Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas

Apuntes de

Análisis Matemático I

Pedro Martín Jiménez

http://cum.unex.es/profes/profes/pjimenez/

Badajoz, septiembre 2005

Índice

Introducción

El texto que sigue no es definitivo ni exhaustivo. Se irá reformando a medida que se detecten fallos o se modifique el contenido para mejorarlo. Debeis emplearlo como una ayuda para preparar la asignatura Análisis Matemático I y como complemento de las notas que tomeis en clase.

Espero que os sirva.

Pedro Martín.

Capítulo 1

Números reales y complejos. Topología en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

1.1 Números naturales, enteros y racionales

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ está incluido en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, que a su vez está contenido en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, es decir, los números que se pueden expresar como fracción de dos números enteros:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \qquad \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$$
$$\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 4, -4, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 5, -5, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, ...\}$$

Los números racionales se pueden sumar y se pueden multiplicar. Además, están ordenados, es decir, dados dos números racionales distintos es posible determinar cual es el menor y cual es el mayor. Las propiedades que tienen las operaciones suma y producto en el conjunto $\mathbb{Q}$ hacen que tenga estructura de cuerpo conmutativo y ordenado.

1.2 Números reales

La longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 es $\sqrt{2}$, que es un número real no racional. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ y a otros números llamados irracionales $\mathbb{I}$ que no se pueden expresar en forma de fracción de números enteros.

Entre dos números reales cualesquiera siempre hay números reales racionales e irracionales.

Los números reales se pueden sumar, multiplicar y ordenar, y las propiedades que cumplen estas operaciones con el orden establecido hacen que $\mathbb{R}$ tenga estructura de cuerpo conmutativo y ordenado. Con los números reales podemos medir cualquier distancia (por ejemplo, la diagonal del cuadrado de lado 1), a diferencia de lo que ocurría con $\mathbb{Q}$.

Una **cota superior** de un conjunto de números reales es un número real mayor o igual que todos los del conjunto. Un conjunto de números reales está **acotado superiormente** si existe una cota superior para el conjunto. Por ejemplo, 1 y 1.7 son cota superior de los intervalos $[0, 1]$ y $[0, 1)$. Ambos intervalos están acotados superiormente.

Una **cota inferior** de un conjunto de números reales es un número real menor o igual que todos los del conjunto. Un conjunto de números reales está **acotado inferiormente** si existe una cota inferior para el conjunto. Por ejemplo, -1 y 0 son cota inferior de los intervalos $(0, 1]$ y $[0, 1)$. Ambos intervalos están acotados inferiormente.

Un conjunto está **acotado** si están acotado superior e inferiormente. Por ejemplo $[0, 1)$ están acotado.

El **supremo** de un conjunto, si existe, es la menor de las cotas superiores. Si el supremo es un elemento del conjunto entonces se llama **máximo**. El **ínfimo** de un conjunto, si existe, es la mayor de cotas inferiores. Si el ínfimo de un conjunto es un elemento del conjunto entonces se llama **mínimo**. Por ejemplo, respecto a $(0, 1]$, 1 es supremo y máximo pero 0 es ínfimo pero no mínimo.

Todos los conjuntos de números reales acotados tiene supremo e ínfimo.

Dado un número real x se define **valor absoluto** de x al número real positivo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y se verifica que

1. $x \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|-x| = |x|$
4. $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$
5. $|x| < \epsilon \Rightarrow x \in (-\epsilon, \epsilon)$

Dado un número real x se define **parte entera de** x al mayor número entero que sea menor o igual que x.

Todo número real x admite una expresión decimal de la forma

$$p'a_1a_2...a_n...$$

donde $p \in \mathbb{Z}$ y $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ tal que

$$x = p + a_1 * 10^{-1} + a_2 * 10^{-2} + ... + a_n * 10^{-n} + ...$$

Si la expresión decimal es finita o periódica entonces x es un número racional. En otro caso x será irracional. La expresión decimal de un número real es única salvo casos similares a este:

$$1'34000 = 1.33\widehat{99}.$$

A veces es necesario recortar el número de decimales de una determinada expresión. En este caso, este truncamiento ha de hacerse usando las reglas de **redondeo**: el último dígito que se conserva se aumenta en uno si el primer dígito descartado es mayor que 5; si es 5 o es 5 seguido de ceros, entonces el último dígito retenido se incrementa en uno solo si este último es impar:

número	5 cifras decimales	6 cifras decimales
5.6170431500	5.61704	5.6170432
5.6170462500	5.61705	5.6170462

Las reglas de redondeo minimizan los errores de aproximación. Se define error E como

$$E = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}$$

A menudo se trabaja con el error absoluto ($|E|$). El error relativo es

$$e = \frac{E}{\text{valor verdadero}}.$$

Este último compara la magnitud del error cometido con la magnitud del valor que se pretende estimar y puede interpretarse en términos de %.

1.3 Números complejos

La solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es el número complejo $i = \sqrt{-1}$. Se define el conjunto de los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \{x + yi / \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

La expresión $a + bi$ de un número complejo se denomina **forma binómica**. Todo número real x es también un número complejo cuya forma binómica será $x + 0i$.

Dados dos números complejos $(a + bi)$ y $(c + di)$, se define la suma y el producto de ambos así:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

El conjunto $\mathbb{C}$ con las operaciones suma y producto tiene estructura de cuerpo en el que no es posible establecer un orden. El número complejo $a + bi$ se puede representar en el plano XY como el vector (a, b). Se denomina **afijo** del complejo $a + bi$ al punto (a, b) del plano.

Dado el número complejo $z = a + bi$ se define **conjugado** de z y se denota $\bar{z}$ a:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Dados dos números complejos z y z', se verifica que

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

El **módulo** de un complejo $z = a + bi$ es el número real positivo

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

que representa la distancia del afijo $a + bi$ al 0. Para dividir dos complejos, es decir, multiplicar uno por el inverso del otro, podemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \bar{w}.$$

Se verifica que:

1. $|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.
3. $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \ \forall z \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$, siendo z^{-1} el inverso de z.
4. $|z + w| \leq |z| + |w| \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.
5. $||z| \pm |w|| \leq |z \pm w| \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.
6. $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo 1.

Dado el complejo $z = a + bi \neq 0$, se define **argumento principal** de z al número real $\theta \in (0, 2\pi]$ tal que:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

Gráficamente, θ representa el ángulo que forma el vector (a, b) con la parte positiva del eje X. El conjunto de argumentos de z es

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi : \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Se tiene que

$$z = a + bi = |z|\cos(\theta) + |z|\operatorname{sen}(\theta)i = |z|(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i)$$

La expresión $|z|(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i)$ es la **forma trigonométrica** de z.

La expresión $|z|_\theta$ es la forma **módulo-argumento** de z, siendo θ uno de los argumentos de z. Dos complejos z y w son iguales si tienen iguales sus módulos y sus argumentos difieren en un múltiplo entero de 2π :

$$|z|_\theta = |w|_\psi \quad \Leftrightarrow \quad |z| = |w| \quad \text{y} \quad \theta - \psi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

El conjugado de $|z|_\theta$ es $|z|_{2\pi-\theta} = |z|_{-\theta}$.

La forma módulo-argumento es útil para realizar operaciones de producto y potencia de exponente entero. Si z, $w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que

1. $|z|_\theta \cdot |w|_\psi = \big(|z| \cdot |w|\big)_{\theta+\psi}$
2. $\frac{|z|_\theta}{|w|_\psi} = \big(\frac{|z|}{|w|}\big)_{\theta-\psi}$
3. $\big(|z|_\theta\big)^n = z \cdot z \cdot ...(\text{n-veces})... \cdot z = \big(|z|^n\big)_{n\theta}$

Ejercicio: *Calcula los números complejos tales que* $z^3 \cdot \bar{z} = -1$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de z si $w^n = z$. Un número complejo distinto de 0 tiene n raíces n-ésimas y $\sqrt[n]{z}$ representa al conjunto de todas ellas. Puesto que $z = w^n$, se tiene que $|z|_\theta = \left(|w|^n\right)_{n\psi}$ y por tanto

- $|z| = |w|^n \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$
- $\theta - n\psi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio: *Calcula las raíces sextas de 1 y las raíces sextas de* -1.

Ejercicio: *Calcula las números complejos de módulo 1 tales que sus raíces cuartas tienen sus afijos en las bisectrices de los cuadrantes del plano.*

Si $b \in \mathbb{R}$, define e^{ib} como

$$e^{ib} = \cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b).$$

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define la exponencial de z como:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)).$$

Se verifica que $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$, siendo $z, w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio: *Comprueba que si* $z = a + bi$*, entonces el módulo de* e^z *es* $|e^z| = e^a$ *y el argumento de* e^z *es* b*, con lo que* e^z *en forma módulo-argumento es* $\left(e^a\right)_b$.

Partiendo de la forma trigonométrica del número complejo

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

se llega a la **forma exponencial**

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

De la definición de la exponencial compleja $e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b$, siendo $b \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \qquad \operatorname{sen} b = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}.$$

Si sustituimos en lo anterior la exponencial compleja por la exponencial real, obtenemos las definiciones de seno hiperbólico y coseno hiperbólico

$$\cosh b = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \qquad \operatorname{senh} b = \frac{e^{b} - e^{-b}}{2}.$$

Por similitud con el caso real, si $z \in \mathbb{C}$ se definen **coseno y seno para números complejos** así

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} b = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Entre los números reales no se pueden encontrar logaritmos de números negativos. Sin embargo, sí es posible hacerlo entre los números complejos. Dado $z \in \mathbb{C}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es un **logaritmo neperiano de** z si se verifica que $e^w = z$. El conjunto de todos los logaritmos neperianos de un complejo z se representará

$$\mathrm{L}\, z = \{w \in \mathbb{C} / \quad e^w = z\}.$$

Ejercicio: *Comprueba que si $z = |z|_\theta$ entonces*

$$\mathrm{L}\, z = \mathrm{L}\, |z| + i(\theta + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De la definición de logaritmo de un número real, se deduce que $a^b = e^{b \,\mathrm{L}\, a}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Por similitud, dados $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se llaman **potencias** de base z y exponente w a todos los número complejos representados por z^w y definidos así

$$z^w = e^{w \,\mathrm{L}\, z}.$$

1.4 Sucesiones de números reales

1.4.1 Topología de $\mathbb{R}$

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define **bola abierta** de centro a y radio $r > 0$ y se denota $B(a, r)$, al intervalo abierto $(a - r, a + r)$

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x - a| < r\}.$$

Un conjunto de números reales es abierto si para todo elemento del conjunto se verifica que existe una bola abierta centrada en el elemento que a su vez está contenida en el conjunto. Un conjunto es cerrado si es el complementario de un abierto.

Se define **bola cerrada** de centro a y radio $r > 0$ y se denota $B[a, r]$, al intervalo cerrado $[a - r, a + r]$

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x - a| \leq r\}.$$

Un número real x es **punto de acumulación** de un conjunto si toda bola abierta centrada en x contiene puntos del conjunto distintos de x.

Se denomina recta ampliada al conjunto $\{\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\}$.

1.4.2 Sucesiones de números reales

Una **sucesión de números reales** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto de infinitos números reales que están ordenados, es decir, que hay un primer número (a_1), un segundo (a_2), un tercero (a_3), un n-ésimo (a_n), etc. Los siguientes son ejemplos de sucesiones:

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \dots, \ \frac{1}{n}, \ \dots$$

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{8}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{16}, \ \frac{1}{5}, \ \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ 1, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ 1, \ \frac{1}{6}, \ \frac{1}{7}, \ 1, \ \dots$$

Puesto que a cada número real de la sucesión se le asigna un lugar (primero, segundo, etc.), de forma exacta y rigurosa se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Podemos identificar una sucesión mediante su término general ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n}$), con una definición por recurrencia ($b_1 = 0.5,\ b_n = 2b_{n-1} - 1$) o mostrando sus primeros términos ($1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$). Una sucesión puede representarse en unos ejes cartesianos, situando los valores de n en el eje X y los valores de a_n en el eje Y. También se suelen representar solo los valores de a_n en la recta real, pero en este caso la representación no permite identificar el orden de la sucesión.

Intuitivamente, una **sucesión es convergente a un número real** l (y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} = l$) si los términos de la sucesión se van acercando al valor de l. Más precisamente se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a $l \in \mathbb{R}$ o tiene como límite l si se verifica alguna de estas propiedades equivalentes:

- Todas y cada una de las bolas $B(l, \epsilon)$ centradas en l contienen todos los términos de la sucesión a_n salvo, quizás, una cantidad finita de ellos; es decir, a partir de un término a_ν, todos los posteriores están contenidos en $B(l, \epsilon)$.
- Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ entonces $|a_n - l| < \epsilon$.

Intuitivamente una **sucesión** de números reales es de **Cauchy** si, a medida que avanzamos en la sucesión, los términos cada vez están más cerca unos de otros. De forma más precisa, se dice que una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si sea cual sea la distancia $\epsilon > 0$ que fijemos, existe un término a_ν a partir del cual, si elegimos dos términos cualesquiera posteriores a_n y a_m ($n, m \geq \nu$), la distancia entre ellos es menor que ϵ ($|a_n - a_m| < \epsilon$).

Una sucesión $(a_n)_{n\in N}$ se dice que es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in N$ y **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$. De forma similar se define sucesión **decreciente** y **estrictamente decreciente**.

Una sucesión se puede sumar, multiplicar, dividir con otra sucesión término a término. También se puede multiplicar una sucesión por un número real multiplicando cada término por el número real. Así mismo es posible considerar una sucesión elevada a otra sucesión ($a_n^{b_n}$) término a término o calcular el logaritmo a los términos de una sucesión ($\mathrm{L}a_n$).

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. El límite de una sucesión convergente es único.
2. Las operaciones suma, producto y producto por un número de sucesiones convergentes da como resultado una sucesión convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n.$$

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $l < k$, entonces $a_n < k$ a partir de un término en adelante.

4. Si $a_n < k$ a partir de un término en adelante, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \leq k$.

5. Si $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, entonces $a_n < b_n$ a partir de un término en adelante.

6. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ y $a_n \leq c_n \leq b_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

7. Toda sucesión formada con términos extraídos de otra sucesión convergente (subsucesión) es convergente al mismo límite.

8. Toda sucesión convergente es de Cauchy y que toda sucesión de Cauchy es acotada.

9. Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente. Equivalentemente, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente

1.4.3 Completitud de $\mathbb{R}$

Ejercicio: *Construye una sucesión formada por números racionales que converja a* $\sqrt{2}$.

La sucesión del ejercicio anterior es una sucesión de Cauchy de números racionales, sin embargo el límite no es un número racional sino un número real:

$$\boxed{\textit{El conjunto } \mathbb{Q} \textit{ no es completo.}}$$

Por el contrario, no es posible encontrar una sucesión de Cauchy formada por números reales cuyo límite no sea un número real puesto que

Teorema: *Toda sucesión de Caychy de números reales es convergente en los números reales.*

El resultado anterior se conoce como teorema de completitud de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\textit{El conjunto } \mathbb{R} \textit{ es completo.}}$$

1.4.4 Límites infinitos. Infinitésimos. Cálculo de límites.

Se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a infinito o tiene como límite infinito ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$) si se verifica alguna de estas propiedades equivalentes:

- Todos y cada uno de los intervalos de la forma (k, ∞), $k \in \mathbb{N}$ contienen todos los términos de la sucesión a_n salvo, quizás, una cantidad finita de ellos; es decir, a partir de un término a_ν, todos los posteriores están contenidos en (k, ∞).
- Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ entonces $a_n > k$.

De forma similar se define $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Las sucesiones **divergentes** son las que tienen como límite $\pm\infty$.

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0.$

2. La operación suma con las sucesiones da como resultado lo siguiente:

$+$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l < 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p \geq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$p + l$

3. La operación producto con las sucesiones da como resultado lo siguiente:

$\cdot$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l < 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$p \cdot l$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$	?	?	0

4. El producto de un número real λ por una sucesión da como resultado lo siguiente:

$\cdot\lambda$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$
$\lambda > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\lambda \cdot l$
$\lambda < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$\lambda \cdot l$
$\lambda = 0$	0	0	0

5. En general, al manejar sucesiones con potencias, logaritmos y cocientes, el resultado de la operación correspondiente es una sucesión con límite igual a la potencia, logaritmo o cociente de los límites correspondiente, teniendo en cuenta la regla de los signos en los cocientes. Además, se pueden presentar los siguientes casos que son indeterminaciones y hay que estudiarlos de forma particular:

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \infty - \infty, \ 0 \cdot (\pm\infty), \ 1^{\pm\infty}, \ \infty^0.$$

Un **infinitésimo** es una sucesión convergente a 0. El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo y el producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo.

Dos infinitésimos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que son equivalentes ($a_n \sim b_n$) si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

En el cálculo de límites, si tenemos un infinitésimo como factor en la expresión de un producto o cociente, podemos sustituirlo por un infinitésimo equivalente. Si $a_n \to 0$, son infinitésimos equivalentes los siguientes:

$$\text{Ł}(1 + a_n) \sim a_n \qquad \operatorname{sen} a_n \sim \tan a_n \sim a_n \qquad 1 - \cos a_n \sim \frac{1}{2}a_n^2$$

Para el cálculo de límites es útil el siguiente resultado:

Regla de Stolz: *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales tal que:*

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es estrictamente monótona (creciente o decreciente)*
- *O bien* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, *o bien* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Ejercicio: *Calcula el límite* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n}$.

Como consecuencia de la regla de Stolz, se puede demostrar que:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$

1.5 El espacio $\mathbb{R}^p$. Coordenadas y norma de un vector

El conjunto $\mathbb{R}^p$ se define así

$$\mathbb{R}^p = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)/ \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}\}$$

Ejemplos:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/ \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/ \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

En $\mathbb{R}^p$ se pueden realizar las operaciones:

- Suma:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)$$

- Producto por un número real: λ:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)$$

- Producto escalar o euclídeo:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_p y_p)$$

El conjunto $\mathbb{R}^p$ con las operaciones anteriores tiene estructura de espacio vectorial euclídeo.

Para medir distancias en un espacio euclídeo se puede utilizar el concepto de norma de un vector. Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ se define **norma de** $\vec{x}$ y se denota $\|\vec{x}\|$ a

$$\|x\| = \|(x_1, x_2, \ldots, x_p)\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2}$$

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p$, se verifica que

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$ y $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

El concepto de norma es la generalización en $\mathbb{R}^p$ del concepto de valor absoluto en $\mathbb{R}$. Así, la distancia entre dos elementos cualesquiera de $\mathbb{R}^p$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$, será el valor de $\|\vec{x} - \vec{y}\|$. Se generalizan también otros conceptos, por ejemplo:

- La **bola abierta** de centro $\vec{a}$ y radio $r > 0$ es el conjunto:

  $$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^p / \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

  De forma similar se define bola cerrada. Un conjunto A de $\mathbb{R}^p$ es abierto si para todo elemento de A se verifica que existe una bola abierta centrada en el elemento y completamente contenida en A.

- Se dice que una **sucesión** $\vec{x}^{(n)}$ de vectores de $\mathbb{R}^p$ es **convergente** al vector $\vec{l} \in \mathbb{R}^p$ (o tiene como límite $\vec{l}$) y se expresa

  $$\lim_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{l} \qquad \text{o bien} \qquad \vec{x}^{(n)} \to \vec{l}$$

  si se verifica que $\|\vec{x}^{(n)} - \vec{l}\| \to 0$.

  La sucesión $\vec{x}^{(n)}$ converge a $\vec{l}$ si toda bola centrada en $\vec{l}$ contiene infinitos términos de la sucesión $\vec{x}^{(n)}$ y fuera de cada bola solo hay, como mucho, un número finito de términos de la sucesión.

  Se dice que la sucesión de vectores converge a infinito si $\|\vec{x}^{(n)}\| \to +\infty$.

  El límite de una sucesión es único y si una sucesión tiene como límite un vector, entonces está acotada. Se verifica que

  $$\vec{x}^{(n)} \to \vec{l} \Leftrightarrow x_1 \to l_1,\ x_2 \to l_2,\ \ldots,\ x_p \to l_p$$

Las **coordenadas cartesianas** de vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ son los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Estos p números determinan el vector.

Cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ distinto de cero viene determinado por sus **coordenadas polares** (r, θ), donde r es la distancia de $\vec{x}$ a vector $\vec{0}$, y θ es el ángulo que forma la semirrecta que contiene al vector $\vec{x}$ y la semirrecta positiva del eje X. La relación entre coordenadas cartesianas y polares es la siguiente:

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ $\cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \ \operatorname{sen}\theta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$	$x_1 = r\cos\theta$ $x_2 = r\operatorname{sen}\theta$

El vector $\vec{0}$ tiene $r = 0$ y no tiene segunda coordenada polar.

Cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ distinto de cero viene determinado por sus **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z), donde (r, θ) son las coordenadas polares del vector (x_1, x_2) y $z = x_3$.

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ también es posible identificarlo por su **coordenadas esféricas** (ρ, φ, θ). $\rho \geq 0$ es la distancia de $\vec{x}$ al vector $\vec{0}$. $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es el ángulo que forma $\vec{x}$ con su proyección sobre el plano XY. $\theta \in [0, 2\pi)$ es el ángulo que forma la proyección de $\vec{x}$ sobre el plano XY con la parte positiva del eje X. La relación con las coordenadas cartesianas es la siguiente:

$x_1 = \rho\cos\varphi\cos\theta$	$x_2 = \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta$	$x_3 = \rho\operatorname{sen}\varphi$

El vector $\vec{0}$ tiene $\rho = 0$.

Capítulo 2

Funciones. Límites y continuidad en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

2.1 Funciones reales escalares. Límites y continuidad.

En esta sección trataremos funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se llama dominio de una función al conjunto de número reales para los que existe imagen.

$$\text{Dominio}(f) = \{x \in \mathbb{R} / \ \exists f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

2.1.1 Límite de una función en un punto. Límites laterales

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada en la figura 2.1 y definida así

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

cuyo domino es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Intuitivamente, se dice que $f(x)$ tiene límite $l = -2$ en el punto $a = -1$ (simplificadamente $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$) porque todos los valores de x cercanos a -1 tienen sus imágenes cerca de -2. Dicho de otra forma: dada cualquier sucesión de puntos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converja a -1, se verifica que la sucesión de sus imágenes $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a -2.

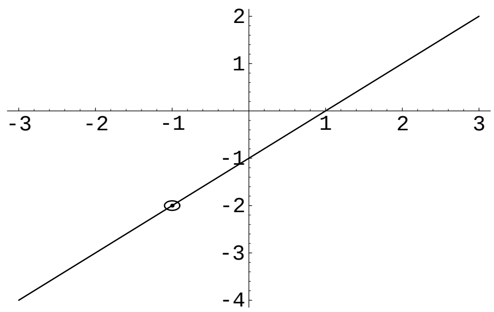


Figura 2.1: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Por similares razones, se dice que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = 0 \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x+1} = 1.$$

En general, se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene límite l cuando x tiende al número a (simplificadamente $\lim_{x\to a} f(x) = l$) cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(l, \epsilon)$, existe una bola $B(a, \delta)$ tal que si $x \in B(a, \delta)$ y $x \neq a$ entonces $f(x) \in B(l, \delta)$.
- Dada cualquier sucesión de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ que converja a a, la sucesión de sus imágenes $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$ converge a l.

Consideremos la función representada en la figura 2.2

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Si nos *acercamos* a 2 por la izquierda el límite de las imágenes es 2, pero si nos *acercamos* a 2 por la derecha el límite es 5.

Se dice que una función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene **límite lateral l por la derecha de a** y se representa $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

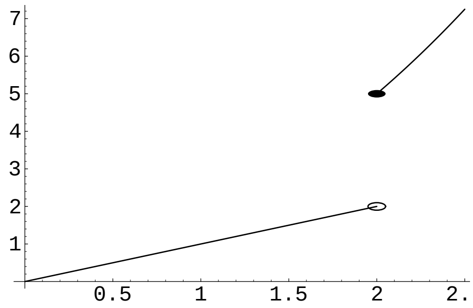


Figura 2.2: función sin límite en 2.

- Dada cualquier bola $B(l, \epsilon)$, existe una bola $B(a, \delta)$ tal que si $x \in B(a, \delta)$ y $x > a$ entonces $f(x) \in B(l, \delta)$.
- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a a con puntos mayores estrictos que a, la sucesión de sus imágenes converge a l.

De forma similar se define **límite lateral por la izquierda**.

De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

1. Si una función $f(x)$ tiene límite real en un punto a, entonces ese límite es único y coincide con los límites laterales de la función en a.
2. Si una función $f(x)$ tiene límites laterales reales en a y son iguales, entonces existe el límite de $f(x)$ en a y coincide con el valor de los límites laterales.

2.1.2 Límites infinitos y límites en el infinito

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada en la figura 2.3 definida así

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2}.$$

Intuitivamente, se dice que $f(x)$ tiene límite infinito en el punto $a = 1$ (simplificadamente $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$) porque los valores de x *cercanos* a 1 tienen sus imágenes positivas y no acotadas. Dicho de otra forma: dada cualquier

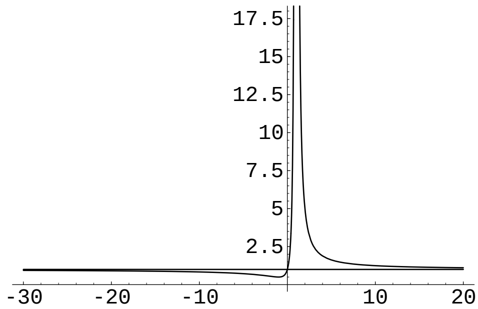


Figura 2.3: $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$

sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a 1, se verifica que la sucesión de sus imágenes $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a infinito.

Por similares razones, se dice que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = 1 \qquad \lim_{x\to\ 1} \frac{-x^2-1}{(x-1)^2} = -\infty.$$

En general, se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene **límite infinito cuando x tiende al número a** (simplificadamente $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$) si se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dado cualquier valor $k > 0$, existe una bola $B(a,\delta)$ tal que si $x \in B(a,\delta)$ y $x \neq a$ entonces $f(x) > k$.
- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a a con puntos distintos de a, la sucesión de sus imágenes converge a infinito.

De forma similar se define

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \ \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene **límite l cuando x tiende a infinito** (simplificadamente $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$) cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(l,\epsilon)$, existe un número $k > 0$ tal que si $x > k$ entonces $f(x) \in B(l,\epsilon)$.

- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a infinito, la sucesión de sus imágenes converge a l.

De forma similar se define $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

2.1.3 Cálculo de límites. Infinitésimos.

En el cálculo de límites de funciones, siempre que tenga sentido la expresión correspondiente y salvo las indeterminaciones que se vieron en los límites con sucesiones, se verifica que

$$\begin{gathered}
\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\
\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \\
\lim_{x\to a} \log_{\mathrm{b}} f(x) = \log_{\mathrm{b}}(\lim_{x\to a} f(x)) \\
\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)} \\
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}
\end{gathered}$$

siendo a un número real o $\pm\infty$.

Un **infinitésimo en** a es una función cuyo límite en a es 0.

Un **infinito en** a es una función cuyo límite en a es $\pm\infty$.

Dos infinitésimos o dos infinitos $f(x)$ y $g(x)$ en a son equivalentes y se representa como $f(x) \overset{x\to a}{\sim} g(x)$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Sea $f(x)$ un infinitésimo en $a \in \mathbb{R}$. Son equivalentes los siguientes infinitésimos:

$$f(x),\ \operatorname{sen} f(x),\ \tan f(x),\ \operatorname{arcsen} f(x),\ \arctan f(x),\ \mathrm{Ł}(1+f(x)),\ e^{f(x)} - 1$$

Por ejemplo, son equivalentes los infinitésimos:
x, $\operatorname{sen} x$, $\tan x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arctan x$, $\mathrm{Ł}(1+x)$ y $e^x - 1$ en $x = 0$.
$1 - \cos x$ y $\frac{x^2}{2}$ en $x = 0$
$x - 1$ y $\mathrm{Ł}x$ en $x = 1$.

En el cálculo de límites de productos o cocientes se puede sustituir un infinitésimo o infinito por otro equivalente. Se verifica que:

1. Si $f(x)$ es un infinitésimo en a y $g(x)$ está acotada en una bola $B(a,\epsilon)$, entonces $f(x)g(x)$ es un infinitésimo en a.

2. Si $f(x)$ es un infinito en a y $g(x)$ está acotada inferiormente en una bola $B(a,\epsilon)$, entonces $f(x)+g(x)$ es un infinito en a.

3. Si $f(x)$ es un infinito en a, entonces $\frac{1}{f(x)}$ es un infinitésimo en a.

Ejercicio: *Calcula los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3-\mathrm{L}x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+3x} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 x)^{\tan^2 x}$$

2.1.4 Función continua

Intuitivamente una función $f(x)$ es continua en un punto a cuando valores de x *cercanos* a a tiene imágenes *cercanas* a $f(a)$, es decir, la gráfica de la función $f(x)$ tiene un trazo continuo *alrededor* de a.

