Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas

Apuntes de

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Pedro Martín Jiménez

Badajoz, junio 2009

Índice

Introducción

El texto que sigue no es definitivo ni exhaustivo. Se irá reformando a medida que se detecten fallos o se modifique el contenido para mejorarlo. Debeis emplearlo como una ayuda para preparar la asignatura Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería y como complemento de las notas que toméis en clase.

Espero que os sirva.

Pedro Martín.

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1.1. Números naturales, enteros y racionales

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ está incluido en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, que a su vez está contenido en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, es decir, los números que se pueden expresar como fracción de dos números enteros:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \qquad \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$$

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 4, -4, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 5, -5, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, ...\}$$

Los números racionales se pueden sumar y se pueden multiplicar. Además, están ordenados, es decir, dados dos números racionales distintos es posible determinar cual es el menor y cual es el mayor. Las propiedades que tienen las operaciones suma y producto en el conjunto $\mathbb{Q}$ hacen que tenga estructura de cuerpo conmutativo y ordenado.

1.2. El principio de inducción

La inducción es un razonamiento que permite demostrar una infinidad de proposiciones, o una proposición que depende de un parámetro n que toma una infinidad de valores, usualmente en el conjunto de los enteros naturales $\mathbb{N}$.

Si llamamos $P(n)$ a la proposición enunciada para el número $n \in \mathbb{N}$, el razonamiento para demostrar la veracidad de todas las proposiciones es el siguiente

1. Se demuestra que $P(1)$ es cierta (iniciación de la inducción).
2. Se demuestra que si se asume la proposición cierta para un número k, entonces también es cierta para el siguiente número $k+1$.

$$P(k) \text{ es verdad } \Rightarrow P(k+1) \text{ es verdad}$$

Luego, demostrado esto, concluímos por inducción, que P(n) es cierto para todo natural n.

Ejercicio: *Demuestra que* $1 + 2 + \cdots + (2n-1) = n^2$ *siendo* n *cualquier número natural.*

1.3. Números reales

La longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 es $\sqrt{2}$, que es un número real no racional. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ y a otros números llamados irracionales $\mathbb{I}$ que no se pueden expresar en forma de fracción de números enteros.

Entre dos números reales cualesquiera siempre hay números reales racionales e irracionales.

Los números reales se pueden sumar, multiplicar y ordenar, y las propiedades que cumplen estas operaciones con el orden establecido hacen que $\mathbb{R}$ tenga estructura de cuerpo conmutativo y ordenado. Con los números reales podemos medir cualquier distancia (por ejemplo, la diagonal del cuadrado de lado 1), a diferencia de lo que ocurría con $\mathbb{Q}$.

Una **cota superior** de un conjunto de números reales es un número real mayor o igual que todos los del conjunto. Un conjunto de números reales está **acotado superiormente** si existe una cota superior para el conjunto. Por ejemplo, 1 y 1.7 son cota superior de los intervalos $[0,1]$ y $[0,1)$. Ambos intervalos están acotados superiormente.

Una **cota inferior** de un conjunto de números reales es un número real menor o igual que todos los del conjunto. Un conjunto de números reales está **acotado inferiormente** si existe una cota inferior para el conjunto. Por ejemplo, -1 y 0 son cota inferior de los intervalos $(0,1]$ y $[0,1)$. Ambos intervalos están acotados inferiormente.

Un conjunto está **acotado** si están acotado superior e inferiormente. Por ejemplo $[0,1)$ están acotado.

El **supremo** de un conjunto, si existe, es la menor de las cotas superiores. Si el supremo es un elemento del conjunto entonces se llama **máximo**. El **ínfimo** de un conjunto, si existe, es la mayor de cotas inferiores. Si el ínfimo de un conjunto es un elemento del conjunto entonces se llama **mínimo**. Por ejemplo, respecto a $(0,1]$, 1 es supremo y máximo pero 0 es ínfimo pero no mínimo.

Todos los conjuntos de números reales acotados tiene supremo e ínfimo.

Dado un número real x se define **valor absoluto** de x al número real positivo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y se verifica que

1. $x \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|-x| = |x|$
4. $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$
5. $|x| < \epsilon \Rightarrow x \in (-\epsilon, \epsilon)$

Dado un número real x se define **parte entera de** x al mayor número entero que sea menor o igual que x.

Todo número real x admite una expresión decimal de la forma

$$p'a_1a_2...a_n...$$

donde $p \in \mathbb{Z}$ y $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ tal que

$$x = p + a_1 * 10^{-1} + a_2 * 10^{-2} + ... + a_n * 10^{-n} + ...$$

Si la expresión decimal es finita o periódica entonces x es un número racional. En otro caso x será irracional. La expresión decimal de un número real es única salvo casos similares a este:

$$1'34000 = 1{,}33\widehat{99}.$$

A veces es necesario recortar el número de decimales de una determinada expresión. En este caso, este truncamiento ha de hacerse usando las reglas de **redondeo**: el último dígito que se conserva se aumenta en uno si el primer dígito descartado es mayor que 5; si es 5 o es 5 seguido de ceros, entonces el último dígito retenido se incrementa en uno solo si este último es impar:

número	5 cifras decimales	7 cifras decimales
5.6170431500	5.61704	5.6170432
5.6170462500	5.61705	5.6170462

Las reglas de redondeo minimizan los errores de aproximación. Se define error E como

$$E = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}$$

A menudo se trabaja con el error absoluto ($|E|$). El error relativo es

$$e = \frac{E}{\text{valor verdadero}}.$$

Este último compara la magnitud del error cometido con la magnitud del valor que se pretende estimar y puede interpretarse en términos de %.

1.4. Números complejos

La solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es el número complejo $i = \sqrt{-1}$. Se define el conjunto de los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \{x + yi / \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

La expresión $a + bi$ de un número complejo se denomina **forma binómica**. Todo número real x es también un número complejo cuya forma binómica será $x + 0i$.

Dados dos números complejos $(a + bi)$ y $(c + di)$, se define la suma y el producto de ambos así:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

El conjunto $\mathbb{C}$ con las operaciones suma y producto tiene estructura de cuerpo en el que no es posible establecer un orden. El número complejo $a+bi$ se puede representar en el plano XY como el vector (a,b). Se denomina **afijo** del complejo $a+bi$ al punto (a,b) del plano.

Dado el número complejo $z=a+bi$ se define **conjugado** de z y se denota $\bar{z}$ a:

$$\bar{z}=a-bi.$$

Dados dos números complejos z y z', se verifica que

$$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'} \qquad \overline{z\cdot z'}=\bar{z}\cdot\bar{z'}$$

El **módulo** de un complejo $z=a+bi$ es el número real positivo

$$|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

que representa la distancia del afijo $a+bi$ al 0. Para dividir dos complejos, es decir, multiplicar uno por el inverso del otro, podemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}=\frac{z\cdot\bar{w}}{|w|^2}=\frac{1}{|w|^2}z\cdot\bar{w}.$$

Se verifica que:

1. $|z|\geq 0\ \forall z\in\mathbb{C}$ y $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.
2. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|\ \forall z,w\in\mathbb{C}$.
3. $|z^{-1}|=\frac{1}{|z|}\ \forall z\neq 0$, $z\in\mathbb{C}$, siendo z^{-1} el inverso de z.
4. $|z+w|\leq|z|+|w|\ \forall z,w\in\mathbb{C}$.
5. $\big||z|\pm|w|\big|\leq|z\pm w|\ \forall z,w\in\mathbb{C}$.
6. $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo 1.

Dado el complejo $z=a+bi\neq 0$, se define **argumento principal** de z al número real $\theta\in(0,2\pi]$ tal que:

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{|z|} \qquad \operatorname{sen}\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{|z|}$$

Gráficamente, θ representa el ángulo que forma el vector (a, b) con la parte positiva del eje X. El conjunto de argumentos de z es

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi : \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Se tiene que

$$z = a + bi = |z|\cos(\theta) + |z|\operatorname{sen}(\theta)i = |z|(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i)$$

La expresión $|z|(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i)$ es la **forma trigonométrica** de z.

La expresión $|z|_\theta$ es la forma **módulo-argumento** de z, siendo θ uno de los argumentos de z. Dos complejos z y w son iguales si tienen iguales sus módulos y sus argumentos difieren en un múltiplo entero de 2π :

$$|z|_\theta = |w|_\psi \quad \Leftrightarrow \quad |z| = |w| \quad \text{y} \quad \theta - \psi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

El conjugado de $|z|_\theta$ es $|z|_{2\pi-\theta} = |z|_{-\theta}$.

La forma módulo-argumento es útil para realizar operaciones de producto y potencia de exponente entero. Si z, $w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que

1. $|z|_\theta \cdot |w|_\psi = \big(|z| \cdot |w|\big)_{\theta+\psi}$
2. $\frac{|z|_\theta}{|w|_\psi} = \big(\frac{|z|}{|w|}\big)_{\theta-\psi}$
3. $\big(|z|_\theta\big)^n = z \cdot z \cdot ...(\text{n-veces})... \cdot z = \big(|z|^n\big)_{n\theta}$

Ejercicio: *Calcula los números complejos tales que* $z^3 \cdot \bar{z} = -1$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de z si $w^n = z$. Un número complejo distinto de 0 tiene n raíces n-ésimas y $\sqrt[n]{z}$ representa al conjunto de todas ellas. Puesto que $z = w^n$, se tiene que $|z|_\theta = \big(|w|^n\big)_{n\psi}$ y por tanto

- $|z| = |w|^n \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$
- $\theta - n\psi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi = \frac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Ejercicio: *Calcula las raíces sextas de 1 y las raíces sextas de* -1.

Ejercicio: *Calcula las números complejos de módulo 1 tales que sus raíces cuartas tienen sus afijos en las bisectrices de los cuadrantes del plano.*

Si $b \in \mathbb{R}$, define e^{ib} como

$$e^{ib} = \cos(b) + i \operatorname{sen}(b).$$

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define la exponencial de z como:

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)).$$

Se verifica que $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$, siendo $z, w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio: *Comprueba que si $z = a + bi$, entonces el módulo de e^z es $|e^z| = e^a$ y el argumento de e^z es b, con lo que e^z en forma módulo-argumento es $\left(e^a\right)_b$.*

Partiendo de la forma trigonométrica del número complejo

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

se llega a la **forma exponencial**

$$z = |z| e^{i\theta}.$$

De la definición de la exponencial compleja $e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b$, siendo $b \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \qquad \operatorname{sen} b = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}.$$

Si sustituimos en lo anterior la exponencial compleja por la exponencial real, obtenemos las definiciones de seno hiperbólico y coseno hiperbólico

$$\cosh b = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \qquad \operatorname{senh} b = \frac{e^{b} - e^{-b}}{2}.$$

Por similitud con el caso real, si $z \in \mathbb{C}$ se definen **coseno y seno para números complejos** así

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} b = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Entre los números reales no se pueden encontrar logaritmos de números negativos. Sin embargo, sí es posible hacerlo entre los números complejos. Dado $z \in \mathbb{C}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es un **logaritmo neperiano de** z si se verifica que $e^w = z$. El conjunto de todos los logaritmos neperianos de un complejo z se representará

$$\mathrm{L}\, z = \{w \in \mathbb{C} / \quad e^w = z\}.$$

Ejercicio: *Comprueba que si* $z = |z|_\theta$ *entonces*

$$\mathrm{L}\, z = \mathrm{L}\, |z| + i(\theta + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De la definición de logaritmo de un número real, se deduce que $a^b = e^{b\,\mathrm{L}\, a}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Por similitud, dados $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se llaman **potencias** de base z y exponente w a todos los número complejos representados por z^w y definidos así

$$z^w = e^{w\,\mathrm{L}\, z}.$$

Capítulo 2

Sucesiones numéricas de números reales

2.1. Topología de $\mathbb{R}$

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define **bola abierta** de centro a y radio $r > 0$ y se denota $B(a, r)$, al intervalo abierto $(a - r, a + r)$

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x - a| < r\}.$$

Un conjunto de números reales es abierto si para todo elemento del conjunto se verifica que existe una bola abierta centrada en el elemento que a su vez está contenida en el conjunto. Un conjunto es cerrado si es el complementario de un abierto.

Se define **bola cerrada** de centro a y radio $r > 0$ y se denota $B[a, r]$, al intervalo cerrado $[a - r, a + r]$

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x - a| \leq r\}.$$

Un número real x es **punto de acumulación** de un conjunto si toda bola abierta centrada en x contiene puntos del conjunto distintos de x.

Se denomina recta ampliada al conjunto $\{\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\}$.

2.2. Definición de sucesión de números reales. Propiedades

Una **sucesión de números reales** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto de infinitos números reales que están ordenados, es decir, que hay un primer número (a_1), un segundo (a_2), un tercero (a_3), un n-ésimo (a_n), etc. Los siguientes son ejemplos de sucesiones:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{5},\ \cdots$$

$$1, \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ 1,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ 1,\ \cdots$$

Puesto que a cada número real de la sucesión se le asigna un lugar (primero, segundo, etc.), de forma exacta y rigurosa se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Podemos identificar una sucesión mediante su término general $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n})$, con una definición por recurrencia $(b_1 = 0{,}5,\ b_n = 2b_{n-1} - 1)$ o mostrando sus primeros términos $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$. Una sucesión puede representarse en unos ejes cartesianos, situando los valores de n en el eje X y los valores de a_n en el eje Y. También se suelen representar solo los valores de a_n en la recta real, pero en este caso la representación no permite identificar el orden de la sucesión.

Intuitivamente, una **sucesión es convergente a un número real** l (y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} = l$) si los términos de la sucesión se van acercando al valor de l. Más precisamente se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a $l \in \mathbb{R}$ o tiene como límite l si se verifica alguna de estas propiedades equivalentes:

- Todas y cada una de las bolas $B(l,\epsilon)$ centradas en l contienen todos los términos de la sucesión a_n salvo, quizás, una cantidad finita de ellos; es decir, a partir de un término a_ν, todos los posteriores están contenidos en $B(l,\epsilon)$.

- Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ entonces $|a_n - l| < \epsilon$.

Intuitivamente una **sucesión** de números reales es de **Cauchy** si, a medida que avanzamos en la sucesión, los términos cada vez están más cerca unos de otros. De forma más precisa, se dice que una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si sea cual sea la distancia $\epsilon > 0$ que fijemos, existe un término a_ν a partir del cual, si elegimos dos términos cualesquiera posteriores a_n y a_m $(n, m \geq \nu)$, la distancia entre ellos es menor que ϵ $(|a_n - a_m| < \epsilon)$.

Una sucesión $(a_n)_{n\in N}$ se dice que es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in N$ y **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$. De forma similar se define sucesión **decreciente** y **estrictamente decreciente**. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

2.2.1. Operaciones con sucesiones convergentes

Una sucesión se puede sumar, multiplicar, dividir con otra sucesión término a término. También se puede multiplicar una sucesión por un número real multiplicando cada término por el número real. Así mismo es posible considerar una sucesión elevada a otra sucesión $(a_n^{b_n})$ término a término o calcular el logaritmo a los términos de una sucesión $(\text{Ł}a_n)$.

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. El límite de una sucesión convergente es único.

2. Las operaciones suma, producto y producto por un número de sucesiones convergentes da como resultado una sucesión convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$
$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n.$$

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $l < k$, entonces $a_n < k$ a partir de un término en adelante.

4. Si $a_n < k$ a partir de un término en adelante, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \leq k$.

5. Si $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, entonces $a_n < b_n$ a partir de un término en adelante.

6. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y $a_n \leq c_n \leq b_n$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$
7. Toda sucesión formada con términos extraídos de otra sucesión convergente (subsucesión) es convergente al mismo límite.
8. Toda sucesión convergente es de Cauchy y que toda sucesión de Cauchy es acotada.
9. Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente. Equivalentemente, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente

2.3. Completitud de $\mathbb{R}$

Ejercicio: *Construye una sucesión formada por números racionales que converja a* $\sqrt{2}$.

La sucesión del ejercicio anterior es una sucesión de Cauchy de números racionales, sin embargo el límite no es un número racional sino un número real:

$$\boxed{\text{El conjunto } \mathbb{Q} \text{ no es completo.}}$$

Por el contrario, no es posible encontrar una sucesión de Cauchy formada por números reales cuyo límite no sea un número real puesto que

Teorema: *Toda sucesión de Caychy de números reales es convergente en los números reales.*

El resultado anterior se conoce como teorema de completitud de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{El conjunto } \mathbb{R} \text{ es completo.}}$$

2.4. Límites infinitos. Infinitésimos. Cálculo de límites.

2.4.1. Límites infinitos

Se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a infinito o tiene como límite infinito ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$) si se verifica alguna de estas propiedades equivalentes:

- Todos y cada uno de los intervalos de la forma (k, ∞), $k \in \mathbb{N}$ contienen todos los términos de la sucesión a_n salvo, quizás, una cantidad finita de ellos; es decir, a partir de un término a_ν, todos los posteriores están contenidos en (k, ∞).

- Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ entonces $a_n > k$.

De forma similar se define $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Las sucesiones **divergentes** son las que tienen como límite $\pm\infty$.

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

2. La operación suma con las sucesiones da como resultado lo siguiente:

$+$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l < 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p \geq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$p + l$

3. La operación producto con las sucesiones da como resultado lo siguiente:

$\cdot$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l < 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$p \cdot l$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$	?	?	0

4. El producto de un número real λ por una sucesión da como resultado lo siguiente:

$\cdot\lambda$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$
$\lambda > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\lambda \cdot l$
$\lambda < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$\lambda \cdot l$
$\lambda = 0$	0	0	0

5. En general, al manejar sucesiones con potencias, logaritmos y cocientes, el resultado de la operación correspondiente es una sucesión con límite igual a la potencia, logaritmo o cociente de los límites correspondiente, teniendo en cuenta la regla de los signos en los cocientes. Además, se pueden presentar los siguientes casos que son indeterminaciones y hay que estudiarlos de forma particular:

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \infty - \infty, \ 0 \cdot (\pm\infty), \ 1^{\pm\infty}, \ \infty^0.$$

2.4.2. Infinitésimos

Un **infinitésimo** es una sucesión convergente a 0. El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo y el producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo.

Dos infinitésimos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que son equivalentes $(a_n \sim b_n)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

En el cálculo de límites, si tenemos un infinitésimo como factor en la expresión de un producto o cociente, podemos sustituirlo por un infinitésimo equivalente. Si $a_n \to 0$, son infinitésimos equivalentes los siguientes:

$$\text{Ł}(1 + a_n) \sim a_n \qquad \operatorname{sen} a_n \sim \tan a_n \sim a_n \qquad 1 - \cos a_n \sim \frac{1}{2}a_n^2$$

Para el cálculo de límites es útil el siguiente resultado:

2.4.3. Regla de Stolz

Regla de Stolz: *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales tal que:*

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es estrictamente monótona (creciente o decreciente)*
- *O bien* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, *o bien* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Ejercicio: *Calcula el límite* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n}$.

Como consecuencia de la regla de Stolz, se puede demostrar que:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$

Capítulo 3

Funciones reales de variable real

3.1. Definición. Conceptos básicos

Tendremos una función real de variable real ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) cuando a cada elemento x de un conjunto de números reales (llamado dominio) le asignemos un elemento $f(x)$ (llamado imagen de x) y solo uno de un conjunto (llamado recorrido o conjunto imagen).

$$\text{Dominio de } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / \text{ existe } f(x)\}$$

$$\text{Recorrido de } f(x) = \{y \in \mathbb{R} / y \text{ es imagen de algún } x\}$$

Representación gráfica

Sea $f(x)$ una función definida alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$. Diremos que: $f(x)$ **es creciente en** a, si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x, y \in B$,

$$x < a < y \Rightarrow f(x) \leq f(a) \leq f(y)$$

Será **estrictamente creciente en** a si

$$x < a < y \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y).$$

$f(x)$ **es decreciente en** a, si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x, y \in B$,

$$x < a < y \Rightarrow f(x) \geq f(a) \geq f(y)$$

Será **estrictamente decreciente en** a si

$$x < a < y \Rightarrow f(x) > f(a) > f(y).$$

$f(x)$ alcanza un **mínimo relativo en** a si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x \in B$,

$$f(x) \geq f(a).$$

El mínimo será estricto si $f(x) > f(a)$ para todo $x \in B$.

$f(x)$ alcanza un **máximo relativo en** a si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x \in B$,

$$f(x) \leq f(a).$$

El máximo será estricto si $f(x) < f(a)$ para todo $x \in B$.

Una función $f(x)$ se dice que es **periódica** en un conjunto I si se existe una cantidad P tal que

$$f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Se denomina periodo de la función $f(x)$ al valor mínimo P que verifica lo anterior.

Ejemplo: Las funciones $\mathrm{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{tg}(x)$ son periódicas.

Una función $f(x)$ está **acotada superiormente** en un conjunto I si existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq k \quad \forall x \in I$$

Una función $f(x)$ está **acotada inferiormente** en un conjunto I si existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq k \quad \forall x \in I$$

Una función $f(x)$ está **acotada** en un conjunto I si existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq k \quad \forall x \in I$$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones. El resultado de componer la función g con la función f (se escribe $g \circ f$) es la función que resulta de aplicar primero la función f y al resultado aplicarle la función g. La composición $g \circ f$ solo se podrá hacer si las imágenes de $f(x)$ están contenidas en el dominio de $g(x)$.

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

De forma similar la composición de f con g (se escribe $f \circ g$) es la función que resulta de aplicar primero g y al resultado aplicarle f. Solo se podrá hacer si el dominio de f contiene al recorrido de g.

La función recíproca o inversa de f es otra función f^{-1} tal que

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in \text{Dominio de } f$$

$$f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in \text{Dominio de } f^{-1}$$

La inversa de una función solo está definida en un intervalo donde la función original tenga valores de las imágenes no repetidos. Por ejemplo, la inversa de $f(x) = x^2$ es la función $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, \infty)$. Así mismo, la inversa de $\operatorname{sen}(x)$ es el $\operatorname{arc\,sen}(x)$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, que es donde el seno es estrictamente creciente y no tiene imágenes repetidas.

3.2. Funciones elementales

La funciones **polinómicas** son de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

con $n \in \mathbb{N}$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$. Las de grado impar tiene siempre un número impar de raíces y las de grado para tienen siempre un número par de raíces.

Las funciones **racionales** son de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Su dominio son todos los números reales excepto los valores donde se anula el denominador.

Las funciones **trigonométricas** son seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente.

Las funciones seno y coseno tiene su dominio en $(-\infty, \infty)$ y son periódicas de periodo 2π.

Figura 3.1: función sen(x).

Figura 3.2: función cos(x).

La función tangente tiene su dominio en todos los números reales salvo en $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, y es periódica de período π.

Las funciones **exponenciales** son de la forma a^x, con $a > 0$. Son crecientes si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$. Las funciones **logarítmicas** de la forma $log_a(x)$ son las inversas de las exponenciales a^x.

Las funciones **hiperbólicas** son las siguientes:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

y sus inversas son, respectivamente

$$\text{Ł}(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \text{Ł}x + \sqrt{x^2-1} \qquad \text{Ł}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$$

Figura 3.3: función $\mathrm{tg}(x)$.

Figura 3.4: función e^x.

Figura 3.5: función Ł(x).

Figura 3.6: función $\mathrm{senh}(x)$.

Figura 3.7: función $\cosh(x)$.

Capítulo 4

Límites y continuidad de funciones

4.1. Límite de una función en un punto. Límites laterales

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada en la figura 4.1 y definida así

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

cuyo domino es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Figura 4.1: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Intuitivamente, se dice que $f(x)$ tiene límite $l = -2$ en el punto $a = -1$ (simplificadamente $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$) porque todos los valores de x cercanos a -1 tienen sus imágenes cerca de -2. Dicho de otra forma: dada cualquier sucesión de puntos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converja a -1, se verifica que la sucesión de sus imágenes $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a -2.

Por similares razones, se dice que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0 \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 1.$$

En general, se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene límite l cuando x tiende al número a (simplificadamente $\lim_{x \to a} f(x) = l$) cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(l, \epsilon)$, existe una bola $B(a, \delta)$ tal que si $x \in B(a, \delta)$ y $x \neq a$ entonces $f(x) \in B(l, \epsilon)$.
- Dada cualquier sucesión de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ que converja a a, la sucesión de sus imágenes $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$ converge a l.

Consideremos la función representada en la figura 4.2

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Figura 4.2: función sin límite en 2.

Si nos *acercamos* a 2 por la izquierda el límite de las imágenes es 2, pero si nos *acercamos* a 2 por la derecha el límite es 5.

Se dice que una función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene **límite lateral l por la derecha de** a y se representa $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$, cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(l, \epsilon)$, existe una bola $B(a, \delta)$ tal que si $x \in B(a, \delta)$ y $x > a$ entonces $f(x) \in B(l, \epsilon)$.
- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a a con puntos mayores estrictos que a, la sucesión de sus imágenes converge a l.

De forma similar se define **límite lateral por la izquierda**.

De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

1. Si una función $f(x)$ tiene límite real en un punto a, entonces ese límite es único y coincide con los límites laterales de la función en a.
2. Si una función $f(x)$ tiene límites laterales reales en a y son iguales, entonces existe el límite de $f(x)$ en a y coincide con el valor de los límites laterales.

4.2. Límites infinitos y límites en el infinito

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ representada en la figura 4.3 definida así
$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}.$$
Intuitivamente, se dice que $f(x)$ tiene límite infinito en el punto $a=1$ (sim-

Figura 4.3: $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$

plificadamente $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$) porque los valores de x *cercanos* a 1 tienen sus imágenes positivas y no acotadas. Dicho de otra forma: dada cualquier sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a 1, se verifica que la sucesión de sus imágenes $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a infinito.

Por similares razones, se dice que
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=1 \qquad \lim_{x\to\ 1}\frac{-x^2-1}{(x-1)^2}=-\infty.$$
En general, se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene **límite infinito cuando x tiende al número a** (simplificadamente $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$) si se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dado cualquier valor $k>0$, existe una bola $B(a,\delta)$ tal que si $x\in B(a,\delta)$ y $x\neq a$ entonces $f(x)>k$.
- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a a con puntos distintos de a, la sucesión de sus imágenes converge a infinito.

De forma similar se define
$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty\ \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$$

Se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene **límite l cuando x tiende a infinito** (simplificadamente $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$) cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(l,\epsilon)$, existe un número $k > 0$ tal que si $x > k$ entonces $f(x) \in B(l,\epsilon)$.
- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a infinito, la sucesión de sus imágenes converge a l.

De forma similar se define $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

4.3. Cálculo de límites. Infinitésimos.

En el cálculo de límites de funciones, siempre que tenga sentido la expresión correspondiente y salvo las indeterminaciones que se vieron en los límites con sucesiones, se verifica que

$$\begin{gathered}
\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\
\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)\\
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\\
\lim_{x\to a} \log_{\mathrm{b}} f(x) = \log_{\mathrm{b}}(\lim_{x\to a} f(x))\\
\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}\\
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}
\end{gathered}$$

siendo a un número real o $\pm\infty$.

Un **infinitésimo en** a es una función cuyo límite en a es 0.

Un **infinito en** a es una función cuyo límite en a es $\pm\infty$.

Dos infinitésimos o dos infinitos $f(x)$ y $g(x)$ en a son equivalentes y se representa como $f(x) \overset{x\to a}{\sim} g(x)$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Sea $f(x)$ un infinitésimo en $a \in \mathbb{R}$. Son equivalentes los siguientes infinitésimos:

$$f(x),\ \operatorname{sen} f(x),\ \tan f(x),\ \operatorname{arc\,sen} f(x),\ \arctan f(x),\ \text{Ł}(1+f(x)),\ e^{f(x)}-1$$

Por ejemplo, son equivalentes los infinitésimos:
$x,\ \operatorname{sen} x,\ \tan x,\ \operatorname{arc\,sen} x,\ \arctan x,\ \text{Ł}(1+x)$ y $e^x - 1$ en $x = 0$.

$1 - \cos x$ y $\frac{x^2}{2}$ en $x = 0$
$x - 1$ y $\text{Ł}x$ en $x = 1$.

En el cálculo de límites de productos o cocientes se puede sustituir un infinitésimo o infinito por otro equivalente. Se verifica que:

1. Si $f(x)$ es un infinitésimo en a y $g(x)$ está acotada en una bola $B(a, \epsilon)$, entonces $f(x)g(x)$ es un infinitésimo en a.
2. Si $f(x)$ es un infinito en a y $g(x)$ está acotada inferiormente en una bola $B(a, \epsilon)$, entonces $f(x) + g(x)$ es un infinito en a.
3. Si $f(x)$ es un infinito en a, entonces $\frac{1}{f(x)}$ es un infinitésimo en a.

Ejercicio: *Calcula los siguientes límites:*

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{3 - \text{Ł}x}} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 3x} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 x)^{\tan^2 x}$$

4.4. Función continua

Intuitivamente una función $f(x)$ es continua en un punto a cuando valores de x *cercanos* a a tiene imágenes *cercanas* a $f(a)$, es decir, la gráfica de la función $f(x)$ tiene un trazo continuo *alrededor* de a.

Sea $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un abierto que contenga a $a \in \mathbb{R}$. De forma más precisa, se dice que $f(x)$ **es continua en** a si se cumple estas condiciones:

- Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es un número real.
- Existe $f(a)$.
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Si la función no es continua en a se dice que tiene una discontinuidad en a. La discontinuidad puede ser:

Evitable: existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es un número real.

Esencial: no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ o es $\pm\infty$. A su vez, esta puede ser:

- De salto infinito: existen los límites laterales y alguno es $\pm\infty$.

- De salto finito: existen los límites laterales y ambos son finitos.
- De segunda especie: no existe algún límite lateral.

Una función $f(x)$ **es continua por la derecha de** $a \in \mathbb{R}$ si existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, es un número real y coincide con $f(a)$. De forma equivalente se define continuidad por la izquierda.

Sea $f(x)$ continua en a. Se verifica que:

1. $f(x)$ está acotada en una bola $B(a, \delta)$.
2. Si $f(a) \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene el mismo signo que a en una bola $B(a, \delta)$.
3. Si $g(x)$ es continua en a, entonces $f + g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ también son continuas en a.
4. b^x, $\log_b x$, x^n $(n \in \mathbb{N})$, x^x, polinomios, funciones racionales y funciones trigonométricas son continuas en su dominio.
5. Si $g(x)$ es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Ejercicio: *Estudia la continuidad de las funciones:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -4 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq \frac{-\pi}{2} \\ m \operatorname{sen} x + n & \text{si } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Se dice que una función $f(x)$ es **continua en el intervalo** (a, b) si es continua en todos los puntos del intervalo.

Se dice que una función $f(x)$ es **continua en el intervalo** $[a, b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

De forma similar se define continuidad en $[a, b)$ y en $(a, b]$.

Teorema (de Bolzano): *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Ejercicio: *Pon un ejemplo de:*

1. *Función definida en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ y no exista $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

2. *Función continua en (a, b) tal que $f(a)f(b) < 0$ y $f(c) \neq 0$ en todo punto $c \in (a, b)$.*

3. *Función continua en $[a, b]$ y tal que no exista $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Teorema de valor intermedio: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $d \in [f(a), f(b)]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Ejercicio: *Encuentra un ejemplo de función continua en (a, b) que no cumpla el teorema de valor intermedio.*

Teorema: *Si $f(x)$ es continua en un intervalo I, entonces la imagen $f(I)$ también es un intervalo.*

Teorema: *Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces existe valores $m, M \in [a, b]$ tales $f(m)$ y $f(M)$ son, respectivamente, el mínimo y el máximo de la función $f(x)$ en $[a, b]$.*

Ejercicio: *Encuentra ejemplos donde falle alguna de las hipótesis de los resultados anteriores y no se verifiquen los teoremas correspondientes.*

Capítulo 5

Derivadas y diferenciales

5.1. Derivada de una función en un punto.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Se dice que $f(x)$ es derivable en el punto a, si existe (es un número real) alguno de estos dos límites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, a ese número real se le llama derivada de $f(x)$ en a y se denota $f'(a)$ o $Df(a)$.

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es derivable en $a = 4$ porque

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4}}}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x - 4} =$$
$$= \lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{2\sqrt{x}(x-4)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 4} \frac{-1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} = \frac{-1}{16}.$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ en 4 existe y vale $f'(4) = -1/16$.

□

Ejemplo: La función $f(x) = x^2$ es derivable en $a = 2$ porque

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0} h+4 = 4.$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ en 2 existe y vale $f'(2) = 4$.

□

¿Qué significa que la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en 4 sea

$$f'(4) = -1/16 = -0{,}0625 \quad ?$$

(Ver figura 5.1)

1. Elijamos una sucesión que converja a $a = 4$, por ejemplo $x_n = 4 + 1/n$.

2. Calculemos los cocientes $\frac{f(x_n)-f(4)}{x_n-4}$. Cada uno de estos cocientes representan la inclinación de la recta que pasa por los puntos $(x_n, f(x_n))$ y por $(4, f(4))$ (es decir, la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X).

3. Cuando x_n se acerca a 4, las rectas anteriores se acercan a la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto 4.

