using 3 quarts of lime yogurt and 1 quart of lemon yogurt per gallon; and OrangeLemon, using 3 quarts of orange yogurt and 1 quart of lemon yogurt per gallon. Each day the company has 800 quarts of lime yogurt, 650 quarts of orange yogurt, and 350 quarts of lemon yogurt available. How many gallons of each blend should it make each day if it wants to use up all of the supplies?

32. It takes three different ingredients A, B, and C, to produce a certain chemical fertilizer. A, B, and C have to be dissolved in water separately before they interact to form the chemical. Suppose that the solution containing A at 1,5 g/cm^3 combined with the solution containing B at 3,6 g/cm^3 combined with the solution containing C at 5,3 g/cm^3 makes 25,07 grammes of the chemical. If the proportion for A, B, C in these solutions are changed to 2,5, 4,3, and 2,4 g/cm^3, respectively (while the volumes remain the same), then 22,36 grammes of the chemical is produced. Finally, if the proportions are 2,7, 5,5, and 3,2 g/cm^3, respectively, then 28,14 grammes of the chemical is produced. What are the volumes (in cubic centimeters) of the solutions containing A, B, and C?

33. The action of sunlight on green plants powers a process called *photosynthesis*, in which plants capture energy from light and store energy in chemical form. The process is manifested as follow

$$CO_2 + H_2O \Rightarrow O_2 + C_6H12O_6$$

Balancing this chemical reaction means finding values of x, y, z so that the number of atoms of each element (C, O, H) is the same on both sides of the equation:

$$xCO_2 + yH_2O \Rightarrow zO_2 + tC_6H12O_6$$

Find the smallest positive integer to balance the equation.

Espacio vectorial

En lo que sigue, salvo que se diga lo contrario, se entenderá que $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial formado por el conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, z_n)/x_i \in \mathbb{R}\}$$

junto con las operaciones

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Responde a las siguientes cuestiones:

    a) Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. ¿Cuáles son sus subespacios vectoriales? Si consideramos su expresión en coordenadas ¿qué forman tienen sus ecuaciones paramétricas e implícitas?

    b) Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. ¿Cuáles son sus subespacios vectoriales? Si consideramos su expresión en coordenadas ¿qué forman tienen sus ecuaciones paramétricas e implícitas?

2. Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

    a) El vector $(1, 2, 3)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 1, 1)$ y $(-1, 0, 1)$.

    b) Si el sistema $\{v, u\}$ es libre, el sistema $\{u - v, u + v\}$ es libre.

    c) Si el sistema $\{u, v, w\}$ es ligado, el sistema $\{u, v\}$ es libre.

    d) Si el sistema $\{v, u\}$ es libre, el sistema $\{u, v, w\}$ es libre.

    e) Los sistemas $S_1 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 0)\}$, $\{(1, 3, 0), (1, 5, 0)\}$ son generadores del mismo subespacio vectorial.

    f) El vector $(1, 1, 1)$ tiene coordenadas $(1, 0, 0)$ en la base $\{(1, 0, 0), (1, 2, 1), (1, 3, 2)\}$.

    g) Si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_7\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_8\}$ puede ser también base de V.

    h) Si $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de un espacio V, entonces puede ser que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

i) Si $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es un sistema generador de V, entonces $\dim(V) \leq 4$.

j) Los sistemas de vectores $\{(3,0,2), (-1,0,1), (2,0,-5)\}$ y $\{(7,0,0), (0,0,3)\}$ generan en $\mathbb{R}^3$ el mismo subespacio vectorial.

3. Determina a y b para que el vector $(1, 0, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$.

4. Sea $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$. Demuestra que es un subespacio vectorial y encuentra una base.

5. Para el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, encuentra una base que contenga al vector $(1, 2, 1, 1)$ y otra que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 2)$ y $(1, -1, 2, 0)$.

6. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, considera el sistema $S = \{(1,1,a), (1,a,1), (a,1,1)\}$ y estudia la dimensión del subespacio generado por dichos vectores en función del valor de a.