Sea $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función definida en un abierto que contenga a $a\in\mathbb{R}$. De forma más precisa, se dice que $f(x)$ **es continua en** a si se cumple estas condiciones:

- Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y es un número real.
- Existe $f(a)$.
- $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$.

Si la función no es continua en a se dice que tiene una discontinuidad en a. La discontinuidad puede ser:

Evitable: existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y es un número real.

Esencial: no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ o es $\pm\infty$. A su vez, esta puede ser:

- De salto infinito: existen los límites laterales y alguno es $\pm\infty$.
- De salto finito: existen los límites laterales y ambos son finitos.
- De segunda especie: no existe algún límite lateral.

Una función $f(x)$ **es continua por la derecha de** $a \in \mathbb{R}$ si existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, es un número real y coincide con $f(a)$. De forma equivalente se define continuidad por la izquierda.

Sea $f(x)$ continua en a. Se verifica que:

1. $f(x)$ está acotada en una bola $B(a, \delta)$.
2. Si $f(a) \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene el mismo signo que a en una bola $B(a, \delta)$.
3. Si $g(x)$ es continua en a, entonces $f + g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ también son continuas en a.
4. b^x, $\log_b x$, x^n $(n \in \mathbb{N})$, x^x, polinomios, funciones racionales y funciones trigonométricas son continuas en su dominio.
5. Si $g(x)$ es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Ejercicio: *Estudia la continuidad de las funciones:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -4 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq \frac{-\pi}{2} \\ m \operatorname{sen} x + n & \text{si } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} .$$

Se dice que una función $f(x)$ es **continua en el intervalo** (a, b) si es continua en todos los puntos del intervalo.

Se dice que una función $f(x)$ es **continua en el intervalo** $[a, b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

De forma similar se define continuidad en $[a, b)$ y en $(a, b]$.

Teorema (de Bolzano): *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Ejercicio: *Pon un ejemplo de:*

1. *Función definida en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ y no exista $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*
2. *Función continua en (a, b) tal que $f(a)f(b) < 0$ y $f(c) \neq 0$ en todo punto $c \in (a, b)$.*
3. *Función continua en $[a, b]$ y tal que no exista $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Teorema de valor intermedio: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $d \in [f(a), f(b)]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$.

Ejercicio: *Encuentra un ejemplo de función continua en (a,b) que no cumpla el teorema de valor intermedio.*

Teorema: *Si $f(x)$ es continua en un intervalo I, entonces la imagen $f(I)$ también es un intervalo.*

Teorema: *Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$, entonces existe valores $m, M \in [a,b]$ tales $f(m)$ y $f(M)$ son, respectivamente, el mínimo y el máximo de la función $f(x)$ en $[a,b]$.*

Ejercicio: *Encuentra ejemplos donde falle alguna de las hipótesis de los resultados anteriores y no se verifiquen los teoremas correspondientes.*

2.2 Funciones vectoriales. Límites y continuidad.

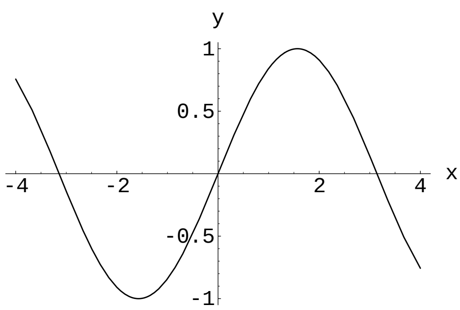


Figura 2.4: $f(x) = sen(x)$

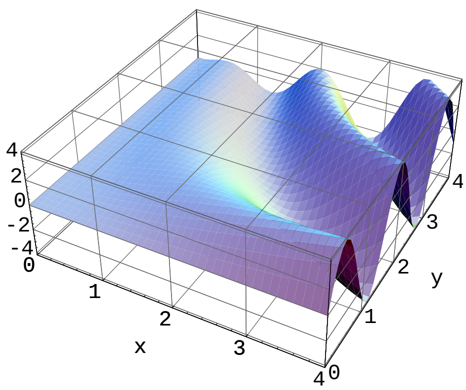


Figura 2.5: $f(x,y) = sen(xy)$

Una función $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación que a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ le hace corresponder un vector $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ pudiéndose representar

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

La función es escalar si $m = 1$ y vectorial si $m > 1$. Es de variable real si $p = 1$ y de variable vectorial si $p > 1$. Si $m > 1$, la función se puede expresar así

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \big(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_p)\big).$$

siendo $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, las funciones coordenadas o componentes.

Las nociones de dominio, imagen, acotación y las operaciones habituales con funciones escalares de variables escalar son extrapolables fácilmente a una función vectorial.

Las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se pueden representar gráficamente como muestra la figura 2.5.

Ejercicio: *Halla el dominio de las funciones*

$f(x, y) = \sqrt{xy}$ $\qquad h(x, y) = \sqrt{1 - x - y}$

$g(x, y) = Ł(xy)$ $\qquad m(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

2.2.1 Límite de una función de variable vectorial en un punto

Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f tiene **límite** $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$ **cuando** $\vec{x}$ **tiende a** $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$ (simplificadamente $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{l}$) cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(\vec{l}, \epsilon)$, existe una bola $B(\vec{a}, \delta)$ tal que si $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta)$ y $\vec{x} \neq \vec{a}$ entonces $f(\vec{x}) \in B(\vec{l}, \delta)$.

- Dada cualquier sucesión de vectores $(\vec{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a $\vec{a}$, la sucesión de sus imágenes $(f(\vec{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\vec{l}$.

Se verifica que la función converge a $\vec{l}$ si cada función coordenada f_i converge a l_i. Por tanto, nos centraremos en funciones escalares de variable escalar ($f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$).

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \frac{x^2(y+1)}{x^2+y^2+1}$, tiene límite $l = 0$ en el punto $\vec{a} = (0, 0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y + 1)}{x^2 + y^2 + 1} = 0.$$

En general, es posible seguir muchas trayectorias distintas para converger al punto $\vec{a}$ en el sentido de la definición. Se llama **límite de una función en un punto según un subconjunto** al límite de la función obtenido siguiendo trayectorias con puntos del subconjunto. Cuando el conjunto considerado es una recta, se habla entonces de **límites direccionales**.

Ejemplo: *Límite direccional de $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ en el punto $\vec{a} = (0,0)$ según la recta $y = 2x$ y según las rectas $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+(2x)^2} = \lim_{x\to(0,0)} \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5}.$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to(0,0)} \frac{x^2}{(m^2+1)x^2} = \frac{1}{m^2+1}.$$

Se llaman **límites iterados** de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a los valores

$$\lim_{x\to a_1}\left(\lim_{y\to a_2} f(x,y)\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to a_2}\left(\lim_{x\to a_1} f(x,y)\right).$$

Ejemplo: *Comprueba que los límites iterados de $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ son ∞ y 1.*

Veamos algunas observaciones:

1. Si existe el límite en $\vec{a}$ de una función, entonces este es único. Además, existirá también el límite siguiendo cualquier subconjunto y tendrá el mismo valor.

2. Si el límite de una función en $\vec{a}$ según dos subconjuntos es distinto, entonces no existirá el límite de la función en $\vec{a}$. (Ejemplo: $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$).

3. Puede existir el límite de una función en $\vec{a}$ y no existir alguno de los límites reiterados. (Ejemplo: $y\cos(\frac{1}{x})$ en $(0,0)$.)

4. Se puede usar el cambio a coordenadas polares para calcular límites de funciones. Veamos dos ejemplos:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta \;\; r^2\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^3}} = \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta \;\; \operatorname{sen}\theta}{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)} = \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta \;\; \operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{(r^2)^3}} = \\
&= \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta \;\; \operatorname{sen}^2\theta = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta \;\; r\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)} = \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta \;\; \operatorname{sen}\theta}{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)} = \lim_{r\to 0}\cos\theta \;\; \operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Este límite no existe puesto que depende de θ.

2.2.2 Límites infinitos y límites en el infinito

Una sucesión $\vec{x}^{(n)} \in \mathbb{R}^p$ converge a infinito (simplificadamente, $\vec{x}^{(n)} \to \infty$) si $\|\vec{x}^{(n)}\| \to \infty$. Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Se dice que:

- $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \infty$, si toda sucesión $\vec{x}^{(n)} \to \vec{a}$ verifica que $f(\vec{x}^{(n)}) \to \infty$.
- $\lim_{\vec{x}\to\infty} f(\vec{x}) = \vec{l}$, si toda sucesión $\vec{x}^{(n)} \to \infty$ verifica que $f(\vec{x}^{(n)}) \to l$.
- $\lim_{\vec{x}\to\infty} f(\vec{x}) = \infty$, si toda sucesión $\vec{x}^{(n)} \to \infty$ verifica que $f(\vec{x}^{(n)}) \to \infty$.

Ejemplos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} x^2+y^2 = \infty.$$

Sean $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Veamos algunas observaciones:

1. El límite de una función es único.

2. Teniendo en cuenta las correspondientes indeterminaciones, para la suma, producto y cociente se verifica que si $\vec{a} \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}$:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$$
$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$$
$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})}, \ (\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) \neq 0)$$

3. Si $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ en una bola centrada en $\vec{a}$, entonces $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \leq \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$.

4. Si $f(\vec{x}) \geq 0$, entonces $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \geq 0$.

5. Sea una función $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tal que $f(\vec{x}) \leq h(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$. Entonces

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \leq \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} h(\vec{x}) \leq \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}).$$

2.2.3 Función continua de variable vectorial

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definida en un abierto que contiene a $\vec{a}$ es continua en $\vec{a}$ si se verifica que

- Existe $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ y es un número real.
- Existe $f(\vec{a})$.
- $f(\vec{a}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$.

Dadas dos funciones continuas en un punto $\vec{a}$, su suma, producto y cociente (si tiene sentido) son también funciones continuas en $\vec{a}$. La composición de funciones continuas también es una función continua.

Ejercicio: *Estudia el límite de la siguiente función en el punto* $(0, 0)$ *y prolonga su definición para que sea continua:*

$$f(x, y) = y^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Capítulo 3

Cálculo Diferencial en $\mathbb{R}$

3.1 Derivada de una función en un punto.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Se dice que $f(x)$ es derivable en el punto a, si existe (es un número real) alguno de estos dos límites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, a ese número real se le llama derivada de $f(x)$ en a y se denota $f'(a)$ o $Df(a)$.

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es derivable en $a = 4$ porque

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4}}}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{2\sqrt{x}(x-4)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 4} \frac{-1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} = \frac{-1}{16}.$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ en 4 existe y vale $f'(4) = -1/16$.

□

Ejemplo: La función $f(x) = x^2$ es derivable en $a = 2$ porque

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0} h+4 = 4.$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ en 2 existe y vale $f'(2) = 4$.

$\square$

¿Qué significa que la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *en* 4 *sea*

$$f'(4) = -1/16 = -0.0625 \quad ?$$

(Ver figura 3.1)

1. Elijamos una sucesión que converja a $a = 4$, por ejemplo $x_n = 4 + 1/n$.

2. Calculemos los cocientes $\frac{f(x_n)-f(4)}{x_n-4}$. Cada uno de estos cocientes representan la inclinación de la recta que pasa por los puntos $(x_n, f(x_n))$ y por $(4, f(4))$ (es decir, la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X).

3. Cuando x_n se acerca a 4, las rectas anteriores se acercan a la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto 4.

4. El límite de dichos cocientes (inclinaciones) cuando avanzamos en la sucesión, es decir, cuando x_n se acerca a 4, representa la inclinación de la recta tangente en 4.

x_n	inclinación
$x_{200} = 4.005$	-0.06244146721847
$x_{1000} = 4.001$	-0.06248828369088
$x_{2500} = 4.0004$	-0.06249531289054
$x_{140345} = 4.000007125298372$	-0.0624999165060
$x_{2345678} = 4.000000426315974$	-0.06249999507708

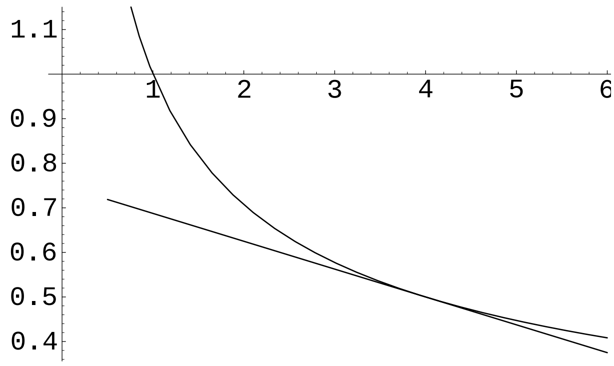


Figura 3.1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

¿Puede existir una función que en un punto a sea derivable y en ese mismo punto no sea continua ? No.

Propiedad: *Toda función derivable en a es continua en a.*

Demostración. Si $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es un número real entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

y esto último significa que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, que $f(x)$ es continua en a.

$\square$

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Se dice que $f(x)$ **es derivable en el punto a por la derecha**, si existe (es un número real) alguno de estos dos límites

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, a ese número real se le llama derivada de $f(x)$ en a por la derecha y se denota $f'_+(a)$.

De forma similar se define función derivable en a por la izquierda y derivada en a por la izquierda:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Propiedad: *Una función $f(x)$ es derivable en un punto a si y solo si es derivable por la izquierda y por la derecha en a y ambas derivadas laterales coinciden.*

Demostración. $f(x)$ es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

es decir, si y solo si existen los límites laterales

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y son iguales.

$\square$

Ejemplo: La función $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no es derivable, porque $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$.

3.2 Función derivada

¿Cuánto vale la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en un punto cualquiera a?

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo I. Se dice que $f(x)$ es derivable en I si es derivable en todo $x \in I$. En tal caso, podemos construir otra función tal que a cada punto x le asigne la derivada de $f(x)$ en ese punto:

$$x \in I \xrightarrow{f'} f'(x).$$

Dicha función se llama *función derivada de* $f(x)$ o simplemente la *derivada de* $f(x)$, y se denota $f'(x)$.

Ejercicio: *¿Qué diferencia hay entre la derivada de una función en un punto y la derivada de una función?*

$\square$

Derivadas de las funciones elementales:

función	derivada	función	derivada	función	derivada
$k \in \mathbb{R}$	0	$L(x)$	$1/x$	$\text{Log}_a(x)$	$\frac{1}{x}\text{Log}_a e$
e^x	e^x	$a^x,\ a>0$	$a^x La$	$x^k,\ k \in \mathbb{R}$	kx^{k-1}
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x}}$	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$\text{arcsen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	senh	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\text{senh}(x)$
$\tanh(x)$	$1-\tanh^2(x)$	$\text{arcsenh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$				

Nota.- Se define seno, coseno y tangente hiperbólica como

$$\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Ejercicio: Calcula la ecuación de la recta:

1. Tangente a $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ y paralela a la recta $y + 3x = 7$.
2. Tangente a $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ en el punto $x = -2$.

$\square$

Ejercicio: Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = |x^2 - 7x + 10|.$$

$\square$

Si $f(x)$ es derivable en un intervalo I y su derivada $f'(x)$ es también derivable en I, entonces la derivada de esta última es la derivada segunda de $f(x)$ y se denota $f''(x)$. De forma similar se definen $f'''(x)$, $f^{4)}$, $f^{5)}$, etc.

3.3 Operaciones con funciones derivables

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en I, entonces:

1. La función suma $(f+g)(x)$ y la diferencia $(f-g)(x)$ son funciones derivables en I y las derivadas de una y otra son

$$f'(x)+g'(x) \text{ y } f'(x)-g'(x).$$

Demostración. Para la suma:

$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-[f(a)+g(a)]}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)+g(a)}{h} = f'(a)+g'(a).$$

De forma similar sería para la diferencia.

2. La función $\alpha \cdot f(x)$ es derivable $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, y

$$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x).$$

3. La función producto $(f \cdot g)(x)$ es derivable en I, y

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Demostración.

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f \cdot g)(a+h)-(f \cdot g)(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{[f(a+h)-f(a)]g(a+h)}{h} + \frac{f(a)[g(a+h)-g(a)]}{h}\right] =$$
$$= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

4. La función cociente f/g es derivable en todo $x \in I$ tal que $g(x) \neq 0$ y

$$\frac{f}{g}'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

5. Si $f(x)$ es derivable en I, $g(x)$ es derivable en $f(I)$, entonces la composición $g \circ f$ es derivable en I y $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ (Regla de la cadena).

   Demostración.

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = *$$

   Hacemos uso de la función:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} - g'(f(a)) & \text{si } f(x) - f(a) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) - f(a) = 0. \end{cases}$$

   Esta función verifica dos cosas:

   (a) $g(f(x)) - g(f(a)) = [F(x) + g'(f(a))][f(x) - f(a)]$.

   (b) $\lim_{x \to a} F(x) = 0$.

   Por tanto:

$$* = \lim_{x \to a} \frac{[F(x) + g'(f(a))][f(x) - f(a)]}{x - a} =$$
$$\lim_{x \to a} \left[F(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] + \lim_{x \to a} \left[g'(f(a)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] =$$
$$0 \cdot f'(a) + g'(f(a)) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

   □

   Ejemplo: La función derivada de $\operatorname{sen}(f(x))$ en un punto a es $\cos(f(a)) \cdot f'(a)$.

   Ejercicio: Sabiendo que la composición de una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ es la función identidad $((f \circ f^{-1})(x) = x)$, demuestra que la derivada del arcoseno es $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

   □

3.4 Comportamiento en un punto de las funciones derivables. Crecimiento y decrecimiento.

Sea $f(x)$ una función definida alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$. Diremos que:

1. $f(x)$ **es creciente en** a, si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x, y \in B$,

   $x < a < y \Rightarrow f(x) \leq f(a) \leq f(y)$

   Será **estrictamente creciente en** a si

   $x < a < y \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y)$.

2. $f(x)$ **es decreciente en** a, si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x, y \in B$,

   $x < a < y \Rightarrow f(x) \geq f(a) \geq f(y)$

   Será **estrictamente decreciente en** a si

   $x < a < y \Rightarrow f(x) > f(a) > f(y)$.

3. $f(x)$ alcanza un **mínimo relativo en** a si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x, y \in B$,

   $x < a < y \Rightarrow f(x) \geq f(a) \leq f(y)$.

   El mínimo será estricto si

   $x < a < y \Rightarrow f(x) > f(a) < f(y)$.

4. $f(x)$ alcanza un **máximo relativo en** a si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x, y \in B$,

   $x < a < y \Rightarrow f(x) \leq f(a) \geq f(y)$.

   El máximo será estricto si

   $x < a < y \Rightarrow f(x) < f(a) > f(y)$.

Propiedades:

1. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y creciente (equivalentemente, decreciente) en a, entonces $f'(a) \geq 0$ ($f'(a) \leq 0$).*

   Demostración. $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ porque si $x < a$, el numerador y el denominador son negativos, y si $x > a$, ambos son positivos.

   $\square$

2. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y $f'(a) > 0$ (equivalentemente, $f'(a) < 0$), entonces $f(x)$ es estrictamente creciente en a (estrictamente decreciente en a).*

   Demostración. Como $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, existe una bola centrada en a tal que si $x < a$, el numerador y el denominador son negativos, con lo que $f(x) < f(a)$; si $x > a$, ambos son positivos, con lo que $f(x) > f(a)$.

   $\square$

3. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y alcanza un mínimo relativo en a (equivalentemente, máximo relativo), entonces $f'(a) = 0$.*

   Demostración. Por ser a un mínimo relativo, se tiene que $f(x) - f(a)$ y $x - a$ tienen el mismo signo si $x < a$ y distinto signo si $x > a$. Por tanto $f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ y $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Se concluye que $f'(a) = 0$. De forma similar se razona para un máximo relativo.

   $\square$

¿Si $f(x)$ es estrictamente creciente en a entonces $f'(a) > 0$?

¿Si $f'(a) = 0$ entonces a es un máximo o mínimo?

3.5 Teoremas fundamentales del cálculo diferencial

Teorema de Rolle: *Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, por una propiedad de las funciones continuas (ver sección 2.1.4), alcanzará un valor máximo (M) y un valor mínimo (m) en $[a, b]$. Si M o m se corresponden con un punto $c \in (a, b)$, entonces $f'(c) = 0$ por ser máximo o mínimo relativo. Si M y m se alcanzan en a y b, entonces $M = f(a) = f(b) = m$, con lo que $f(x)$ es constante en $[a, b]$ y su derivada vale 0 en todo punto de $[a, b]$.

□

Teorema de Cauchy de valor medio: *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$.*

Demostración. Basta comprobar que la función $f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]$ cumple el teorema de Rolle en $[a, b]$.

□

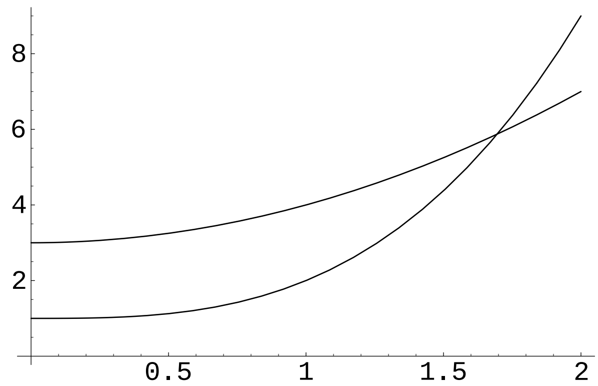


Figura 3.2: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ejercicio: *Las expresiones $f(t) = t^3 + 1$ y $g(t) = t^2 + 3$ representan la cantidad de información almacenada por dos ordenadores en función del tiempo (ver figura 3.2). Comprueba que la cantidad de información recibida por un ordenador, es el doble que la recibida por el otro en el intervalo de tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 2$. ¿En algún instante la velocidad de recepción de uno fue el doble que la del otro?* □

Teorema de Lagrange de valor medio: *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)[b - a]$.*

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior a $f(x)$ y a $g(x) = x$.

□

Ejercicio: *En el ejercicio anterior, calcula la velocidad media de recepción de información. ¿En algún instante la velocidad de recepción de información fue igual a la velocidad media?*

□

Regla de L'Hôpital: *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en todos los puntos de una bola reducida B de $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ (un bola centrada en a a la que le quitamos a). Si ambas funciones son derivables en B y $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in B$, entonces:*

1. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

2. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Demostración del Caso 1. Si $a \in R$, definimos $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, con lo que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $B \cup a$. Si $x \in B$, podemos aplicar el teorema de Cauchy al intervalo $[x, a]$ (o al intervalo $[a, x]$) y tendremos que existe un punto $c_x \in [x, a]$ (o $c_x \in [a, x]$) tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a, c_x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Si $a = \pm\infty$, basta hacer el cambio $t = 1/x$ y aplicar lo anterior.

□

3.6 Diferencial de una función. Función diferenciable

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales definidas alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$. Diremos que $f(x)$ **y** $g(x)$ **tienen un contacto de orden** $r \geq 0$ **en** a , si se verifica que:

1. $f(a) = g(a)$

2. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - g(x)}{(x-a)^r} = 0.$

Intuitivamente, que dos funciones tenga un punto de contacto en a significa que las dos funciones son *"parecidas"* alrededor de a. El parecido será mayor cuanto mayor sea el orden r del contacto.

□

Ejercicio: 1. *Comprueba que si $f(x)$ es continua en a entonces $f(x)$ y la función constante $f(a)$ tienen un punto de contacto en a de orden 0.*

2. *Demuestra que si $f(x)$ y $g(x)$ tienen un punto de contacto en a de orden r, entonces tiene un punto de contacto en a de orden s, siendo s cualquier número tal que $0 \leq s \leq r$.*

□

Sea $f(x)$ una función real definida alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$.

Definición 1: *Se dice que $f(x)$* ***es diferenciable en*** *a si existe una función afín $g(x)$ (un polinomio de grado menor o igual a 1), que podrá expresarse como $g(x) = n + l(x-a)$ con $n, l \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x)$ y $g(x)$ tienen un punto de contacto en a de orden 1, es decir*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [n + l(x-a)]}{x-a} = 0.$$

Propiedad: *Sea $f(x)$ una función real definida en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$f(x) \text{ es diferenciable en } a \Leftrightarrow f(x) \text{ es derivable en } a.$$

$\square$

Si la función f es diferenciable, la función $g(x)$ será siempre la recta tangente a $f(x)$ en a, es decir: $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Se define **diferencial de una función** $f(x)$ **en un punto** a a la función lineal

$$\begin{array}{rccc} df_a: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(a)x. \end{array}$$

Puesto que la recta tangente $g(x)$ se puede utilizar como aproximación a $f(x)$ alrededor de a, se tiene que

$$f(x) - f(a) \approx g(x) - g(a) = f'(a)(x-a) = df_a(x-a).$$

Luego la diferencia $f(x) - f(a)$ se puede aproximar por el valor de la función df_a en el punto $x - a$.

Dado lo anterior, se puede definir también función diferenciables de la siguiente forma:

Definición 2: *Una función* $f(x)$ *es diferenciable en* $a \in \mathbb{R}$ *si existe una función lineal* df_a *tal que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df_a(x-a)}{x-a} = 0.$$

Se define **diferencial de una función** $f(x)$ a la aplicación que a cada punto $a \in \mathbb{R}$ le adjudica su correspondiente función lineal df_a:

$$\begin{array}{rccc} df: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & df_x = f'(x)dx. \end{array}$$

siendo $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Capítulo 4

Derivadas parciales y direccionales. La diferencial

4.1 Derivada según un vector. Derivadas direccionales.

Recordemos la definición de derivada de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in \mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en un entorno de $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Se define la **derivada parcial respecto de x en el punto $\vec{a}$**, denotada $D_x f(\vec{a})$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ o $f_x(\vec{a})$ como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} \quad \text{o bien} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e_1}) - f(a)}{h}$$

siendo $\vec{e}_1 = (1, 0)$. Equivalentemente, la derivada parcial respecto de y, denotada $D_y f(\vec{a})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})$ o $f_y(\vec{a})$ como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)}{h} \quad \text{o bien} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e_2}) - f(\vec{a})}{h}$$

siendo $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + x + 1$. Sus derivadas parciales en el punto $\vec{a} = (0,0)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+1}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

□

Si intersecamos la superficie gráfica $z = f(x,y)$ (la gráfica de $f(x,y)$) con el plano de ecuación $y = a_2$ obtenemos un curva. Situados en dicho plano, el valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ es la pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto (a_1, a_2) (ver figuras 4.1 y 4.2).

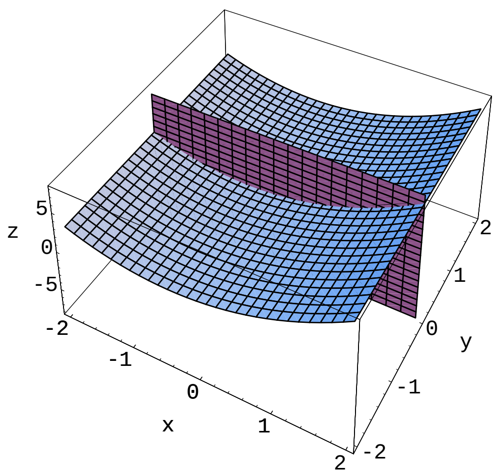


Figura 4.1: $f(x,y) = x^2 + x + 1$

La derivada parcial de una función respecto de x (equivalentemente, respecto de y) en el punto $\vec{a}$ también se llama derivada direccional de la función siguiendo la dirección del vector $\vec{e_1}$ (equivalentemente, respecto de $\vec{e_2}$). En general, dado cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\vec{v}\| = 1$, se define **derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $\vec{a}$ siguiendo la dirección del vector $\vec{v}$** a

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{h}.$$

Si $\|\vec{v}\| \neq 1$ se toma el vector $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ y si $\vec{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces

$$D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = D_\theta f(\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h\cos\theta, a_2 + h\operatorname{sen}\theta) - f(a_1, a_2)}{h}$$

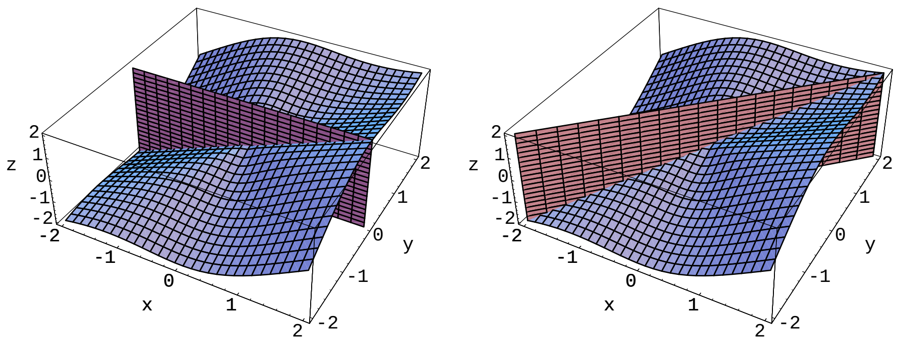


Figura 4.2: $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ y los planos $y = 0$ e $y = x$.