4. El límite de dichos cocientes (inclinaciones) cuando avanzamos en la sucesión, es decir, cuando x_n se acerca a 4, representa la inclinación de la recta tangente en 4.

x_n	inclinación
$x_{200} = 4{,}005$	$-0{,}06244146721847$
$x_{1000} = 4{,}001$	$-0{,}06248828369088$
$x_{2500} = 4{,}0004$	$-0{,}06249531289054$
$x_{140345} = 4{,}000007125298372$	$-0{,}0624999165060$
$x_{2345678} = 4{,}000000426315974$	$-0{,}06249999507708$

Figura 5.1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

¿Puede existir una función que en un punto a sea derivable y en ese mismo punto no sea continua ? No.

Propiedad: *Toda función derivable en a es continua en a.*

Demostración. Si $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es un número real entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

y esto último significa que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, es decir, que $f(x)$ es continua en a.

$\square$

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Se dice que $f(x)$ **es derivable en el punto** a **por la derecha**, si existe (es un número real) alguno de estos dos límites

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, a ese número real se le llama derivada de $f(x)$ en a por la derecha y se denota $f'_+(a)$.

De forma similar se define función derivable en a por la izquierda y derivada en a por la izquierda:

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Propiedad: *Una función $f(x)$ es derivable en un punto a si y solo si es derivable por la izquierda y por la derecha en a y ambas derivadas laterales coinciden.*

Demostración. $f(x)$ es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

es decir, si y solo si existen los límites laterales

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y son iguales.

□

Ejemplo: La función $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no es derivable, porque $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$.

5.2. Función derivada

¿Cuánto vale la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en un punto cualquiera a?

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo I. Se dice que $f(x)$ es derivable en I si es derivable en todo $x \in I$. En tal caso, podemos construir otra función tal que a cada punto x le asigne la derivada de $f(x)$ en ese punto:

$$x \in I \xrightarrow{f'} f'(x).$$

Dicha función se llama *función derivada de* $f(x)$ o simplemente la *derivada de* $f(x)$, y se denota $f'(x)$.

Ejercicio: *¿Qué diferencia hay entre la derivada de una función en un punto y la derivada de una función?*

□

Las funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son derivables en cualquier punto de su dominio. Estas son las derivadas de las funciones elementales:

función	derivada	función	derivada	función	derivada
$k \in \mathbb{R}$	0	$L(x)$	$1/x$	$\mathrm{Log}_a(x)$	$\frac{1}{x}\mathrm{Log}_a e$
e^x	e^x	$a^x,\ a>0$	$a^x La$	$x^k,\ k \in \mathbb{R}$	kx^{k-1}
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x}}$	$\mathrm{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\mathrm{sen}(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$\mathrm{arc\,sen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	senh	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathrm{senh}(x)$
$\tanh(x)$	$1-\tanh^2(x)$	$\mathrm{arcsenh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$				

Nota.- Se define seno, coseno y tangente hiperbólica como

$$\mathrm{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Ejercicio: Calcula la ecuación de la recta:

1. Tangente a $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ y paralela a la recta $y + 3x = 7$.
2. Tangente a $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ en el punto $x = -2$.

□

Ejercicio: Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = |x^2 - 7x + 10|.$$

□

Si $f(x)$ es derivable en un intervalo I y su derivada $f'(x)$ es también derivable en I, entonces la derivada de esta última es la derivada segunda de $f(x)$ y se denota $f''(x)$. De forma similar se definen $f'''(x)$, $f^{4)}$, $f^{5)}$, etc.

5.3. Operaciones con funciones derivables

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en I, entonces:

1. La función suma $(f+g)(x)$ y la diferencia $(f-g)(x)$ son funciones derivables en I y las derivadas de una y otra son

$$f'(x)+g'(x) \qquad \text{y} \qquad f'(x)-g'(x).$$

Demostración. Para la suma:

$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-[f(a)+g(a)]}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)+g(a)}{h} = f'(a)+g'(a).$$

De forma similar sería para la diferencia.

2. La función $\alpha\cdot f(x)$ es derivable $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, y

$$(\alpha\cdot f)'(x) = \alpha\cdot f'(x).$$

3. La función producto $(f\cdot g)(x)$ es derivable en I, y

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Demostración.

$$(f\cdot g)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\big[\frac{[f(a+h)-f(a)]g(a+h)}{h} + \frac{f(a)[g(a+h)-g(a)]}{h}\big] =$$
$$= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

4. La función cociente f/g es derivable en todo $x \in I$ tal que $g(x) \neq 0$ y

$$\frac{f}{g}'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

5. Si $f(x)$ es derivable en I, $g(x)$ es derivable en $f(I)$, entonces la composición $g \circ f$ es derivable en I y $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ (Regla de la cadena).

   Demostración.

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = *$$

   Hacemos uso de la función:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} - g'(f(a)) & \text{si } f(x) - f(a) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) - f(a) = 0. \end{cases}$$

   Esta función verifica dos cosas:

   a) $g(f(x)) - g(f(a)) = [F(x) + g'(f(a))][f(x) - f(a)]$.
   b) $\lim_{x \to a} F(x) = 0$.

   Por tanto:

$$* = \lim_{x \to a} \frac{[F(x) + g'(f(a))][f(x) - f(a)]}{x - a} =$$
$$\lim_{x \to a} \left[F(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] + \lim_{x \to a} \left[g'(f(a)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] =$$
$$0 \cdot f'(a) + g'(f(a)) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

□

Ejemplo: La función derivada de $\operatorname{sen}(f(x))$ en un punto a es

$$\cos(f(a)) \cdot f'(a).$$

Ejercicio: Sabiendo que la composición de una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ es la función identidad $((f \circ f^{-1})(x) = x)$, demuestra que la derivada del arcoseno es $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

□

5.3.1. Derivada de una función implícita

Sea $F(x, y) = 0$ una expresión que depende de x y de y. Supongamos que existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una función $y = f(x)$ tal que si $x \in I$ entonces $F(x, f(x)) = 0$. Se dice que la función $f(x)$ está definida implícitamente por la expresión $F(x, y) = 0$.

Ejemplo: La expresión $x^2+y^2 = 0$ define implícitamente la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y la función $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

$\square$

Si una función $f(x)$ está definida implícitamente por una expresión $F(x, y) = 0$, es posible calcular la derivada de la función $y = f(x)$ respecto a la variable x en algún punto (x_0, y_0) que verifique la expresión $F(x_0, y_0) = 0$. El proceso sería el siguiente:

1. Se deriva la expresión $F(x, y)$ (considerando que y es una función que depende de x) y se iguala a 0.
2. Se sustituye (x, y) en la expresión derivada anterior por (x_0, y_0).
3. Se despeja el valor de $y'(x_0)$.

Ejemplo: Calculamos la derivada de y respecto de x en el punto $(1/2, \sqrt{3}/2)$ sabiendo que $x^2 + y^2 = 1$.

1. Se deriva la expresión $x^2 + y^2 - 1$ y se iguala a 0:
$$D_x(F(x, y)) = 2x + 2yy' = 0$$
2. Se sustituye en la expresión derivada anterior (x, y) por $(1/2, \sqrt{3}/2)$:
$$2 * 1/2 + 2 * \sqrt{3}/2 * y'(1/2) = 0$$
3. Se despeja el valor de $y'(x_0)$:
$$y'(1/2) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio: *Calcula la derivada de y respecto de x en el punto $(1, 2)$ sabiendo que $xy^2 = (1 + x)^2 - Łx$.*

5.3.2. Derivadas sucesivas. Fórmula de Leibniz

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un intervalo abierto I. La fórmula de Leibniz permite calcular la derivada n-ésima del producto:

$$D^n(fg) = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) f^{n-i)} g^{i)}.$$

5.4. Diferencial de una función. Función diferenciable

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales definidas alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$. Diremos que **$f(x)$ y $g(x)$ tienen un contacto de orden $r \geq 0$ en a**, si se verifica que:

1. $f(a) = g(a)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^r} = 0.$

Intuitivamente, que dos funciones tenga un punto de contacto en a significa que las dos funciones son *"parecidas"* alrededor de a. El parecido será mayor cuanto mayor sea el orden r del contacto.

□

Ejercicio: 1. *Comprueba que si $f(x)$ es continua en a entonces $f(x)$ y la función constante $f(a)$ tienen un punto de contacto en a de orden* 0.

2. *Demuestra que si $f(x)$ y $g(x)$ tienen un punto de contacto en a de orden r, entonces tiene un punto de contacto en a de orden s, siendo s cualquier número tal que $0 \leq s \leq r$.*

□

Sea $f(x)$ una función real definida alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$.

Definición 1: *Se dice que $f(x)$ **es diferenciable en** a si existe una función afín $g(x)$ (un polinomio de grado menor o igual a 1), que podrá expresarse como $g(x) = n + l(x-a)$ con $n, l \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x)$ y $g(x)$ tienen un punto de contacto en a de orden 1, es decir*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - [n + l(x-a)]}{x-a} = 0.$$

Propiedad: *Sea $f(x)$ una función real definida en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$f(x) \text{ es diferenciable en } a \Leftrightarrow f(x) \text{ es derivable en } a.$$

$\square$

Si la función f es diferenciable, la función $g(x)$ será siempre la recta tangente a $f(x)$ en a, es decir: $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Se define **diferencial de una función** $f(x)$ **en un punto** a a la función lineal

$$\begin{array}{rccc} df_a: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(a)x. \end{array}$$

Puesto que la recta tangente $g(x)$ y $f(x)$ tienen un punto de contacto en a, ambas funciones tienen valores parecidos alrededor de a, y se puede utilizar $g(x)$ como aproximación de $f(x)$ alrededor de a. Así

$$f(x) - f(a) \approx g(x) - g(a) = f'(a)(x-a) = df_a(x-a).$$

Luego la diferencia $f(x) - f(a)$ se puede aproximar por el valor de la función df_a en el punto $x - a$.

Dado lo anterior, se puede definir también función diferenciable de la siguiente forma:

Definición 2: *Una función $f(x)$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}$ si existe una función lineal df_a tal que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df_a(x-a)}{x-a} = 0.$$

Se define **diferencial de una función** $f(x)$ a la aplicación que a cada punto $a \in \mathbb{R}$ le adjudica su correspondiente función lineal df_a:

$$\begin{array}{rccc} df: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & df_x = f'(x)dx. \end{array}$$

siendo $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Capítulo 6

Propiedades de la funciones derivables

6.1. Comportamiento en un punto de las funciones derivables. Crecimiento y decrecimiento.

Sea $f(x)$ una función definida alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$. Recordando los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximo relativo y mínimo relativo que se definieron en la sección 3.1, podemos enunciar las siguientes propiedades:

1. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y creciente (equivalentemente, decreciente) en a, entonces $f'(a) \geq 0$ ($f'(a) \leq 0$).*

   Demostración. El valor de $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ es mayor o igual que 0, porque si $x < a$, el numerador y el denominador son negativos, y si $x > a$, ambos son positivos. $\square$

2. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y $f'(a) > 0$ (equivalentemente, $f'(a) < 0$), entonces $f(x)$ es estrictamente creciente en a (estrictamente decreciente en a).*

   Demostración. Como $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, existe una bola centrada en a tal que si $x < a$, el numerador y el denominador son negativos, con lo que $f(x) < f(a)$; si $x > a$, ambos son positivos, con lo que $f(x) > f(a)$. $\square$

3. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y alcanza un mínimo relativo en a (equivalentemente, máximo relativo), entonces $f'(a) = 0$.*

   Demostración. Por ser a un mínimo relativo, se tiene que $f(x) - f(a)$ y $x - a$ tienen el mismo signo si $x < a$ y distinto signo si $x > a$. Por tanto $f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ y $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Se concluye que $f'(a) = 0$. De forma similar se razona para un máximo relativo. □

¿Si $f(x)$ es estrictamente creciente en a entonces $f'(a) > 0$?

¿Si $f'(a) = 0$ entonces a es un máximo o mínimo?

6.2. Teoremas fundamentales del cálculo diferencial

Ejercicio: *Sea $f(x) = x^3 - 9x + 1$ la función que muestra el beneficio en el intervalo de años $[-3, 3]$, siendo 0 el año presente. Calcula el beneficio 3 años antes y 3 años después y calcula si el crecimiento del beneficio ha sido 0 algún año.*

El beneficio hace 3 años fue $f(-3) = 1$ y el beneficio 3 años después será $f(3) = 1$. El crecimiento del beneficio se valora con la derivada de la función y será 0 si $f'(x)$ es 0 en algún valor del intervalo $[-3, 3]$. Esto último se puede asegurar que ocurre basándonos en el teorema de Rolle:

Teorema de Rolle: *Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, por una propiedad de las funciones continuas (ver sección 4.4), alcanzará un valor máximo (M) y un valor mínimo (m) en $[a, b]$. Si M o m se corresponden con un punto $c \in (a, b)$, entonces $f'(c) = 0$ por ser máximo o mínimo relativo. Si M y m se alcanzan en a y b, entonces $M = f(a) = f(b) = m$, con lo que $f(x)$ es constante en $[a, b]$ y su derivada vale 0 en todo punto de $[a, b]$.

□

Teorema de Cauchy de valor medio: *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]$.*

Demostración. Basta comprobar que la función $f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]$ cumple el teorema de Rolle en $[a,b]$.

□

Figura 6.1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ejercicio: *Las expresiones $f(t) = t^3+1$ y $g(t) = t^2+3$ representan los beneficios en función del tiempo de dos empresas (ver figura 6.1). Comprueba que el incremento de los beneficios de una de ellas es el doble que el incremento del beneficio de la otra en el intervalo de tiempo desde $t=0$ hasta $t=2$. ¿En algún instante el crecimiento de los beneficios de una fue el doble que el crecimiento de los beneficios de la otra?*

□

Teorema de Lagrange de valor medio: *Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(b)-f(a) = f'(c)[b-a]$.*

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior a $f(x)$ y a $g(x) = x$.

□

Ejercicio: *En el ejercicio anterior, calcula el incremento medio de los beneficios en el periodo $[0,2]$. ¿En algún instante de ese periodo el crecimiento de los beneficios fue igual que el incremento medio?*

□

Regla de L'Hôpital: *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en todos los puntos de una bola reducida B de $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ (un bola centrada en a a la que le quitamos a). Si ambas funciones son derivables en B y $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in B$, entonces:*

1. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

2. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Demostración del Caso 1. Si $a \in R$, definimos $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, con lo que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $B \cup a$. Si $x \in B$, podemos aplicar el teorema de Cauchy al intervalo $[x, a]$ (o al intervalo $[a, x]$) y tendremos que existe un punto $c_x \in [x, a]$ (o $c_x \in [a, x]$) tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a, c_x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Si $a = \pm\infty$, basta hacer el cambio $t = 1/x$ y aplicar lo anterior.

$\square$

Capítulo 7

Aproximación local de funciones mediante polinomios

7.1. Teorema de Taylor en una variable

7.1.1. Polinomio de Taylor

Dada una función $f(x)$, *¿cómo construir una función sencilla que "se parezca" a $f(x)$ alrededor de un cierto punto $a \in \mathbb{R}$?*

Figura 7.1: Polinomios de Taylor de e^x en 0 de orden 0, 1, 2 y 3.

Teorema (local de Taylor): *Sea B una bola abierta centrada en un punto $a \in \mathbb{R}$, y $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable m veces en a. Existe una única función polinómica de grado menor o igual que m que tiene un contacto en a con $f(x)$ de orden m. Dicha función es:*

$$P_a^m f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

$P_a^m f(x)$ es el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en el punto a.

Demostración del Teorema local de Taylor. Consideremos el polinomio

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_m(x-a)^m.$$

Si $f(x)$ y $P(x)$ tienen un contacto de orden m en a, entonces (ver sección 5.4) se cumplirá lo siguiente:

1. $f(a) = P(a) \Rightarrow \boxed{c_1 = f'(a).}$
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-P(x)}{(x-a)^r} = 0, \quad \forall\, 0 \le r \le m.$

   En particular, si $r = 1$,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)} &= \\ = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m]}{(x-a)} &= \\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = f'(a).} \end{aligned}$$

   Si $r = 2$,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^2} &= \\ = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m]}{(x-a)^2} &= \\ = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} &= (\text{L'Hôpital}) = \\ = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)} - c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \tfrac{f''(a)}{2}.} \end{aligned}$$

Razonando de forma similar hasta $r = m$ se obtiene que los únicos coeficientes posibles para el polinomio son los siguientes

$$\boxed{c_0 = f(a) \quad c_1 = f'(a) \quad c_2 = \tfrac{f''(a)}{2!} \quad \cdots \quad c_m = \tfrac{f^{m)}(a)}{m!}.}$$

Ejercicio: *Calcula los polinomios de Taylor para la funciones* e^x *y* $\operatorname{sen}(x)$ *en el punto* 0 *de orden* $1, 2, 3, 4$. *Deduce la expresión para orden* n.

$\square$

Ejercicio: *Demuestra que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

y el polinomio $P(x) = 0$ tiene un punto de contacto de orden 3 en el punto 0. Sin embargo, la función $f(x)$ no es 3 veces diferenciable.