7. Determina una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 2, 3, 1)$, $(2, 3, 2, 3)$, $(0, 1, 4, -1)$, $(2, -3, 1, 1)$, $(4, 1, 7, 3)$.

8. Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, considera los subespacios $U_1 =< (1, 2, 0, 1) >$, $\quad U_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z + t = 0\}$ $\quad U_3 = \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = \gamma \\ t = \mu \end{array} \right.$
   Razona si el vector $(2, 4, 0, 2)$ pertenece a U_1, U_2 o U_3. En caso afirmativo, calcula sus coordenadas en alguna base localizada previamente.

9. Razona si los sistemas $\{(3,0,2), (-1,0,1), (2,0,-5)\}$ y $\{(7,0,0), (0,0,3)\}$ generan en $\mathbb{R}^3$ el mismo subespacio vectorial. Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio generado por el primer sistema.

10. Demuestra que si $U_1, U_2, ..., U_n$ son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, entonces:

    a) $U_1 + U_2 + ... + U_n$ es un espacio vectorial.

    b) $U_1 + U_2 + ... + U_n$ contiene a todos los vectores de $U_1, U_2, ..., U_n$.

   c) Cualquier otro subespacio que contenga a $U_1, U_2, ..., U_n$ contiene también a $U_1 + U_2 + ... + U_n$.

11. Demuestra que si $U_1, U_2, ..., U_n$ son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, entonces:

   a) $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ es un espacio vectorial.
   b) $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ está contenido en todos los subespacios $U_1, U_2, ..., U_n$.
   c) Cualquier otro subespacio contenido en $U_1, U_2, ..., U_n$ está contenido también en $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$.

12. El conjunto de polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$, con las operaciones habituales suma de polinomios y producto de un polinomio por un número real, es un espacio vectorial. Prueba que:

   a) El conjunto de polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales ($\mathbb{R}_3[x]$) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$.
   b) En general, el conjunto de polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales ($\mathbb{R}_n[x]$) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$.
   c) El conjunto de polinomios con coeficientes racionales de grado menor o igual que n ($\mathbb{Q}_n[x]$) no es subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$.
   d) $S = \{1,\ 2x,\ 3x^2,\ \dots\ ,\ (n+1)x^n\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}_n[x]$.

13. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, consideremos los subconjuntos

$$L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = z = 0\} \quad L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}.$$

   Calcula la dimensión y una base de L_1 y la dimensión y una base de L_2. Prueba que $L_1 \cap L_2 = 0$ y $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^3$.

14. En $\mathbb{R}^3$, sea P el plano YZ y L el subespacio generado por los vectores

$$\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, -1, -2)\}.$$

   a) Calcula una base y la dimensión de P y de L.
   b) Encuentra las ecuaciones del subespacio L.
   c) Calcula $L \cap P$ y $L + P$.

15. Justifica cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial correspondiente. En caso de ser posible, calcula una base y la dimensión:

    a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x \cdot y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
    b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
    c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x - y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$
    d) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \, x = y, \; z = t\} \subset \mathbb{R}^4$
    e) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \, x + y + z = 2\} \subset \mathbb{R}^4$
    f) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \, x + y = 2z + 3t\} \subset \mathbb{R}^4$

16. Estudia la dependencia o independencia lineal de cada uno de los sistemas de vectores siguientes, hallando, en su caso, la relación de dependencia:

    a) $\{(2,1),(1,2),(3,-3)\} \subset \mathbb{R}^2$
    b) $\{(5,0,1),(2,0,2)\} \subset \mathbb{R}^3$
    c) $\{(2,0,1),(3,2,1),(1,-2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

17. Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ un sistema libre de un espacio vectorial V. Probad que entonces los siguientes sistemas también son libres:

    a) $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, v_3\}$
    b) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$

18. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los sistemas de vectores $S = \{(1,0,1),(1,1,0)\}$ y $S' = \{(3,1,2),(3,2,1),(0,-1,1)\}$. Justifica si

    a) S está contenido en el subespacio generado por S'
    b) S' es libre o ligado.