Ejemplo: *Calcula la derivada direccional de la siguiente función en el punto* $(0,0)$ *según la dirección del vector* $\vec{v} = (1,1)$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

El vector $\frac{v}{\|v\|}$ tiene coordenadas $(\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$, luego

$$D_{\vec{v}}f(0,0) = D_{\frac{\pi}{4}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h\cos\frac{\pi}{4}, 0 + h\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3\cos^3\frac{\pi}{4} + h^3\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{4}}{h^2\cos^2\frac{\pi}{4} + h^2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}}}{h} \lim_{h\to 0} \frac{h^3(\cos^3\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}^3\frac{\pi}{4})}{h^3(\cos^2\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4})} =$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en un punto a es continua en ese punto. Dada una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

¿Es cierto que si existen las derivadas parciales o direccionales en $\vec{a}$ entonces f es continua en $\vec{a}$?

Veamos un ejemplo que niega lo anterior.

Ejemplo: *La función siguiente tiene derivadas direccionales en* $(0,0)$ *pero no es continua en* $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

La función no es continua en $(0,0)$ porque si nos acercamos a $(0,0)$ a través de las trayectorias $y^2=mx$ el límite depende del valor de m:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{xmx}{x^2+m^2x^2}\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

Sin embargo, sí existen las derivadas direccionales en $(0,0)$:

$$D_\theta f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h\cos\theta,0+h\operatorname{sen}\theta)-f(0,0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cos\theta\ h^2\operatorname{sen}^2\theta}{h^2\cos^2\theta\ +\ h^4\operatorname{sen}^4\theta}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3\cos\theta\ \operatorname{sen}^2\theta}{h^3(\cos^2\theta\ +h^2\operatorname{sen}^4\theta)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\theta\ \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta\ +h^2\operatorname{sen}^4\theta}\begin{cases}0 & \text{si } \theta=\frac{\pi}{2}+k\pi\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} & \text{en otro caso}\end{cases}$$

□

El siguiente es un ejemplo de función continua sin derivadas parciales o direccionales:

Ejemplo: Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}y\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$f(x,y)$ es continua en $(0,0)$ pues $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ pero

$$D_\theta f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h\cos\theta, 0 + h\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h\operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2\cos^2\theta + h^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)}{h} \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

que solo existe si $\operatorname{sen}\theta = 0$.

$\square$

Se define **función derivada parcial** respecto de x a la función que a cada vector $\vec{a}$ le asigna $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{a} & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) \end{array}$$

Equivalentemente se define la función derivada parcial respecto de y.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la extensión de los conceptos de derivada parcial respecto de la variable x_i en $\vec{a}$, derivada direccional y de función derivada parcial son, respectivamente, los siguientes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} \qquad D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{h}$$

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x_i}: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{a} & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}). \end{array}$$

En la práctica, para calcular la función derivada parcial respecto de una variable (salvo el valor en puntos "extraños"), se consideran constantes el resto de variables y se aplican las reglas de derivación para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ejercicio: *Si $f(x,y) = yx^2 + e^y$ y $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2x_3 + x_1x_4^2$, calcula las parciales respecto de cada una de las variables.*

$\square$

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ tiene derivadas parciales (o direccionales) en $\vec{a}$ si y solo si cada función coordenada $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales (o direccionales) en $\vec{a}$. En ese caso la derivada parcial de f respecto de x_i en $\vec{a}$ sería

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{a}), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{a})\right)$$

De forma obvia se define la función derivada parcial respecto de x_i.

Ejemplo: *Si* $f(x,y) = (2x-y, x^2+y^2)$, *calcula sus derivadas parciales.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2, 2x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-1, 2y)$$

$\square$

Se define **matriz jacobiana** de una función $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ en $\vec{a}$ y se representa $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})(\vec{a})$ a la siguiente

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(\vec{a}) \\ & \dots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Si $p = m$, el determinante $\left|(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})(\vec{a})\right|$ de la matriz anterior se denomina **jacobiano** de f en $\vec{a}$.

Ejercicio: Calcula la matriz jacobiana y el jacobiano si es posible de las funciones siguientes en un punto genérico:

1. $f(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2, x^2-xz)$
2. $g(x,y) = (2x-y, x^2+y^2)$.

$\square$

4.2 Diferencial de una función

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real definida alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$. Recordamos (ver sección 3.6) que $f(x)$ es diferenciable en a si existe una función lineal df_a tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df_a(x-a)}{x-a} = 0.$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se dice que f **es una función diferenciable** en $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ si existe una función lineal $df_{\vec{a}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - df_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0,$$

o bien, si denotamos $\vec{h} = \vec{x} - \vec{a}$

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - df_{\vec{a}}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es diferenciable en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ si es diferenciable en todo punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Se llama diferencial de la función f en $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ a la función lineal $df_{\vec{a}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que, caso de existir, es única. Como ocurre con todas las funciones lineales, $df_{\vec{a}}$ se puede representar mediante una matriz, en concreto por la matriz jacobiana de f en $\vec{a}$:

$$df_{\vec{a}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Al igual que ocurría con el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, la diferencial de una función en un punto sirve para aproximar la diferencia $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$. Puesto que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - df_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0,$$

se deduce que el numerador tiende a cero, con lo que

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) \approx df_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a})$$

o bien

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{a}) + df_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a}) \tag{4.1}$$

cuando $\vec{x}$ están cerca de $\vec{a}$.

Ejemplo: *Encuentra un valor aproximado de* $e^{0.1} \operatorname{sen} 0.2$ *usando la diferencial de* $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$.

Tratamos de encontrar un valor aproximado de $f(x, y)$ en el punto $(0.1, 0.2)$ que es cercano a $(0, 0)$, luego es adecuado calcular la diferencial de f en el punto $(0, 0)$:

$$df_{(0,0)}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por la expresión 4.1 se tiene que

$$\begin{array}{rcccc} f(0.1, 0.2) & \approx & f(0,0) & + & df_{(0,0)}\big((0.1, 0.2) - (0,0)\big) \\ & = & 0 & + & (0,1)\begin{pmatrix} 0.1 - 0 \\ 0.2 - 0 \end{pmatrix} \\ & = & 0.2. & & \end{array}$$

□

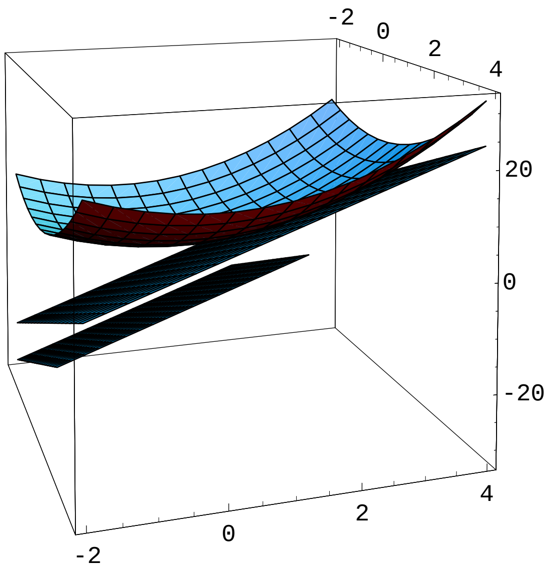


Figura 4.3: Plano tangente a $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(2,2)$ y $df_{(2,2)}$.

Gráficamente toda función lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ es un plano que pasa por el punto $(0,0)$. En concreto, $df_{\vec{a}}$ es gráficamente un plano en el espacio que pasa por el punto $(0,0,0)$ paralelo al plano tangente a la función $f(x,y)$ en el punto $\vec{a}$ (ver figura 4.3). A su vez, este último tiene como ecuación

$$f(\vec{a}) + df_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a})$$

que es similar a la ecuación de la recta tangente a una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ en el punto a

$$f(a) + df_a(x - a).^1$$

[1]Recordemos que para funciones de $\mathbb{R}$ en R se tiene que $df_a = f'(a)$.

Ejemplo: *Calcula el plano tangente a la superficie* $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ *en el punto* $\vec{a} = (2, 2)$.

El plano tangente tiene ecuación

$$\begin{aligned} g(x,y) = f(2,2) + df_{(2,2)}((x,y) - (2,2)) = \\ = 8 + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = \\ = 8 + \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = 4x + 4y - 8, \end{aligned}$$

que es un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(2, 2, f(2, 2))$. La diferencial de la función en el punto $(2, 2)$ es

$$df_{(2,2)} = 4x + 4y.$$

que es el plano paralelo al anterior que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

□

Si f y g son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ diferenciables en $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ entonces

- $f \pm g$ es diferenciable en $\vec{a}$ y $d(f \pm g)_a = df_a + dg_a$.
- $f \cdot g$ es diferenciable en $\vec{a}$ y $d(f \cdot g)_a = df_a \cdot g(\vec{a}) + f(\vec{a}) \cdot dg_a$.
- si $g(\vec{a}) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en $\vec{a}$ y $d(\frac{f}{g})_a = \frac{df_a \cdot g(\vec{a}) - f(\vec{a}) \cdot dg_a}{(g(\vec{a}))^2}$.

Si en lugar de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tenemos una función $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, se dice que f **es diferenciable en un punto** $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$ si existe una aplicación lineal $df_{\vec{a}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - df_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0,$$

o equivalentemente

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\|f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - df_{\vec{a}}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Si existe, la aplicación $df_{\vec{a}}$ será única y se expresará así

$$df_{\vec{a}}(x_1, x_2, ..., x_p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(\vec{a}) \\ & \dots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Ejercicio: *Calcula la matriz que representa a la diferencial de las siguientes funciones en un punto genérico $\vec{a}$:* $f(x,y) = (x^2, x^3+1)$, $g(x,y,z) = (x+y+z^2)$, $h(x,y) = (L(xy), \arctan(x/y), e^{xz})$.

$\square$

4.3 Relación entre la diferencial, derivadas según un vector y continuidad

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, entonces $f(x,y)$ es una función continua en $\vec{a}$ y existen las derivadas parciales de f en $\vec{a}$:

$$\boxed{f(x,y) \text{ diferenciable en } \vec{a} \quad \begin{array}{cc} \Rightarrow & f(x,y) \text{ continua en } \vec{a} \\ \not\Leftarrow & \text{Existen las parciales en } \vec{a} \end{array}}$$

El recíproco no es cierto.

Ejemplo: *La siguiente función es continua y tiene derivadas parciales en* $(0,0)$ *pero no es diferenciable en* $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Usando el cambio a coordenadas polares, se comprueba que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Puesto que $f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, la función es continua en $(0,0)$. Usando la definición de derivada parcial respecto de x y de y, se comprueba que ambas existen y valen 0. Sin embargo, veamos que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$. Si lo fuera, el siguiente límite tendría que valer 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-df_{(0,0)}(x-0,y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - (0\ 0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

y ese límite no existe, puesto que si lo calculamos siguiendo las trayectorias $y = mx$ se obtiene que

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xmx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

y el valor depende de m.

□

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $f(x,y)$ es continua en $\vec{a}$ y existen las derivadas parciales y son continuas en $\vec{a}$, entonces $f(x,y)$ es diferenciable en $\vec{a}$:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x,y) \text{ continua en } \vec{a} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ son continuas en } \vec{a} \end{array} \Rightarrow f(x,y) \text{ diferenciable en } \vec{a}}$$

Si $f(x,y)$ tiene derivadas parciales en $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, se denomina vector gradiente de f en $\vec{a}$ y se denota $\vec{\nabla} f(\vec{a})$ al vector de $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\right).}$$

Si $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales en $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, se verifican las siguientes propiedades:

1. $\vec{\nabla}(\alpha f \pm \beta g)(\vec{a}) = \alpha \vec{\nabla} f(\vec{a}) \pm \beta \vec{\nabla} g(\vec{a})$ para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$.

2. Si f es diferenciable en $\vec{a}$,

$$df_{\vec{a}}(x,y) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (x,y).$$

3. Si f es diferenciable en $\vec{a}$, para cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ($\|\vec{v}\| = 1$), la derivada direccional de f en la dirección $\vec{v}$ existe y vale
$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot \vec{v}.$$
Además el valor máximo de $D_{\vec{v}} f(\vec{a})$ se alcanza en el vector $\vec{v}$ de norma 1 paralelo a $\vec{\nabla} f(\vec{a})$; el valor mínimo en el vector de norma 1 paralelo a $-\vec{\nabla} f(\vec{a})$; el valor nulo se obtiene cuando $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{\nabla} f(\vec{a})$.

Ejemplo: *Sea $f(x, y) = e^x + \cos(\pi y)$ y $\vec{a} = (0, 1)$. Calcula la derivada direccional de f en $\vec{a}$ en la dirección $\frac{\pi}{4}$.*

Calculamos $\vec{\nabla} f(\vec{a})$:

$$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})) \right) =$$
$$(e^x, -\pi \operatorname{sen}(\pi y))_{|(0,1)} = (1, -\pi \operatorname{sen}(\pi 1)) = (1, 0).$$

Tomando $\vec{v} = (\cos \frac{\pi}{4}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$,

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\cos \frac{\pi}{4}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}) = (1, 0) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Los valores máximo y mínimo de $D_{\vec{v}} f(\vec{a})$ se alcanzan en $\vec{v} = (1, 0)$ y $(-1, 0)$, respectivamente. El valor nulo se alcanza en $\vec{v} = (0, -1)$ o en $\vec{v} = (0, 1)$ que son los vectores perpendiculares a $\vec{\nabla} f(\vec{a})$.

□

4.4 Composición de funciones diferenciables. Regla de la cadena

Sean $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dos funciones que se pueden componer

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$$

Si f es diferenciable en $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$ y g es diferenciable en $f(\vec{a}) \in \mathbb{R}^m$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en $\vec{a}$ y

$$d(g \circ f)_{\vec{a}} = dg_{f(\vec{a})} df_{\vec{a}}.$$

Es decir, la jacobiana de $g \circ f$ en $\vec{a}$ es el producto de la jacobiana de g en $f(\vec{a})$ por la jacobiana de f en $\vec{a}$.

Si llamamos $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, se deduce por ejemplo que

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_1} = \frac{\partial g_j(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial x_1} = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_j}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_2} = \frac{\partial g_j(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial x_2} = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_j}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_2}$$

y de forma similar el resto.

Ejemplo: *Sean* $f(x_1, x_2) = (\mathrm{L}(x_1 + x_2), \operatorname{atan}(\frac{x_1}{x_2}))$ *y* $g(y_1, y_2) = e^{y_1 y_2}$. *Calcula las parciales de* $g \circ f$ *en un punto cualquiera y en el punto* $(1, 1)$.

En este caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = \mathrm{L}(x_1 + x_2) \qquad y_2 = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{atan}\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

$$g(y_1, y_2) = e^{y_1 y_2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_1} = \frac{\partial g(y_1, y_2)}{\partial x_1} &= \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \\ &= y_2 e^{y_1 y_2}\frac{1}{x_1 + x_2} + y_1 e^{y_1 y_2}\frac{\frac{1}{x_2}}{1 + (\frac{x_1}{x_2})^2} = \\ &= \frac{y_2 e^{y_1 y_2}}{x_1 + x_2} + \frac{y_1 e^{y_1 y_2}}{x_2(1 + (\frac{x_1}{x_2})^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_2} = \frac{\partial g(y_1, y_2)}{\partial x_2} &= \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \\ &= y_2 e^{y_1 y_2}\frac{1}{x_1 + x_2} + y_1 e^{y_1 y_2}\frac{\frac{-x_1}{(x_2)^2}}{1 + (\frac{x_1}{x_2})^2} = \\ &= \frac{y_2 e^{y_1 y_2}}{x_1 + x_2} + \frac{-x_1 y_1 e^{y_1 y_2}}{x_2^2(1 + (\frac{x_1}{x_2})^2)}\end{aligned}$$

Veamos el valor en el punto $(1,1)$. Puesto que $f(1,1) = (\mathrm{L}(1), \mathrm{atan}(1)) = (0, \pi/4)$, obtenemos que

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_1}(1,1) = \frac{\frac{\pi}{4}e^0}{2} = \frac{\pi}{8} \qquad \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_2} = \frac{\frac{\pi}{4}e^0}{2} = \frac{\pi}{8}$$

□

Ejemplo: *Sean* $f(x_1,x_2) = (x_1^2 - x_2^2, x_1 - x_2)$ *y* $g(y_1,y_2) = (y_1 - y_2, y_1 + y_2)$. *Calcula las parciales de* $g\circ f$ *en un punto cualquiera.*

En este caso $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y

$$y_1 = f_1(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 \qquad y_2 = f_2(x_1,x_2) = x_1 - x_2.$$

$$g_1(y_1,y_2) = y_1 - y_2 \qquad g_2(y_1,y_2) = y_1 + y_2$$

$$\frac{\partial(g\circ f)_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1(y_1,y_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = $$
$$= 1\cdot 2x_1 + (-1)\cdot 1 = 2x_1 - 1.$$

$$\frac{\partial(g\circ f)_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_1(y_1,y_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = $$
$$= 1\cdot(-2x_2) + (-1)\cdot(-1) = -2x_2 + 1$$

$$\frac{\partial(g\circ f)_2}{\partial x_1} = \frac{\partial g_2(y_1,y_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = $$
$$= 1\cdot 2x_1 + 1\cdot 1 = 2x_1 + 1.$$

$$\frac{\partial(g\circ f)_2}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2(y_1,y_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = $$
$$= 1\cdot(-2x_2) + 1\cdot(-1) = -2x_2 - 1.$$

□

4.5 Teorema de valor medio

Recordemos el teorema de Lagrange de valor medio del cálculo diferencial en $\mathbb{R}$ visto en la sección 3.5:

Teorema de Lagrange de valor medio: *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)[b - a]$.*

Es posible enunciar un teorema similar para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciables:

Teorema de valor medio del cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$: *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en todos los puntos de un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^2$, entonces, dados dos puntos $\vec{a}$, $\vec{b} \in A$, existe un punto $\vec{c}$ en el segmento que une $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tal que*

$$f(b) - f(a) = df_c(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

Capítulo 5

Teoremas de Taylor en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

5.1 Teorema de Taylor en una variable

5.1.1 Polinomio de Taylor

Dada una función $f(x)$, *¿cómo construir una función sencilla que "se parezca" a $f(x)$ alrededor de un cierto punto $a \in \mathbb{R}$?*

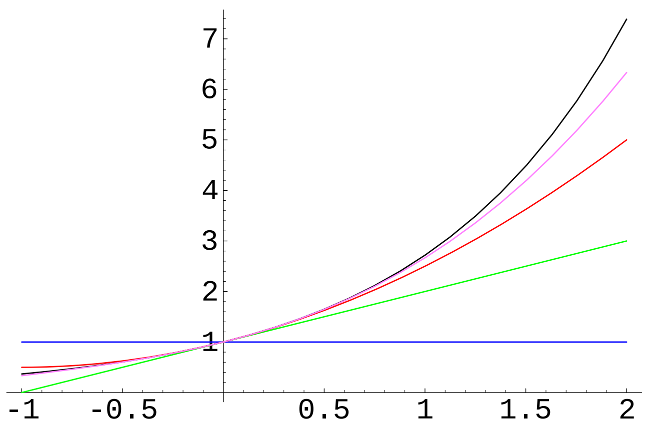


Figura 5.1: Polinomios de Taylor de e^x en 0 de orden 0, 1, 2 y 3.

Teorema (local de Taylor): *Sea B una bola abierta centrada en un punto $a \in \mathbb{R}$, y $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable m veces en a. Existe una única función polinómica de grado menor o igual que m que tiene un contacto en a con $f(x)$ de orden m. Dicha función es:*

$$P_a^m f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

$P_a^m f(x)$ es el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en el punto a.

Demostración. Sea $P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_m(x-a)^m$. Si $f(x)$ y $P(x)$ tienen un contacto de orden m en a, entonces (ver sección 3.6) se cumplirá lo siguiente:

1. $f(a) = P(a) \Rightarrow \boxed{c_1 = f'(a).}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^r} = 0, \quad \forall\ 0 \le r \le m.$

   En particular, si $r = 1$,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)} &= \\ = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-[f(a)+c_1(x-a)+\cdots+c_m(x-a)^m]}{(x-a)} &= \\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c_1 &\Rightarrow \boxed{c_1 = f'(a).} \end{aligned}$$

Si $r = 2$,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^2} &= \\ = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-[f(a)+c_1(x-a)+\cdots+c_m(x-a)^m]}{(x-a)^2} &= \\ = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} &= \text{(L'Hôpital)} = \\ = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)} - c_2 &\Rightarrow \boxed{c_2 = \tfrac{f''(a)}{2}.} \end{aligned}$$

Razonando de forma similar hasta $r = m$ se obtiene que los únicos coeficientes posibles para el polinomio son los siguientes

$$\boxed{c_0 = f(a) \quad c_1 = f'(a) \quad c_2 = \tfrac{f''(a)}{2!} \quad \cdots \quad c_m = \tfrac{f^{m)}(a)}{m!}.}$$

Ejercicio: *Calcula los polinomios de Taylor para la funciones* e^x *y* $\operatorname{sen}(x)$ *en el punto* 0 *de orden* $1, 2, 3, 4$*. Deduce la expresión para orden* n*.*

$\square$

Ejercicio: *Demuestra que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

y el polinomio $P(x) = 0$ *tiene un punto de contacto de orden* 3 *en el punto 0. Sin embargo, la función* $f(x)$ *no es 3 veces diferenciable.*

$\square$

Ejercicio: *Si* $f(x)$ *es un polinomio de grado* n*, ¿cuáles son sus polinomios de Taylor de grado* $0, 1, 2, \ldots, m$*?*

$\square$

5.1.2 Teorema de Taylor. Fórmula de Taylor

Ejercicio: *Calcula aproximadamente el valor de* $e^{0.2}$ *haciendo uso de los polinomios de Taylor de grado 1,2,3 y 4.*

$\square$

¿Cómo estimar el error cometido al aproximar un cierto valor haciendo uso de los polinomios de Taylor?

Si $f(x)$ es $m+1$ veces derivable en $[a, b)$ y m veces derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\boxed{f(b) = P_a^m f(b) + \frac{f^{m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.}$$

Teorema: *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en $[a,b]$, continuas en $[a,b]$, m veces derivables en $[a,b)$ y $m+1$ veces derivables en (a,b). Entonces:*

1. *Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - P_a^m f(b)] \cdot g^{m+1)}(c) = [g(b) - P_a^m g(b)] \cdot f^{m+1)}(c)$$

2. *Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\boxed{f(b) - P_a^m f(b) = \tfrac{f^{m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.}$$

Demostración. Caso 1. Consideramos las funciones

$$F(x) = f(x) - P_a^m f(x) \qquad G(x) = g(x) - P_a^m g(x).$$

A partir de ellas construimos la función $H(x) = F(b)G(x) - G(b)F(x)$.

Paso 1. $H(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a,b]$: es continua en $[a,b]$, es derivable en (a,b) y $0 = H(a) = H(b)$. Por tanto existe un punto $c_1 \in (a,b)$ tal que $H'(c_1) = 0$.

Paso 2. $H'(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a,c_1]$: es continua en $[a,c_1]$, es derivable en (a,c_1) y $0 = H'(a) = H'(c_1)$. Por tanto existe un punto $c_2 \in (a,c_1)$ tal que $H''(c_2) = 0$.

Y así sucesivamente hasta el paso m.

Paso m+1. $H^m(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a,c_m]$: es continua en $[a,c_m]$, es derivable en (a,c_m) y $0 = H^{m)}(a) = H^{m)}(c_m)$. Por tanto existe un punto $c \in (a,c_m)$ tal que $H^{m+1}(c) = 0$. Pero

$$\begin{aligned} 0 = H^{m+1)}(c) &= F(b) \cdot G^{m+1)}(c) - G(b) \cdot F^{m+1)}(c) = \\ &[f(b) - P_a^m f(b)] \cdot g^{m+1)}(c) - [g(b) - P_a^m g(b)] \cdot f^{m+1)}(c). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos encontrado el punto c buscado.

Caso 2. Basta aplicar el caso 1 a $f(x)$ y a $g(x) = (x-a)^{m+1}$.

□

La expresión

$$f(b) - P_a^m f(b) = \frac{f^{m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}$$

sirve para estimar la diferencia entre el valor de $f(x)$ en un punto b cuando lo aproximamos por el valor del polinomio de Taylor en b, es decir, se utiliza para acotar el error cometido en la aproximación.

Ejercicio: *Calcula una cota de los errores cometidos en el ejercicio anterior, al aproximar $e^{0.2}$ haciendo uso de los polinomio de Taylor de grado 1,2,3 y 4.*

$\square$

Ejercicio: ¿Qué polinomio usarías para encontrar una aproximación de e^1 con seis cifras decimales exactas?

$\square$

Ejercicio: ¿Qué polinomio usarías para encontrar una aproximación de $\operatorname{sen}(3)$ con diez cifras decimales exactas?

$\square$

Ejercicio: Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

haciendo uso de la fórmula de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ en 0.

$\square$

5.2 Estudio local de la gráfica de una función

Si $f(x)$ una función diferenciable en a, $f(x)$ estará definida alrededor de a y tendrá una única recta tangente a en a. La gráfica de la función tendrá ecuación $y = f(x)$ y la recta tangente en a tendrá ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Se dice que $f(x)$ tiene en a un punto de

1. **concavidad**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por encima de la gráfica de $f(x)$:

$$f(a) + f'(a)(x-a) \geq f(x)$$

2. **convexidad**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por debajo de la gráfica de $f(x)$:

$$f(a) + f'(a)(x - a) \leq f(x)$$

3. **inflexión**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por encima de la gráfica de $f(x)$ si $x < a$ y por debajo de $f(x)$ si $x > a$.

   Se dice que una función $f(x)$ es

4. **creciente en un intervalo I** (equivalentemente, **estrictamente creciente**) si para todo $x, y \in I$

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (f(x) < f(y)),$$

5. **decreciente en un intervalo** I (equivalentemente, **estrictamente decreciente**) si para todo $x, y \in I$, si

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (f(x) > f(y)),$$

6. **convexa en un intervalo** I si para todo $x, y, z \in I$, si

$$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

7. **cóncava en un intervalo** I si para todo $x, y, z \in I$, si

$$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

En general, no tiene por qué ocurrir ninguna de las tres cosas.

Teorema: *Sea $f(x)$ una función derivable varias veces. Si la primera derivada en a de orden mayor que 1 que no se anula es*

1. *de orden par y positiva, entonces a es un punto de convexidad para $f(x)$;*

2. *de orden par y negativa, entonces a es un punto de concavidad para $f(x)$;*

3. *de orden impar, entonces a es un punto de inflexión para $f(x)$.*

Demostración. Caso 1. Supongamos que

$$f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{m-1)}(a) = 0, f^{m)}(a) > 0.$$

Por el teorema local de Taylor sabemos que $f(x)$ y $P_a^m f(x)$ tiene un punto de contacto de orden m en a, luego:

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_a^m f(x)}{(x-a)^m} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^m(a)}{m!}(x-a)^m]}{(x-a)^m},$$

es decir

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{f^{m)}(a)}{m!} > 0.$$

De modo que el numerador y denominador de la fracción $\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^m}$ tienen que tener el mismo signo alrededor del punto a. Por ser m par, el signo de $(x-a)^m$ es positivo y como consecuencia

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$$

alrededor de a, que es la condición para que a sea punto de convexidad.

Los casos 2 y 3 se razonan de forma similar.

□

Teorema: *Sea $f(x)$ una función derivable varias veces. Si la primera derivada en a es 0 y a es un punto de*

1. *convexidad, entonces a es un mínimo relativo para $f(x)$*
2. *concavidad, entonces a es un máximo relativo para $f(x)$.*

Demostración. Similar a la anterior.

□

Teorema: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

1. *$f(x)$ es creciente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*
2. *$f(x)$ es decreciente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si $x < y$ entonces $y - x > 0$, usando el teorema de valor medio existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como por hipótesis $f'(c) \geq 0$, tenemos que $f(y) - f(x) \geq 0$.

$\Rightarrow$) Si $f'(x) < 0$ en algún punto x, entonces (ya visto) $f(x)$ sería estrictamente decreciente en un entorno de x (contradicción). Por tanto $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

$\square$

Proposición: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

1. *$f(x)$ es convexa en $I \Leftrightarrow f'(x)$ es creciente en I*
2. *$f(x)$ es cóncava $\Leftrightarrow f'(x)$ es decreciente en I.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $f(x)$ una función convexa. Por la definición, si $x < y < z$, tenemos que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Si hacemos que z tienda hasta x, tendremos que

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \Rightarrow f'(x) \leq f'(y)$$

que significa que f' es una función creciente en I.

$\Leftarrow$) Sean $x < y < z$. Aplicando el teorema de valor medio a los intervalos $[x, y]$ e $[y, z]$, encontramos dos valores $u \in [x, y]$ y $v \in [y, z]$ tales que

$$f(y) - f(x) = f'(u)(y - x) \qquad f(z) - f(y) = f'(v)(z - y).$$

Por tanto
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(u) \leq f'(v) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$
lo que significa que f es una función convexa en I.