$\square$

Ejercicio: *Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, ¿cuáles son sus polinomios de Taylor de grado $0, 1, 2, \ldots, m$?*

$\square$

7.1.2. Teorema de Taylor. Fórmula de Taylor

Ejercicio: *Calcula aproximadamente el valor de $e^{0,2}$ haciendo uso de los polinomios de Taylor de grado 1,2,3 y 4.*

$\square$

¿Cómo estimar el error cometido al aproximar un cierto valor haciendo uso de los polinomios de Taylor?

Si $f(x)$ es $m+1$ veces derivable en $[a,b)$ y m veces derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\boxed{f(b) = P_a^m f(b) + \frac{f^{m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.}$$

Teorema: *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en $[a,b]$, continuas en $[a,b]$, m veces derivables en $[a,b)$ y $m+1$ veces derivables en (a,b). Entonces:*

1. *Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - P_a^m f(b)] \cdot g^{m+1)}(c) = [g(b) - P_a^m g(b)] \cdot f^{m+1)}(c)$$

2. *Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\boxed{f(b) - P_a^m f(b) = \frac{f^{m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.}$$

Demostración. Caso 1. Consideramos las funciones

$$F(x) = f(x) - P_a^m f(x) \qquad G(x) = g(x) - P_a^m g(x).$$

A partir de ellas construimos la función $H(x) = F(b)G(x) - G(b)F(x)$.

Paso 1. $H(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$: es continua en $[a, b]$, es derivable en (a, b) y $0 = H(a) = H(b)$. Por tanto existe un punto $c_1 \in (a, b)$ tal que $H'(c_1) = 0$.

Paso 2. $H'(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, c_1]$: es continua en $[a, c_1]$, es derivable en (a, c_1) y $0 = H'(a) = H'(c_1)$. Por tanto existe un punto $c_2 \in (a, c_1)$ tal que $H''(c_2) = 0$.

Y así sucesivamente hasta el paso m.

Paso $m+1$. $H^m(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, c_m]$: es continua en $[a, c_m]$, es derivable en (a, c_m) y $0 = H^{m)}(a) = H^{m)}(c_m)$. Por tanto existe un punto $c \in (a, c_m)$ tal que $H^{m+1}(c) = 0$. Pero

$$0 = H^{m+1)}(c) = F(b) \cdot G^{m+1)}(c) - G(b) \cdot F^{m+1)}(c) = \\ [f(b) - P_a^m f(b)] \cdot g^{m+1)}(c) - [g(b) - P_a^m g(b)] \cdot f^{m+1)}(c).$$

Por lo tanto, hemos encontrado el punto c buscado.

Caso 2. Basta aplicar el caso 1 a $f(x)$ y a $g(x) = (x - a)^{m+1}$.

□

La expresión

$$f(b) - P_a^m f(b) = \frac{f^{m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}$$

sirve para estimar la diferencia entre el valor de $f(x)$ en un punto b cuando lo aproximamos por el valor del polinomio de Taylor en b, es decir, se utiliza para acotar el error cometido en la aproximación.

Ejercicio: *Calcula una cota de los errores cometidos en el ejercicio anterior, al aproximar $e^{0,2}$ haciendo uso de los polinomio de Taylor de grado 1,2,3 y 4.*

Ejercicio: ¿Qué polinomio usarías para encontrar una aproximación de e^1 con seis cifras decimales exactas?

Ejercicio: ¿Qué polinomio usarías para encontrar una aproximación de $\operatorname{sen}(3)$ con error menor que 10^{-10}?

Ejercicio: Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

haciendo uso de la fórmula de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ en 0.

7.2. Estudio local de la gráfica de una función

Si $f(x)$ una función diferenciable en a, $f(x)$ estará definida alrededor de a y tendrá una única recta tangente a en a. La gráfica de la función tendrá ecuación $y = f(x)$ y la recta tangente en a tendrá ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Se dice que $f(x)$ tiene en a un punto de

1. **concavidad**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por encima de la gráfica de $f(x)$:

$$f(a) + f'(a)(x - a) \geq f(x)$$

2. **convexidad**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por debajo de la gráfica de $f(x)$:

$$f(a) + f'(a)(x - a) \leq f(x)$$

3. **inflexión**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por encima de la gráfica de $f(x)$ si $x < a$ y por debajo de $f(x)$ si $x > a$.

   Se dice que una función $f(x)$ es

4. **creciente en un intervalo I** (equivalentemente, **estrictamente creciente**) si para todo $x, y \in I$

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (f(x) < f(y)),$$

5. **decreciente en un intervalo** I (equivalentemente, **estrictamente decreciente**) si para todo $x, y \in I$, si

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (f(x) > f(y)),$$

6. **convexa en un intervalo** I si para todo $x, y, z \in I$, si

$$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

7. **cóncava en un intervalo** I si para todo $x, y, z \in I$, si

$$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

En general, no tiene por qué ocurrir ninguna de las tres cosas.

Teorema: *Sea $f(x)$ una función derivable varias veces. Si la primera derivada en a de orden mayor que 1 que no se anula es*

1. *de orden par y positiva, entonces a es un punto de convexidad para $f(x)$;*
2. *de orden par y negativa, entonces a es un punto de concavidad para $f(x)$;*
3. *de orden impar, entonces a es un punto de inflexión para $f(x)$.*

Demostración. Caso 1. Supongamos que

$$f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{m-1)}(a) = 0, f^{m)}(a) > 0.$$

Por el teorema local de Taylor sabemos que $f(x)$ y $P_a^m f(x)$ tiene un punto de contacto de orden m en a, luego:

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_a^m f(x)}{(x-a)^m} =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{m}(a)}{m!}(x-a)^m]}{(x-a)^m},$$

es decir

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{f^{m)}(a)}{m!} > 0.$$

De modo que el numerador y denominador de la fracción $\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^m}$ tienen que tener el mismo signo alrededor del punto a. Por ser m par, el signo de $(x-a)^m$ es positivo y como consecuencia

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$$

alrededor de a, que es la condición para que a sea punto de convexidad.

Los casos 2 y 3 se razonan de forma similar.

$\square$

Teorema: *Sea $f(x)$ una función derivable varias veces. Si la primera derivada en a es 0 y a es un punto de*

1. *convexidad, entonces a es un mínimo relativo para $f(x)$*
2. *concavidad, entonces a es un máximo relativo para $f(x)$.*

Demostración. Similar a la anterior.

□

Teorema: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

1. *$f(x)$ es creciente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*
2. *$f(x)$ es decreciente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si $x < y$ entonces $y - x > 0$, usando el teorema de valor medio existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como por hipótesis $f'(c) \geq 0$, tenemos que $f(y) - f(x) \geq 0$.

$\Rightarrow$) Si $f'(x) < 0$ en algún punto x, entonces (ya visto) $f(x)$ sería estrictamente decreciente en un entorno de x (contradicción). Por tanto $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

□

Proposición: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

1. *$f(x)$ es convexa en $I \Leftrightarrow f'(x)$ es creciente en I*
2. *$f(x)$ es cóncava $\Leftrightarrow f'(x)$ es decreciente en I.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $f(x)$ una función convexa. Por la definición, si $x < y < z$, tenemos que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Si hacemos que z tienda hasta x, tendremos que

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \Rightarrow f'(x) \leq f'(y)$$

que significa que f' es una función creciente en I.

$\Leftarrow$) Sean $x < y < z$. Aplicando el teorema de valor medio a los intervalos $[x, y]$ e $[y, z]$, encontramos dos valores $u \in [x, y]$ y $v \in [y, z]$ tales que

$$f(y) - f(x) = f'(u)(y - x) \qquad f(z) - f(y) = f'(v)(z - y).$$

Por tanto

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(u) \leq f'(v) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

lo que significa que f es una función convexa en I.

$\square$

Teorema: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

$$f(x) \text{ es convexa} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$$

Demostración. Por la proposición anterior, $f(x)$ es convexa si y solo si $f'(x)$ es creciente. Esto último es cierto si y solo si la derivada de $f'(x)$ es mayor o igual que 0, es decir $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.

$\square$

Capítulo 8

Representación gráfica de funciones y curvas

8.1. Representación gráfica de funciones

La representación gráfica de una función debe incluir el estudio de lo siguiente:

1. Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R}/ \quad \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$.

2. Simetrías: par $f(x) = f(-x)$ o impar $-f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D$.

3. Periodicidad: existe $T \in \mathbb{R}$ llamado período tal que

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall\, x \in D.$$

4. Puntos de corte con los ejes: en el eje OX los puntos de la forma $(x, 0)$ y en el eje OY los puntos de la forma $(0, f(0))$.

5. Signo de la función: los conjunto de puntos $\{x \in \mathbb{R}/ \quad f(x) > 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R}/ \quad f(x) < 0\}$.

6. Puntos de discontinuidad:

   Evitable: existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es un número real.

   Esencial: no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ o es $\pm\infty$. A su vez, esta puede ser:

- De salto infinito: existen los límites laterales y alguno es $\pm\infty$.
- De salto finito: existen los límites laterales y ambos son finitos.
- De segunda especie: no existe algún límite lateral.

7. Asíntotas:

Horizontales: son rectas de la forma $y = b$ tales que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$

Verticales: son rectas de la forma $x = a$ tales que

$$\lim_{x\to a^+,a^-} f(x) = \pm\infty$$

Oblicuas: son rectas de la forma $y = mx + n$ tales que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = n.$$

8. Regiones de crecimiento y decrecimiento
9. Máximos o mínimos relativos.
10. Regiones de concavidad y convexidad.
11. Puntos de inflexión.

$\square$

8.2. Curvas en el plano

8.2.1. Curvas en forma paramétrica

Sea I un subconjunto de los número reales. Una **curva en el plano** $\mathbb{R}^2$ es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

I es el dominio de definición de la curva y suele ser un intervalo. $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ se conoce como la expresión paramétrica de la curva. Una relación entre x e y que solo verifiquen los puntos de la curva se denomina expresión implícita de la curva.

Ejemplos:

1. $\sigma_1(t) = (\cos 5t, \operatorname{sen} t)$ para $t \in [0, 2\pi)$.
2. $\sigma_2(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$ para $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
3. Cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un caso particular de curva en el plano:

$$\begin{array}{rrcl} \sigma_f : & t \in \mathrm{Dom}(f) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, f(t)) \end{array}$$

$\square$

Figura 8.1: $\sigma_1(t) = (\cos 5t, \operatorname{sen} t)$ y $\sigma_2(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$.

Dada una curva $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ $(t \in [t_1, t_2])$ en el plano, si alrededor de un punto $t = t_0$ se puede expresar y en función de x $(y = f(x))$, entonces

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = \frac{d(f \circ x)}{dt} = \frac{df}{dx}(x(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0)$$

de donde se deduce que

$$\frac{df}{dx}(x(t_0)) = \frac{\frac{dy}{dt}(t_0)}{\frac{dx}{dt}(t_0)}$$

y en general

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$(x'(t_0), y'(t_0))$ es el vector tangente a una curva paramétrica en un punto $t = t_0$ y la recta tangente a la curva en el punto $t = t_0$ tiene ecuación

$$(y - y(t_0))x'(t_0) = (x - x(t_0))y'(t_0).$$

La recta normal a la curva en el punto $t = t_0$ es la que pasa por el punto $(x(t_0), y(t_0))$ y tiene vector director perpendicular al tangente, es decir, $(-y'(t_0), x'(t_0))$.

Los posibles máximos o mínimos relativos de tangente horizontal son los puntos tales que $y'(t) = 0$ y $x'(t) \neq 0$. Los de tangente vertical son aquellos tales que $x'(t) = 0$ y $y'(t) \neq 0$.

Los puntos singulares de la curva son aquellos en los que $x'(t) = y'(t) = 0$.

Si existen t y t' tales que $x(t) = x(t')$ y $y(t) = y(t)'$, dicho punto de la curva es múltiple.

La curva es simétrica

- respecto del eje Y si para todo $t \in [t_1, t_2]$ existe $t' \in [t_1, t_2]$ tal que $x(t) = -x(t')$ y $y(t) = y(t')$;
- respecto del eje X si para todo $t \in [t_1, t_2]$ existe $t' \in [t_1, t_2]$ tal que $x(t) = x(t')$ y $y(t) = -y(t')$;
- respecto del punto $(0, 0)$ si para todo $t \in [t_1, t_2]$ existe $t' \in [t_1, t_2]$ tal que $x(t) = -x(t')$ y $y(t) = -y(t')$.

La curva tiene asíntota

- horizontal de ecuación $y = b$ si
$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty, \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = b \qquad (t_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\});$$
- vertical de ecuación $x = a$ si
$$\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty \qquad \lim_{t\to t_0} x(t) = a, \qquad (t_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\});$$
- oblicua de ecuación $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ si existe $t_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}$ tal que
$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m, \quad \lim_{t\to t_0} [y(t) - mx(t)] = n, \quad (t_0 \in \{\mathbb{R}, \pm\infty\}).$$

Ejercicio: *Estudia las gráficas de la curvas*

1. $\sigma_1(t) = (\cos 5t, \operatorname{sen} t)$ para $t \in [0, 2\pi)$.
2. $\sigma_2(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$ para $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
3. $x = t - \operatorname{sen} t \quad y = 1 - cos(t)$ para $t \in [0, 2\pi)$.

$\square$

Figura 8.2: $r = \frac{e^\theta+1}{e^\theta+2}$ y $r = \mathrm{sen}(4\theta)$.

8.2.2. Curvas en polares

Sean (r, θ) las coordenadas polares de un punto del plano $\mathbb{R}^2$. El conjunto de puntos que verifican $r = 3$ forman la circunferencia de radio 3 centrada en el punto 0. El anterior es un ejemplo de ecuación polar de una curva.

En general, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función siempre positiva, el conjunto de puntos cuyas coordenadas polares verifican $r = f(\theta)$ forman una curva en el plano y la expresión $r = f(\theta)$ es la ecuación polar de la curva.

Toda curva polar $r = f(\theta)$ se puede estudiar como la curva paramétrica

$$x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \qquad y(\theta) = f(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Aparte de todo lo estudiado para curvas paramétrica, también es posible estudiar en una curva polar lo siguiente:

Simetrías:

- respecto al eje polar X si $f(\theta) = f(-\theta)$
- respecto al eje perpendicular al polar Y si $f(\theta) = f(\pi - \theta)$
- respecto al polo $(0, 0)$ si $f(\theta) = f(\pi + \theta)$.

Asíntotas:

- de ecuación $\theta = \theta_0$ si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \infty$,
- de ecuación $r = r_0$ si $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} f(\theta) = r_0$.

Ejercicio: *Estudia las gráficas de las curvas polares*

$$r = \frac{e^\theta + 1}{e^\theta + 2} \quad y \quad r = \mathrm{sen}(4\theta).$$

□

Capítulo 9

Integral de Riemann

9.1. Definición y propiedades de la integral de Riemann

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función positiva definida en un intervalo $[a, b]$. Pretendemos calcular el área delimitada por la gráfica de la función f y por el eje X desde $x = a$ hasta $x = b$, que denotaremos $\int_a^b f(x)dx$.

Para calcular el área, elegimos una **partición** $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, es decir, un conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad \text{y} \quad [a, b] = \cup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k].$$

A partir de la partición anterior, se puede calcular el valor $s(f, P)$, que será la suma de las área de los rectángulos de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura el valor ínfimo de $f(x)$ en intervalo $[x_{k-1}, x_k]$:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)|x_k - x_{k-1}| \quad \text{siendo} \quad m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

De forma similar, se puede calcular el valor $S(f, P)$, que será la suma de las áreas de los rectángulos de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura el valor supremo de $f(x)$ en intervalo $[x_{k-1}, x_k]$:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)|x_k - x_{k-1}| \quad \text{siendo} \quad M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

De esta forma, tenemos acotado el valor del área que pretendíamos calcular:

$$s(f,P) \leq \int_a^b f(x)\ dx\ \leq S(f,P).$$

Si queremos aproximarnos más al valor del área buscada, podemos elegir una partición P' más fina que P, es decir, una partición del intervalo $[a,b]$ con más puntos. Se puede comprobar fácilmente que si P' es más fina que P, entonces

$$s(f,P)\ \leq\ s(f,P')\ \leq\ \int_a^b f(x)\ dx\ \leq\ S(f,P')\ \leq\ S(f,P)$$

Siguiendo este proceso de forma que la anchura de los "trocitos" $[x_{k-1},x_k]$ de las particiones tienda a 0, podremos aproximar el valor del área buscada tanto como queramos, siempre que se verifique que los límites de las sumas $s(f,P)$ y $S(f,P)$ converjan al mismo valor. En ese caso, el área $\int_a^b f(x)dx$ es la integral de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ y se define como

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim S(f,P) = \lim s(f,P)}$$

y la función $f(x)$ se dice que es integrable.