19. Halla la base, la dimensión y las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio generado por el sistema de vectores S en cada uno de los siguientes casos:

    a) $S = \{(0,0,1),(0,1,1)\}$
    b) $S = \{(1,2,3),(3,2,1),(-1,2,5)\}$
    c) $S = \{(2,1,0),(4,2,0)\}$

d) $S = \{(1,2,0),(2,1,0),(2,2,0),(1,1,0)\}$

e) $S = \{(2,-1,1,4),(1,-2,3,-2),(1,1,-2,6)\}$

20. Comprueba que $S = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$. ¿Es S una base? Si no lo es, extrae de S una base de $\mathbb{R}^3$.

21. Calcula una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el sistema $\{(1,2,0,1),(2,1,3,1),(2,4,0,2)\}$.

22. Encuentra una base de $\mathbb{R}_2[x] = \{$Polinomios de grado menor igual que 2$\}$ que contenga a una base del subespacio engendrado por el conjunto $\{x-1,\ x^2+1,\ 3x^2+2x+1\}$.

23. Sea V un espacio vectorial de dimensión cuatro y L_1 y L_2 dos subespacios de V de dimensión 2 tales que $L_1 + L_2 = V$. Demuestra que $L_1 \cap L_2 = O$.

24. Consideramos el conjunto de los números reales sobre el cuerpo de los número racionales. Comprobad que es espacio vectorial. Demostrad que $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ es un sistema independiente en este espacio.

25. Halla las coordenadas del vector $w = 2v_1 + 3v_2$ de $\mathbb{R}^2$ en la base $B = \{(1,2),(3,1)\}$, siendo $v_1 = (2,1)$ y $v_2 = (1,5)$.

26. Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones:

    a) Si el vector 0 pertenece a un sistema de vectores, entonces dicho sistema es ligado.

    b) Todo sistema formado por un único vector no nulo es libre.

    c) Si se añaden vectores a un sistema ligado el sistema que resulta es ligado.

    d) Si a un sistema libre se le añade un vector y resulta un sistema ligado, entonces el vector añadido es combinación lineal de los demás.

27. *a*) Definición de base de un espacio vectorial y coordenadas de un vector en una base.

    b) En el espacio vectorial V de los polinomios de grado menor o igual que 3, se consideran los polinomios:

$$P_1(x) = 3 - 2x + 4x^2 + x^3$$

$$P_2(x) = 4 - x + 6x^2 - 2x^3$$
$$P_3(x) = 7 - 8x + ax^2 + bx^3.$$

Halla a y b para que el subespacio que generan $P_1(x), P_2(x)$ y $P_3(x)$ tenga dimensión 2. Halla una base cualquiera de este subespacio y determina las coordenadas de los tres polinomios anteriores en dicha base.

28. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ (no es necesario demostrarlo).

    a) Demuestra si $\sqrt{5}$ es linealmente dependiente de 1 o no.

    b) Demuestra si $\sqrt{5}$ es combinación lineal de 1 y de $\sqrt{2}$ o no.

29. Define base de un espacio vectorial, coordenadas de un vector en una base, aplicación lineal entre espacios vectoriales y explica cómo se construye la matriz de una aplicación lineal en las bases B del espacio de partida y B' del espacio de llegada.

30. Justifica que cada uno de estos conjuntos es un espacio vectorial o un subespacio vectorial. Calcula una base y la dimensión:

    a) Las matrices de orden $m \times n$.

    b) $H = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 3} / A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}\}$

31. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, sea L_1 el subespacio generado por los vectores

$$\{(1,-1,2,3),(1,1,2,0),(3,-1,6,-6)\},$$

y L_2 el subespacio generado por los vectores

$$\{(0,-2,0,-3),(1,0,1,0)\}.$$

Halla las ecuaciones de los subespacios $L_1, L_2, L_1 \cap L_2, L_1 + L_2$ y sus dimensiones.