$\square$

Teorema: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

$$f(x) \text{ es convexa} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$$

Demostración. Por la proposición anterior, $f(x)$ es convexa si y solo si $f'(x)$ es creciente. Esto último es cierto si y solo si la derivada de $f'(x)$ es mayor o igual que 0, es decir $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.

$\square$

5.3 Representación gráfica de funciones

La representación gráfica de una función debe incluir el estudio de lo siguiente:

1. Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R}/ \quad \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$.
2. Simetrías: par $f(x) = f(-x)$ o impar $-f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D$.
3. Periodicidad: existe $T \in \mathbb{R}$ llamado período tal que
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall\, x \in D.$$
4. Puntos de corte con los ejes: en el eje OX los puntos de la forma $(x, 0)$ y en el eje OY los puntos de la forma $(0, f(0))$.
5. Signo de la función: los conjunto de puntos $\{x \in \mathbb{R}/ \quad f(x) > 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R}/ \quad f(x) < 0\}$.
6. Puntos de discontinuidad:

    Evitable: existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es un número real.

    Esencial: no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ o es $\pm\infty$. A su vez, esta puede ser:

    - De salto infinito: existen los límites laterales y alguno es $\pm\infty$.

– De salto finito: existen los límites laterales y ambos son finitos.
– De segunda especie: no existe algún límite lateral.

7. Asíntotas:

Horizontales: son rectas de la forma $y = b$ tales que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

Verticales: son rectas de la forma $x = a$ tales que

$$\lim_{x \to a^+, a^-} f(x) = \pm\infty$$

Oblicuas: son rectas de la forma $y = mx + n$ tales que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = n.$$

8. Regiones de crecimiento y decrecimiento
9. Máximos o mínimos relativos.
10. Regiones de concavidad y convexidad.
11. Puntos de inflexión.

□

5.4 Curvas en el plano

5.4.1 Curvas en forma paramétrica

Sea I un subconjunto de los número reales. Una **curva en el plano** $\mathbb{R}^2$ es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

I es el dominio de definición de la curva y suele ser un intervalo. $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ se conoce como la expresión paramétrica de la curva. Una relación entre x e y que solo verifiquen los puntos de la curva se denomina expresión implícita de la curva.

Ejemplos:

1. $\sigma_1(t) = (\cos 5t, \operatorname{sen} t)$ para $t \in [0, 2\pi)$.

2. $\sigma_2(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$ para $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

3. Cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un caso particular de curva en el plano:

$$\begin{array}{rrcl} \sigma_f : & t \in \mathrm{Dom}(f) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, f(t)) \end{array}$$

$\square$

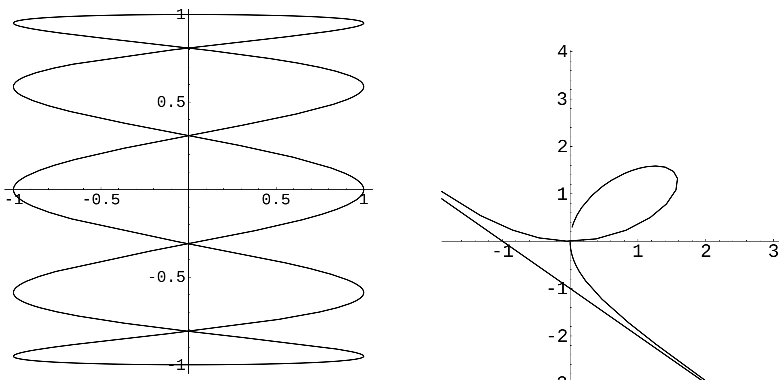


Figura 5.2: $\sigma_1(t) = (\cos 5t, \operatorname{sen} t)$ y $\sigma_2(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$.

Dada una curva $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ $(t \in [t_1, t_2])$ en el plano, si alrededor de un punto $t = t_0$ se puede expresar y en función de x $(y = f(x))$, entonces

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = \frac{d(f \circ x)}{dt} = \frac{df}{dx}(x(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0)$$

de donde se deduce que

$$\frac{df}{dx}(x(t_0)) = \frac{\frac{dy}{dt}(t_0)}{\frac{dx}{dt}(t_0)}$$

y en general

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$(x'(t_0), y'(t_0))$ es el vector tangente a una curva paramétrica en un punto $t = t_0$ y la recta tangente a la curva en el punto $t = t_0$ tiene ecuación

$$(y - y(t_0))x'(t_0) = (x - x(t_0))y'(t_0).$$

La recta normal a la curva en el punto $t = t_0$ es la que pasa por el punto $(x(t_0), y(t_0))$ y tiene vector director perpendicular al tangente, es decir, $(-y'(t_0), x'(t_0))$.

Los posibles máximos o mínimos relativos de tangente horizontal son los puntos tales que $y'(t) = 0$ y $x'(t) \neq 0$. Los de tangente vertical son aquellos tales que $x'(t) = 0$ y $y'(t) \neq 0$.

Los puntos singulares de la curva son aquellos en los que $x'(t) = y'(t) = 0$.

Si existen t y t' tales que $x(t) = x(t')$ y $y(t) = y(t)'$, dicho punto de la curva es múltiple.

La curva es simétrica

- respecto del eje Y si para todo $t \in [t_1, t_2]$ existe $t' \in [t_1, t_2]$ tal que $x(t) = -x(t')$ y $y(t) = y(t')$;

- respecto del eje X si para todo $t \in [t_1, t_2]$ existe $t' \in [t_1, t_2]$ tal que $x(t) = x(t')$ y $y(t) = -y(t')$;

- respecto del punto $(0, 0)$ si para todo $t \in [t_1, t_2]$ existe $t' \in [t_1, t_2]$ tal que $x(t) = -x(t')$ y $y(t) = -y(t')$.

La curva tiene asíntota

- horizontal de ecuación $y = b$ si

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = b \quad (t_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\});$$

- vertical de ecuación $x = a$ si

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty \quad \lim_{t \to t_0} x(t) = a, \quad (t_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\});$$

- oblicua de ecuación $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ si existe $t_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}$ tal que

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m, \quad \lim_{t \to t_0} [y(t) - mx(t)] = n, \quad (t_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}).$$

Ejercicio: *Estudia las gráficas de la curvas*

1. $\sigma_1(t) = (\cos 5t, \operatorname{sen} t)$ para $t \in [0, 2\pi)$.
2. $\sigma_2(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$ para $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
3. $x = t - \operatorname{sen} t \quad y = 1 - cos(t)$ para $t \in [0, 2\pi)$.

$\square$

5.4.2 Curvas en polares

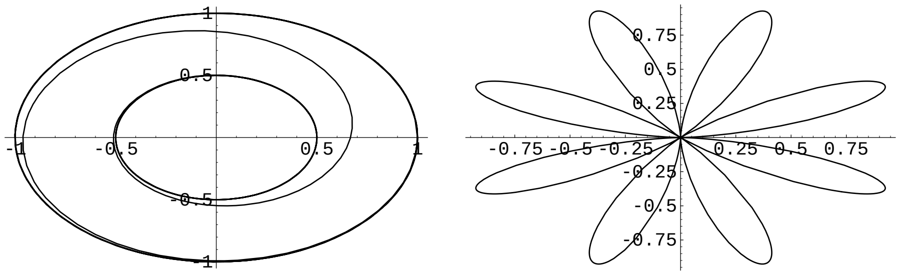


Figura 5.3: $r = \frac{e^\theta+1}{e^\theta+2}$ y $r = \operatorname{sen}(4\theta)$.

Siendo (r, θ) las coordenadas polares de un punto del plano $\mathbb{R}^2$. El conjunto de puntos que verifican $r = 3$ forman la circunferencia de radio 3 centrada en el punto 0. El anterior es un ejemplo de ecuación polar de una curva.

En general, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función siempre positiva, el conjunto de puntos cuyas coordenadas polares verifican $r = f(\theta)$ forman una curva en el plano y la expresión $r = f(\theta)$ es la ecuación polar de la curva.

Toda curva polar $r = f(\theta)$ se puede estudiar como la curva paramétrica

$$x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \quad y(\theta) = f(\theta)\operatorname{sen}(\theta).$$

También es posible estudiar en una curva polar lo siguiente:

Simetrías:

- respecto al eje polar X si $f(\theta) = f(-\theta)$
- respecto al eje perpendicular al polar Y si $f(\theta) = f(\pi - \theta)$
- respecto al polo $(0,0)$ si $f(\theta) = f(\pi + \theta)$.

Asíntotas:

- de ecuación $\theta = \theta_0$ si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \infty$,
- de ecuación $r = r_0$ si $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} f(\theta) = r_0$.

Ejercicio: *Estudia las gráficas de las curvas polares*

$$r = \frac{e^\theta + 1}{e^\theta + 2} \quad y \quad r = \operatorname{sen}(4\theta).$$

□

5.5 Teorema de Taylor para funciones de varias variables

5.5.1 Derivadas de orden superior

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ su función derivada parcial respecto de x_i:

$$\begin{array}{rccl} \frac{\partial f}{\partial x_i} : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{a} & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}). \end{array}$$

Se denomina derivada parcial de f de orden 2 primero respecto de x_i y despúes respecto de x_j y se representa $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ o $f_{x_j x_i}$ a la derivada parcial respecto de x_j de la función $\frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$\begin{array}{rccl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{a} & \mapsto & \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\vec{a}). \end{array}$$

Análogamente se definen las funciones derivadas de orden tres, cuatro, etc.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 e^{y^2}$. Entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(2xe^{y^2}) = 2x2ye^{y^2} = 4xye^{y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 2ye^{y^2}) = 2x2ye^{y^2} = 4xye^{y^2}.$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(4xye^{y^2}) = 4ye^{y^2}.$$

□

Teorema de Schwarz: *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in \mathbb{R}$. Si se verifica que*

- *existen las derivadas parciales f_x y f_y en un entorno de $\vec{a}$*
- *existe f_{xy} en un entorno de $\vec{a}$ y es continua en $\vec{a}$,*

entonces existe f_{yx} en $\vec{a}$ y $f_{yx}(\vec{a}) = f_{xy}(\vec{a})$.

El teorema es válido para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y para cualquier orden siempre que se verifiquen las condiciones correspondientes del teorema. Lo usual es que las condiciones exigidas se verifiquen pero no siempre ocurre.

Ejemplo: *Comprueba que para la función $f(x,y)$ se verifica que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

□

Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase r o de clase $\mathcal{C}^r$ en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, si en todo punto $\vec{a} \in A$ existen y son continuas todas las derivadas parciales hasta orden r de f.

5.5.2 Teorema de Taylor para funciones de varias variables

Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$. En ese caso, la diferencial es una función $df_{\vec{a}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tal que

$$df_{\vec{a}}(x_1, x_2, ..., x_p) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{a}) & f_{x_2}(\vec{a}) & \dots & f_{x_p}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Se denomina Hessiana de f en el punto $\vec{a}$ a la siguiente matriz:

$$Hf_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{a}) & f_{x_1x_2}(\vec{a}) & \dots & f_{x_1x_p}(\vec{a}) \\ f_{x_2x_1}(\vec{a}) & f_{x_2x_2}(\vec{a}) & \dots & f_{x_2x_p}(\vec{a}) \\ & & \dots & \\ f_{x_px_1}(\vec{a}) & f_{x_px_2}(\vec{a}) & \dots & f_{x_px_p}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Ejercicio: *Si $f \in \mathcal{C}^2$ la matriz hessiana es simétrica. ¿Por qué?*

$\square$

Se denomina diferencial segunda de f en $\vec{a}$ y se representa $d^2f_{\vec{a}}$ a la aplicación bilineal

$$\begin{array}{rccl} d^2f_{\vec{a}} : & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{h} \times \vec{h} & \mapsto & \vec{h} \cdot Hf_{\vec{a}} \cdot \vec{h} \end{array}$$

Ejemplo: *Sea $f(x, y) = xy + x^2$. Calcula la matriz hessiana en $(0, 0)$ y $d^2f_{(0,0)}(\vec{h}, \vec{h})$, siendo $\vec{h} = (1, 2)$.*

Puesto que $f_x = y + 2x$, $f_y = x$, $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = 1$ y $f_{yx} = 1$, la matriz hessiana queda así

$$Hf_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$d^2f_{(0,0)}(\vec{h}, \vec{h}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$$

$\square$

Desarrollando los términos de la diferencial segunda de f se comprueba que

$$d^2 f_{\vec{a}}(\vec{h},\vec{h}) = \sum_{i,j=1}^{p} f_{x_i x_j}(\vec{a}) h_i h_j.$$

Si f es de clase $\mathcal{C}^k$, se define la diferencial k-ésima de f en $\vec{a}$ como la aplicación

$$d^k f_{\vec{a}} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \overset{k}{\ldots} \times \mathbb{R}^p : \rightarrow \ \mathbb{R}$$

tal que

$$d^k f_{\vec{a}}(\vec{h},\vec{h},\ldots,\vec{h}) = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=1}^{p} f_{x_{j_1} x_{j_2},\ldots,x_{j_k}}(\vec{a}) \cdot h_{j_1} \cdot h_{j_2} \cdot \ldots \cdot h_{j_k}.$$

Recordemos la expresión del polinomio de Taylor de orden r en el punto $x = a + h$ para funciones de una variable

$$P_a^r f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{r)}(a)}{r!}h^r.$$

De forma similar se construye **el polinomio de Taylor de orden** r para funciones de varias variables:

$$\boxed{P_{\vec{a}}^r f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + df_{\vec{a}}(\vec{h}) + \tfrac{1}{2!}d^2 f_{\vec{a}}(\vec{h},\vec{h}) + \cdots + \tfrac{1}{r!}d^r f_{\vec{a}}(\vec{h},\overset{k}{\ldots},\vec{h})}$$

En particular, para una función de 2 variables, el polinomio de Taylor de orden 2 en un punto $\vec{a}$ queda así:

$$\begin{aligned} P_{\vec{a}}^2 f(\vec{a}+\vec{h}) &= f(\vec{a}) + df_{\vec{a}}(\vec{h}) + \frac{1}{2!}d^2 f_{\vec{a}}(\vec{h},\vec{h}) = \\ &f(a_1,a_2) + \begin{pmatrix} f_{x_1}(\vec{a}) & f_{x_2}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{a}) & f_{x_1x_2}(\vec{a}) \\ f_{x_2x_1}(\vec{a}) & f_{x_2x_2}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio: *Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 para las siguientes funciones en el punto* $(0,0)$*:*

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$
2. $g(x,y) = x\cos(y) + y\cos(x)$

□

5.6 Estudio local de una función de dos variables

Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Se dice que f tiene **un mínimo** (equivalentemente, **un máximo**) relativo en $\vec{a}$ si existe una bola centrada en $\vec{a}$ tal que $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$ (equivalentemente, $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$) para todo punto $\vec{x}$ de la bola que sea del dominio de f.

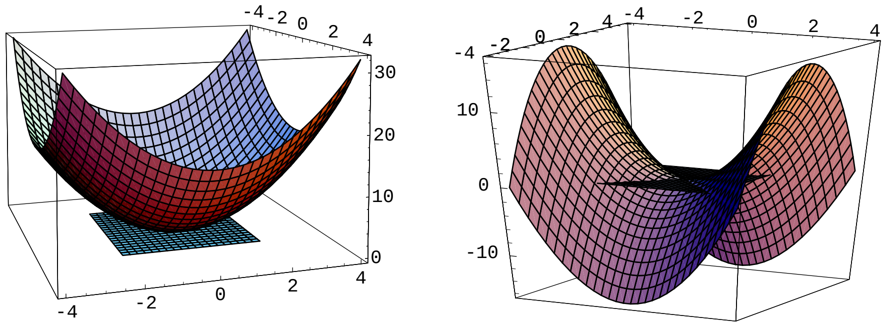


Figura 5.4: $(0,0)$ es punto crítico de x^2+y^2 y de x^2-y^2.

Propiedades:

1. Si f admite derivadas parciales en $\vec{a}$ y tiene una máximo o mínimo relativo en $\vec{a}$, entonces

$$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = (f_{x_1}(\vec{a}), f_{x_2}(\vec{a}), \ldots, f_{x_p}(\vec{a})) = (0, 0, \ldots, 0).$$

   Un punto con gradiente $\vec{0}$ es un punto crítico.

2. Si $f \in \mathcal{C}^2$ y $\vec{a}$ es un **punto crítico** de f, entonces

   - $d^2 f_{\vec{a}}$ es definida positiva $\Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $\vec{a}$;
   - $d^2 f_{\vec{a}}$ es definida negativa $\Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en $\vec{a}$;
   - $d^2 f_{\vec{a}}$ no es definida positiva ni negativa $\Rightarrow$ f no tiene ni mínimo ni máximo en $\vec{a}$;

   En el caso particular de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si $\vec{a}$ es un punto crítico de f, puesto que la matriz que representa a $d^2 f_{\vec{a}}$ es la hessiana, se verifica que

- $|Hf_{\vec{a}}| > 0$

  $f_{xx}(\vec{a}) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo local en $\vec{a}$.
  $f_{xx}(\vec{a}) > 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo local en $\vec{a}$.
  (El papel de las variables x e y se puede intercambiar.)

- $|Hf_{\vec{a}}| < 0 \Rightarrow$ no hay extremo relativo. Es un punto de silla.
- $|Hf_{\vec{a}}| = 0$ es un caso dudoso.

Los máximo y mínimos relativos de una función se buscarán entre los puntos críticos, los puntos de la frontera del dominio de f y los puntos donde no existan las parciales.

Ejercicio: Localiza los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = x^2 - 4xy^2 + 4y^2$
2. $g(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

□

5.7 Curvas en el espacio

Una **curva en el espacio** $\mathbb{R}^3$ es una aplicación

$$\begin{array}{rrcl} \sigma: & I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Ejemplo: $\sigma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi)$ (ver figura5.5).

□

No es lo mismo una curva que su gráfica. El conjunto I puede estar acotado o no.

Un punto de la curva $\sigma(t)$ se dice múltiple si existe otro valor $t' \in I$ tal que $\sigma(t) = \sigma(t')$. Una curva es simple si no tiene puntos múltiples. Una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es cerrada si $\sigma(a) = \sigma(b)$. Una curva de Jordan es una curva cerrada sin otros puntos múltiples salvo $\sigma(a)$.

Una curva puede expresarse de distintas formas:

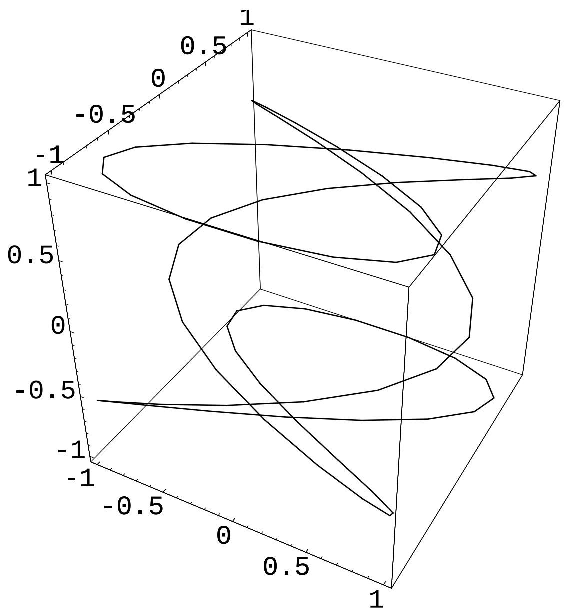


Figura 5.5: $\sigma(t) = (\cos(5t), \operatorname{sen}(3t), \operatorname{sen}(t))$ con $t \in [0, 2\pi)$.

Ecuación		Ejemplo
vectorial	$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$	$\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$
paramétrica	$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$	$x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$
explícita	$x = x$, $y = y(x)$, $z = z(x)$ o en función de y o de z	$y = x^2$, $z = x^3$
implícita	intersección de dos superficies: $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$	$z = xy$, $y = x^2$

Son puntos singulares de la curva aquellos tales que

$$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (0, 0, 0).$$

Los puntos no singulares se llaman regulares. El vector tangente a la curva en un punto regular es $\sigma'(t)$.

La longitud de la curva entre los valores t_0 y t_1 se calcula así

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sigma'(t) \cdot \sigma'(t)}dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

Si la longitud es finita la curva se denomina rectificable.

Ejercicio: *Calcula la longitud de la curva* $\sigma(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 3t)$ *con* $t \in [0, 2\pi]$.

$\square$

La ecuación de recta tangente a la curva en el punto $\sigma(t_0)$ es:

$$x = x(t_0) + \alpha x'(t_0), \qquad y = y(t_0) + \alpha y'(t_0), \qquad z = z(t_0) + \alpha z'(t_0)$$

El plano normal a la curva en un punto $\sigma(t_0)$ es el plano que pasa por el punto y tiene como vector perpendicular el tangente a la curva. Por tanto su ecuación será

$$(x - x(t_0), y - y(t_0), z - z(t_0)) \cdot (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0$$

Ejercicio: *Calcula la recta tangente y el plano normal a la curva*

$$\sigma(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 3t)$$

con $t \in [0, 2\pi]$ *en el punto* $t = 0$.

$\square$

5.8 Superficies en el espacio

Una **superficie en el espacio** $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rccl} S: & [0, 2\pi] \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & (2\cos(u)\,\mathrm{sen}(v), \mathrm{sen}(u)\cos(v), \mathrm{sen}(v)) \end{array}$$

(Ver figura 5.6)

$\square$

No es lo mismo una superficie que su gráfica. Una superficie en el espacio puede expresarse de distintas formas:

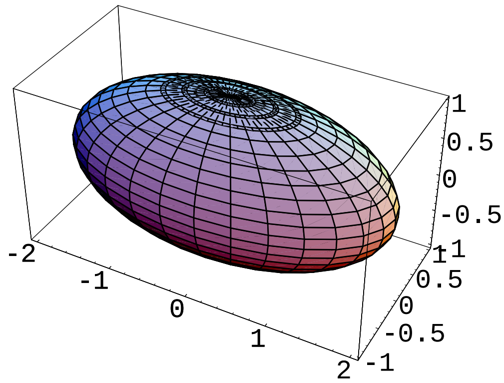


Figura 5.6: $S(u,v) = (2\cos(u)\,\mathrm{sen}(v), \mathrm{sen}(u)\cos(v), \mathrm{sen}(v))$.

Ecuación		Ejemplo
vectorial	$(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$	$(2\cos(u)\,\mathrm{sen}(v),$ $\mathrm{sen}(u)\cos(v), \mathrm{sen}(v))$
paramétrica	$x = x(u,v),$ $y = y(u,v),$ $z = z(u,v)$	$x = 2\cos(u)\,\mathrm{sen}(v),$ $y = \mathrm{sen}(u)\cos(v),$ $z = \mathrm{sen}(v)$
explícita	$z = f(x,y)$ o en función de otras 2 variables	$z = \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}$ $z = -\sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}$
implícita	$F(x,y,z) = 0$	$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$

Consideremos los vectores

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right)$$
$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right)$$

que están en el plano tangente a la superficie en el punto $S(u,v)$. Se dice que un punto $S(u_0,v_0)$ de la superficie $S(u,v)$ es singular si

$$\vec{v}_{u_0,v_0} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u_0,v_0) = 0.$$

En caso contrario, el punto es regular y el vector $\vec{v}_{u_0,v_0}$ es perpendicular al plano tangente a la superficie S en el punto $S(u_0,v_0)$. La recta normal a la superficie S en el punto $S(u_0, v_0)$ es la que pasa por el punto y tiene como dirección el vector $\vec{v}_{u_0,v_0}$.

Ejercicio: Calcula el plano tangente y la recta norma a las superficies siguientes en un punto cualquiera:

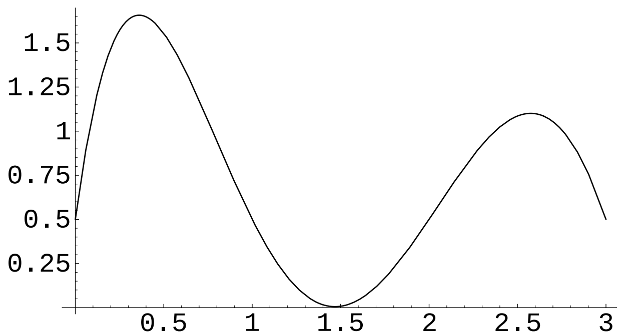
1. $S(u,v) = (2\cos(u)\,\mathrm{sen}(v), \mathrm{sen}(u)\cos(v), \mathrm{sen}(v))$.
2. $z = x^2 + y^2$.

□

Capítulo 6

Cálculo Integral

6.1 Integral de Riemann



Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $[a, b]$. Pretendemos calcular el área delimitada por la gráfica de la función f y por el eje X desde $x = a$ hasta $x = b$.

Una **partición** $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ y $[a, b] = \cup_{k=1}^{n}[x_{k-1}, x_k]$.

Una partición P' se dice que es más fina que otra P, si $P \subset P'$.

Se define la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$ de la función

f para la partición P como

$$s(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(f)|x_k-x_{k-1}| \qquad S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(f)|x_k-x_{k-1}|$$

siendo

$$m_k(f)=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1},x_k]\} \qquad M_k(f)=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada es **integrable** en $[a,b]$ si

$$S(f,P)-s(f,P)\to 0$$

cuando la partición P se hace más fina y la distancia mínima de los puntos de la partición tiende a 0 . En ese caso se llama integral de $f(x)$ en $[a,b]$ a

$$\int_a^b f(x)dx=\lim S(f,P)=\lim s(f,P)$$

Veamos algunas propiedades:

1. Si $f(x)$ es monótona (creciente o decreciente) o continua en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.
2. Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $-f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$.
3. Si $f(x)\ge 0$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.
4. Si $f(x)$y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$ y $f(x)\ge g(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.
5. Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $|f(x)|$ también y $|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b |f(x)|dx$.
6. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$ entonces $\alpha f(x)\pm\beta g(x)$ también y $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
7. Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ $\forall a<c<b$ y $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.
8. $\int_a^a f(x)dx=0$.
9. Si $f(x)$ es acotada y tiene, como mucho, un número de discontinuidades finitas o infinitas numerables (tantas discontinuidades como números naturales hay), entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.

6.2 Teoremas fundamentales del cálculo integral

Teorema del valor medio

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$. Sean

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces:

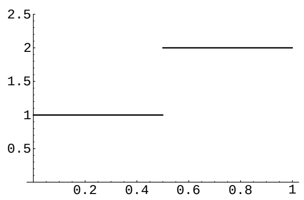
1. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
2. existe $m \leq \mu \leq M$ tal que $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

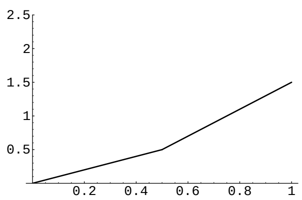
Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$. Entonces existe la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida así:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b].$$

Además la función $F(x)$ es continua en $[a,b]$.

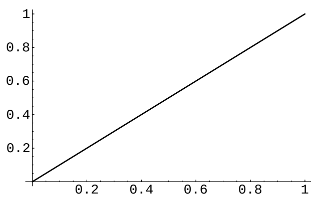




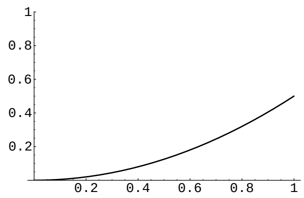
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.



$f(x) = x$



$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

Sea $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$. Una **primitiva** de $f(x)$ en $[a,b]$ es una función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Ejemplo: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.

□

Regla de Barrow

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $G(x)$ una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

6.3 Cálculo de primitivas

6.3.1 Primitivas inmediatas

$\int kdx = kx \quad \forall k \in \mathbb{R}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} = \text{Ł}\lvert x\rvert$	$\int e^x dx = e^x$
$\int a^x = \frac{a^x}{La}dx$	$\int \operatorname{sen}(x) = -\cos(x)dx$
$\int \cos(x) = \operatorname{sen}(x)dx$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}dx = -\operatorname{cotan}(x)dx$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x)$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen}(x) = -\arccos(x)$	

6.3.2 Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

6.3.3 Integración por cambio de variable

$$\int f(x)dx \overset{x=g(t)}{=} \int f(g(t))g'(t)dt$$

6.3.4 Método de Hermite

Supongamos que $Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_s)^{\alpha_s}$ y grado$(P(x)) <$ grado$(Q(x))$ con $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{H(x)}{D(x)} + \int \frac{K(x)}{S(x)}$$

donde $D(x) = \mathrm{MCD}(Q(x), Q'(x))$, $S(x) = (x-x_1)\dots(x-x_s)$ y $H(x)$ y $K(x)$ se calculan a partir de

$$\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \left(\frac{H(x)}{D(x)}\right)' + \frac{K(x)}{S(x)}$$

siendo grado$(H(x)) <$ grado$(D(x))$ y grado$(K(x)) <$ grado$(S(x))$.