El proceso anterior y la correspondiente definición de integral de $f(x)$ en $[a,b]$ es válido también cuando la función es negativa o cuando tiene una parte positiva y otra negativa.

Si la función es negativa, el resultado de $\int_a^b f(x)dx$ será el valor del área definida por $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, pero con el signo negativo.

Si la función tiene una parte positiva y otra negativa en $[a,b]$, el valor de $\int_a^b f(x)dx$ obtenido mediante el proceso anterior **es la suma del área definida por la parte positiva de la función menos el área definida por la parte negativa de la función en el intervalo** $[a,b]$**.**

En resumen, una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada es **integrable** en $[a,b]$ si

$$\lim S(f,P) = \lim s(f,P)$$

cuando la partición P se hace más fina y la distancia mínima de los puntos de la partición tiende a 0 . En ese caso se llama integral de $f(x)$ en $[a,b]$ a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim S(f,P) = \lim s(f,P)$$

y su valor representa la suma del área definida por el eje X y la parte positiva de la función $f(x)$ menos el área definida por el eje X y la parte negativa de la función $f(x)$, todo ello dentro del intervalo $[a,b]$

9.1.1. Propiedades de la integral

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función acotada en un intervalo $[a,b]$.

1. Si $f(x)$ es monótona (creciente o decreciente) o continua en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.
2. Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $-f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
3. Si $f(x)\geq 0$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
4. Si $f(x)$y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$ y $f(x)\geq g(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
5. Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $|f(x)|$ también y $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
6. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$ entonces $\alpha f(x)\pm\beta g(x)$ también y $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
7. Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ $\forall a<c<b$ y $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
8. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
9. Si $f(x)$ tiene, como mucho, un número de discontinuidades finitas o infinitas numerables (tantas discontinuidades como números naturales hay), entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.

9.2. Teoremas fundamentales del cálculo integral

Teorema del valor medio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Sean

$$m = \text{ínf}\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces:

1. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
2. existe $m \leq \mu \leq M$ tal que $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Entonces, existe la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida así:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Además la función $F(x)$ es continua en $[a, b]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

$$f(x) = x \qquad\qquad F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$\square$

Sea $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$. Una **primitiva** de $f(x)$ en $[a,b]$ es una función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Ejemplos:

1. $\frac{x^2}{2}$ es primitiva de x en todo $\mathbb{R}$.
2. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.

Ejercicio: Justifica que si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una misma función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

$\square$

Regla de Barrow

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $G(x)$ una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Ejemplo: $\int_1^3 x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$.

Capítulo 10

Técnicas de integración

10.1. Primitivas de una función. Primitivas inmediatas

Denotaremos $\int f(x)\ dx$ al conjunto de funciones primitivas de $f(x)$, es decir, las funciones cuya derivada es $f(x)$. Ya justificamos en el tema anterior que dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante, por tanto, conocida una primitiva, se conocerán todas las demás. A continuación se presentan las primitivas de algunas funciones que denominaremos primitivas inmediatas:

$\int k\ dx = kx \quad \forall k \in \mathbb{R}$ $\int \frac{1}{x}\ dx = \mathrm{L}\,\lvert x\rvert$ $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{La}$ $\int \cos(x)\ dx = \operatorname{sen}(x)$ $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = \operatorname{tg}(x)$ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arc\,sen}(x) = -\operatorname{arcos}(x)$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall n \neq -1$ $\int e^x\ dx = e^x$ $\int \operatorname{sen}(x)\ dx = -\cos(x)$ $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\ dx = -\operatorname{cotg}(x)$ $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \operatorname{arc\,tg}(x)$

10.2. Integración por partes

Sea $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones. Dado que

$$(u(x) \cdot v(x))' = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

se deduce que

$$u(x) \cdot v'(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x)$$

y por tanto

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Ejercicios: Calcula $\int \mathrm{L}\, x\, dx \qquad \int \frac{\mathrm{L} x}{x}\, dx \qquad \int x \cos x\, dx \qquad \int e^x \cos x\, dx$

10.3. Integración por cambio de variable

Sea $f(x)$ una función. Supongamos que x es función de otra variable t (x=g(t)). En ese caso, se puede demostrar que

$$\int f(x)\ dx \overset{x=g(t)}{=} \int f(g(t))\ g'(t)\ dt$$

Si se utiliza este método de integración, hay que tener en cuenta que, o bien expresamos el resultado final en la variable original deshaciendo el cambio $(t = g^{-1}(x))$, o bien cambiamos los límites de integración en el caso de que lo estemos aplicando al cálculo de una integral $\int_a^b f(x)\ dx$.

Ejercicio: Calcula $\int_1^3 x\sqrt{x-1}\ dx$

10.4. Integración de funciones racionales

Una función racional en la variable x es un cociente de polinomios en dicha variable. En esta sección resolveremos integrales de funciones racionales.

Ejemplos:

$\int \frac{x^2}{x-1}\ dx \quad \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\ dx \quad \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\ dx \quad \int \frac{1}{x^3+1}\ dx \quad \int \frac{2x^3-2x^2+16}{x(x^2+4)^2}\ dx$

Caso 1: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ **con** grado$(P) \geq$ grado(Q).

Se utiliza la división de polinomios $P(x) = Q(x)\dot{C}(x) + R(x)$ para descomponer la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx$$

En la integral de $\frac{R(x)}{Q(x)}$ el numerador tiene menor grado que el denominador y corresponde al caso 2.

Ejercicio: Calcula $\int \frac{x^2}{x-1}\, dx$

Caso 2: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad$ grado$(P) <$ grado(Q).

Caso 2.1: $Q(x)$ **solo tiene raíces reales simples** Es decir,

$$Q(x) = k(x - x_1) \dots (x - x_p)$$

con $k, x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$. Siempre es posible descomponer la fracción de esta forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_q}{x - x_p} \right) dx$$

siendo $A_i \in \mathbb{R}$. Las integrales que quedan en la suma son de tipo logaritmo.

Ejercicio: Calcula $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\, dx$

Caso 2.2: $Q(x)$ **tiene raíces reales simples y múltiples:**

$$Q(x) = k(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_p)^{\alpha_p}$$

con $k, x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$. Siempre es posible descomponer la fracción de esta forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1^1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{A_p^1}{x - x_p} + \cdots + \frac{A_p^{\alpha_p}}{(x - x_p)^{\alpha_p}} \right) dx$$

con $A_i^j \in \mathbb{R}$.

Ejercicio: $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\, dx$

Caso 2.3: $Q(x)$ **tiene raíces complejas simples**

$$Q(x) = k(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_p)^{\alpha_p} \ [(x - b_1)^2 + c_1^2] \dots [(x - b_k)^2 + c_k^2]$$

con $k, x_i, a_j, c_j \in \mathbb{R}$ y $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Siempre es posible descomponer la fracción de esta forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1^1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots \right.$$
$$\dots + \frac{A_p^1}{x - x_p} + \dots + \frac{A_p^{\alpha_p}}{(x - x_p)^{\alpha_p}} +$$
$$\left. + \frac{M_1 x + N_1}{[(x - b_1)^2 + c_1^2]} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{[(x - b_k)^2 + c_k^2]} \right) dx$$

siendo $M_j, N_j \in \mathbb{R}$

Ejercicio: $\int \frac{1}{x^3+1} \ dx$

Caso 2.4: $Q(x)$ **tiene raíces complejas múltiples**

Ejemplo: $\int \frac{2x^3-2x^2+16}{x(x^2+4)^2} \ dx$

Para resolver integrales como la del ejemplo se puede emplear el método de Hermite que se presenta en el siguiente apartado.

10.5. Método de Hermite

El método de Hermite permite calcular primitivas de cocientes de polinomios rebajando el grado de los polinomios implicados en sucesivos pasos. Supongamos que

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_s)^{\alpha_p}$$

y grado$(P(x)) <$ grado$(Q(x))$ con $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{C}$. Se puede demostrar que la integral permite esta descomposición:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{H(x)}{D(x)} + \int \frac{K(x)}{S(x)}$$

donde

$D(x) = \mathrm{M.\,C.\,D}(Q(x), Q'(x)) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (x - x_p)^{\alpha_p - 1}$

$S(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_p)$

y $H(x)$ y $K(x)$ se calculan a partir de

$$\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \left(\frac{H(x)}{D(x)}\right)' + \frac{K(x)}{S(x)}$$

sabiendo que grado$(H(x)) <$ grado$(D(x))$ y grado$(K(x)) <$ grado$(S(x))$.

Ejercicio: $\int \frac{2x^3-2x^2+16}{x(x^2+4)^2}\ dx$

10.6. Integración de funciones irracionales

En esta sección, se recomiendan cambios de variable que permiten transformar las integrales de la forma

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y R una función racional en las variables x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$, es decir, R es una fracción en la que el numerador y/o el denominador son sumas y productos de x y de $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Ejemplos:

$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\ dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}\ dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\ dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\ dx$

Los cambios de variable transforman las integrales dadas en integrales de cocientes de polinomios como las de la sección 10.4, pero puede haber otros métodos más cortos o sencillos para resolver el cálculo. Los cambios son los siguientes:

Si	Cambio de variable
$a > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$
$c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
$a < 0$ y $c < 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$
$\int R(x, \sqrt{x^2 \pm c^2})dx$	$\sqrt{x^2 \pm c^2} = t + x$
$\int R(x, \sqrt{c^2 - x^2})dx$	$x = c\ \operatorname{sen}(t)$ o $x = c\ \cos(t)$

10.7. Integración de funciones trigonométricas

10.7.1. Integración por cambios de variable

En esta sección se presentan cambios de variables que permiten simplificar el cálculo de integrales del tipo

$$\int R(sen(x), cos(x))dx$$

donde R una función racional en las variables $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, es decir, R es una fracción en la que el numerador y/o el denominador son sumas y productos de $sen(x)$ y $cos(x)$.

Ejemplos:

$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x+1}\ dx \qquad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\ dx \qquad \int \operatorname{sen}^3 x\ \cos x\ dx \qquad \int \frac{4\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\ dx$

Los cambios de variable permiten transformar la integral en una integral de cocientes de polinomios como las de la sección 10.4, pero puede haber otros métodos más cortos o sencillos para resolver el cálculo. Son los siguientes:

Si la función verifica...	Cambio de variable
$R(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$	$\cos(x) = t$
$R(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$	$\operatorname{sen}(x) = t$
$R(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$ $R(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$	$\operatorname{tg}(x) = t$
En todos los casos	$\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = t$

Ejercicio: Calcula la siguiente integral

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^3 x}\ dx$$

10.7.2. Integración por descomposición

En algunas integrales donde aparecen funciones trigonométricas se puede intentar simplificar la expresión descomponiéndola mediante la aplicación de identidades trigonométricas.

Ejemplos:

$\int \operatorname{sen}^2 x \ dx$ $\quad \int \cos(4x) \ \operatorname{sen}(3x) \ dx$ $\quad \int \cos^2 x \ dx$

$\int \operatorname{tg}^2 x \ dx$ $\quad \int \operatorname{sen}^4 x \ dx$ $\quad \int \cos^5 x \ dx$

Las fórmulas trigonométricas útiles para la integración por descomposición son estas:

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad \sec^2 a = 1 + \operatorname{tg}^2 a \qquad \operatorname{cosec}^2 a = 1 + \operatorname{cotg}^2 a$$

Fórmulas para la suma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \ \cos b \ + \ \cos a \operatorname{sen} b\\ \cos(a+b) &= \cos a \ \cos b \ - \ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\\ \operatorname{tg}(a+b) &= \tfrac{\tan a \ + \ \operatorname{tg} b}{1 \ - \ \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}\end{aligned}$$

Fórmulas para la diferencia

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \ \cos b \ - \ \cos a \operatorname{sen} b\\ \cos(a-b) &= \cos a \ \cos b \ + \ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\\ \operatorname{tg}(a-b) &= \tfrac{\operatorname{tg} a \ - \ \operatorname{tg} b}{1 \ + \ \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}\end{aligned}$$

Fórmulas para el ángulo doble

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2a) &= 2 \operatorname{sen} a \ \cos a\\ \cos(2a) &= \cos^2 a \ - \ \operatorname{sen}^2 a\\ \operatorname{tg}(2a) &= \tfrac{2 \ \operatorname{tg} a}{1 \ - \ \operatorname{tg}^2 a}\end{aligned}$$

Fórmulas para el ángulo mitad

$$\begin{aligned}\cos \tfrac{a}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1 \ + \ \cos a}{2}}\\ \operatorname{sen} \tfrac{a}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1 \ - \ \cos a}{2}}\\ \operatorname{tg} \tfrac{a}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1 \ - \ \cos a}{1 \ + \ \cos a}}\end{aligned}$$

Fórmulas para la suma y diferencia de senos, cosenos y tangentes

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a \ + \ \operatorname{sen} b &= 2 \ \operatorname{sen} \tfrac{a+b}{2} \ \cos \tfrac{a-b}{2} \\ \operatorname{sen} a \ - \ \operatorname{sen} b &= 2 \ \operatorname{sen} \tfrac{a-b}{2} \ \cos \tfrac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos a \ + \ \cos b &= 2 \ \cos \tfrac{a+b}{2} \ \cos \tfrac{a-b}{2} \\ \cos a \ - \ \cos b &= -2 \ \operatorname{sen} \tfrac{a+b}{2} \ \operatorname{sen} \tfrac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a \ + \ \operatorname{tg} b &= \tfrac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a \ \cos b} \\ \operatorname{tg} a \ - \ \operatorname{tg} b &= \tfrac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos a \ \cos b} \end{aligned}$$

Fórmulas para el producto de senos y cosenos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a \cos b &= \tfrac{1}{2} \ [\operatorname{sen}(a+b) \ + \ \operatorname{sen}(a-b)] \\ \cos a \operatorname{sen} b &= \tfrac{1}{2} \ [\operatorname{sen}(a+b) \ - \ \operatorname{sen}(a-b)] \\ \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2} \ [\cos(a+b) \ + \ \cos(a-b)] \\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= -\tfrac{1}{2} \ [\cos(a+b) \ - \ \cos(a-b)] \end{aligned}$$

Ejercicios:

$$\int \cos^2 x \ dx \qquad \int \operatorname{tg}^2 x \ dx \qquad \int \operatorname{sen}^2 x \ dx$$

Capítulo 11

Aplicaciones de la integral definida

11.1. Área definida por dos funciones

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ integrables que se cortan en dos puntos a y b y tal que $f(x) \geq g(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$, el área que definen esas dos funciones se puede calcular con la integral

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

$$\textstyle\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ejercicios: Calcula en cada uno de los siguientes casos el área definida por las curvas:

1. $x = 3$, $x = -3$, $y = x^2 - 4$, $y = 0$.
2. $y = 1/2$, $x = 1$, $y = x^3$, $x = 2$.
3. $y = x^4$, $y = 8x^2 + 9$.
4. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 1/2$.

11.2. Área definida por una curva en paramétricas

Sea $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ una curva en coordenadas paramétricas. El área definida por la curva $\sigma(t)$ y el eje x, entre los valores del parámetro $t \in [t_1, t_2]$ se puede calcula con la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|dt.$$

$\int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|dt$

Ejercicio: Calcula el área que encierra una circunferencia de radio 3.

11.3. Área definida por una curva en polares

Sea $r = r(\theta)$ una curva en coordenadas polares. El área definida por la curva $r(\theta)$ y las rectas $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ se puede calcula con la integral

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta.$$

$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta.$

Ejercicio: Calcula el área del primer cuadrante de una circunferencia de radio 3.

11.4. Longitud de un arco de curva

Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$ y derivable en (a, b). La longitud de la curva entre los puntos $x = a$ y $x = b$ se puede calcular con la integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

La longitud de una curva en paramétricas $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ entre los puntos $((x(t_1), y(t_1)$ y $(x(t_2), y(t_2))$ se puede calcular con la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

La longitud de una curva en polares $r = r(\theta)$ entre los puntos de coordenadas polares $(r(\theta_1), \theta_1)$ y $(r(\theta_2, \theta_2)$ se puede calcular con la integral

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta$$

Ejercicio: Calcula la longitud de una circunferencia de radio 3.

11.5. Área de una superficie de un cuerpo de revolución

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$. Si hacemos girar la función alrededor del eje X o del eje Y, se generará una figura tridimensional que se llama cuerpo de revolución. Lo mismo ocurre si en lugar de una función consideramos una curva cualquiera $(x(t), y(t))$ entre los puntos $(x(t_1), y(t_1))$ y $(x(t_2), y(t_2))$.

El área de la **superficie de un cuerpo de revolución generado al girar una función alrededor del eje** X se puede calcular con la integral

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Si en lugar de una función $f(x)$ tenemos una curva $(x(t), y(t))$, el cálculo de la superficie sería

$$2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

El área de la **superficie de un cuerpo de revolución generado al girar una función alrededor del eje** Y se puede calcular con la integral

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Si en lugar de una función $f(x)$ tenemos una curva $(x(t), y(t))$, el cálculo de la superficie sería

$$2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

Ejercicio: Calcula el área de la superficie de una esfera de radio 3.