32. Sea el subconjunto de las matrices cuadradas de orden 2

$$H = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R}\}.$$

a) Demuestra que H es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2.

b) Encuentra una base y calcula las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ respecto a dicha base.

33. Sean $H_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0\}$ y $H_2 = \{(\lambda + \mu, \lambda + \gamma, \gamma + \delta, \lambda + \delta)\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

    a) Para cada uno de ellos, hallar una base y su dimensión.

    b) Comprobar que el vector $(1, 0, 1, -2)$ pertenece a los dos subespacios.

    c) Hallar las coordenadas de $(1, 0, 1, -2)$ en las respectivas bases encontradas en el apartado *a*).

34. Razona si los sistemas de vectores $\{(3, 0, 2), (-1, 0, 1), (2, 0, -5)\}$ y $\{(7, 0, 0), (0, 0, 3)\}$ generan en $\mathbb{R}^3$ el mismo subespacio vectorial. Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio generado por el primer sistema.

35. Se considera el conjunto de vectores $A = \{(1, -2, 1, 3), (2, -4, 0, 2), (3, -6, 1, 5), (2, -4, -4, -6)\}$

    a) Halla las ecuaciones implícitas del subespacio generado por A.

    b) Halla la dimensión y una base de este subespacio.

    c) Halla las coordenadas de los vectores de A en la base obtenida en el apartado anterior.

36. Sea $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Demostrar que el conjunto $B = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - 2\,\vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ es también un sistema libre.

Espacio afín euclídeo

1. En el espacio afín E_3 tenemos los sistemas de referencia $S = \{0; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ y $S' = \{O'; \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$. Sabiendo que las coordenadas de O' en el sistema S son $(1, 2, 0)$ y que

$$\vec{u_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}, \qquad \vec{u_2} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}, \qquad \vec{u_3} = -\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_1},$$

   a) Calcula las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de S' a S.

   b) Calcula las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de S a S'.

2. En el espacio euclídeo E_3 se consideran las rectas

$$r : \frac{x-7}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3} \qquad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

   a) Determina la posición relativa de las dos rectas y el ángulo que forman.

   b) Halla la ecuación de la recta t que pasa por $Q(5, 2, 2)$, es perpendicular a s y corta a r.

   c) Calcula el punto de intersección de r y t.

3. En el espacio afín E_3 tenemos los sistemas de referencia $S = \{0; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ y $S' = \{O'; \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$. Sabiendo que las coordenadas de O' en el sistema S son $(1, 2, 0)$ y que

$$\vec{u_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}, \qquad \vec{u_2} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}, \qquad \vec{u_3} = -\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_1},$$

   a) Calcula las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de S' a S.

   b) Calcula las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de S a S'.

4. En el espacio euclídeo E_3 se consideran la recta r, el plano π y el punto P, dados mediante

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right. \qquad \pi : 2x + y - 3z = 5 \qquad P = (1, -1, 3)$$

   Halla la recta perpendicular a r, paralela a π y que pasa por P.

5. En el espacio afín E_3 tenemos los sistemas de referencia $S = \{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ y $S' = \{O'; \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$. Sabiendo que las coordenadas de O en el sistema S' son $(2, 1, 0)$ y que

$$\vec{u_1} = \vec{e_2} + \vec{e_3}, \qquad \vec{u_2} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}, \qquad \vec{u_3} = -\vec{e_1} + \vec{e_3},$$

   a) Calcula las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de S' a S.

   b) Calcula las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de S a S'.

6. En el espacio afín E_3 se consideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 3z + 2 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \alpha\lambda \\ y = 1 + \beta\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   a) Determina los valores de α y β para que r y s se corten.

   b) Determina los valores de α y β para que r y s sean paralelas.

   c) Para $\alpha = 3$ y $\beta = 1$ halla el plano paralelo a r que contiene a s.