6.3.5 Integración de funciones racionales

1. Caso 1: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad \text{grado}(P) \geq \text{grado}(Q)$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx$$

2. Caso 2: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad \text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$.

   (a) $Q(x)$ solo tiene raíces reales simples: $Q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_p)$ con $x_1, \cdots, x_q \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_q}{x - x_q} \right) dx$$

   (b) $Q(x)$ tiene raíces reales simples y múltiples:
   $Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_r)^{\alpha_r}$ con $x_1, \dots, x_r, \dots, x_q \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1^1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{A_r^1}{x - x_r} + \cdots + \frac{A_r^{\alpha_r}}{(x - x_r)^{\alpha_r}} \right) dx$$

   (c) $Q(x)$ tiene raíces complejas simples:
   $Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} (x - x_{r+1}) \dots (x - x_q)$
   $[(x - b_1)^2 + c_1^2] \dots [(x - b_k)^2 + c_k^2]$ con $x_i, a_j, c_j \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1^1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots \right.$$
$$\cdots + \frac{A_r^1}{x - x_r} + \cdots + \frac{A_r^{\alpha_r}}{(x - x_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_{r+1}}{x - x_{r+1}} + \dots \frac{A_q}{x - x_q}$$
$$\left. \frac{M_1 x + N_1}{[(x - b_1)^2 + c_1^2]} + \cdots + \frac{M_2 x + N_2}{[(x - b_k)^2 + c_k^2]} \right) dx$$

   (d) $Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples:

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} (x - x_{r+1}) \dots (x - x_q)$$
$$[(x - b_1)^2 + c_1^2]^{\beta_1} \dots [(x - b_k)^2 + c_k^2]^{\beta_k}$$

   con $x_1, \dots, x_r, \dots, x_q \in \mathbb{R}$. Se puede emplear el método de Hermite.

6.3.6 Integración de funciones irracionales

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

con R una función racional en las variables x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Para su transformación a integral de función racional:

Si	Cambio de variable
$a>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$
$c>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
$a<0$ y $c<0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$
$\int R(x, \sqrt{x^2 \pm c^2})dx$	$\sqrt{x^2 \pm c^2} = t + x$
$\int R(x, \sqrt{c^2 - x^2})dx$	$x = c\,\mathrm{sen}(t)$ o $x = c\cos(t)$

6.3.7 Integración de funciones trigonométricas

$$\int R(sen(x), cos(x))dx$$

con R una función racional en las variables $sen(x)$ y $cos(x)$. Para su transformación a integral de función racional:

Si	Cambio de variable
$R(-sen(x), cos(x)) = -R(sen(x), cos(x))$	$cos(x) = t$
$R(sen(x), -cos(x)) = -R(sen(x), cos(x))$	$sen(x) = t$
$R(-sen(x), cos(x)) = R(sen(x), cos(x))$ $R(sen(x), -cos(x)) = R(sen(x), cos(x))$	$tg(x) = t$
	$tg(\frac{x}{2}) = t$

.

6.4 Integrales impropias

6.4.1 Integrales en intervalos no acotados

Sea $b \in \mathbb{R}$. Si $f(x)$ es una función acotada e integrable en todo intervalo $[M, b]$ con $M \leq b$, se define

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{b} f(x)dx.$$

La integral es **convergente** si existe el límite anterior y es finito; es **divergente** si el límite es $\pm\infty$; no existe si no existe el límite.

De forma similar definimos, si $f(x)$ es acotada e integrable en $[a, M]$ para todo $M \geq a$:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{a}^{M} f(x)dx.$$

Y si $f(x)$ es acotada e integrable en $[N, c]$ y en $[c, M]$ para todo $N \leq c$ y $c \leq M$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx =$$
$$\lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{c} f(x)dx + \lim_{M\to\infty} \int_{c}^{M} f(x)dx.$$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones positivas y continuas en $[a, \infty)$. Para estudiar la convergencia de $\int_a^\infty f(x)dx$ y de $\int_a^\infty g(x)dx$ se pueden emplear los siguientes criterios:

Criterio de comparación

1. Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ a partir de un cierto x en adelante, entonces

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty.$$

2. Si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ a partir de un cierto x en adelante, entonces

$$\int_a^\infty g(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \infty.$$

Criterio del límite

Sea $A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$:

1. Si $A \in R - \{0\}$, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.

2. Si $A = 0$, entonces
$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty.$$

3. Si $A = \infty$, entonces
$$\int_a^\infty g(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \infty.$$

6.4.2 Integrales de funciones no acotadas

Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Si $f(x)$ es una función no acotada en b pero integrable en todo intervalo $[a, b-\epsilon]$ con $\epsilon > 0$, se define
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$
La integral es **convergente** si existe el límite anterior y es finito; es **divergente** si el límite es $\pm\infty$; no existe si no existe el límite.

De forma similar, si $f(x)$ no es acotada en a pero es acotada en $[a+\epsilon, b]$ $\forall\epsilon > 0$, definimos:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx.$$
Y si $f(x)$ no es acotada en $c \in (a, b)$, pero es integrable en $[a, c-\epsilon_1]$ y en $[c+\epsilon_2, b]$, definimos
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = \lim_{\epsilon_1\to 0} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2\to 0} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Sea una función $f(x)$ no acotada en $c \in (a, b)$. Se define **valor principal de Cauchy** de la integral de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ a
$$\mathrm{VP}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx\right)$$

Para estudiar la convergencia de la integral de una función no acotada en un cierto intervalo, se pueden utilizar los siguientes criterios:

Criterio de comparación

Sea $f(x) \geq 0$ una función continua en $[a, b)$ y no acotada en b:

1. Si existe otra función $g(x)$ tal que $f(x) \leq g(x)$ $\forall a < x < b$, entonces
$$\int_a^b g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty.$$

2. Si existe otra función $g(x)$ tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ $\forall a < x < b$, entonces
$$\int_a^b g(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \infty.$$

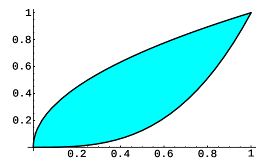
Criterio del límite

Sean $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ dos funciones definidas en $[a, b)$ y sea $A = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Entonces:

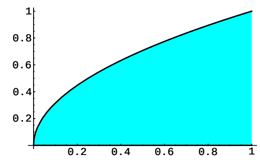
1. Si $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\int_a^b g(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.
2. Si $A = 0$, entonces
$$\int_a^b g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty.$$
3. Si $A = \infty$, entonces
$$\int_a^b g(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \infty.$$

6.5 Aplicaciones de la integral definida en $\mathbb{R}$

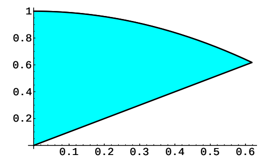
Área definida por una curva



$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

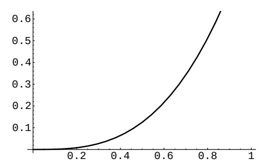


$\int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|dt$

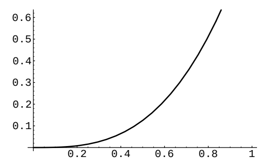


$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$

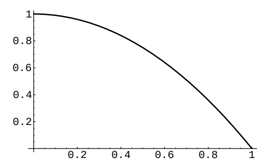
Longitud de un arco de curva



$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

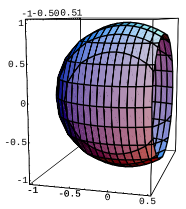


$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$

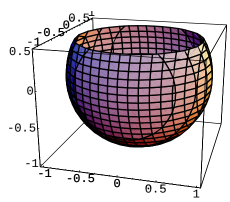


$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta$

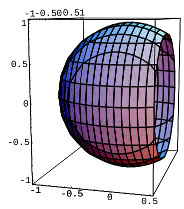
Área de una superficie y volumen de un cuerpo de revolución



$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

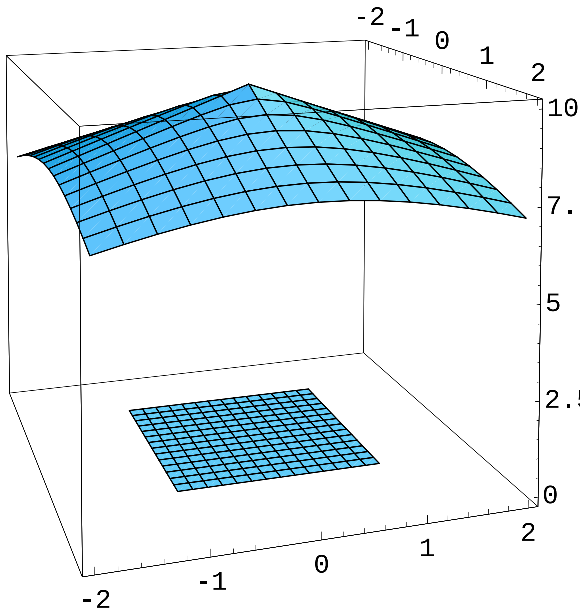


$2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$



$\int_b^a \pi[f(x)]^2 dx$

6.6 El concepto de integral doble



Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función positiva y acotada definida en un rectángulo $I = [a, b] \times [c, d]$ del plano $\mathbb{R}^2$. Pretendemos calcular el volumen de la figura delimitada superiormente por la gráfica de la función $f(x, y)$ e inferioremente por el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$.

P es una **partición** del rectángulo I si $P = P_1 \times P_2$, donde P_1 es una partición del intervalo $[a, b]$ y P_2 es una partición del intervalo $[c, d]$. Una partición $P' = P_1' \times P_2'$ se dice que es más fina que otra $P = P_1 \times P_2$, si $P_i \subset P_i'$.

Consideremos una partición $P = P_1 \times P_2$ tal que $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ y $P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$. Se define la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$ de la función $f(x, y)$ para la partición P como

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(f)|(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})|$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f)|(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})|$$

siendo

$$m_{ij}(f) = \inf\{f(x,y) : x \in [x_{i-1}, x_i],\ y \in [y_{j-1}, y_j]\}$$

$$M_{i,j}(f) = \sup\{f(x,y) : x \in [x_{i-1}, x_i],\ y \in [y_{j-1}, y_j]\}$$

Una función $f : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acotada es **integrable** en I si

$$S(f,P) - s(f,P) \to 0$$

cuando la partición P se hace más fina y la distancia mínima de los puntos de la partición tiende a 0 . En ese caso se llama integral de $f(x,y)$ en I a

$$\int\int_I f(x,y)\ dx\ dy = \lim S(f,P) = \lim s(f,P)$$

Sean $f, g : I \subset \mathbb{R}^2 \to R$ dos funciones integrables en I. Veamos algunas propiedades:

1. $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ las funciones $\alpha f \pm \beta g$ son integrables en I y

$$\int\int_I [\alpha f \pm \beta g]\ dx\ dy = \alpha \int\int_I f\ dx\ dy\ \pm\ \beta \int\int_I g\ dx\ dy.$$

2. Si fy g son integrables en I y $f(x,y) \geq g(x,y)$ en I, entonces

$$\int\int_I f\ dx\ dy \geq \int\int_I g\ dx\ dy.$$

3. Si f es integrable en I, entonces $|f|$ también y

$$\left|\int\int_I f\ dx\ dy\right| \leq \int\int_I |f|\ dx\ dy.$$

4. Si f están acotada por dos número m y M $(m \leq f \leq M)$ en I, entonces

$$m\,\text{Area}(I) \leq \int\int_I f\ dx\ dy \leq M\,\text{Area}(I)$$

5. $f \cdot g$ es integrable en I, pero no se verifica en general que la integral del producto sea el producto de las integrales.

6. Si $I = I_1 \cup I_2$, siendo I_1 e I_2 dos rectángulos de $\mathbb{R}^2$, entonces f es integrable en I_1 e I_2 y
$$\int\int_I f\ dx\ dy = \int\int_{I_1} f\ dx\ dy\ +\ \int\int_{I_2} f\ dx\ dy$$
7. Si f es continua en I, o bien es continua salvo en un conjunto de puntos de *medida nula*[1], entonces f es integrable en I.

Sea D un conjunto acotado cualquiera de $\mathbb{R}^2$ delimitado por una curva cerrada y sea I un rectángulo que contenga a D. Una función acotada en D $f : D \to \mathbb{R}$ es integrable en D si y solo si la función

$$\widehat{f} = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in I - D \end{cases}$$

definiéndose
$$\int\int_D f\ dx\ dy = \int\int_I \widehat{f}\ dx\ dy.$$
Esta definición permite calcular integrales en recintos distintos de los rectángulos conservando las propiedades de linealidad, monotonía y acotación estudiadas.

6.7 Integración iterada

Sea $I = [a,b] \times [c,d]$. Dada la función $f : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, para cada punto $x \in [a,b]$ podemos hablar de la función

$$f_x : [c,d] \to \mathbb{R}$$

tal que $f_x(y) = f(x,y)$. Por ejemplo, si $f(x,y) = x^2+y$, entonces $f_3(y) = 9+y$.

Teorema de Fubini: *Si f es una función integrable en I y para cada $x \in [a,b]$ (salvo, quizás, un número finito de valores de x) la función f_x es integrable en $[c,d]$, entonces la función $\int_c^d f_x(y)dy$ es integrable en $[a,b]$ y se verifica que*
$$\int\int_I f\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)dy\right)\ dx.$$

[1]Intuitivamente, un conjunto de medida nula en el plano es aquel que tienen área nula. Por ejemplo, los conjuntos con un número finito de puntos, los segmentos y las curvas son conjuntos de medida nula en $\mathbb{R}^2$.

En lo anterior, el papel de x e y es intercambiable. Si $f(x,y)$ es continua en I se puede aplicar el teorema de Fubini. Este concepto se puede generalizar a la integración en cualquier recinto de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: *Calcula la integral de $f(x,y) = x^2 + y$ en el recinto*

$$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [1,4],\ \ y \in [1,2]\}$$

$$\int\int_I (x^2+y)dx\ dy = \int_1^2 \left(\int_1^4 (x^2+y)dx\right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} + yx\right]_1^4 dy =$$
$$= \int_1^2 (21+3y)dy = [21y + \frac{3y^2}{2}]_1^2 = \frac{51}{2}.$$

□

Ejemplo: *Calcula la integral de $f(x,y) = x^2 + y$ en el recinto S*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [1,2],\ \ x^2 \leq y \leq x^2 + 5\}.$$

$$\int\int_S (x^2+y)dx\ dy = \int_1^2 \left(\int_{x^2}^{x^2+5} (x^2+y)dy\right) dx =$$
$$= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} + yx\right]_{x^2}^{x^2+5} dx = \int_1^2 10x^2 + \frac{25}{2}dx = \left[\frac{10x^3}{3} + \frac{25x}{2}\right]_1^2 = \frac{215}{6}.$$

□

Ejemplo: *Calcula la integral de $f(x,y) = xe^{\frac{-x^2}{y}}$ en el recinto S delimitado por las curvas $y = x^2$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$.*

Con las condiciones impuestas el recinto S es

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ y \in [1,2],\ \ 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

$$\int\int_S xe^{\frac{-x^2}{y}} dx\ dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{y}} xe^{\frac{-x^2}{y}} dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{-ye^{\frac{-x^2}{y}}}{2} \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_1^2 \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2e} \right) dy = \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4e} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{3(e-1)}{4e}.$$

□

Ejemplo: *Calcula la integral de* $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2}$ *en el recinto delimitado por el primer cuadrante del círculo centrado en el punto* $(0,0)$ *y de radio* a.

Con las condiciones impuestas el recinto S es

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \in [0,a],\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}.$$

$$\int\int_S \sqrt{a^2 - x^2}\ dx\ dy = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\ dy \right) dx =$$

$$= \int_0^a \left[y\sqrt{a^2 - x^2} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_0^1 \left(a^2 - x^2\right) dy =$$

$$= \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2a^3}{3}.$$

□

Ejercicios: Calcula las siguientes integrales de las funciones $f(x,y)$ en los recintos S correspondientes.

1. $f(x,y) = x^2 + y$, S delimitado por las rectas $y = 1$, $y = 2$, $y = x$, $x = 2y$.
2. $f(x,y) = x^2 y - y^2$, S delimitado por el eje X, el eje Y y el primer cuadrante del círculo centrado en $(0,0)$ y de radio 1.
3. $f(x,y) = 2x + y^2$, S delimitado por las curvas $y = 0$, $y = 1$, $x = y^2 - 1$, $x = y^2 + 1$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2$, S delimitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 9 - x^2$.

6.8 Cambios de variables

Teorema de cambio de variable: *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable en el recinto D y $T : D^* \to D$ una aplicación de cambio de variable ($T_1(u,v) = x$, $T_2(u,v) = y$). Si x e y admiten derivadas parciales continuas respecto de u y de v en D^*, entonces*

$$\int\int_D f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_{D^*} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\ |J|\ du\ dv$$

siendo $|J|$ el jacobiano de la aplicación de cambio de variables.

Ejemplo: Calcula la integral de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en el círculo de centro $(0,0)$ y radio r.

El recinto será $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Hacemos el cambio de variable

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

El jacobiano del cambio de variable es

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

El nuevo recinto S^* será

$$\begin{aligned} S^* = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho^2 \leq r^2\} = \\ = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq r\} \end{aligned}$$

y la integral queda

$$\begin{aligned} \int\int_S \sqrt{x^2+y^2}\ dx\ dy &= \int\int_{S^*} \rho\ |J|\ d\rho\ d\theta = \\ &= \int\int_{S^*} \rho^2\ d\rho\ d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho^2\ d\rho\right)\ d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r\ d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\ d\theta = \left[\frac{r^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

□

Para algunos recintos determinados hay cambios de variable que pueden funcionar bien:

1. Círculo de centro $(a,0)$ y radio r, de ecuación $(x-a)^2+y^2\leq r^2$):
$$x=a+\rho\cos\theta \qquad y=\rho\operatorname{sen}\theta$$
2. Círculo de centro $(0,b)$ y radio r, de ecuación $x^2+(y-b)^2\leq r^2$):
$$x=\rho\cos\theta \qquad y=b+\rho\operatorname{sen}\theta$$
3. Círculo de centro (a,b) y radio r, de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$):
$$x=a+\rho\cos\theta \qquad y=b+\rho\operatorname{sen}\theta$$
4. Elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq r^2$:
$$x=a\rho\cos\theta \qquad y=b\rho\operatorname{sen}\theta$$

6.9 Aplicaciones de la integral doble

6.9.1 Áreas de figuras planas

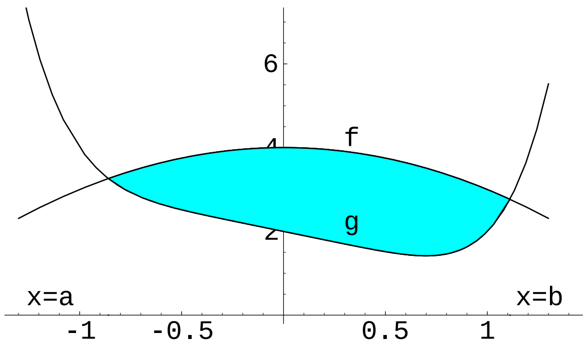


Figura 6.1: Área entre f y g.

El área del plano XY contenida entre dos funciones $g(x)\leq f(x)$ que se cortan en los puntos $x=a$, $x=b$ (ver figura 6.1) se puede calcular
$$\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{f(x)}dy\right)dx$$

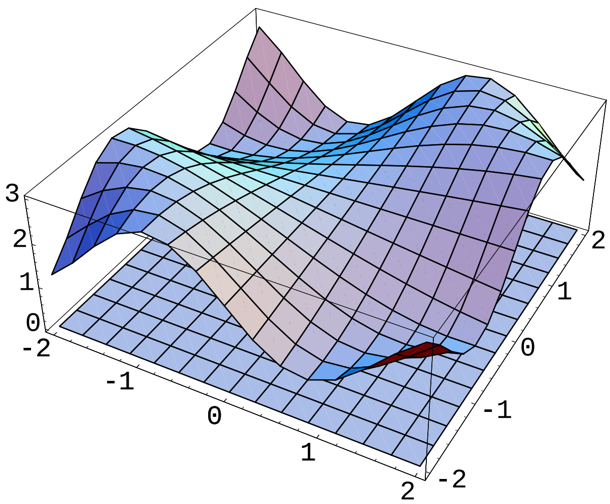


Figura 6.2: Una superficie en $\mathbb{R}^3$ y su proyección en $z = 0$.

6.9.2 Áreas de superficies en $\mathbb{R}^3$

Consideremos una superficie $z = f(x, y)$ en $\mathbb{R}^3$ (ver f igura 6.2) para determinados valores de x y de y. Si su proyección sobre el plano XY es el recinto S, entonces el área de la superficie se calcula

$$\int\int_S \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ dx\ dy \tag{6.1}$$

6.9.3 Volúmenes de figuras en $\mathbb{R}^3$

Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ y su proyección S sobre el plano XY. El volumen del cuerpo delimitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$, inferiormente por S y lateralmente por rectas paralelas al eje OZ que pasan por la frontera del recinto S, se puede calcular así

$$\int\int_S f(x, y)\ dx\ dy$$

Si la figura está limitada inferiormente por otra superficie $z = g(x, y)$, el cálculo sería

$$\int\int_S f(x,y)\ dx\ dy - \int\int_S g(x,y)\ dx\ dy$$

Ejemplo: *Calcula el área de la región plana limitada por las curvas* $y = x^2 - 1$, $y = 9 - x^2$.

Los puntos de corte de las dos curvas se alcanzan en $x = \pm\sqrt{5}$, de modo que el recinto será

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}],\ x^2 - 1 \leq y \leq 9 - x^2\}$$

y el área

$$\int\int_S dx\ dy = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\int_{x^2-1}^{9-x^2} dy \right) dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} [y]_{x^2-1}^{9-x^2}\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} -2x^2 + 10\ dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 10x \right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \frac{40\sqrt{5}}{3}$$

$\square$

Ejemplo: *Calcula el área de la superficie* $z = 5 + x^2 - y^2$ *limitada por el cilindro* $x^2 + y^2 = 4$.

(Ver figura 6.3). La proyección de la figura es el recinto S del plano XY

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \leq 4\}$$

y el área de la superficie haciendo uso de la expresión (6.1)

$$\int\int_S \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\quad dx \quad dy \quad = \quad \int\int_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\quad dx \quad dy$$

Aplicando el cambio recomendado para el recinto S

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta$$

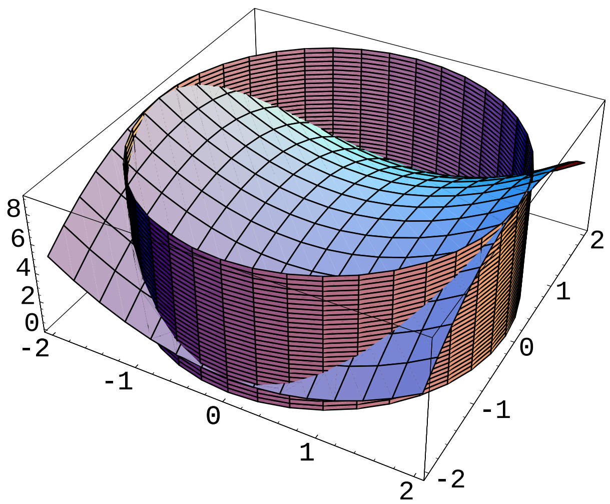


Figura 6.3: $z = 5 + x^2 - y^2$ y $x^2 + y^2 = 4$

el jacobiano es $|J| = \rho$ y nos situamos en el recinto

$$S^* = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 / \ \theta \in [0, 2\pi], \ \ \rho \in [0, 2]\}$$

con lo que la integral queda

$$\int\int_{S*} \sqrt{1+4\rho^2}|J| d\rho \ d\theta = \int\int_{S*} \sqrt{1+4\rho^2}\rho \ d\rho \ d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\sqrt{1+4\rho^2}\rho \ d\rho\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_0^2 d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{17\sqrt{17}-1}{12} \ d\theta = \left[\frac{17\sqrt{17}-1}{12} \ \theta\right]_0^{2\pi} = \frac{(17\sqrt{17}-1)\pi}{6}$$

□

Ejemplo: *Calcula el volumen limitado por la superficie* $z = x^2 + 2y$, *inferiormente por el plano* $z = 0$ *y lateralmente por las superficies* $y = 1 - x^2$, $y = x^2$.

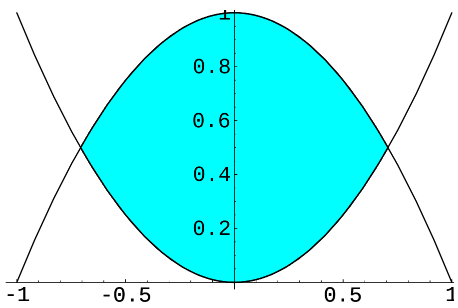


Figura 6.4: $y = 1 - x^2$, $y = x^2$

(Ver figura 6.5). La proyección en el plano del cuerpo limitado por $y = 1 - x^2$, $y = x^2$ es el recinto limitado por las curvas de la figura 6.4. Estas curvas se cortan en los puntos $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. El recinto S será

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \; x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

El volumen de la figura será

$$\int\int_S (x^2 + 2y)\; dx\; dy = \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} (x^2 + 2y)\; dy \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[x^2 y + y^2\right]_{x^2}^{1-x^2} \; dx = \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[1 - x^2 - 2x^4\right] \; dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5}\right]_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{11\sqrt{2}}{15}$$

$\square$

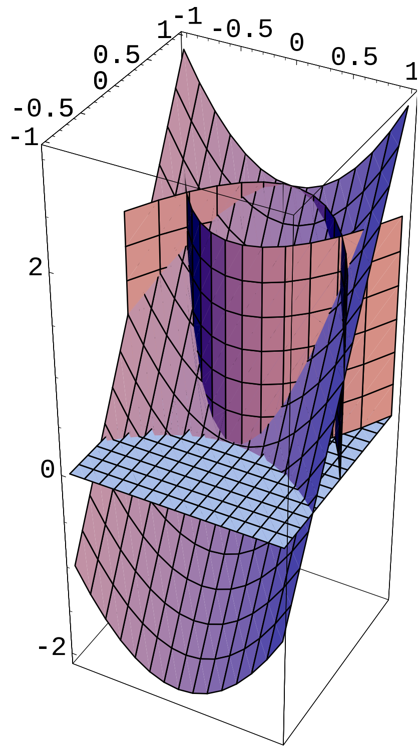


Figura 6.5: $z = x^2 + 2y$, $y = 1 - x^2$, $y = x^2$, $z = 0$

Capítulo 7

Series numéricas y series de funciones

7.1 Series numéricas

A partir de cualquier sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, podemos formar una sucesión $(S_n)n \in \mathbb{N}$ de sumas parciales de forma similar al siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = \frac{1}{2} & S_1 = \frac{1}{2} \\
a_2 = \frac{1}{4} & S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
a_3 = \frac{1}{8} & S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\
\dots & \dots \\
a_n = \frac{1}{2^n} & S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n
\end{array}$$

Es decir, a partir de cualquier sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, podemos formar la $(S_n)n \in \mathbb{N}$ de sumas parciales

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \dots,\ S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n,\ \dots$$

La sucesión S_n se llama **serie** y se suele denotar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser

- **convergente**, si $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S_k < \infty$

- **divergente** , si $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$
- sin límite u **oscilante**, si no existe $\lim_{k\to\infty} S_k$.

Si la serie es convergente, se llama **suma de la serie** a

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k$$

y ese valor S también se denota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se llama resto de la series de orden k a $R_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ y se tiene que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = S_k + R_k.$$

7.1.1 Propiedades

1. El carácter convergente, divergente u oscilante de una serie no varía si se suprimen un número finito de términos.
2. Una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de Cauchy.
3. Una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la sucesión R_k es convergente a 0.
4. Para que la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es necesario (no es suficiente) que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente a 0.
5. Para que la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es suficiente (no es necesario) que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sea convergente.