11.6. Volumen de un cuerpo

El volumen de un cuerpo tridimensional contenido entre los planos $x = a$ y $x = b$ se puede calcular con la integral

$$\int_a^b A(x)dx$$

Siendo $A(x)$ el área de la superficie que resulta de intersecar el cuerpo con un plano perpendicular al eje X que pase por el punto $(x, 0, 0)$.

En el caso de que el cuerpo sea de revolución resultado de girar la función $f(x)$ alrededor del eje X entre los valores $x = a$ y $x = b$, lo anterior se reduce a calcular la integral

$$\int_b^a \pi[f(x)]^2dx$$

Se pueden obtener expresiones similares en función de las variables y o z.

Ejercicio:

1. Calcula el volumen que encierra un cono de altura b y base una circunferencia de radio a.

2. Calcula el volumen que encierra una esfera de radio 3.

Capítulo 12

Integrales impropias

12.1. Integrales en intervalos no acotados

En este apartado pretendemos dar sentido al cálculo de integrales de funciones en intervalos que no están acotados. Por ejemplo,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx$$

Como la función $1/x$ es acotada e integrable en todo intervalo $[1, M]$ si $M \geq b$, podemos calcular la integral anterior como

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\ dx.$$

con lo que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\ dx = \lim_{M\to\infty} [Ł|x|]_1^M = \lim_{M\to\infty} (Ł|M| - Ł|1|) = \infty$$

En general, si $b \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ es una función acotada e integrable en todo intervalo $[b, M]$ con $M \geq b$, se define

$$\boxed{\int_b^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_b^M f(x)\ dx.}$$

De forma similar, si integramos en el intervalo $(-\infty, b]$, con $b \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ es una función acotada e integrable en todo intervalo $[M, b]$ con $M \leq b$, se define

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{b} f(x)dx.}$$

Cada una de las integrales anteriores es **convergente** si existe el límite correspondiente y es finito; es **divergente** si el límite es $\pm\infty$; no existe si no existe el límite.

Si lo que queremos es integrar en el intervalo $(-\infty, \infty)$, como por ejemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$$

tendremos que descomponer la integral de esta forma o de otra parecida:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$$

En general, si $f(x)$ es acotada e integrable en $[N, c]$ y en $[c, M]$ para todo $N \leq c$ y $c \leq M$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx =$$
$$\lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{c} f(x)dx + \lim_{M\to\infty} \int_{c}^{M} f(x)dx.$$

Ejercicios: Calcula las siguientes integrales

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\ dx \qquad \int_{0}^{\infty} x^2\ dx \qquad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\ dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\ dx$$

12.2. Criterios de convergencia de integrales en intervalos no acotados

A menudo, lo que interesa de un integral en un intervalo no acotado no es su valor, sino saber si es convergente o no. Esto se puede estudiar sin tener que hacer el cálculo.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones **positivas y continuas en** $[a, \infty)$. Para estudiar la convergencia de $\int_a^\infty f(x)dx$ y de $\int_a^\infty g(x)dx$ se pueden emplear los criterios[1] que se exponen a continuación.

Criterio de comparación

1. Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ a partir de un cierto x en adelante, entonces

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty.$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)dx = \infty.$$

Criterio del límite

Sea $A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$:

1. Si $A \in R - \{0\}$, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.

2. Si $A = 0$, entonces

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty.$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)dx = \infty.$$

3. Si $A = \infty$, entonces

$$\int_a^\infty g(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \infty.$$

[1]Si las funciones son negativas o se integra en el intervalo $(-\infty, b]$, se pueden enunciar unos criterios parecidos con unos cambios mínimos.

$\int_a^\infty f(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)dx < \infty.$

$\square$

Ejercicios: Estudia la convergencia de las siguientes integrales

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + 15}\ dx \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\ dx$$

12.3. Integrales de funciones no acotadas

Supongamos que queremos darle un sentido a lo siguiente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ dx.$$

La función $\frac{1}{x}$ no está acotada en 0, sin embargo se puede integrar en todo intervalo de la forma $[M, 1]$ con $M > 0$, y se puede definir

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\ dx := \lim_{M\to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x}\ dx = \lim_{M\to 0^+} [Ł|x|]_M^1 = L|1| + \infty = \infty.$$

En general, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ es una función no acotada en a pero integrable en todo intervalo $[M, b]$ con $M > a$, se define

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{M\to a^+} \int_M^b f(x)\ dx.}$$

La integral es **convergente** si existe el límite anterior y es finito; es **divergente** si el límite es $\pm\infty$; no existe si no existe el límite.

De forma similar, si $f(x)$ no es acotada en b pero es acotada en $[a, M]$ $\forall M < b$, definimos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{M\to b^-} \int_a^M f(x)\ dx.}$$

Si $f(x)$ no es acotada en $c \in (a,b)$, pero es integrable en $[a, M_1]$ y en $[M_2, b]$, para todo $M_1 < c < M_2$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$
$$\lim_{M_1 \to c^-} \int_a^{M_1} f(x)dx + \lim_{M_2 \to c^+} \int_{M_2}^b f(x)dx.$$

Ejercicios: Calcula

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^0 \frac{1}{x^4} \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Sea $f(x)$ una función no acotada en $c \in (a,b)$. Se define **valor principal de Cauchy** de la integral de una función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ como

$$\mathrm{VP}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right)$$

El valor principal de Cauchy de una integral puede coincidir con el valor de la integral, pero puede ser distinto.

Ejercicios: Calcula el valor de la integral y el valor principal de la integral en los siguientes casos:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}$$

12.4. Criterios de convergencia para integrales de funciones no acotadas

Supongamos que $f(x) \geq 0$ es una función continua en $[a,b)$ y no acotada en b . Para estudiar la convergencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se pueden utilizar los siguientes criterios[2]:

[2]Si la función es negativa o es no acotada en a en lugar de en b, se pueden enunciar unos criterios parecidos con cambios mínimos.

Criterio de comparación

1. Si existe otra función $g(x)$ tal que $f(x) \leq g(x)$ $\forall a < x < b$, entonces
$$\int_a^b g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty.$$
2. Si existe otra función $g(x)$ tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ $\forall a < x < b$, entonces
$$\int_a^b g(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \infty.$$

Criterio del límite

Sean $g(x) \geq 0$ otra función definida en $[a, b)$ y tal que $A = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Entonces:

1. Si $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\int_a^b g(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.
2. Si $A = 0$, entonces
$$\int_a^b g(x)dx < \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty.$$
3. Si $A = \infty$, entonces
$$\int_a^b g(x)dx = \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \infty.$$

Ejercicios: Determina si son convergentes o no las siguientes integrales:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad \int_0^2 \frac{1}{x-2}\ dx \qquad \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^p}\ dx$$

12.5. Integrales de funciones no acotadas en intervalos no acotados

Supongamos que queremos calcular o estudiar la convergencia de la integral
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2-4}\ dx.$$
Presenta varios problemas:

1. Uno de los extremos de integración es ∞, por lo que estamos integrando en el intervalo no acotado $[0, \infty)$.

2. La función no está acotada en el valor $x = 2$ que está incluido en el intervalo de integración

En general, para el estudio de una integral de una función no acotada en un intervalo no acotado, debemos descomponer la integral en una suma de integrales, de modo que cada una de las integrales que manejemos presente solo una dificultad, bien integración en intervalo no acotado, bien integración de función no acotada en un solo extremo de integración.

En el caso del ejemplo, se podría descomponer así:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2-4}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x^2-4}\,dx + \int_3^\infty \frac{1}{x^2-4}\,dx.$$

La integración en el intervalo $[2, 3]$ podría sustituirse por la integración en cualquier otro intervalo $[2, b]$ con $b > 2$.

Ejercicios: Estudia la convergencia de las siguientes integrales:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(2x)dx \qquad \int_0^\infty \frac{1}{3x^2-2x+2}dx \qquad \int_0^\infty xe^{-x}dx$$

Capítulo 13

Integración numérica

13.1. Integración numérica mediante interpolación

El objetivo es obtener un valor aproximado de $\int_a^b f(x)dx$ sin calcular la primitiva de $f(x)$. La idea es sustituir $\int_a^b f(x)dx$ por $\int_a^b p(x)dx$, siendo $p(x)$ una función que se parezca a $f(x)$. La forma más sencilla de obtener una función que se parezca a $f(x)$ en todo un intervalo $[a,b]$ es elegir un conjunto de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (llamados nodos) del intervalo $[a,b]$ y construir un polinomio que en esos puntos tome los mismo valores que la función $f(x)$.

Ejemplo: *Una función $f(x)$ toma los siguientes valores:*

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-2	0	4

Calcula un polinomio que pase por esos mismos puntos y aproxima la integral de $f(x)$ en el intervalo $[-1,2]$ por el valor de la integral del polinomio.

Solución: Como son 4 puntos, es decir 4 condiciones, intentaremos buscar un polinomio con cuatro coeficientes, por tanto, de grado menor o igual que 3 y de la forma $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. El sistema que resulta es

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 &= -2\\
a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 &= -2\\
a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 &= -2\\
a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 + a_3(2)^3 &= 4
\end{aligned}$$

Que es un sistema compatible determinado y que, por tanto, tiene una única solución, es decir, existe un único polinomio de grado menor o igual que 3 que pasa por los puntos de la tabla. Dicho polinomio es $P(x) = -2 + x + x^2$.

La integral de la función se puede aproximar así:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\ dx \approx \int_{-1}^{2} (-2 + x + x^2)\ dx = \left[-2x + x^2/2 + x^3/3\right]_{-1}^{2} = -7/6$$

□

Se puede demostrar que si tenemos $n + 1$ nodos, hay un único polinomio de grado menor o igual que n que pasa por esos nodos.

Figura 13.1: Integración por aproximación

13.1.1. Regla del trapecio

Cuando la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se aproxima por la integral del polinomio de grado 1 que pasa por los nodos $x = a$ y $x = b$, el método de integración numérica se conoce como **método del trapecio**. En este caso, se obtiene la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

El error en la aproximación anterior es igual a

$$\text{error} = \frac{f''(\xi)}{2}\frac{(a-b)^3}{6}$$

para un cierto valor $\xi \in (a, b)$, que será, en general, desconocido. Esto implica que la regla de aproximación dará un resultado exacto, no aproximado, si se aplica a funciones que sean polinomios de grado 1.

En resumen, si $h = b - a$, la **Regla del Trapecio** quedaría así:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] \qquad \text{con error}= -\,f''(\xi)\frac{h^3}{12}} \tag{13.1}$$

para un cierto $\xi \in [a, b]$.

Ejemplo: *Calcula* $\int_0^{0,2} e^{x^2}dx$ *con la regla del trapecio.*

$$\int_0^{0,2} e^{x^2}dx \approx \frac{0,2-0}{2}[e^0 + e^{0,2^2}] = 0,20408107741924$$

Sabiendo que si $x \in [0, 0,2]$ entonces

$$|f''(x)| = |2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}| \leq |f''(0,2)| = |2e^{0,2^2}+4\cdot 0,2e^{0,2^2}| = 2,248151272255559,$$

una cota del error será

$$|-2,248151272255559\frac{0,2^3}{12}| = 0,00149876751484.$$

□

13.1.2. Regla de Simpson

Cuando la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se aproxima por la integral del polinomio de grado 2 que pasa por los nodos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$, el método de integración numérica se conoce como **método del Simpson 1/3**. En este caso, se obtiene la fórmula:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \qquad \text{con error } -f^{4)}(\xi)\frac{h^5}{90}}$$

para un cierto $\xi \in [a, b]$.

De la expresión del error se deduce que será un método exacto si se aplica a funciones que sean polinomios de grado menor o igual que 3.

Cuando la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se aproxima por la integral del polinomio de grado 3 que pasa por los nodos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$ y $x_3 = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \quad \text{con error } -f^{4)}(\xi)\frac{3h^5}{80}}$$

para un cierto $\xi \in [a, b]$.

Es un método exacto también para polinomios de grado menor o igual que 3. Es mejor usar la regla de Simpson 1/3 que esta otra, puesto en ambas el error es proporcional a h^5 pero $|-1/90| < |-3/80|$. En general es preferible usar una regla con un número impar de nodos.

Ejemplo: *Calcula $\int_0^{0,2} e^{x^2}dx$ con la regla de Simpson.*

$$\int_0^{0,2} e^{x^2}dx \approx \frac{0,2/2}{3}[e^0 + 4e^{0,1^2} + e^{0,2^2}] = 0,2027$$

Sabiendo que $x \in [0, 0,2]$, entonces

$$\begin{aligned} |f^{4)}(x)| = |12e^{x^2} + 48e^{x^2}x^2 + 16e^{x^2}x^4| &\leq |f^{4)}(0,2) \\ &= |12e^{0,2^2} + 48e^{0,2^2}0,2^2 + 16e^{0,2^2}0,2^4| = 14,5147, \end{aligned}$$

y una cota del error será

$$|-14,5147\frac{(0,2/2)^5}{90}| = 1,6 * 10^{-6}$$

□

13.2. Reglas compuestas

Este método consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos y aplicar en cada uno de ellos una regla simple. Por ejemplo, la regla del trapecio compuesta consiste en fijar unos puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ y aplicar la regla del trapecio a cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Es equivalente a sustituir $f(x)$ por una función que aproxime a $f(x)$ por trozos de línea.

Si los puntos están igualmente espaciados y siendo ese espacio $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$ con $i = 1, 2, \ldots, n$, la **regla del trapecio compuesta** nos queda

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{con error } -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi) \end{aligned}}$$

para un cierto $\xi \in [a, b]$. La fórmula es exacta para polinomios de grado menor o igual que 1.

Figura 13.2: Regla del trapecio compuesta con 3 y 4 puntos

Ejemplo: *Calcula un valor aproximado de $\int_0^{0,2} e^{x^2} dx$ mediante la regla del trapecio compuesta.*

Si tomamos tres puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$ y $x_2 = 0{,}2$

$$\int_0^{0,2} e^{x^2} dx \approx \frac{0{,}1}{2}\left[e^0 + 2e^{0{,}1^2} + e^{0{,}2^2}\right] = 0{,}201085$$

Una cota del error sería

$$\left|-\frac{0{,}1^2}{12}(0{,}2-0)(e^{x^2}(2+4e^{x^2}))\right| \leq \left|-\frac{0{,}1^2}{12}0{,}2 \cdot f''(0{,}2)\right| = 0{,}00187346$$

□

Si el número n de intervalos en los que dividimos $[a, b]$ es par podemos aplicar de forma sencilla la **regla de Simpson compuesta** aplicando a cada dos subintervalos la regla de Simpson, con $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$ $(0 \leq i \leq n)$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

con lo que obtenemos la fórmula

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots$$
$$+ 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx f(x_0) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}[2f(x_{2i})+4f(x_{2i-1})] + f(x_n) \\ \hfill \text{con error} - \dfrac{b-a}{180}h^4 f^{4)}(\xi)\end{array}}$$

con $\xi \in [a, b]$.

Capítulo 14

Ecuaciones diferenciales

14.1. Introducción y nociones básicas

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una relación de igualdad entre una variable independiente x, otra dependiente de la primera $y(x)$ y derivadas de distinto orden de la segunda respecto de la primera ($y'(x)$, $y''(x)$, $\ldots$). Se puede presentar en

Forma implícita

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots) = 0,$$

Forma normal:

$$y^{n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1)}$$

Forma diferencial:

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

Ejemplos:

$$x^3y'' - 3xy = 0 \qquad y'' = 4xy + \operatorname{sen} x \qquad (x-1)dx - (x^2 + y^2)dy = 0$$

El *orden* de una EDO es el de la mayor derivada que aparece en la ecuación. El *grado* de una EDO es el mayor exponente de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Ejemplo:

ecuación	orden	grado
$y' = y\tan(x+3)$	1	1
$(y')^2 = y\tan(x+3)$	1	2
$y'' = y\tan(x+3)$	2	1

$\square$

La *solución general* de una EDO es una familia de funciones que verifican la EDO. En general, la solución general de una EDO de orden k es una familia de funciones que depende de una parámetro k.

Ejemplo: La solución general de $y' = \operatorname{sen}(x)$ es $y = -\cos(x) + k$ con $k \in \mathbb{R}$. La solución general de $y'' = -y$ es $y = a\operatorname{sen}(x) + b\cos(x)$, con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.

$\square$

Una *solución particular* de una EDO es un elemento particular de la solución general. Una *solución singular* es una función que verifica la EDO pero que no está recogida en la solución general.