7. En el espacio afín E_3 tenemos los sistemas de referencia $S = \{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ y $S' = \{O'; \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$. Sabiendo que las coordenadas de O' en el sistema S son $(2, 1, 0)$ y que

$$\vec{u_1} = \vec{e_2} - \vec{e_3}, \qquad \vec{u_2} = \vec{e_1} + \vec{e_2}, \qquad \vec{u_3} = \vec{e_1} - \vec{e_3},$$

   a) Calcula las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de S' a S.

   b) Calcula las ecuaciones de cambio de sistema de referencia de S a S'.

8. En el espacio afín euclídeo E_3 se consideran la recta r y el plano π dados por las ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right. \qquad \pi : 2x + y - z - 2 = 0.$$

   Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (1, 2, 1)$, que es paralelo a r y perpendicular a π.

9. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x + y + a\,z &= 1 \\ y + a\,z &= 0 \\ x + a\,y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

   - Discute la compatibilidad del sistema para cualquier valor real del parámetro a
   - Si consideramos que las dos primeras ecuaciones definen una recta r y la tercera es la ecuación general de un plano π, utiliza los resultados del apartado anterior para estudiar las posiciones relativas de r y π en función del parámetro a.

10. Dadas las rectas r y s

$$r : \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{5} \qquad\qquad s : \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2\,x + 3\,y = -6 \end{array}\right.$$

   - Estudia su posición relativa
   - Halla la recta t que corta a r y a s y es perpendicular a ambas.
   - Determina la distancia entre r y s

11. Hallar razonadamente los valores de α y β para que la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x - 2\,y - 2\,z = 1 \\ x + 5\,y + z = 0 \end{array}\right.$ esté contenida en el plano $\pi : 2\,x + y + \alpha\,z = -\beta$

12. Dados r y π estudia razonadamente su posición relativa en función del parámetro a. En cada caso, dibuja r y π.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{array}\right. \qquad\qquad \pi \equiv x + y + az - a^2 = 0$$

13. Dadas las rectas $r \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{array}\right.$ y $s \equiv \left\{\begin{array}{l} x - y + z = -2 \\ x - 3y - z = -8 \end{array}\right.$

   a) Estudia su posición relativa.
   b) Halla la distancia entre ellas.
   c) Determina los puntos donde se alcanza la distancia entre r y s.

14. Dadas las rectas r y s

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-a}{-1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

   a) Determina a para que sean secantes.
   b) Para ese valor de a calcula el plano π que contiene a r y s.
   c) Calcula la recta que resulta de proyectar sobre π la recta $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$.

15. Dadas las rectas r y s de ecuaciones

$$r : x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \qquad s : \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3},$$

   a) demuestra si son o no coplanarias,
   b) halla la ecuación del plano que contiene a una de las rectas y es paralelo a la otra.

16. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones (si son falsas, basta poner un ejemplo que lo ilustre; si son verdaderas, hay que justificar por qué):

   a) Las rectas r y s

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

   son secantes.
   b) El paralelepípedo formado por los vectores $(1,2,0)$, $(0,1,2)$ y $(1,0,2)$ tiene volumen 5.
   c) El ángulo que forman las fuerzas $f_1 = (2,3,4)$ y $f_2 = (1,5,2)$ es 90^o.

17. Halla la recta que pasa por el punto $(2,1,-1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$$

18. Dadas las rectas r y s

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-a}{-1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

a) Determina a para que sean secantes.

b) Para ese valor de a calcula el plano π que contiene a r y s.

c) Calcula la recta que resulta de proyectar sobre π la recta $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$.

19. Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π, en función del parámetro α, calculando, cuando exista, la intersección entre ambos.

$$r : \begin{cases} y + \alpha\, z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \pi : x + 2\, y = \alpha.$$

20. Halla razonadamente la ecuación de un plano que es perpendicular a los planos $\pi_1 : x + y - z = 0$ y $\pi_2 : 2\, x - y + 3\, z - 1 = 0$ y pasa por el punto $A(1, 1, 1)$.

21. Halla razonadamente el punto simétrico del punto $A(0, 1, -2)$ respecto de la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = y + 1 = -z$$