Ejemplos

1. Series geométricas: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$.

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} ar^n = \frac{ar - ar^{k+1}}{1-r} = ar\frac{1-r^k}{1-r} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} a\frac{r}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \\ \infty & \text{si } r \geq 1 \\ \text{no tiene} & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$$

2. Series telescópicas: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ donde $x_n = a_n - a_{n+1}$

$$S_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) \cdots + \\ \cdots + (a_k - a_{k+1}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_1 - \lim_{k\longrightarrow\infty} a_{k+1}$$

3. Serie armónica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\begin{array}{llllll} 1+\frac{1}{2}+ & \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ & \frac{1}{5}+\ldots\frac{1}{8}+ & \frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+ & \frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}+\cdots > \\ 1+\frac{1}{2}+ & \frac{2}{2^2}+ & \frac{2^2}{2^3}+ & \frac{2^3}{2^4}+ & \frac{2^4}{2^5}+\cdots > \\ 1+\frac{1}{2}+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{2}+\cdots = \infty \end{array}$$

4. Serie armónica generalizada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

   (a) Caso $p \leq 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

   (b) Caso $p > 1$:

$$\begin{array}{lllll} 1+ & \frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+ & \frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+ & \frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}+ & \cdots < \\ 1+ & \frac{2}{2^p}+ & \frac{4}{4^p}+ & \frac{8}{8^p}+ & \cdots < \\ 1+ & \frac{1}{2^{p-1}}+ & \frac{1}{(2^{p-1})^2}+ & \frac{1}{(2^{p-1})^3}+ & \cdots = \end{array}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}.$$

5. Series alternas: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n a_{n+1} \leq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Si $|a_n|$ es una sucesión monótona decreciente y convergente a 0, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

   Supongamos que $a_1 \leq 0$ ($a_2 \geq 0, a_3 \leq 0$, etc). Entonces

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_6 \leq S_4 \leq S_2.$$

   S_{2k-1} es una sucesión creciente y acotada superiormente, por lo tanto, es una sucesión convergente.

   S_{2k} es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, por lo tanto, también es una sucesión convergente.

   Además

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} - S_{2k-1} = \lim a_{2k} = 0$$

   Con lo que

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} S_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} S_k$$

7.1.2 Criterios de convergencia para series de términos positivos

Los siguientes criterios para estudiar si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ es convergente, son aplicables también para estudiar

- la convergencia de series de términos positivos a partir de un término en adelante.
- la convergencia de series de términos negativos (cambiando el signo de la serie).
- la convergencia en valor absoluto de una serie cualquiera ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$).

Criterio general

$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ es una sucesión monótona creciente y, por tanto, será convergente si está acotada superiormente.

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \leq M \quad \forall\ k\ \in \mathbb{N}.$$

Criterio de comparación

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} b_n$$

para cualquier valor k. Se verifica que:

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Criterio del límite

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos y

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Se verifica que:

1. Si $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen o divergen simultáneamente.
2. Si $A = 0$, ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n << \sum_{n=1}^{\infty} b_n$) entonces
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty.$$
3. Si $A = \infty$, ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n << \sum_{n=1}^{\infty} a_n$) entonces
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Criterio del cociente

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y sea
$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Se verifica que:

1. Si $A < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Si $A > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
3. Si $A = 1$, puede ser convergente o divergente.

Criterio de Raabe

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y sea
$$\lambda = \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$
Se verifica que:

1. Si $\lambda > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Si $\lambda < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
3. Si $\lambda = 1$, puede ser convergente o divergente.

Criterio de la raíz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Se verifica que:

1. Si $A < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Si $A > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
3. Si $A = 1$, puede ser convergente o divergente.

Criterio del logaritmo

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{L(\frac{1}{a_n})}{Ln}.$$

Se verifica que:

1. Si $\lambda > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Si $\lambda < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
3. Si $\lambda = 1$, puede ser convergente o divergente.

Criterio de la integral

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$. Si $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ es una función monótona decreciente en $[1, \infty]$ tal que $f(n) = a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{y} \qquad \int_1^{\infty} f(t)dt$$

convergen o divergen simultáneamente.

Dado que (ver figuras 7.1)

$$S_{k-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} > \int_1^k f(t)dt > a_2 + a_3 + \cdots + a_k = S_k - a_1$$

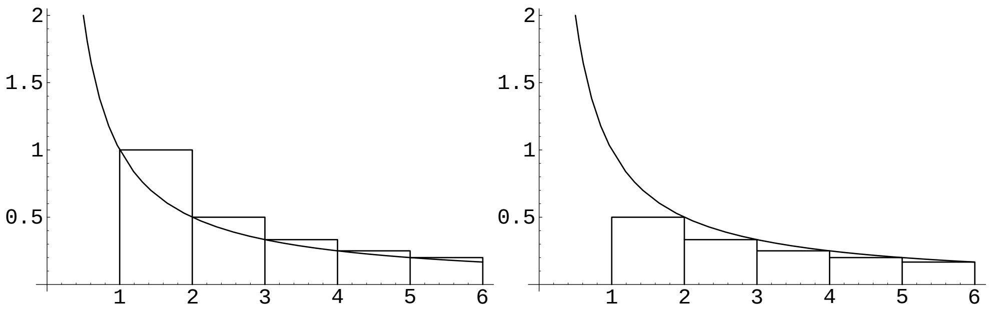


Figura 7.1: $a_1 + \cdots + a_5 \geq \int_1^6 f(t)dt \geq a_2 + \cdots + a_6$

tomando límite cuando k tiene a infinito

$$S - a_1 \leq \int_1^k f(t)dt \leq S$$

7.1.3 Otros criterios de convergencia

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Se verifica que:

1. Absolutamente convergente $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Convergente.

2. Las series absolutamente convergentes son las únicas series **reordenables**, es decir, cualquier otra serie con sus mismos términos en distinto orden sumará lo mismo (Teorema de Dirichlet).

3. Si una serie es convergente pero no absolutamente convergente, podemos reordenar sus términos para que sume lo que nos propongamos previamente (Teorema de Riemann).

Criterio de Abel

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ y b_n es una sucesión monótona, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$

Criterio de Leibniz

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene sumas parciales acotadas y b_n es una sucesión decreciente convergente a 0, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$

Proceso para estudiar la convergencia de una serie:

1. Comprobar si el término general tiende a 0. En caso contrario, la serie no converge.
2. Estudiar si es absolutamente convergente con los criterios para series de términos positivos (abs. convergente $\Rightarrow$ convergente).
3. Si es alterna, aplicar el criterio específico para series alternas.
4. Si no son útiles los anteriores, aplicar los criterios de Abel o Leibniz.

7.2 Sucesiones de funciones

Si $\mathcal{F}$ es el conjunto de las funciones de los números reales en los números reales, una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ 1 & \mapsto & f_1 \\ 2 & \mapsto & f_2 \\ \dots & & \end{array}$$

Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que **converge puntualmente** a una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $\forall\, x \in A$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

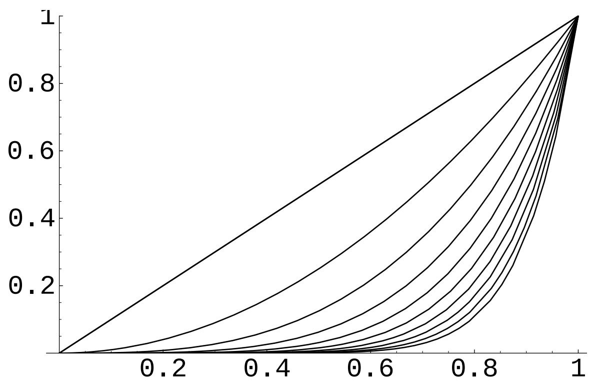
es decir

$$\forall\, x \in A \text{ y } \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta_x : n > \delta_x \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

En la definición anterior, fijado un ϵ, es posible que no exista un mismo δ que sea válido para todos los puntos $x \in A$.

Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que **converge uniformemente** a una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si se verifica que

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta : n > \delta \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in A.$$



$x^n \to 0$ puntualmente en $[0, 1)$

7.2.1 Propiedades

1. Si $f_n \to f$ uniformemente, entonces $f_n \to f$ puntualmente (convergencia uniforme $\Rightarrow$ convergencia puntual).

2. El límite puntual de funciones continuas no tiene que ser una función continua. Ejemplo: x^n en el intervalo $[0, 1]$.

3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas y $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$.

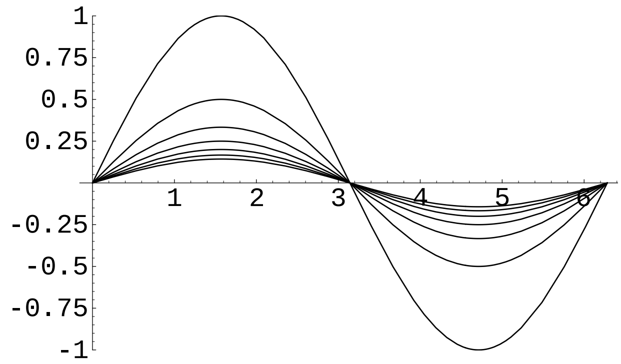
4. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas y $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \overset{unif.}{\longrightarrow} F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

   En particular $F_n(b) \to F(b)$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

5. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones derivables en $[a, b]$, $f_n(c)$ es convergente en algún punto $c \in (a, b)$ y f'_n converge uniformemente a una cierta función g en (a, b), entonces $(f_n)_{n\in N}$ converge uniformemente a una función diferenciable f en (a, b) y se verifica que $f' = g$.



$$\frac{sen(x)}{n} \to 0 \text{ uniformemente en } [0,1]$$

7.3 Series de funciones

A partir de cualquier sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones, podemos formar una sucesión de sumas parciales:

$$f_1,\ f_1+f_2,\ f_1+f_2+f_3,\ \ldots,\ \sum_{n=1}^{k} f_n,\ \ldots$$

La sucesión así formada se llama **serie de funciones** y se suele denotar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se dice que es **convergente puntualmente** en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si la serie de números $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es convergente $\forall\ x \in A$, es decir, cuando $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty\ \forall\ x \in A$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se dice que es **convergente uniformemente** en un intervalo $A \subset \mathbb{R}$ si la sucesión de sumas parciales

$$f_1,\ f_1+f_2,\ f_1+f_2+f_3,\ \ldots,\ \sum_{n=1}^{k} f_n,\ \ldots$$

converge uniformemente en A.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se dice que es **absolutamente convergente** en un intervalo $A \subset \mathbb{R}$ si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ es convergente puntualmente en A.

Criterio M-Weirstrass

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones definida en $A \subset R$. Si se verifican las condiciones:

1. $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in N \quad \forall x \in A$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$,

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es absolutamente convergente y uniformemente convergente.

7.3.1 Propiedades

Sean $f_n : [a, b] \to R$ y $f : [a, b] \to R$.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f en $[a, b]$ y (f_n) son funciones continuas, entonces f es una función continua en $[a, b]$.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $[a, b]$ y (f_n) son funciones continuas, entonces
$$\sum_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt.$$
(Integral de la serie = Serie de las integrales)
3. Si f_n son funciones derivables en $[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ es convergente en algún punto $c \in (a, b)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente en (a, b), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a una función diferenciable en (a, b) y se verifica que
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$
(Derivada de la serie = Serie de las derivadas)

7.4 Series de potencias

Una **serie de potencias** es una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ en la que las funciones son de la forma $f_n = c_n(x-a)^n$, con $c_n, a \in \mathbb{R}$. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, se llama **intervalo de convergencia** de la serie al intervalo I centrado en a tal que si $x \in I$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n < \infty$.

¿Para qué valores $x \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$? ¿Para qué valores $x \in \mathbb{R}$ converge absolutamente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$?

Aplicando el criterio del cociente a $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x-a)^n|$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$$

es decir,

$$|x-a| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}$$

Aplicando el criterio de la raíz a $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x-a)^n|$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} |x-a| \sqrt[n]{|c_n|} < 1$$

es decir,

$$|x-a| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, se define **radio de convergencia** de la serie como

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}$$

o bien como

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es

1. Absolutamente sumable si $|x-a| < R$, es decir, $x \in (a-R, a+R)$
2. No sumable si $|x-a| > R$, es decir, $x \in (\infty, a-R) \cup (a+R, \infty)$
3. Caso dudoso si $|x-a| = R$, es decir $x = a-R$, $x = a+R$

7.4.1 Convergencia, continuidad, derivabilidad e integración

Proposición 7.1. *La serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *es absolutamente convergente y uniformemente convergente en todo intervalo compacto* $[p,q]$ *contenido en el intervalo* $(a-R, a+R)$, *siendo* R *el radio de convergencia de la serie.*

Demostración. Puesto que $[p,q] \subset (a-R, a+R)$, es posible encontrar un valor S con $0 < S < R$ tal que $[p,q] \subset [a-S, a+S] \subset (a-R, a+R)$. Aplicamos ahora el criterio M-Weirstrass a la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ en el intervalo $[p,q]$:

1. $|c_n(x-a)^n| \leq |c_n|S^n \ \forall x \in [p,q]$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|S^n < \infty$ (se puede ver aplicando el criterio de la raíz)

Como consecuencia, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es absolutamente convergente y uniformemente convergente en todo intervalo $[p,q] \subset (a-R, a+R)$.

□

Propiedades

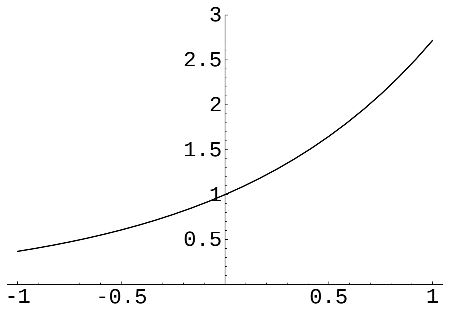
Sea $[p,q] \subset (a-R, a+R)$:

1. Puesto que $c_n(x-a)^n$ son funciones continuas en $[p,q]$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $[p,q]$, se deduce que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es una función continua en $[p,q]$.

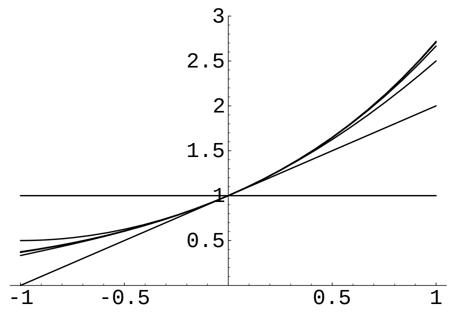
2. Puesto que $c_n(x-a)^n$ son funciones continuas en $[p,q]$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $[p,q]$, se deduce que
$$\int_p^q \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_p^q c_n(x-a)^n dx$$

3. Puesto que $c_n(x-a)^n$ son funciones derivables en (p,q), $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ converge uniformemente en (p,q) y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es convergente para algún valor de $x \in (p,q)$, se deduce que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es derivable y
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n(x-a)^n]' = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

7.4.2 Funciones analíticas. Series de Taylor



$f(x) = e^x$



Polinomios de Taylor de e^x

La sucesión $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2}, 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}, \ldots$ de polinomios de Taylor de grado n para la función e^x en el punto 0, tiene como límite la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

¿Es cierto que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$?

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ una función derivable infinitas veces en un entorno de a. La **serie de Taylor** para la función $f(x)$ en a es la serie de potencias que resulta como límite de los polinomios de Taylor para la función $f(x)$ en a.

Una función $f(x)$ es **analítica** o desarrollable en serie de potencias alrededor de a, si existe $R > 0$ tal que si $x \in (a-R, a+R)$ entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

es decir, cuando coincide con una serie de potencias en un intervalo centrado en a.

Proposición: *Sea $f(x)$ una función analítica en a. Entonces la serie de potencias con la que coincide en un entorno de a tiene que ser su serie de Taylor en el punto a.*

Ejemplo: *La función* $f(x) = e^x$ *es analítica en* 0.

La serie de Taylor para la función $f(x) = e^x$ en 0 es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Veamos el radio de convergencia de esta serie:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right|} = \infty$$

La serie, por tanto, es absolutamente convergente para todo $x \in (-\infty, \infty)$.

Si llamamos $P_n f(0)(x)$ al polinomio de Taylor y $R_n f(0)(x)$ al resto de Taylor de grado n para la función $f(x)$ en el punto 0, el teorema de Taylor nos dice que:

$$f(x) = P_n f(0)(x) + R_n f(0)(x).$$

Si tomamos límite en la expresión anterior nos quedará:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n f(0)(x) + \lim_{n\to\infty} R_n f(0)(x),$$

es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \lim_{n\to\infty} R_n f(0)(x)$$

con lo que para que $f(x)$ sea analítica basta que el segundo sumando de la derecha tienda a 0 cuando n tiende a ∞. Para finalizar bastará que veamos esto último:

$$\lim_{n\to\infty} R_n f(0)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0.$$

$\square$

Ejemplo: *La función*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ e^{\frac{-1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

no es analítica en 0.

La función anterior tiene todas sus derivadas en 0 iguales a 0, con lo que sus polinomios de Taylor en 0 valen siempre 0 al igual que su serie de Taylor. Sin embargo, $f(x) \neq 0$ en todo punto distinto de 0.

$\square$

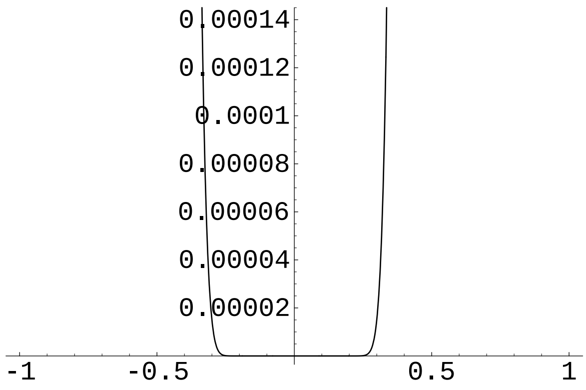


Figura 7.2: $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$

7.5 Series de Fourier

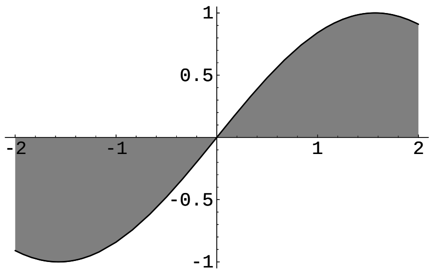
7.5.1 Funciones periódicas. Funciones pares e impares

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que

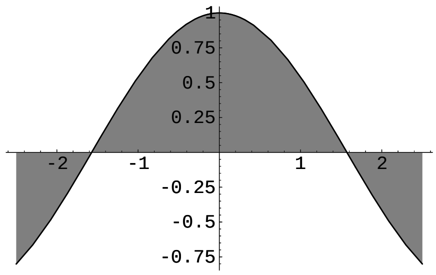
1. $f(x)$ es **periódica** si existe $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)\ \forall x \in A$,
2. $f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)\ \forall x \in A$,
3. $f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in A$.

Propiedades

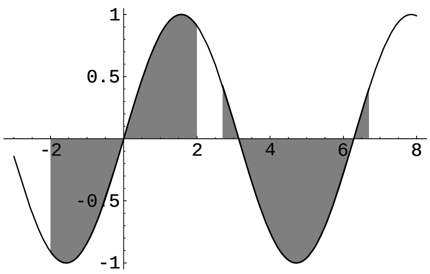
1. Si $f(x)$ es una función impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
2. Si $f(x)$ es una función par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
3. Si $f(x)$ es una función periódica de periodo $2l$, entonces $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{a}^{a+2l} f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
4. Si $f(x)$ es impar, entonces $f(x)cos(nx)$ es impar y $f(x)sen(nx)$ es par.
5. Si $f(x)$ es par, entonces $f(x)cos(nx)$ es par y $f(x)sen(nx)$ es impar.
6. Si $f(x)$ es periódica de periodo 2π, entonces $f(x)cos(nx)$ y $f(x)sen(nx)$ también son periódicas de periodo 2π.



Integral de una función impar



Integral de una función par



Integral de una función periódica

7. Si $f(x)$ es periódica de periodo $2l$, entonces $f(x)cos(n\frac{\pi}{l}x)$ y $f(x)sen(n\frac{\pi}{l}x)$ también son periódicas de periodo $2l$.

7.5.2 Desarrollo de una función en serie de Fourier

Dada una función periódica $f(x)$ de periodo $T = 2l$, pretendemos encontrar una serie de la forma:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

que se *parezca* a $f(x)$ en el sentido en el que

$$\frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} [f(x) - S(x)]^2\, dx$$

sea lo mínimo posible.

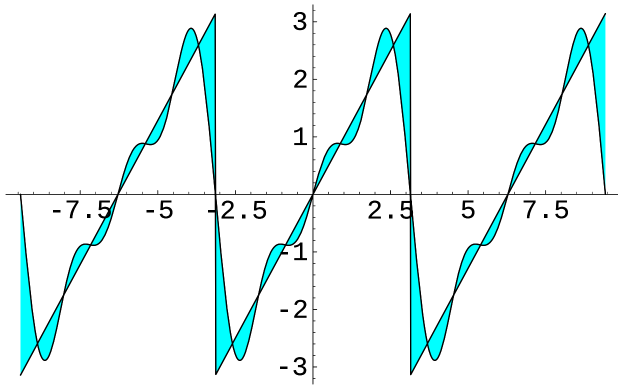


Figura 7.3: $f(x) = x$ con $x \in [\pi, \pi]$ y su desarrollo de grado 3.

Para obtener el desarrollo en serie de Fourier de una función $f(x)$ periódica de período $2l$, los coeficientes a_n y b_n se han de calcular así:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Proposición: Sea $f(x)$ es una función periódica de período $2l$. Si

1. $f(x)$ es par, entonces en su desarrollo en serie de Fourier, los coeficientes b_n serán nulos.

2. $f(x)$ es impar, entonces en su desarrollo en serie de Fourier, los coeficientes a_n serán nulos.

Desarrollo de una función no periódica

Sea $f(x)$ una función cualquiera (no necesariamente periódica) en $[a, b]$, monótona a trozos y acotada.

1. Si la completamos definiéndola de forma periódica, podremos obtener su serie de Fourier.

2. Si la completamos definiéndola de forma periódica y par, podremos obtener su serie de Fourier que solo tendrá términos con *cosenos* (**desarrollo en cosenos de** $f(x)$).

3. Si la completamos definiéndola de forma periódica e impar, podremos obtener su serie de Fourier que solo tendrá términos con *senos* (**desarrollo en senos de** $f(x)$).

7.5.3 Teoremas relativos a series de Fourier

Teorema de Dirichlet

Teorema: *Sea $f(x)$ una función periódica de periodo $2l$, monótona a trozos y acotada en $(-l, l)$. En estas condiciones la serie de Fourier*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

es convergente en todo punto $x \in \mathbb{R}$. La suma de la serie obtenida es igual a

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \text{ es continua en } x \\ \frac{\lim_{t\to x^-} f(x) + \lim_{t\to x^+} f(x)}{2} & \text{si } f(x) \text{no es continua en } x. \end{cases}$$

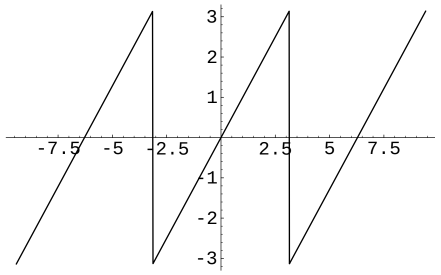
Teorema de mínimo desvío cuadrático

Teorema: *Dada una función $f(x)$ periódica de período $2l$, de entre todos los polinomios trigonométricos de orden k de la forma*

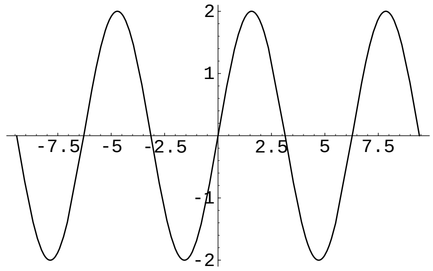
$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

el obtenido mediante los coeficientes de Fourier para $f(x)$, hace mínimo el desvío medio cuadrático:

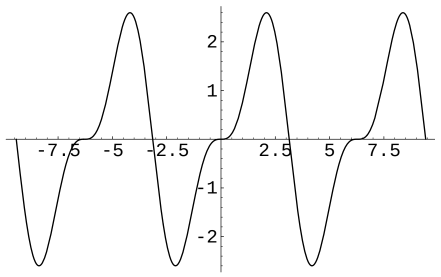
$$\frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} \left[f(x) - S_k(x)\right]^2 dx$$



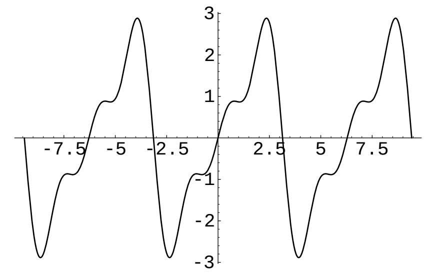
$f(x) = x$ si $x \in [-\pi, \pi]$



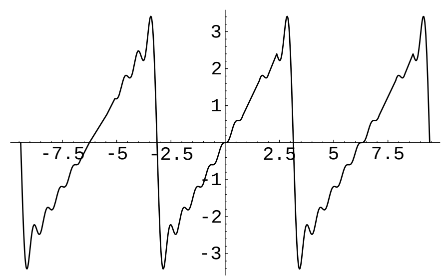
$S_1(x)$



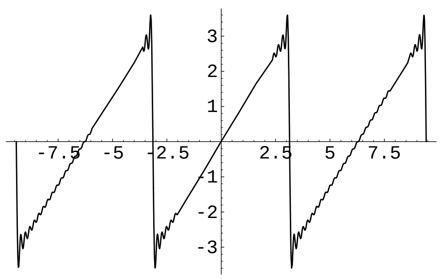
$S_2(x)$



$S_3(x)$



$S_{10}(x)$



$S_{30}(x)$

Problemas

Números complejos. Sucesiones de números reales.

Números complejos

1. Encuentra un método para calcular las raíces cuadradas de números complejos en forma binómica sin transformar a forma módulo argumento. Aplica el método anterior para calcular las raíces cuadradas en forma binómica de:

   (a) $3 + 4i$ (b) $5 - 4i$ (c) $4ab + 2(a^2 - b^2)i$ con $a, b \in \mathcal{R}$.

2. Calcula las raíces de:

   (a) $\sqrt[3]{-1}$ (b) $\sqrt[4]{-1}$ (c) $\sqrt[6]{-8}$ (d) $\sqrt[5]{i}$

3. Calcula:

   (a) $L(1 + i)$ (b) $L(3 - \sqrt{3}i)$ (c) $L(\frac{1-i}{1+i})$

4. Calcula:

   (a) $e^{3+\frac{\pi}{4}i}$ (b) $(-2)^{\sqrt{2}}$ (c) i^i (d) $(1 + i)^{2-3i}$

5. Describir geométricamente los conjuntos de puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que:

   (a) $|Rez| \leq 1 \quad |Imz| \leq 1$
   (b) $|z| \leq 1 \quad \sigma_1 \leq argz \leq \sigma_2$, con $-\pi < \sigma_1 < \sigma_2 \leq \pi$
   (c) $Re(\frac{1}{z}) = k$.

6. Usando la expresión del coseno en función de la exponencial imaginaria, demuestra que

$$cos^2 x = \frac{1 + cos(2x)}{2}$$

7. Cuestión de examen de abril 2000:

   Calcula expresando los resultados en forma trigonométrica:

   (a) $\sqrt[3]{1-i}$

   (b) $(1-i)^{-i}$

8. Cuestión de examen de junio de 2000:

   Determina el conjunto de números complejos z que verifican:

$$z + \bar{z} = |z|.$$

9. Cuestión de examen de marzo 2001:

   (a) Define seno y coseno de un número complejo z y demuestra que $sen^2 z + cos^2 z = 1$.

   (b) Calcula $L(-5+12i)$ y $\sqrt[3]{2+5i}$.

10. Cuestión de examen de junio de 2001:

    Determina el conjunto de números complejos z que verifican: $z^3\bar{z} = -1$. (Idea: utiliza la forma módulo-argumento.)

11. Cuestión de examen de septiembre de 2001: Determina el conjunto de números complejos z que verifican:

$$2e^{\frac{i}{z}} - 1 - \sqrt{3}i = 0.$$

12. Cuestión de examen de marzo de 2002:

    (a) Calcula $(1+i)^{1+\sqrt{3}i}$

    (b) Calcula $\sqrt[6]{-8}$ y presenta el resultado en forma binómica, módulo-argumento y trigonométrica.

    (c) Calcula el valor de x tal que

$$3 = \frac{1-xi}{1+xi}$$

13. Cuestión de examen de junio de 2002 y febrero 2006:

    Sea el número complejo (en forma módulo-argumento) $z = (2\sqrt{2})_{\frac{3\pi}{4}}$:

(a) Calcula $\sqrt[3]{z}$.

(b) Transforma uno de los resultados anteriores a forma binómica y forma trigonométrica.

(c) Calcula $Log(w)$ (en forma binómica) y e^w (en forma trigonométrica), siendo w uno de los resultados del primer apartado.

14. Cuestión de examen de septiembre de 2002:

    Obtén la forma binómica de los números complejos que verifican la ecuación:
    $$z^6 + 19z^3 - 216 = 0.$$

15. Cuestión de examen de marzo de 2003:

    Dado el número complejo en forma módulo-argumento $z = 16_{\frac{2\pi}{3}}$, calcula la forma cartesiana y trigonométrica de z y la forma cartesiana de los diferentes valores de $\sqrt[4]{z}$. Presenta los resultados exactos (sin hacer uso de expresiones decimales.)

16. Cuestión de examen de junio de 2003:

    Sean z_1 y z_2 dos números complejos tales que $z_1 \neq z_2$. Obtener detalladamente la relación que han de guardar z_1 y z_2 para que el número complejo $z = \dfrac{(z_1+z_2)i}{z_1-z_2}$ sea un número complejo imaginario puro.