Figura 14.1: Solución singular y algunas soluciones particulares de $y' = y^{1/3}$

Ejemplo: La ecuación $y' = y^{1/3}$ tiene como solución general $y = (\frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}} + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Una solución particular es $y = (\frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}} + 4$ y una solución singular es $y = 0$.

$\square$

En general, una ecuación diferencial no tiene por qué tener solución, y en el caso que la tenga, ésta no tiene por qué ser única. Además, la búsqueda de soluciones exactas de una ecuación diferencial es un problema difícil. Veremos cómo se pueden resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas, pero es habitual tener que recurrir a métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas. El planteamiento típico de una ecuación diferencial ordinaria de grado 1 con valor inicial es

$$y' = f(x, y(x)) \quad y(x_0) = y_0.$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación

$$y' = \frac{-y}{x}, \quad y(2) = -1.$$

Solución. Si $y' = \frac{-y}{x}$, suponiendo que $y \neq 0$ se tiene que

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{y'}{y}\, dx = \int \frac{-1}{x}\, dx \;\Rightarrow\; \text{Ł}|y| = -\text{Ł}|x| + a$$

con $a \in \mathbb{R}$. Denotando $b = e^a$, la solución general se puede expresar así:

$$|y| = \frac{1}{|x|} b$$

siendo[1] $b > 0$, es decir

$$y = \frac{c}{x} \quad c \in \mathbb{R} - 0.$$

De todas las soluciones recogidas en la solución general nos interesa aquella que verifica $y(2) = -1$, es decir:

$$y(2) = \frac{c}{2} = -1 \;\Rightarrow c = -2$$

Nuestra solución particular sería $y = \frac{-2}{x}$.

Una solución singular no recogida en la solución general sería la función

$$y = 0,$$

que habíamos descartado al razonar dividiendo por y en la ecuación diferencial pero que también verifica la ecuación diferencial.

$\square$

En lo que sigue plantearemos ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = f(x, y(x))$$

donde $y(x)$ será una función que dependa de x, y buscaremos la solución general de algunas EDO de primer orden de este tipo.

[1]Hay que tener en cuenta que $b = e^a > 0$))

14.2. Ecuaciones en variables separadas

Una EDO en variables separadas se puede expresar en forma normal así

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

y en forma diferencial como

$$F(x)G(y)dx + H(x)J(y)dy = 0$$

Se pueden resolver integrando por separado las expresiones que dependen de x y por otro las que dependen de y:

$$\int y' \; g(y) \; dy = \int f(x) \; dx$$

Ejemplo: Resuelve las ecuaciones

1. $y' = \cos(3x) + 5$
2. $2y \; dx + 3x \; dy = 0$

14.3. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una función $f(x, y)$ que depende de x y y se dice que es homogénea de grado $k \in \mathbb{R}$ si

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: La función $x^2 + y^2 - xy$ es homogénea de grado 2 y la función $\sqrt{x + y}$ es homogénea de grado 1/2. La función $x^2 + y$ no es homogénea.

Una EDO homogénea se puede expresar en forma normal así

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

y en forma diferencial como

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

siendo f y g dos funciones homogéneas del mismo grado.

Se pueden transformar en EDO en variables separadas mediante el cambio $y = u(x) \cdot x$, teniendo en cuenta que

$$d(u(x) \cdot x) = du\ x + u\ dx$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación

$$(x^2 - 3y^2)\ dx + 2xy\ dy = 0$$

14.3.1. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Una EDO que en forma normal se puede presentar así

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

siendo a, b, c, a', b' y c' números reales, se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea mediante alguno de los siguientes cambios de variable:

1. Si las rectas $y = ax + by + c$, $y = a'x + b'y + c'$ se cortan en un punto (x_0, y_0), el cambio sería

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

2. Si las rectas $y = ax + by + c$, $y = a'x + b'y + c'$ son paralelas, el cambio sería

$$u = ax + by.$$

Ejemplo: Resuelve las ecuaciones

1. $y' = \dfrac{6x - 7y - 4}{3x + y - 2}$ 2. $y' = e^{\frac{4x+3y-2}{5x-y+1}}$ 3. $(x+y-2)\ dx + (x-y+4)\ dy = 0$

14.4. Ecuaciones diferenciales lineales

Una EDO lineal en forma normal se puede presentar así

$$y' = p(x)y + r(x)$$

Siendo $p(x)$ y $r(x)$ funciones en la variable x.

Si $r(x)$ es 0, la EDO lineal se dice que es homogénea y será una EDO en variables separadas:

$$y' = p(x)y \;\Leftrightarrow\; \int \frac{y'}{y}\, dy = \int p(x)\, dx$$

Resolviendo la integral de la izquierda y siendo c una constante se llega a que

$$\text{Ł}|y| - c = \int p(x)\, dx$$

de donde se deduce que

$$y = k\; e^{\int p(x)\, dx}$$

siendo $k \in \mathbb{R}$.

Para encontrar una solución de la ecuación no homogénea $y' = p(x)y + r(x)$, primero obtendremos la solución de la ecuación homogénea correspondiente $y = k\; e^{\int p(x)\, dx}$, y después buscaremos la solución de la no homogénea entre las funciones de la forma $y = k(x)\; e^{\int p(x)\, dx}$, siendo $k(x)$ una función de la variable x.

Ejemplo: Resuelve la ecuación:

$$y' + 2xy = 4x$$

14.5. Ecuaciones de Bernoulli

Una EDO de tipo Bernoulli se puede expresar en forma normal así:

$$y' = p(x)y + q(x)y^n$$

siendo $n \neq 0, 1$ porque en estos dos casos la EDO sería lineal. En forma diferencial quedaría así:

$$dy = (p(x)y + q(x)y^n)\; dx$$

Si dividimos toda la ecuación por y^n y aplicamos el cambio de variable

$$u = \frac{1}{y^{n-1}}$$

la ecuación de Bernoulli se transformará en lineal[2]:

$$\frac{dy}{y^n} = \left(p(x) \frac{1}{y^{n-1}} + q(x) \right) dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{1-n} = (p(x)u + q(x))\, dx$$

es decir

$$\frac{u'}{1-n} = p(x)u + q(x)$$

que es la ecuación lineal $u' = (1-n)p(x)u + (1-n)q(x)$.

Ejemplo: Resuelve la ecuación:

$$y' + xy = x^3 y^3.$$

[2]Aplicando el cambio anterior se obtiene que $\frac{dy}{y^n} = \frac{du}{1-n}$

Capítulo 15

Matrices y determinantes.

15.1. Matrices y operaciones

Una matriz A de números reales de orden $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ números reales ordenados en m filas y n columnas.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene orden 2×3.

a_{ij} denotará al elemento de la fila i y la columna j.

La matriz se denotará $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ o simplemente A.

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ se denotará $\mathcal{M}_{m \times n}$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y A y B son dos matrices, podemos realizar las siguientes operaciones:

- Multiplicar una matriz por un número:

$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

- Sumar dos matrices A y B si $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$:

$$A + B = (a_{i,j} + b_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}.$$

- Multiplicar dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times p}$ y $B \in \mathcal{M}_{p \times n}$:

$$A \cdot B = (\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m \times n}.$$

En el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$, la suma de matrices es una operación que da como resultado otra matriz del conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$: es una operación interna en el conjunto. La suma de matrices dentro del conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ verifica las propiedades asociativa $((A+B)+C = A+(B+C))$, tiene elemento neutro (la matriz con todos los elementos 0), cada matriz tiene su elemento opuesto (la matriz opuesta de $A = (a_{ij})$ es $-A = (-a_{ij})$) y es conmutativa $(A+B = B+A)$.

El producto de una matriz por un número también da como resultado otra matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}$: es una operación externa sobre los números reales.

El producto de dos matrices del conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}$ es una operación interna en $\mathcal{M}_{n\times n}$ que verifica la propiedades asociativa $\big((A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)\big)$, tiene elemento neutro (que es la matriz con todos los elemento 0 salvo los $a_{ii} = 1$). El producto de matrices no es conmutativo.

15.1.1. Tipos de matrices

La matriz traspuesta de A es la matriz A^t que resulta de intercambiar las filas de A por las columnas de A. Se verifica que:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
4. $(\alpha A)^t = \alpha A^t \ \forall \alpha \in R$

A es simétrica si $A^t = A$. A es antisimétrica si $A^t = -A$.

Una matriz A es cuadrada si $m = n$.

Los elementos a_{ii} de una matriz forma la diagonal principal.

Una matriz A es diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

La matriz identidad (Id) es la matriz diagonal con los elementos $a_{ii} = 1$.

Una matriz A es triangular superior (equivalentemente, inferior) si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (equivalentemente, $i < j$).

Dos matrices A y B son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

La matriz A es nula si $a_{ij} = 0$ para todo i, j.

15.1.2. Matriz invertible. Rango de una matriz

La matriz identidad de orden $n \times n$ es

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $A \cdot Id = Id \cdot A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

B es una matriz inversa de A por la derecha si $B \cdot A = Id$

B es una matriz inversa de A por la izquierda si $A \cdot B = Id$.

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, entonces la inversa por la izquierda es también inversa por la derecha. Por tanto, la inversa de una matriz cuadrada es única y se denota A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = Id.$$

Si A tiene inversa se denomina invertible, regular o no singular. No todas las matrices tiene inversa.

Propiedades

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ invertibles. Entonces:

1. A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. $A \cdot B$ es invertible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

3. Si $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

4. Si A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

¿Será invertible $(A + B)$? ¿Cuánto vale su inversa?

Se llaman operaciones elementales de una matriz al intercambio de dos filas o columnas, al producto de una fila o columna por un número distinto de 0, a la suma de una fila o columna otra fila o columna multiplicada por un número, o cualquier combinación finita de las operaciones anteriores.

Cada operación elemental en una matriz A se puede expresar mediante producto de A por otra matriz, que se llama matriz fundamental.

El intercambio de la segunda y tercera filas se puede expresar así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

El producto de la segunda fila por un número α se puede expresar así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Y la suma a la tercera fila de la segunda fila multiplicada por un número α es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

¿Qué cambios produce en A la siguiente operación?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Sustituir la fila segunda por la tercera multiplicada por α.
- Multiplicar la tercera fila por $\alpha\lambda$ y sumarle la segunda.

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tiene inversa, entonces existe un conjunto de matrices fundamentales E_k con $k = 1, \ldots, p$, tales que

$$E_p E_{p-1} \ldots E_1 A = Id,$$

con lo que multiplicando por A^{-1} por la derecha en ambos términos se obtiene que

$$E_p E_{p-1} \ldots E_1 Id = A^{-1},$$

es decir, aplicando las mismas operaciones fundamentales a la matriz Id obtendremos la matriz inversa A^{-1}.

Ejemplo: *Calcula la inversa de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Partimos de A y la matriz Id. El primer cambio consiste en restar a la segunda fila la primera (correspondiente al producto por una cierta matriz fundamental E_1):

$$E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad E_1 \cdot Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El segundo cambio (multiplicar por E_2) consiste en restar a la tercera dos veces la primera:

$$E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 \cdot E_1 \cdot Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A la primera le resto dos veces la segunda (E_3):

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot Id = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A la primera le resto tres veces la tercera (E_4):

$$E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y hemos obtenido la inversa de A.

$\square$

Se dice que un grupo de **filas** de una matriz de números reales son **independientes** si ninguna fila del grupo se puede obtener aplicando operaciones elementales al resto de las filas del grupo, es decir, no es posible obtener ninguna fila multiplicando el resto de filas del grupo por números reales y sumándolas.

De forma similar, se define la **independencia de las columnas** de una matriz.

Se llama **rango de una matriz** A al mayor número de filas (o columnas) independientes de A.

$$\operatorname{rg} A = \text{número máximo de filas independientes}$$

Se verifica que

1. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $P \in \mathcal{M}_{m\times m}$ y $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son invertibles, entonces

$$\operatorname{rg}(PAQ) = \mathrm{A}$$

2. $\operatorname{rg} A = \mathrm{A}^{\mathrm{t}}$

Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son equivalentes:
1. A^{-1} existe.
2. Las n filas de la matriz A son independientes.
3. Las n columnas de la matriz A son independientes.
4. A es producto de matrices elementales.
5. El rango de A es n.

15.2. Determinante de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. El determinante de $|A|$ es la suma de todos los productos posibles de n elementos de A, de modo que:

- en cada sumando hay un elemento y solo uno de cada fila y de cada columna de A,
- cada sumando es precedido del signo $+$ si la permutación que indica las filas de las que provienen los elementos del sumando y la que indica las columnas son de la misma clase. En caso contrario, el sumando es precedido de signo $-$.

15.2.1. Propiedades de los determinantes

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

1. *Una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante.*

   Como consecuencia, toda propiedad enunciada para filas es válida también para columnas y recíprocamente.

2. *Si una matriz tiene una fila o columna con todos sus elementos* 0*, su determinante es* 0.

3. *Si en una matriz* A *se permutan entre sí dos filas o dos columnas, se obtiene otra matriz cuyo determinante es* $-|A|$.

4. *Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, su determinante es* 0.

5. *Si se multiplican por un número* $\lambda \in \mathbb{R}$ *todos los elementos de una fila o columna de una matriz* $|A|$*, el determinante de la matriz obtenida es igual a* $\lambda|A|$.

6. Si una matriz tiene dos filas o columnas proporcionales, su determinante es igual a 0.

7. *Si A, B y C son tres matrices iguales excepto en la fila i, de forma que la fila i de C es suma de las fila i de A y de la fila i de B, entonces* $|C| = |A| + |B|$.

8. Si un matriz tiene una fila o columna que es combinación lineal de las restantes, su determinante es 0.

9. *Si a los elementos de una fila (o de una columna) de una matriz se le suman los de otra fila (respectivamente, otra columna), multiplicados por un número, se obtiene otra matriz que tiene el mismo determinante que A.*

   Como consecuencia, a los elementos de una fila se les puede sumar una combinación lineal de los elementos de las restantes filas de A y se obtiene otra matriz con el mismo determinante.

10. *Aplicando las propiedades anteriores sucesivas veces, toda matriz A se puede transformar en otra matriz triangular que tiene el mismo determinante.*

15.3. Métodos de cálculo de determinantes

15.3.1. Método de Gauss

Se basa en

- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.
- Aplicando las propiedades de los determinantes, toda matriz se puede transformar en otra matriz triangular que tiene el mismo determinante.

Podemos calcular el valor del determinante de una matriz aplicando las propiedades para obtener una matriz triangular con el mismo determinante.

15.3.2. Desarrollo por una fila o columna

Dado el elemento a_{ij} de la matriz A, se define

- **menor complementario de** a_{ij} como el determinante de la matriz que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j.
- **adjunto de** a_{ij}, que denotaremos A_{ij}, como el menor complementario de a_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

Podemos obtener el valor del determinante de una matriz calculando la suma de los elementos de una fila (o columna) multiplicado cada uno de ellos por su adjunto.

15.4. Cálculo de la matriz inversa usando determinantes

Para calcular la inversa de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, puedo seguir estos pasos:

- Calculo la matriz formada por los adjuntos de cada elemento.
- Hallo la traspuesta de la matriz anterior.
- Divido la matriz de los adjuntos traspuesta por $|A|$.

Se obtiene la matriz

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

La anterior es la matriz A^{-1} porque

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

En el producto anterior, los elementos de la diagonal son iguales a 1:

$$\frac{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}}{|A|} = \frac{|A|}{|A|} = 1.$$

y el resto de elementos son 0:

$$\frac{a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 1.$$

15.5. Cálculo del rango de una matriz

Sea $A \in M_{m\times n}$.

- Un **menor de orden** h de la matriz A es cualquier determinante de una matriz de orden $h \times h$ obtenida con los elementos comunes a h filas y h columnas de A.
- **Orlar un menor de orden** h es añadir a ese menor los elementos comunes a una fila y una columna de A distintas a las que formaban el menor. El menor obtenido se llama menor orlado.
- El rango de la matriz A es el máximo número de filas o columnas de A independientes.

Teorema: *Si M es un menor de orden h de A no nulo y todos los menores que se obtienen orlando M con la fila k y todas y cada una de la restantes columnas de A son nulos, se puede asegurar que la fila k se puede obtener multiplicando por números y sumando las h filas de A utilizadas para formar M.*

Consecuencia: *Si el rango de A es r y M es un menor de orden r no nulo de A, cada fila o columna de A se puede obtener multiplicando por números y sumando las h filas de A utilizadas para formar M.*

Método de cálculo del rango de una matriz $A \in M_{m\times n}$

1. Se elige un menor de orden 2 no nulo. Si no lo hay, el rango es 1, salvo que la matriz sea nula.
2. Si tengo un menor de orden k no nulo, se busca un menor no nulo de orden $k+1$ orlando el anterior. Si no lo hay, el rango es k.
3. Se repite el paso anterior.