17. Cuestión de examen de junio de 2003:

    Dado el número complejo en forma módulo-argumento $z = 8_{\frac{-\pi}{4}}$, calcula la forma cartesiana y trigonométrica de z. Presenta los resultados exactos (sin expresiones decimales).

18. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Obtener en forma binómica y módulo-argumento los números complejos que verifican la ecuación:
    $$z^2 + z + 1 = 0.$$

19. Cuestión de examen de septiembre de 2003:
    (a) Obtener la forma cartesiana de los números complejos que verifican la ecuación $z^6 + 9z^3 + 8 = 0$.
    (b) Siendo $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ los números complejos obtenidos en el apartado anterior, obtener detalladamente la forma cartesiana del número complejo:
    $$w = \left(\frac{w_1^2 w_2^3}{w_3}\right)\left(\frac{w_4^3 w_5^2}{w_6^5}\right)^3.$$
20. Cuestión de examen de junio de 2004 y junio de 2006:
    Encuentra los números complejos z tales que $\frac{3\pi}{2}$ es el argumento de $\frac{z+1}{z+2}$.
21. Cuestión de examen de septiembre de 2004:
    Obtén la forma cartesiana, el módulo, el argumento y el logaritmo complejo de los números complejos z que verifican la ecuación: $z^2 - z + 1 = 0$.
22. Cuestión de examen de septiembre de 2004:
    Obtén la forma cartesiana de los números complejos z que verifican la ecuación:
    $$2e^{\frac{i+1}{z}} - 1 + \sqrt{3}\, i = 0.$$
23. Cuestión de examen de junio de 2005:
    Obtener el módulo y el argumento de los números complejos z tales que $\dfrac{z+1}{z+2}$ es un número real positivo
24. Cuestión de examen de marzo de 2007:
    Calcula las soluciones de la ecuación
    $$z^2 - 2z + 2 = 0.$$
    Si z_1 y z_2 son las soluciones,
    (a) Calcula forma módulo argumento, trigonométrica y exponencial de z_1.
    (b) Calcula las raíces cuartas de z_1.
    (c) Calcula $z_1^{z_2}$ y el logaritmo neperiano de z_1.

Haz los cálculos sin usar expresiones decimales.

25. Cuestión de examen de junio de 2007:

    Calcula expresando los resultados en forma trigonométrica:

    (a) $\sqrt[3]{1+i}$

    (b) $(1-i)^i$

Sucesiones de números reales

26. Dígase cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:

    (a) Si una sucesión no tiene puntos de acumulación entonces no es convergente.

    (b) Existen sucesiones convergentes con más de un punto de acumulación.

    (c) Si una sucesión tiene un solo punto de acumulación, entonces es convergente.

    (d) Toda sucesión convergente tiene un punto de acumulación.

27. Demuestra usando la definición de sucesión convergente que si a_n converge a un número real a siendo $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt{a_n}$ coverge a $\sqrt{a}$.

28. Pon un ejemplo de una sucesión a_n convergente a un número real b y tal que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1.$$

29. Se sabe que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

    Pon un ejemplo para demostrar que el recíproco no es cierto.

30. Calcula $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n}}{L(\frac{n}{n-1})}$.

31. Calcula $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})...(1+\frac{n}{n})}$.

32. Sea la sucesión

$$a_1 = 3, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad si \quad n \geq 2$$

Demuestra que es convergente y calcula su límite.

33. Calcula $\lim\limits_{n\to+\infty} [1 + L(n^2 - 5n + 8) - L(n^2 + 3n - 9)]^{2n-7}$.

34. Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{Ln^2} + \frac{2}{Ln^2} + \cdots + \frac{n-1}{Ln^2} \right)$$

35. Cuestión de examen abril 2000:
Calcula el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{L(n!)}{L(n^n)}$$

36. Cuestión de examen abril 2000:
Define el concepto de valor de adherencia de una sucesión. ¿Cuáles son los valores de adherencia de una sucesión que contiene a todos los números racionales? Escribe una sucesión que contenga todos los números racionales.

37. Cuestión de examen junio 2000:
Escribe una sucesión que contenga todos los números racionales y calcula sus valores de adherencia.

38. Cuestión de examen marzo 2001:

Considera la sucesión de números reales definida por:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2 \quad n \in \mathbb{N}; x_1 > 0$$

(a) Suponiendo que x_n tiene como límite un número real, halla éste.

(b) Demuestra que x_n es una sucesión creciente.

(c) Determina para qué valores positivos de x_1 la sucesión x_n resulta convergente.

39. Cuestión de examen marzo 2002:

Calcula el límite de la sucesión

$$x_n = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}$$

40. Cuestión de examen de marzo de 2003:

Considera la sucesión a_n definida por recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_1 > 0$$

(a) Suponiendo que la sucesión tiene límite, hállalo.

(b) Demuestra que la sucesión es decreciente.

(c) Justifica que la sucesión a_n es convergente.

41. Cuestión de examen de junio de 2003:

(a) Define el concepto de valor de adherencia de una sucesión.

(b) Escribe una sucesión que contenga todos los números racionales.

(c) ¿Cuáles serían los valores de adherencia de una sucesión que contuviera a todos los números racionales?

(d) Escribe una sucesión que tenga dos valores de adherencia distintos.

42. Cuestión de examen de 2003:

Calcular detalladamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{1+n+2n^2} \right)^{\left(\frac{1+n^2}{1+n}\right)}$$

43. Cuestión de examen de junio de 2004:

Calcula detalladamente el valor del siguiente límite caso de que exista:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - n\cos^2\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)}{2 + \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)}.$$

44. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Estudia el límite de la sucesión $x_n = \frac{a^n}{n^k}$ en función de los valores de los parámetros a y n reales.

45. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Calcula detalladamente el valor del siguiente límite, caso de que exista:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Límites de funciones y continuidad

1. Estudia si son equivalentes:

   (a) $Tg(\pi/2 - x)$ y $\pi/2 - x$ cuando x converge a $\pi/2$.

   (b) $Tg(x)$ y $\frac{1}{\pi/2-x}$ cuando x coverge a $\pi/2$.

2. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{L(1+L(\frac{x^3+3}{x^3+1}))senx}{sen(\frac{1}{x})}$

3. ¿Puede existir una función real continua en todo $\mathbb{R}$ y tal que $f(x)$ vale 0 en todo punto $x \in (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$?

4. Cuestión de examen de febrero de 2006:

   Sean f, g dos funciones continuas en $\mathbb{R}$ y tal que $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}$. Demuestra que entonces $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Sea
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
   y $g(x) = x(1 - x^2)$. Estudia la continuidad de

   (a) $g \circ f$

   (b) $f \circ g$.

6. Prueba que toda ecuación polinómica $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ tiene alguna raíz si n es impar.

7. Estudia la continuidad de la función:
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

8. Estudia si la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $(1, \infty)$ y en $(1, 2)$.

9. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

   (a) $\text{sen}(x^2 + y^2)$ (b) $L(x, y)$ (c) $\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)}$ (d) $\arccos(\frac{x^2+y^2}{z^2})$

10. Estudia la existencia de los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^2y^4+(x-y^2)^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan x \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2}{y-1}$ (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\text{Ł}(x^2+y^2)$.

11. Calcula, si existen, el límite y los límites reiterados de las funciones siguientes en el punto $(0,0)$:

$$\text{(a) } \tfrac{x^2-y^4}{x^2+y^4} \quad \text{(b) } \tfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} \quad \text{(c) } y^2 \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})$$

12. Estudia la continuidad de la siguiente función y prolonga su definición para que sea continua en el punto $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\text{Ł}(1-x^2-y^2)}.$$

13. Cuestión de examen abril 2000:

(a) ¿Qué significa que $f(x)$ y $g(x)$ sean infinitésimos equivalentes en a?

(b) En el desarrollo del siguiente límite se comete un error. Encuentra cuál es ese error y explica por qué es un error. Resuelve el límite correctamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

14. Cuestión de examen junio 2000:
Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de $f(x)$ y de $f'(x)$.

15. Cuestión de examen de 2003:

Calcular detalladamente los siguientes límites:

(a) Calcular detalladamente el siguiente límite caso de que exista: $\displaystyle\lim_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}$

(b) Calcular detalladamente el siguiente límite caso de que exista: $\lim\limits_{n\to 2} \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

16. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Pon un ejemplo de cada una de las siguientes situaciones, razonando la respuesta.

    - Una función f no continua en un punto, tal que su valor absoluto $|f|$ sí lo es.
    - Una función f discontinua, otra función g discontinua de forma que la suma $f+g$ sea continua.
    - Una función f continua, otra función discontinua de forma que su producto $f \cdot g$ sea continua.

17. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Demuestra, enunciando todos los resultados teóricos que utilices, que la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ toma el valor 2 en algún punto interior al intervalo $[-2, 0]$

18. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Calcula detalladamente los siguientes límites caso de que existan:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x); \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}; \quad \lim_{x\to 1}\frac{e^{-x^2}}{x^2-1}; \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x^2}; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2-1}.$$

19. Cuestión de examen de febrero de 2006:

    Dada la función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \lambda e^{3x} + \frac{\mu}{x^3} & \text{si} & x < 0 \\ \gamma & \text{si} & x = 0 \\ \alpha + \beta Ln\,(x) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right\}$$

    determinar los valores que deben tomar los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ para que:

    a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$
    b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$
    c) f sea continua en $x = 0$

Cálculo Diferencial en $\mathbb{R}$

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones:

   (a) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   (a) Demuestra que es continua.

   (b) Halla su derivada y estudia la continuidad de esta.

3. Determina para las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^3 - x$:

   (a) La recta tangente a cada una de ellas en los puntos en que se cortan entre sí.

   (b) El ángulo que forman dichas rectas.

4. Calcula la recta tangente y normal a la función $f(x) = (1 + x)^{L(1+x)}$ en el punto $x = 0$.

5. Una señal se trasmite en un medio siguiendo la trayectoria de la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, siendo

   $$x(t) = t^2 \quad y(t) = t^4 \quad t \in (0, \infty)$$

   donde t es el tiempo:

   (a) ¿Qué velocidad instantánea lleva en $t = 1$? Determina la dirección del vector velocidad.

   (b) Si la trayectoria viniese dada por

   $$x(t) = t \quad y(t) = t^2 \quad t \in (0, \infty)$$

   ¿Qué diferencia existiría con el apartado anterior?

6. Halla la derivada segunda de y respecto de x siendo

   $$y = t^3 \quad x = L(t)$$

7. Demuestra que

   (a) $e^x = 1 + x$ tiene exactamente una solución real.

   (b) $e^x - 1 = 2x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

   (c) $x^2 - xsenx - cosx$ posee raíces reales. Determina cuántas.

   (d) $x^5 - 5x - 1$ posee raíces reales. Determina cuántas.

   (e) Todo polinomio de grado impar posee raíces reales.

8. Demuestra que $e^x > \frac{1}{1+x}$ si $x > 0$.

9. Demuestra mediante ejemplos que las tres hipótesis del teorema de Rolle son necesarias, es decir, busca ejemplos en dónde no se cumpla una de las hipótesis y falle el teorema.

10. Utilizando el teorema del valor medio y el que $\sqrt[3]{1728} = 12$, encuentra una aproximación de $\sqrt[3]{1730}$ con error menor que 10^{-3}.

11. Demuestra que $arctg(\frac{senx}{1+cosx}) = \frac{1}{2}x$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

12. Calcula estos límites:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - cos(ax)}{e^{bx} - cos(bx)} \quad b \neq 0$

    (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{cos(x)L(x-a)}{L(e^x - e^a)}$

13. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+1}$:

    (a) Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 de f en $x = 0$.

    (b) Calcula el valor aproximado de $\sqrt{1.02}$ usando el polinomio de Taylor de grado 2 de f y dando una estimación del error.

14. Obtén el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \frac{Lx}{x}$ en el punto $x = 1$.

15. Calcula usando desarrollos de Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg(x)}{sen(x) - x}$$

16. Calcula usando el teorema del valor medio

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}$$

17. Estudia los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = xe^x$.

18. Demuestra que $sen(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$.

19. Sea f tal que $f`(x) = \frac{x^3(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{1+x^2}$. Halla los extremos relativos de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

20. Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$:
    (a) Calcula las asíntotas.
    (b) Estudia la derivabilidad.
    (c) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y concavidad.
    (d) Determina los máximos y los mínimos.
    (e) Dibuja la gráfica.

21. Repite el ejercicio anterior con $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$

22. Cuestión de examen abril 2000:
    (a) ¿Qué significa que $f(x)$ y $g(x)$ sean infinitésimos equivalentes en a?
    (b) En el desarrollo del siguiente límite se comete un error. Encuentra cuál es ese error y explica por qué es un error. Resuelve el límite correctamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

23. Cuestión de examen abril 2000:

    Estudia la derivabilidad y calcula la función derivada de:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ -\sqrt{|x|} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

24. Cuestión de examen abril 2000:

    (a) Definición de función cóncava en un punto a.

    (b) Enuncia y demuestra la condición que deben cumplir las derivadas una función en un punto para que podamos decir que es una función cóncava en ese punto.

    (c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad de la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$$

25. Cuestión de examen junio de 2000:

    (a) Enuncia el teorema de Rolle.

    (b) Dada la función $f(x) = cos(x)\frac{e^x+e^{-x}}{2} + 1$, demuestra que:

        i. $f(x)$ tiene alguna raíz real.

        ii. $f(x)$ tiene infinitas raíces reales.

26. Cuestión de examen junio de 2000:

    (a) ¿Es cierto que toda función derivable en un punto $a \in \mathbb{R}$ es continua en a? Si la respuesta es afirmativa, demuéstrese. Si la repuesta es negativa, póngase un ejemplo.

    (b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

    Estudia la continuidad de $f(x)$ y de $f'(x)$.

27. Cuestión de examen marzo 2001:

    (a) Completa los huecos en el enunciado siguiente y demuestra el teorema:

    "Teorema de Rolle: Si f es una función   en el intervalo $[a, b]$, f es   en (a, b) y además   , entonces existe un punto $c \in$ en el que   ."

(b) Demuestra mediante ejemplos que las tres hipótesis del teorema de Rolle son necesarias, es decir, busca tres ejemplos tal que en cada uno no se cumpla una de las hipótesis y falle el teorema.

28. Cuestión de examen marzo 2001:

    Dada una función $f(x)$ definida en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$, derivable m veces en a:

    (a) ¿Cómo se calcula el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en a? Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 para la función $f(x) = L(cosx)$ en el punto $a = 0$.

    (b) ¿Qué característica tiene el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en a que no tenga ningún otro polinomio?

    (c) ¿Qué problemas podemos resolver usando el polinomio de Taylor de una función $f(x)$?

29. Cuestión de examen marzo 2001:

    Dada la curva:

$$x = t^2$$
$$y = \frac{1}{t}$$

    calcula la ecuación de la recta tangente a la curva cuando $t = 1$ y los puntos donde la recta tangente es horizontal o vertical.

30. Cuestión de examen de junio de 2001.

    Dada la función $f(x) = e^x - 3x^2$

    (a) Localiza un intervalo que contenga una solución de $f(x) = 0$. Enuncia el resultado teórico que utilices.

    (b) Encuentra, aplicando el método del punto fijo con cuatro iteraciones, una aproximación de un valor donde se anule la derivada de $f(x)$ y comprueba si es un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

    (c) Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 para $f(x)$ en el punto 0 y utilízalo para calcular una estimación de e^1 y del error correspondiente.

31. Cuestión de examen septiembre de 2001:

    Determina el número de raíces reales de la ecuación:

    $$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5 = 0.$$

32. Cuestión de examen de marzo de 2002:

    Demuestra que la ecuación $e^x - 1 = 2x$ tiene exactamente dos soluciones reales y localiza dos intervalos disjuntos tales que cada uno contenga a una raíz. Enuncia rigurosamente los resultados teóricos que utilices.

33. Cuestión de examen de marzo de 2002:

    (a) Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para la función $L(\sqrt{1+x})$ en el punto 0. Calcula también el término complementario o error.

    (b) ¿Qué característica tiene el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en a que no tenga ningún otro polinomio? ¿Qué problemas se pueden resolver usando polinomios de Taylor?

34. Cuestión de examen de marzo de 2002:

    Define qué significa que una función sea cóncava en un punto a. Enuncia y demuestra una condición necesaria y suficiente que tienen que cumplir las derivadas para que la función sea cóncava en el punto a.

35. Cuestión de examen de junio de 2002:

    De la función $f(x) = xe^{1/x}$:

    (a) Calcula el dominio y estudia la continuidad y derivabilidad.

    (b) Calcula las asíntotas.

    (c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    (d) Determina los intervalos de concavidad y convexidad así como los máximos y mínimos relativos.

36. Cuestión de examen de septiembre de 2002:

    Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = 2\sqrt[3]{1+x}$ en el punto $a = 0$. Haciendo uso de dicho polinomio, calcula un valor aproximado de $\sqrt[3]{1'2}$, dando una acotación del error.

37. Cuestión de examen de marzo de 2003:

    Sea $f(x)$ una función n veces diferenciable en un punto $a \in \mathbb{R}$. Completa lo siguiente:

    - El polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n en a es el único polinomio ...
    - El polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n en a se utiliza como ...

38. Cuestión de examen de marzo de 2003:

    Calcula un valor aproximado de sen(1) con un error menor que 10^{-6} sin usar la calculadora.

39. Cuestión de examen de marzo de 2003:

    Dada la función $f(x) = (4 - x^2)\sqrt{x^2 - 1}$, estudia:

    (a) dominio, regiones de existencia y puntos de corte con los ejes,

    (b) asíntotas,

    (c) crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos,

    (d) concavidad, convexidad y puntos de inflexión,

    (e) continuidad, derivabilidad y gráfica de la función.

40. Cuestión de examen de junio de 2003:

    (a) Determinar el número exacto de raíces de la ecuación: $3+\cos x = 3x$ y separarlas en intervalos disjuntos de longitud 1. Enunciar los resultados teóricos de los que se haga uso.

    (b) Probar que $\ln(1 + x) > \dfrac{x}{1 + x}$ si $x > 0$.

41. Cuestión de examen de junio de 2003:

    (a) Calcula el polinomio de Taylor para $f(x) = Ln(x)$ en el punto 1 de grado 6.

    (b) Estudia la continuidad y la derivabilidad y calcula la función derivada de:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

42. Cuestión de examen de junio de 2003:

    Dada la función $f(x) = -xe^{1/x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Estudiar:

    (a) Continuidad y derivabilidad.
    (b) Asíntotas.
    (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos.
    (d) Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
    (e) Representación gráfica.

43. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 de $\tan x$ en el punto 0.

44. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Estudia la continuidad y la derivabilidad y calcula la función derivada de:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

45. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Estudiar los extremos de la función: $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 2x$.

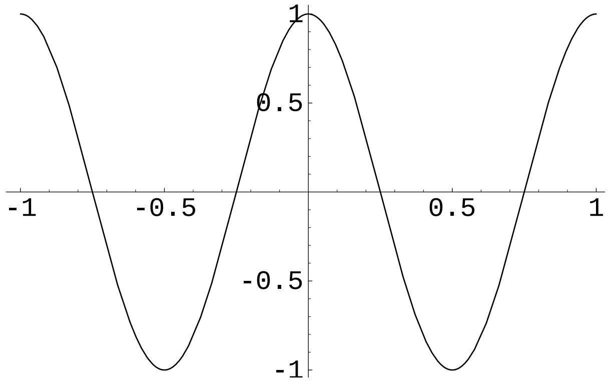
    Se sugiere el siguiente proceso:

    (a) Localizar los puntos críticos de dicha función, esto es, las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$, para ello se propone la utilización de métodos de localización y separación de raíces de una ecuación.
    (b) Una vez localizados los puntos críticos de dicha función, estudiar para cada uno de ellos, si se trata o no de un extremo y, en caso afirmativo, estudiar de qué tipo de extremo se trata (máximo o mínimo).

46. Cuestión de examen de mayo de 2004:

47. De una función $f(x)$ se sabe que la gráfica de su derivada es la siguiente:

    Responde a las siguientes cuestiones acerca de $f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ justificando la respuesta: *a)* número máximo de raíces; *b)* intervalos de



crecimiento o decrecimiento; *c)* máximos o mínimos; *d)* intervalos de convexidad y concavidad; *e)* puntos de inflexión.

48. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Dada la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, estudia:

    - Intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.
    - Intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

49. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Estudia detalladamente las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^{-x^2}}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

    Haz un esbozo de su representación gráfica.

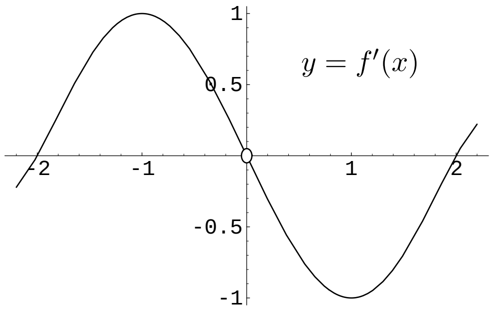
50. Cuestión de examen de septiembre de 2004:

    (a) Calcula detalladamente el valor del siguiente límite, caso de que exista: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

    (b) Estudia detalladamente la continuidad y derivabilidad de la función: $f(x) = |x|$.

51. Cuestión de examen de septiembre de 2004:

    Dada la representación gráfica de la función $f'(x)$ (derivada de la función $f(x)$):



    Estudia, razonada y detalladamente, la continuidad, derivabilidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión de la función $f(x)$.

52. Cuestión de examen de mayo de 2005:

    Dada la función $f(x) = L(1 - x^2)$:

    (a) Calcula su dominio, asíntotas y simetría.
    (b) Determina los intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.
    (c) Determina los intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

53. Cuestión de examen de mayo de 2005:

    Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto 0 de la función $f(x) = L(1-x^2)$ y utilízalo para calcular un valor aproximado de $L(0.99)$.

54. Cuestión de examen de junio de 2005:

    Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, estudia:

    (a) Dominio de definición.
    (b) Asíntotas.
    (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos.

(d) Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
(e) Representación gráfica.

55. Cuestión de examen de junio de 2005:

    Estudia el crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, máximos, mínimos, puntos de inflexión y asíntotas de la función:

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

56. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Sabiendo que f es una función derivable en todo punto y que $f'(a) \neq 0$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{p \to 0} \frac{p}{f(a) - f(a+2p)}$$

    Indicación: utiliza la definición de derivada de una función en un punto.

57. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$$

58. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Dada la función $f(x) = L(1-x^2)$. Estudia:

    (a) Dominio de definición.
    (b) Asíntotas.
    (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos.
    (d) Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
    (e) Representación gráfica.

59. Cuestión de examen de febrero de 2006:

    Estudia el crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión:

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

60. Cuestión de examen de febrero de 2006:

    Enuncia el teorema de Rolle. Demuestra mediante ejemplos que las tres hipótesis del teorema de Rolle son necesarias, es decir, busca ejemplos en dónde no se cumpla una de las hipótesis y falle el teorema.

61. Cuestión de examen de febrero de 2006:

    Dada la función
    $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{6-x^2}{2} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{2}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{array} \right\}$$
    estudiar si es posible aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 3]$, y en caso afirmativo, aplicar dicho teorema.

62. Cuestión de examen de junio de 2006:

    Estudia detalladamente las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos de la función:
    $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^{-x^2}}{x^2-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
    Haz un esbozo de su representación gráfica.

63. Cuestión de examen de marzo de 2007:

    Dada la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} xe^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$, estudia

    (a) Dominio, puntos de corte con los ejes, continuidad y derivabilidad.

    (b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

    (c) Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

    (d) Asíntotas.

    (e) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 2$.

64. Cuestión de examen de junio de 2007:

    Sea
    $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x\text{Ł}|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. Si es posible, pon un ejemplo de una función derivable en un punto $a \in \mathbb{R}$ que no sea continua en a y otro ejemplo de una función continua en un $a \in \mathbb{R}$ que no sea derivable en a. Razona tu respuesta.

(b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos de la función $f(x)$.

65. Cuestión de examen de septiembre de 2006:

Dada la función $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$, determina:

(a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

(b) Intervalos de convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.

(c) Asíntotas.

66. Cuestión de examen de septiembre de 2007:

Estudia el crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, máximos, mínimos, puntos de inflexión y asíntotas de la función:

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$

1. Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$
   (b) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, definida en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$
   (c) $f(x,y) = \operatorname{atan} \frac{x+y}{1-xy}$, definida en los puntos $xy \neq 1$.
2. Calcula las derivadas direccionales en $(0,0)$ de las siguientes funciones:
   (a) $f(x,y) = x^2 - x^4y^3$
   (b) $f(x,y,z) = e^{xyz}$
   (c) $f(x,y) = x^2\cos(xy) + \mathrm{L}(y^2)$
   (d) $f(x,y) = |x-y|$
   (e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2+z^3}{y} & \text{si } y \neq 0. \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$
3. Estudia si son diferenciables y calcula la diferencial de
   (a) $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$ en $(0,0)$
   (b) $f(x,y,z) = xyz$ en $(1,0,1)$
   (c) $f(x,y) = (x+y, x-y)$ en $(1,-1)$
   (d) $f(x,y,z) = (\cos(xy), \cos(xz))$ en $(0,0,0)$
   (e) $f(x,y) = (e^x, e^y, e^{xy})$ en $(0,0)$
   (f) $f(x,y,z) = (z,y,x)$ en $(0,1,1)$.
4. Considérese la función la función definida así

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Demuestra que las derivadas parciales en $(0,0)$ existen y calcula su valor.
   (b) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$.?
   (c) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

(d) Halla la derivada direccional $D_\theta f(0,0)$ para cada dirección θ.

5. Demuestra que la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en $(0,0)$ pero no es diferenciable en el ese punto.

6. Calcula la derivada de las funciones f, en los puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ siguiendo la dirección de $\vec{v}$:

   (a) $f(x,y,z) = x^2 + z^2 + xyz$, $\vec{a} = (0,0,0)$, $\vec{b} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1,-1,2)$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$, $\vec{a} = (0,0)$, $\vec{b}(-1,1)$, $\vec{v} = (1,2)$.

7. Halla el vector gradiente en un punto genérico y en otro concreto que tú elijas de las siguientes funciones escalares:

   (a) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x$

   (b) $f(x,y) = e^x \cos y$

   (c) $f(x,y,z) = \mathrm{L}(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. Halla la matriz jacobiana en el punto $\vec{a}$ de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $\quad \vec{a} = (1,2)$.

   (b) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $\quad \vec{a} = (\pi, -\pi/4)$.

   (c) $f(x,y,z) = z^2 e^x \cos y$, $\quad \vec{a} = (0, \pi/2, -1)$.

   (d) $f(x) = (e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x, x^2)$, $\quad \vec{a} = \pi/6$.

   (e) $f(x,y,z,t) = (\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2 + y^2 + z^2 - 9t^2)$, $\quad \vec{a} = (1/2, 1/2, 1/2, 3)$.

9. Siendo $u = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, calcula la derivada de u respecto de t

   (a) En el caso general.

   (b) $u = e^{xy}$, $x = \cos(t)$, $y = \operatorname{sen}(t)$.

10. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ las siguientes funciones

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(2x+y)) \qquad g(u,v,w) = (u+2v^2+3v^3, 2v-u^2).$$

Halla las matrices jacobianas de f, de g y de $f \circ g$ en el punto $(1,-1,1)$.

11. Halla la ecuación de los planos tangentes a las gráficas de las funciones:

    (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

    (b) $g(x,y) = x^2 + y^2$, en el punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

12. Consideremos la superficie cuyos puntos son de la forma

$$s(u,v) = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u),$$

con $u, v \in \mathbb{R}$. Halla la ecuación del plano tangente en el punto $s(\pi/3, \pi/3)$ a dicha superficie.

13. Halla la ecuación de la recta tangente a las superficies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1,1,1)$.

14. Calcula las derivadas direccionales de las funciones:

    (a) $f(x,y,z) = 3x - 5y + 2z$ en el punto $(2,2,1)$ en la dirección normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

    (b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en la dirección de la normal exterior en dicho punto.

15. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

16. Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el punto $(0,0)$ de las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y) = xe^{x+y}$

    (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$

    (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

17. Calcula la matriz hessiana en el punto $(0,0)$ de las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y,z) = x^3y^2 - x^2z^3 + y^3z^2$

    (b) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$

18. Halla los puntos críticos y determina cúales son máximos o mínimos locales o puntos de silla:

    (a) $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$

    (b) $f(x,y) = xye^{-3x-2y}$

    (c) $f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

    (d) $f(x,y) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

19. Calcula la mínima distancia de los puntos de la superficie $x^2+yz+y=5$ al origen de coordenadas.

20. Cuestión de examen de febrero de 2006:

    Estudia si la función $f(x,y)$ es continua y diferenciable en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

21. Cuestión de examen de junio de 2006:

    Halla los puntos críticos y determina cúales son máximos o mínimos locales o puntos de silla de la siguiente función

$$f(x,y) = xye^{-3x-2y}$$

22. Cuestión de examen de junio de 2006:

    Estudia la continuidad y la existencia de derivadas parciales en el punto $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

23. Cuestión de examen de junio de 2006:

    Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada:

    $$\Phi(u,v) = (4u,\ 3u^2 + v,\ v^2 + 5)$$

    en el punto $(0,1,6)$.

24. Cuestión de examen de septiembre de 2006:

    Dada la función $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

    (a) Determina su dominio y el límite de la función en los puntos que no son del dominio.

    (b) Estudia si es diferenciable en su dominio.

    (c) Calcula el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$.

25. Cuestión de examen de marzo de 2007:

    Dada la función $f(x,y) = 3x^4 - xy + y^3$, estudia

    (a) Puntos críticos, máximos y mínimos.

    (b) Derivada de la función en el punto $(1,2)$ según la dirección que forma con el eje X un ángulo de 60^o.

    (c) El plano tangente a la función en el punto $(1,2)$.

26. Cuestión de examen de junio de 2007:

    Usando la definición mediante límites, calcula las derivadas parciales y la derivada direccional en la dirección $\frac{\pi}{6}$ en el punto $(0,0)$ de la función

    $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^5}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    A la vista de los resultados anteriores, razona si f es diferenciable en $(0,0)$.

27. Cuestión de examen de septiembre de 2007:

    Justifica que la función $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ en el punto $M = (2/3, -4/3)$ tiene derivada igual a 0 en cualquier dirección.

Cálculo Integral

1. Calcula:

   $a.\int tg^2(x)dx$ $b.\int \frac{e^{arcsenx}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $c.\int \frac{x^3}{2+x^8}dx$ $d.\int \frac{1}{xLx}dx$

   $e.\int e^x cos(x)dx$ $f.\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx$ $g.\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}dx$ $h.\int \frac{1}{1+2senx}dx$

   $i.\int \frac{senx}{1+cosx+cos^2x}dx$ $j.\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$ $k.\int \frac{Lx}{x^3}$ $l.\int x^2 Lx$

   $m.\int \frac{x^3-2x^2+4x-6}{x^2-3x+2}$ $n.\int \frac{5x-8}{(x-3)(x^2+1)}$ $o.\int \sqrt{x^2-2x}$ $p.\int \frac{dx}{senx+cosx+1}$

2. Demuestra que $\left|\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{x+1}dx\right| \le L2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   (idea: probar que $0 < \frac{e^{-nx^2}}{x+1} \le \frac{1}{x+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (0,1)$).

3. Estudia la integrabilidad de

$$h(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ |x| & \text{si } 0 \le x < 2 \\ |x-3| & \text{si } 2 \le x \le 7 \end{cases}$$

4. Halla el valor de $\mu \in \mathbb{R}$ que cumple que $\int_1^3 f(x)dx = 2\mu$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

   ¿Existe algún punto $c \in [1,3]$ tal que $f(c) = \mu$? ¿Contradice esto el teorema del valor medio del cálculo integral?

5. Sea $F(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} e^{-t^2}dx$. Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ (Aplica el teorema del valor medio).

6. Estudia la derivabilidad de $F(x) = \int_0^x h(t)dt$ siendo

$$h(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } t < 1 \\ t^2 & \text{si } 1 \le t < 2 \\ Lt & \text{si } 2 \le t \end{cases}$$

   y calcula $F'(x)$ donde sea posible.

7. Calcula la derivada de:

$$(a)F(x) = \int_0^{x^2} sen(t^2)dt \quad (b)K(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}dt$$

(Idea: Estudia $F(x)$ y $K(x)$ cada una como composición de dos funciones y aplica la regla de la cadena para derivar una composición).

8. Calcula el siguiente límite aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}dt}{x^3}$$

9. Calcula:

$$(a)\int_0^{\infty} e^{-3x}dx \quad (b)\int_0^{\infty} e^{3x}dx \quad (c)\int_0^{\infty} cos(x)dx$$

10. Estudia la convergencia de las siguientes integrales:

$$(a)\int_5^{\infty} \frac{1}{Lx-1}dx \qquad (b)\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+5}dx$$

$$(c)\int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+6}dx \qquad (d)\int_1^{2} \frac{x+1}{4-x^2}dx$$

11. Estudiar el valor principal de Cauchy para las integrales:

$$(a)\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}dx \qquad (b)\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$$

12. Estudiar la convergencia o divergencia de la integral $\int_0^1 x^a e^{-x}dx$ según los valores de a.

13. Calcula el área limitada por las gráficas $y = |x^2 - 4x + 3|, y = 0, x = 0, x = 4$.

14. Calcula el área determinada por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ y su asíntota.

15. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ y $g(x) = \frac{x-1}{8x}$ determina el área de la región limitada por sus gráficas y las rectas $y = 0$ y $x = 0$.

16. Calcula el área entre la función $f(x) = Lx$ y las rectas $x = 0, y = 0, x = 1$.

17. (a) Representa la curva $\rho = cos^2\theta$.
    (b) Halla el área interior a la circunferencia de centro el origen y radio 1 y exterior a la curva $\rho = cos^2\theta$.

18. Halla la longitud de las curvas:
    (a)
    $$y = x^2 - 2x + 5.$$
    (b)
    $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$
    (pon la curva en forma paramétrica).
    (c) $\rho = e^\theta \quad \theta \in (-\infty, 0)$.

19. Calcula el volumen de un cono de altura b y base un círculo de radio a.

20. Cuestión de examen junio 2000:
    (a) Pon un ejemplo de una función estrictamente positiva que tenga integral convergente en el intervalo $[3, \infty]$ y un ejemplo de una función no acotada que tenga integral convergente en el intervalo $[1, 2]$. Justifica tus respuestas.
    (b) Calcula el área de la región determinada por la parte positiva del eje horizontal, la parte positiva del eje vertical y la función L^2x.

21. Cuestión de examen junio de 2000:

    Estudia si el área que hay entre la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$, la recta $y = 0$ y la región $x \leq -1$ es finita o infinita sin calcularla.

22. Cuestión de examen septiembre de 2000:

    Calcula el área que hay entre la función $f(x) = 3^{\sqrt{2x+1}}$ y las rectas $x = 0, x = 3/2, y = 0$.

23. Cuestión de examen de junio de 2001:

    Calcula el volumen de una bóveda cuyas secciones al cortar por planos horizontales son cuadradas y cuyas sección al cortar por el plano YZ es un cuadrante de círculo de radio a.

24. Cuestión de examen de septiembre de 2001:

    Estudia la convergencia de $\int_0^1 x^a e^{-x} dx$ para $a = 1, a = -1, a = 1/2$.

25. Cuestión de examen de junio de 2002:

    Calcula el área de la región definida por las curvas $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{4}{x\sqrt{x}}$ en la parte positiva del eje X.

26. Cuestión de examen de junio de 2002:

    (a) ¿Qué condiciones debe de cumplir $f(t)$ para que $\int_0^x f(t)dt$ sea continua? ¿Y para que sea derivable?

    (b) Calcula el área determinada por la función $f(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)+sen^2(x)}$ y los ejes X e Y en el intervalo $[0, 1]$.

27. Cuestión de examen de junio de 2002:

    Calcula la integral de la función $f(x) = e^x cos(x)$ en el intervalo $[-\infty, 0]$.

28. Cuestión de examen de septiembre de 2002:

    Hallar el área de la región del plano comprendida entre la curva

    $$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

    y su asíntota.

29. Cuestión de examen de mayo de 2003:

    (a) Calcula integrando por partes: $\int \text{arcsen}(x)dx$.

    (b) Integra aplicando el cambio de variable $t = \tan(x)$: $\int \frac{1}{1+\tan(x)}dx$.

    (c) Calcula el área que determinan la curvas: $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ $\qquad y = x$ $\quad x = 1$.

30. Cuestión de examen de junio de 2003:

    Calcula el valor de
$$\int_1^\infty \frac{L(1+x^2)}{x^2}dx$$

31. Cuestión de examen de junio de 2003:

    Calcula el área que determinan la curvas: $y = xe^x$, $y = x$, $x = 2$.

32. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Resuelve la siguiente integral mediante cambio de variable: $\int_0^{L2} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

33. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Presenta la resolución de un ejemplo de cada uno de los siguientes casos:

    (a) Una función cuya integral sea convergente a 3 en un intervalo no acotado.

    (b) Una función no acotada en un intervalo y cuya integral sea convergente a 3 en dicho intervalo.

34. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Calcula el área definida por la función $f(x) = \frac{2}{x^2+4x+16}$ y la recta $y = 0$.

35. Cuestión de examen de mayo de 2004:

    Respecto a la función $\frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, \infty)$, calcula:

    (a) El área definida por la función.

    (b) El volumen de revolución generado al girar la función alrededor del eje x.

36. Cuestión de septiembre de 2004:

    Dada la función $f(x) = \frac{3x}{(x-1)(\sqrt{2-x})}$, calcula el volumen de la figura que se genera al girar $f(x)$ alrededor del eje X entre los valores $x = 1$ y $x = 2$.

37. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Calcula

    - $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
    - $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+1}dx$
    - $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+14}dx$

38. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Dada la función $f(x) = \frac{3x}{(x-1)(\sqrt{2-x})}$, calcula el volumen de la figura que se genera al girar $f(x)$ alrededor del eje X entre los valores $x = 1$ y $x = 2$.

39. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Dada la función $f(x) = \frac{5x^2}{x^2-5x-6}$,

    (a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

    (b) Calcula el área determinada por la función y el eje X en el intervalo $(-\infty, -1]$.

40. Cuestión de examen de febrero de 2005 y febrero de 2006:

    Se define la función
    $$f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+4} dt$$

    (a) Determina una expresión explícita de $f(x)$ en donde no aparezca el símbolo de la integral.

    (b) Sin hacer uso del apartado anterior, calcula $f'(x)$. Enuncia el resultado teórico que utilices.

    (c) Estudia la convergencia de
    $$\int_0^\infty \frac{1}{t^2+4} dt$$

41. Cuestión de examen de mayo de 2005:

    Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$, calcula el volumen generado al girar la función alrededor del eje X en su dominio de definición.

42. Cuestión de examen de junio de 2005:

    Estudia la convergencia de las siguientes integrales:
    $$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(2x) dx \quad \int_0^\infty \frac{1}{3x^2-2x+2} dx \quad \int_0^\infty xe^{-x} dx$$

43. Cuestión de examen de junio de 2005:

    - Completa el siguiente enunciado:
      Si $f(t)$ es una función integrable en $[a,b]$ entonces $\int_a^x f(t)dt$ es para todo $x \in [a,b]$. Si $f(t)$ es en $[a,b]$ entonces $\int_a^x f(t)dt$ es para todo $x \in [a,b]$ y $= f(x)$.

44. Cuestión de examen de junio de 2005 y febrero de 2007:

    Determina si las siguientes integrales son convergentes o no:

    (a) $\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}dx$
    (b) $\int_{-\infty}^0 5^x dx$
    (c) $\int_0^\infty \tan^2(x)dx$
    (d) $\int_0^1 \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}dx$
    (e) $\int_0^\infty x\cos(x)dx$

45. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Dada la función $f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$, justifica que:

    (a) $f(x)$ es derivable para todo $x \in (0,1)$.
    (b) $f(x)$ es creciente para todo $x \in (0,1)$.
    (c) $f(x) = 1$ tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$.

    Enuncia cualquier resultado teórico que utilices en la resolución de este ejercicio.

46. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Determina si las siguientes integrales son convergentes o no :

    - $\int_0^{e^2} L(x)dx$
    - $\int_{-\infty}^{\infty} x2^{-x^2}dx$
    - $\int_0^1 \frac{1}{x^2(x+1)}dx$

47. Cuestión de examen de junio de 2006:

    Hallar el área de la región del plano comprendida entre la curva
    $$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$
    y su asíntota.

48. Calcula las siguientes integrales:

    (a) $\displaystyle\int_S\int x\ dx\ dy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las curvas $y = x^2 + x$, $y = 2x^2 - 2$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

    (b) $\displaystyle\int_S\int (x + y)\ dx\ dy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las rectas $y = 2$, $y = 1$, $x = 3y$ y $x = y$.

    (c) $\displaystyle\int_S\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx\ dy$, siendo S el recinto del primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

    (d) $\displaystyle\int_S\int xe^{\frac{-x^2}{y}}\ dx\ dy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = 1$, $y = 2$ y $x = 0$.

    (e) $\displaystyle\int_S\int \sqrt{2ax - x^2 - y^2}\ dx\ dy$, hallando su expresión en un nuevo sistema de coordenadas dado por $x = a + u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

    (f) $\displaystyle\int_S\int \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ dx\ dy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por el círculo de radio 1 y centro $(0, 0)$.

    (g) $\displaystyle\int_S\int e^{\frac{y-x}{y+x}}\ dx\ dy$, siendo S el triángulo de $\mathbb{R}^2$ limitado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$.

    (h) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\ dx\ dy$.

    (i) $\displaystyle\int_3^4\int_1^2 \frac{1}{(x + y)^2}\ dx\ dy$.

    (j) $\displaystyle\int_S\int \frac{x^2}{y^2}\ dx\ dy$, siendo S el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por la curva $y = \frac{1}{x}$ y las rectas $x = y$, $x = 1$ y $x = 2$.

(k) $\displaystyle\int_S\int y\ dx\ dy$, siendo S el semicírculo de diámetro a y centro en el punto $C = (\frac{a}{2}, 0)$.

(l) $\displaystyle\int_S\int (x^2 + y^2)\ dx\ dy$, siendo S el recinto limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$.

49. Calcula las siguientes áreas:

(a) Área de la región del plano limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = 2x$, $x = 1$.

(b) Área de la región del plano situada por encima del eje OX y limitado por dicho eje, por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x + y = 3$.

(c) Área de la región del plano situada en el primer cuadrante y limitada por la curva $y^2 = x^3$ y la bisectriz del primer cuadrante $x = y$.

(d) Área exterior al círculo $\rho = 2$ e interior a la curva $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

(e) Área limitada por la circunferencia $\rho = 2$ y la recta $\rho\cos\theta = 1$.

(f) Área limitada por $(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$.

(g) Área limitada por las parábolas $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

(h) Área de la superficie del cilindro $x^2+z^2 = a^2$ cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y comprendida entre los plano OXZ y OYZ.

(i) Área del paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ limitado por el plano $z = 2$.

(j) Área del paraboloide $z = \frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}$ limitada por el cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$.

(k) Área de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 - ay = 0$ limitada por el plano $= OXY$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(l) Área de la parte de la superficie del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ comprendida entre el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$.

50. Calcula los siguientes volúmenes:

(a) Volumen en el primer octante comprendido entre el plano OXY, el plano $z = x + y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

(b) Volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, el plano OXY y el plano $y = 1$.

(c) Volumen limitado por las superficies $x^2 + 4y^2 = z$, el plano OXY y lateralmente por $y = x^2$ y $x = y^2$.

(d) Volumen limitado por las superficies $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$ y $z = 0$.

51. Cuestión de examen de junio de 2006:

    Calcula el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, el plano OXY y el plano $y = 1$.

52. Cuestión de examen de junio de 2006:

    Calcula la integral de la función $f(x, y) = x + 1$ en el recinto limitado por las curvas $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = x^2$.

53. Cuestión de examen de septiembre de 2006:

    Calcula el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$ y $z = 0$.

54. Cuestión de examen de febrero de 2007

    Calcula la integral de $f(x, y) = 1$ en el recinto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y \leq 1\}$$

55. Cuestión de examen de junio de 2007:

    Calcula el área de la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

56. Cuestión de examen de junio de 2007:

    Calcula el valor de

$$\int_1^\infty \frac{L(1 + x^2)}{x^2} dx$$

57. Cuestión de examen de junio de 2007:

    Calcula el valor de

$$\int \int_S e^{x^2} dxdy$$

siendo S el recinto limitado por el eje X y las rectas $y = \frac{1}{2}x$ y $x = 2$.

58. Cuestión de examen de septiembre de 2007:

    Calcula el área determinada por las curvas

$$x^{1/2} + y^{1/2} = 1 \qquad x + y = 1$$

Series numéricas y series de funciones

1. Para la serie $2/3 + 2/15 + 2/35 + ...$ calcula las cinco primeras sumas parciales, el término general de la sucesión de sumas parciales y la suma total de la serie si es convergente.

2. Determina el carácter de las series:

   (a) $2/10 + 2/100 + 2/1000, ...$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{3n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-0,2)^n$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(5/3)^n$

   (e) $-5/2 - 5/4 - 5/8 - 5/16, ...$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1/3)^{n-1}n$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2n^5-1}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

   (i) $1 + 2/3 + 3/9 + 4/27 + ...$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n 2^n}$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n3^n}$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3}$

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^4}{n^4+1}$

   (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3Ln}$

   (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{n^3}$

   (p) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} + 2)^n$

   (q) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3})$

   (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n L(n+1)}{n+1}$

   (s) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$

   (t) $\sum_{n=1}^{\infty}(Ln)^p$

3. Se consideran las sucesiones del funciones f_n y g_n definidas así:

(a)
$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

(b)
$$g_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ n(x - 1/2) + 1/2 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Estudia su convergencia puntual.

4. Sea la sucesión de funciones
$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$
¿Es continua su función límite?

5. Sea la sucesión de funciones
$$f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n}.$$
   (a) Calcula su límite.
   (b) Comprueba si conciden la derivada del límite y el límite de las derivadas en el punto $x = 0$.

6. Sea la sucesión de funciones
$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$
   (a) Calcula la función límite.
   (b) Comprueba si
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

7. Calcula el intervalo de convergencia y la convergencia en los extremos de dicho intervalo de:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

8. Sabiendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, calcula la suma de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2-1}{(n+1)!}$$

siguiendo estos pasos:

(a) Calcula el radio de convergencia de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2-1}{(n+1)!}x^n$

(b) Calcula A, B, C tal que

$$\frac{3n^2-2}{(n+1)!} = \frac{A}{(n+1)!} + \frac{B}{(n)!} + \frac{C}{(n-1)!}.$$

(c) Calcula la suma de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{Ax^n}{(n+1)!}$,$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{Bx^n}{n!}$,y de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{Cx^n}{(n-1)!}$.

9. (a) Demuestra que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}x^n$$

converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$.

(b) Siendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}x^n$ calcula

$$\int_0^x f(x)$$

siendo $x \in [0,1]$.

(c) Demuestra que $f(x) = xe^x + e^x$ y calcula la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

10. (a) Comprueba que la serie de Taylor para la función $f(x) = sen^2 x$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.$$

(b) ¿Es sen^2x analítica en el intervalo $(-1,1)$?

11. Justifica si son ciertas o falsas las siguientes cuestiones:

(a) Si $f(x)$ es una función impar entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(b) Si $f(x)$ es una función par entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(c) Si $f(x)$ es una función periódica de periodo $2l$ entonces $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_a^{a+2l} \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(d) Si $f(x)$ es impar entonces $f(x)cos(nx)$ es impar y $f(x)sen(nx)$ es par.

(e) Si $f(x)$ es par entonces $f(x)cos(nx)$ es par y $f(x)sen(nx)$ es impar.

(f) Si $f(x)$ es periódica de periodo 2π entonces $f(x)cos(nx)$ y $f(x)sen(nx)$ también son periódicas de periodo 2π.

(g) Si $f(x)$ es periódica de periodo $2l$ entonces $f(x)cos(n\frac{\pi}{l}x)$ y $f(x)sen(n\frac{\pi}{l}x)$ también son periódicas de periodo $2l$.

12. Calcula los desarrollos en serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas:

(a)
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = x^2 \quad \text{si } -\pi \leq x \leq \pi$$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

(d)
$$f(x) = x \quad \text{si } x \in [2\pi].$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

13. Dada la función $f(x)$ de la que se sabe que es periódica de periodo 2π, calcula su serie de Fourier de tipo seno sabiendo que $f(x) = x$ para todo $x \in [0, \pi]$.

14. Cuestión de examen junio 2000:

    (a) Define serie convergente y serie absolutamente convergente y pon un ejemplo de una serie que sea convergente pero que no sea absolutamente convergente.

    (b) Dada la serie de potencias

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+\sqrt{n}}$$

    calcula el intervalo de convergencia y la convergencia en los extremos de dicho intervalo.

15. Cuestión de examen de junio de 2000:

    (a) Dada una serie de funciones, ¿cuál es la condición que permite asegurar que la integral de la serie es la serie de las integrales?

    (b) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^3}$. Justifica que

    $$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ...).$$

16. Cuestión de examen de junio de 2000:

    (a) Explica por qué se utiliza el desarrollo en serie con los coeficientes de Fourier y no con otros coeficientes cuando se quiere aproximar una función periódica por un polinomio trigonométrico.

    (b) Obtén el desarrollo en serie de Fourier de la función:

    $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

17. Cuestión de examen de septiembre de 2000:

    Desarrollar la función $f(x) = 2x$ en una serie de senos en el intervalo $(0, 1)$.

18. Cuestión de examen de septiembre de 2000:

    (a) Define serie convergente y serie absolutamente convergente y pon un ejemplo de una serie que sea convergente pero que no sea absolutamente convergente.

    (b) Dada la serie de potencias
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+\sqrt{n}}$$
    calcula el intervalo de convergencia y la convergencia en los extremos de dicho intervalo.

19. Cuestión de examen de junio de 2001:

    (a) Completa el enunciado del siguiente teorema:
    Teorema de Dirichlet sobre convergencia de series de Fourier:
    "Si $f(x)$ es periódica, (   ) y (   ), entonces la serie de Fourier es
    (   ). La suma de la serie es igual a (   ) en los puntos donde $f(x)$
    es (   ) y vale (   ) donde $f(x)$ no es
    (   )."

    (b) Calcula el desarrollo en serie de Fourier de $f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi, \pi]$.

    (c) Demuestra que
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} cos(nx)$$
    es convergente y calcula la suma de
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$
    (idea: relaciona la serie numérica anterior con el desarrollo en serie de Fourier de $f(x) = x^2$ obtenido y con el resultado teórico del primer apartado).

20. Cuestión de examen septiembre de 2001:

    Dada la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2-1}{(n+1)!}x^n :$$

    (a) Calcula el radio y el intervalo de convergencia.
    (b) Calcula la suma $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2-1}{(n+1)!}x^n$ siguiendo estos pasos:
        i. Calcula el desarrollo en serie de Taylor de e^x.
        ii. Calcula A, B, C tal que
$$\frac{3n^2-2}{(n+1)!} = \frac{A}{(n+1)!} + \frac{B}{(n)!} + \frac{C}{(n-1)!}.$$
        iii. Calcula la suma de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{Ax^n}{(n+1)!}$,$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{Bx^n}{n!}$,y de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{Cx^n}{(n-1)!}$.

21. Cuestión de examen de junio de 2002:

    Calcula el intervalo de convergencia y la convergencia en los extremos de la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n}x^n.$$

22. Cuestión de examen de junio de 2002:

    Desarrolla en una serie de cosenos la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

23. Cuestión de examen de junio de 2002:

    (a) Define serie numérica convergente y serie numérica absolutamente convergente. Explica la relación que hay entre ambos conceptos y pon ejemplos que ilustren las afirmaciones que hagas.
    (b) Explica qué es y cómo se puede calcular el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
    (c) Completa el siguiente enunciado:
        Si la función $f(x)$ es ...., entonces su serie de Fourier es .... Su suma vale .... si $f(x)$ es .... y vale .... si $f(x)$ es ....

24. Cuestión de examen de junio de 2002:

    Calcula el intervalo de convergencia y la convergencia en los extremos de la serie:
    $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2)} x^n.$$

25. Cuestión de examen de septiembre de 2002:

    Dada la serie
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} x^n,$$
    estudia qué valores de $x \in \mathbb{R}$ hacen que la serie sea convergente y qué valores la hacen no convergente.

26. Cuestión de examen de septiembre de 2002:

    Dada la serie
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2^n}} x^n,$$
    estudia qué valores de $x \in \mathbb{R}$ hacen que la serie sea convergente y qué valores la hacen no convergente.

27. Cuestión de examen de mayo de 2003:

    Calcula el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(x+3)^n$.

28. Cuestión de examen de mayo de 2003:

    (a) Explica lo que sepas acerca de la convergencia de la serie de Fourier de una función.

    (b) Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Calcula el desarrollo en senos de $f(x)$.

29. Cuestión de examen de junio de 2003:

    Calcula el radio, el intervalo de convergencia y estudia la convergencia y la convergencia absoluta en los extremos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+3)^n$.

30. Cuestión de examen de junio de 2003 y junio de 2006:

    Calcula el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(x+3)^n$.

31. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Calcula, interpretando el resultado, el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n \frac{n+2}{n+1}$.

32. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Utilizando el criterio de la integral, estudia la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{-n^2}{2}}.$$

33. Cuestión de examen de septiembre de 2003:

    Dada la función $f(x) = 3^x$ si $x \in [0,1]$, calcula su desarrollo de Fourier de tipo coseno y calcula el valor de la serie de Fourier obtenida en $x = 1$. Justifica tu respuesta.

34. Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n^2-2}{(n-1)^2 n(n+2)}$.

35. Cuestión de examen de mayo de 2004:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Ln}(x+1)^n$.

36. Cuestión de examen de mayo de 2004:

    Calcula el desarrollo en seno de la función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,\pi] \end{cases}$$

37. Cuestión de examen de junio de 2004:

    Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2(n-2)^2}$ aplicando el criterio de la integral.

38. Cuestión de examen de septiembre de 2004:

    - Explica qué significa que una función sea analítica en un punto a y pon un ejemplo de una función analítica en el punto 0.
    - Pon un ejemplo de sucesión de funciones que converja uniformemente y otro ejemplo que no converja uniformemente (es suficiente con un ejemplo gráfico).

- Explica la convergencia de la serie de Fourier de una función.
- Explica en qué intervalo converge una serie de potencias y en dónde converge uniformemente.

39. Cuestión de examen de septiembre de 2004:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n)} x^n.$$

40. Cuestión de examen de junio de 2004 y junio de 2006:

    Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+6n+14}$ haciendo uso del criterio de la integral.

41. Cuestión de examen de junio de 2004:

    - Explica qué significa que una función sea analítica en un punto a y pon un ejemplo de una función analítica en el punto 0.
    - Pon un ejemplo de sucesión de funciones que converja uniformemente y otro ejemplo que no converja uniformemente (es suficiente con un ejemplo gráfico).
    - Explica la convergencia de la serie de Fourier de una función.
    - Explica en qué intervalo converge una serie de potencias y en dónde converge uniformemente.

42. Cuestión de examen de septiembre de 2004:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+6} x^n$.

43. Cuestión de examen de mayo de 2005:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$

44. Cuestión de examen de junio de 2005:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1}(x-1)^n$$

45. Cuestión de examen de junio de 2005:

    Explica la convergencia de la serie de Fourier de una función y determina a qué función converge en el intervalo [-2,3] la serie de Fourier de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2,2] \\ x+3 & \text{si } x \in (2,3] \end{cases}$, sabiendo que es de período 5.

46. Cuestión de examen de febrero de 2005:

    Recordando el desarrollo de Taylor de la función e^x, calcula la suma de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2n+n(n-1)}{n!}.$$

47. Cuestión de examen de junio de 2005 y febrero de 2007:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{L(n+1)}$$

48. Cuestión de examen de junio de 2005:

    Calcula el desarrollo en seno de

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

    y determina la función a la que converge en el intervalo $[0,3]$ la serie de Fourier resultante.

49. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)} x^n.$$

50. Cuestión de examen de septiembre de 2005:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2n-1} (x-2)^n$$

51. Cuestión de examen de septiembre de 2006:

    Aplica el criterio de la integral para el estudio de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ para

    (a) $p = 1$
    (b) $p = 2$
    (c) $p = 1/2$
    (d) $p = -1$
    (e) Para cualquier valor de $p \in \mathbb{R}$.

52. Cuestión de examen de junio de 2007:

    (a) Aplica el criterio de la integral para estudiar la convergencia de la serie
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 8n + 20}.$$
    (b) Estudia la convergencia y la convergencia absoluta en todo $\mathbb{R}$ de la serie:
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 8n + 20}(x-1)^n.$$

53. Cuestión de examen de junio de 2007

    Calcula el desarrollo en seno de la función
    $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,2) \end{cases}$$

54. Cuestión de examen de febrero de 2006:

    Recordando el desarrollo de Taylor de la función e^x, calcula la suma de
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!}.$$

55. Cuestión de examen de junio de 2006

    Calcula el desarrollo en seno de la función $f(x)$:
    $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,\pi] \end{cases}$$

56. Cuestión de examen de junio de 2007:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n+1} x^n$$

57. Cuestión de examen de septiembre de 2007:

    Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ \text{Ł}n}\ x^n$$

58. Cuestión de examen de septiembre de 2007:

    Calcula el desarrollo en serie de senos de la función $f(x) = 2x$ en el intervalo $(0, 1)$.