Capítulo 16

Sistemas de ecuaciones lineales

16.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

o en forma matricial $A \cdot X = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{R}$ los coeficientes, x_j las incógnitas a calcular y $c_i \in \mathbb{R}$ los términos independientes.

Una solución del sistema $AX = C$ es un conjunto de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que verifican las ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones lineales pueden ser

1. **Compatible**: tienen alguna solución

   a) **Determinado**: la solución es única.

   $$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_2 & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{-1}{2} \\ x_2 & = & 1 \end{array}$$

   b) **Indeterminado**: hay varias soluciones.

   $$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{-\alpha}{2} \\ x_2 & = & \alpha \end{array} \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **Incompatible**: no tiene solución

   $$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 1 \end{array}$$

Dos sistemas $AX = C$ y $A'X = C'$ son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Si en el sistema $AX = C$ realizamos algunas o varias de las siguientes operaciones resulta un sistema $A'X = C'$ equivalente:

1. Suprimir o añadir un ecuación que es igual a la suma de otras ecuaciones multiplicadas por números.
2. Multiplicar una ecuación por un número distinto de 0.
3. Sumar a una ecuación otras ecuaciones multiplicadas por números.

16.2. Sistemas de Cramer. Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones es de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y no es nulo el determinante de la matriz de los coeficientes.

Teorema: *Todo sistema de Cramer $AX = C$ tiene solución única y se calcula así*

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Demostración. La solución será

$$X = A^{-1}C =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} c_1A_{11} + c_2A_{21} + \dots + c_nA_{n1} \\ c_1A_{12} + c_2A_{22} + \dots + c_nA_{n2} \\ \dots \\ c_1A_{1n} + c_2A_{2n} + \dots + c_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Para demostrar el enunciado, basta tener en cuenta que

$$c_1A_{1i} + c_2A_{2i} + \dots + c_nA_{ni} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

16.3. Teorema de Rouché-Frobenius

Dado el sistema $AX = C$, consideramos la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Teorema (de Rouché-Frobenius): *El sistema $AX = C$ es compatible si y solo si el rango de A es igual al rango de A^*.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $AX = C$ es compatible, existe una solución $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

es decir, la columna C es dependiente de las columnas de la matriz A. Por tanto, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = h$, hay h columnas de A linealmente independientes, que podemos suponer que son las h primeras columnas de A (si fuesen otras, las reordenamos para seguir el razonamiento). Si a esas h columnas le añadimos la columna c_j, el rango sigue siendo h, porque $\text{rango}(A^*) = h$. Se concluye que la columna c_j es dependiente de las h primeras columnas de A:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_h \begin{pmatrix} a_{1h} \\ a_{2h} \\ \dots \\ a_{mh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

es decir, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, 0, \dots, 0$ es solución del sistema $AX = C$.

$\square$

Dado el sistema $AX = C$

1. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) =$ número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) <$ número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

3. Si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$, el sistema es incompatible.

16.4. Método de Gauss de resolución de sistemas

Para resolver un sistema de ecuaciones, transformamos el sistema $AX = C$ en un sistema equivalente $A'X = C'$ donde A' es triangular, haciendo usos de las siguientes operaciones:

1. Intercambiando de ecuaciones
2. Multiplicando una ecuación por un número distinto de 0.
3. Sumando a una ecuación una combinación lineal de otras ecuaciones.

Ejemplo: *Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{array}{rcr} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 12 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 & = & 34 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 & = & 27 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 & = & -38. \end{array}$$

En forma matricial es sistema sería

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{pmatrix}.$$

Paso 1. Elegimos como elemento pivote el término 6 de la primera fila y efectuamos las siguientes operaciones:

$$(\text{fila } 2^a) - 2(\text{fila } 1^a) \quad (\text{fila } 3^a) - 1/2(\text{fila } 1^a) \quad (\text{fila } 4^a) - (-1)(\text{fila } 1^a)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Paso 2. Elegimos como elemento pivote el término -4 de la segunda fila y efectuamos las siguientes operaciones:

$$(\text{fila } 3^a) - 3(\text{fila } 2^a) \quad (\text{fila } 4^a) - (-1/2)(\text{fila } 2^a)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Paso 3. Elegimos como elemento pivote el término 2 de la tercera fila y efectuamos la siguiente operación:

$$(\text{fila } 4^a) - 2(\text{fila } 3^a)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

que es el sistema de ecuaciones triangular superior:

$$\left.\begin{array}{rcl} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 12 \\ -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 10 \\ 2x_3 - 5x_4 & = & -9 \\ -3x_4 & = & -3 \end{array}\right\}$$

de solución

$$\begin{array}{l} x_1 = 1/6(12 - 4x_4 - 2x_3 + 2x_2) = 1 \\ x_2 = -1/4(10 - 2x_4 - 2x_3) = -3 \\ x_3 = 1/2(-9 + 5x_4) = -2 \\ x_4 = 1 \end{array}$$

16.5. Sistemas lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones de la forma $AX = 0$, siendo 0 la matriz nula, es un sistema lineal homogéneo. Un sistema homogéneo siempre es compatible porque la matriz nula $X = 0$ siempre es solución. Puede ser:

1. Compatible determinado si rango $A =$número de incógnitas.

2. Compatible indeterminado si rango $A <$número de incógnitas.

Capítulo 17

Espacios vectoriales

17.1. Definición y propiedades de espacio vectorial

Figura 17.1: Producto por un escalar

Figura 17.2: suma de vectores

Un conjunto V dotado de una operación interna ($+ : V \times V \to V$, normalmente llamada suma) y otra operación externa sobre los números reales ($\cdot\mathbb{R} : \mathbb{R} \times V \to V$, normalmente llamada producto por escalares) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ si se verifican las siguientes propiedades:

1. $(V, +)$ es un grupo conmutativo:

    a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \quad \forall\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \in V$ (propiedad asociativa).

    b) Existe un elemento neutro ($\vec{0}$, vector cero o nulo) tal que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro).

    c) Para cada vector no nulo $\vec{u}$ existe un elemento opuesto ($-\vec{u}$) que sumado con $\vec{u}$ da el neutro (elemento opuesto).

    d) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ (conmutativa).

2. $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}, \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ (propiedad distributiva respecto de la suma de vectores).

3. $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\vec{u} \in V$ (propiedad distributiva respecto de la suma de escalares).

4. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}), \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\vec{u} \in V$ (asociativa mixta).

5. $1\vec{u} = \vec{u}, \forall\vec{u} \in V$.

En lo que sigue, $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ denotará al espacio vectorial V sobre los números reales.

17.1.1. Ejemplos de espacios vectoriales

- Los vectores del plano V_2 y los vectores del espacio V_3 con la suma habitual de vectores y el producto de vectores por un número real.

- El conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \qquad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

  siendo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

- El conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$ con las operaciones

$$\begin{gathered}(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n) \\ \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)\end{gathered}$$

  siendo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Las sucesiones de números reales con la suma habitual de sucesiones y el producto por un número real.

- Los polinomios de grado menor o igual que 3 ($P_3[x]$) con la suma habitual de polinomios y el producto de un polinomio por un número real. Los polinomios de grado 3 no son espacio vectorial.

- Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulan en un punto.

Las siguientes son algunas propiedades que se deducen de la definición de espacio vectorial:

1. $0\vec{u} = \vec{0} \; \forall \; \vec{u} \in V$
   porque $0\vec{u} = (0+0)\vec{u} = 0\vec{u} + 0\vec{u} \Rightarrow 0\vec{u} = \vec{0}$)
2. $\alpha\vec{0} = \vec{0} \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R}$
   porque $\alpha\vec{0} = \alpha(\vec{0}+\vec{0}) = \alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{0} = \vec{0}$).
3. Si $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, entonces o bien $\alpha = 0$, o bien $\vec{u} = \vec{0}$
   porque si $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{u} = (\alpha^{-1}\alpha)\vec{u} = \alpha^{-1}(\alpha\vec{u}) = \alpha^{-1}\vec{0} = \vec{0}$).
4. $-(\alpha\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u})$, en particular $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$
   porque
   $(-\alpha)\vec{u} + \alpha\vec{u} = (-\alpha+\alpha)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$
   y
   $\alpha(-\vec{u}) + \alpha\vec{u} = \alpha(-\vec{u}+\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})$.
5. Si $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$, o bien $\alpha = 0$, o bien $\vec{u} = \vec{v}$
   porque si $\alpha \neq 0$, entonces $\vec{0} = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} = \alpha(\vec{u} - \vec{v})$ y por la propiedad 3, se deduce que $\vec{u} = \vec{v}$.

17.2. Subespacio vectorial y operaciones

Sea $(V, +\cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial. Un subconjunto U de V es un subespacio vectorial de $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ si el subconjunto U con las mismas operaciones suma y producto por escalares verifica las propiedades necesarias para ser espacio vectorial.

Teorema: *Si $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ es un espacio vectorial, para que un subconjunto U de V sea subespacio vectorial de V basta que se verifiquen estas dos propiedades:*

1. *La suma es operación interna en el conjunto U:*

$$\vec{u} + \vec{v} \in U, \; \forall \vec{u}, \vec{v} \in U.$$

2. *La multiplicación por escalares es una operación externa en U:*

$$\alpha\vec{u} \in U, \; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall \vec{u} \in U.$$

Demostración. Excepto la propiedad del elemento neutro y la del opuesto, el resto de propiedades que tienen que cumplir los elemento de U para que el subconjunto sea un espacio vectorial se cumplen porque los elementos de U son elementos de V, y V es espacio vectorial.

Además, se verifica que si $\vec{u}$ es un elemento de U no nulo, entonces
$\vec{0} = 0\vec{u} \in U$ (U contiene al elemento neutro) y
$(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ (el elemento opuesto de $\vec{u}$ está contenido en U)
con lo que $(U, +, \cdot\mathbb{R})$ verifica todas las propiedades requeridas para ser espacio vectorial.

□

17.2.1. Ejemplos de subespacios vectoriales

1. En cualquier espacio vectorial $(V, + \cdot \mathbb{R})$, el vector $\vec{0}$ y el total V son subespacios vectoriales.

2. En cualquier espacio vectorial $(V, + \cdot \mathbb{R})$, si $\vec{u} \in V$ y $\vec{v} \in V$, son subespacios vectoriales los conjuntos

$$< \vec{u} >= \{\alpha\vec{u}/\ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad < \vec{u}, \vec{v} >= \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}/\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Figura 17.3: Subespacio generado por 1 vector en el espacio

Figura 17.4: Subespacio generado por 2 vectores en el espacio

3. En $(V_2, + \cdot \mathbb{R})$, los vectores que están contenidos en una misma recta forma un subespacio vectorial si la recta pasa por el origen del plano. Sin embargo, si la recta no pasa por el origen no es subespacio vectorial.

4. En $(V_3, + \cdot \mathbb{R})$, los vectores que están contenidos en una misma recta (equivalentemente, en un mismo plano) forman un subespacio vectorial si la recta (equivalentemente, el plano) pasa por el origen del espacio. Sin embargo, si la recta (o el plano) no pasa por el origen no es subespacio vectorial.

5. En $(\mathbb{R}^2, + \cdot \mathbb{R})$,

   $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ 2x + y = 0\}$ es un subespacio vectorial

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2x + y = 3\}$ no es un subespacio vectorial.

6. En $(\mathbb{R}^3, + \cdot \mathbb{R})$,

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y = 2z\}$ es un subespacio vectorial

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y = 2z, \ 2x + y = 0\}$ es un subespacio vectorial

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + 1 = 2z\}$ no es un subespacio vectorial.

   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y+1 = 2z, \ 2x+y = 0\}$ no es un subespacio vectorial

7. Las sucesiones que convergen a 0 forman una subespacio vectorial de las sucesiones. Las que convergen a 1 no son subespacio vectorial.

8. Los polinomios de grado menor o igual que 2 forma un subespacio de los polinomios de grado menor o igual que 3.

9. Dentro del espacio vectorial de las funciones, las funciones acotadas, las que se anulan en un mismo punto, las que son continuas, las funciones pares (que son aquellas tales que $f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}$) forman subespacios vectoriales.

10. El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = x^2\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones habituales. Sin embargo, si cambiamos las operaciones, C puede cumplir las condiciones para ser espacio vectorial:

$$\begin{array}{rcl} C \times C & \to & C \\ (x, x^2), (r, r^2) & \mapsto & (x + r, (x + r)^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times C & \to & C \\ \alpha, (r, r^2) & \mapsto & (\alpha r, \alpha^2 (x + r)^2) \end{array}$$

17.2.2. Operaciones con subespacios

Sea $(V, +. \cdot \mathbb{R})$ un espacio vectorial y U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales de V.

La intersección $U_1 \cap U_2$ es el conjunto de vectores que pertenecen a U_1 y a U_2.

$$U_1 \cap U_2 = \{u \in V / \ u \in U_1, \ u \in U_2\}$$

$U_1 \cap U_2$ es un subespacio vectorial de V y es el mayor subespacio vectorial que está contenido en U_1 y U_2.

Ejemplos:

1. La intersección en el espacio de dos planos distintos que pasan por el origen es una recta que pasa por el origen, que es un subespacio vectorial.

2. La intersección en el espacio de un plano y una recta que pasan ambos por el origen es un subespacio. Será el punto origen si la recta es secante o bien la propia recta si ésta está contenida en el plano.

En general, cualquier intersección de subespacios vectoriales (no necesariamente dos subespacios sino más) es un subespacio vectorial.

La unión $U_1 \cup U_2$ es el conjunto de vectores que, o bien son de U_1, o bien son de U_2.

$U_1 \cup U_2$ no es, en general, un subespacio vectorial.

$$U_1 \cup U_2 = \{u \in V/ \ u \in U_1 \ o' \ u \in U_2\}$$

El conjunto de vectores que resultan de sumar un vector de U_1 y otro de U_2 se denomina $U_1 + U_2$.

$$U_1 \cup U_2 = \{u \in V/ \ u = u_1 + u_2, \ u_1 \in U_1, \ u_2 \in U_2\}$$

$U_1 + U_2$ es un subespacio vectorial de V y es el menor subespacio vectorial que contiene a U_1 y U_2.

Ejemplos: En el espacio, la unión de dos planos distintos que pasan por el origen será todo el espacio.

La unión de una plano en el espacio y una recta, que pasen ambos por el origen, será un subespacio vectorial. Resultará el propio plano si la recta están contenida en el plano. En caso contrario, será todo el espacio.

En general, la suma de cualquier número finito de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

17.3. Dependencia e independencia lineal. Sistemas generadores

Sea $(V, +. \cdot \mathbb{R})$ un espacio vectorial.

Se denomina familia o sistema de vectores a cualquier conjunto de vectores contenidos en V.

Se dice que un vector $\vec{v} \in V$ es **combinación lineal** de los vectores del sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ (o que $\vec{v}$ se puede construir a partir de

$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ por combinación lineal) si existen unos números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n}.$$

Se dice que un sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es **ligado** (o que los vectores del sistema son linealmente dependientes) si se verifica alguna de estas condiciones:

- El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ con **algún** escalar α_i distinto de 0.
- **Alguno** de los vectores del sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es combinación del resto de vectores.

Se dice que un sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es **libre** (o que los vectores del sistema son linealmente independientes) si se verifica alguna de estas condiciones:

- El vector $\vec{0}$ **solo** es combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ con **todos** los escalares iguales a 0.
- **Ninguno** de los vectores del sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es combinación del resto de vectores.

Se dice que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es un **sistema generador** de V (o que los vectores del sistema generan V) si todos los vectores de v son combinación lineal de los vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$.

El conjunto de vectores que son combinación lineal de un sistema de vectores se denomina **subespacio generado** por el sistema y es un subespacio vectorial.

Estas son algunas propiedades que se deducen de todo lo anterior:

1. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es un sistema libre y $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}, \vec{w}\}$ es ligado, entonces $\vec{w}$ es combinación lineal de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$.
2. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es un sistema generador de V y $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_m}\}$ es un sistema libre de V con $m \leq n$, entonces el sistema libre se puede completar con $n - m$ vectores del sistema generador para que resulte también un sistema generador de V.
3. Todo sistema libre de V tiene igual o menor número de vectores que cualqier sistema generador de V.

17.4. Base de un espacio vectorial. Dimensión

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial.

Definición 1: Se dice que un sistema de vectores $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es base de V si se verifican las dos condiciones siguientes:

- B es un sistema **libre**
- B es un sistema **generador** de V

Definición 2: Se dice que un sistema de vectores $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es base de V si todos los vectores de V se pueden expresar como **combinación lineal** de los vectores de B de forma **única**.

Un espacio vectorial V tiene dimensión finita si admite un sistema generador con un número finito de vectores.

Teorema: Todo espacio V de dimensión finita distinto del espacio nulo $\vec{0}$ tiene al menos una base.

Proposición: En un espacio V de dimensión finita, todas las bases tienen el mismo número de vectores.

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, se llama **dimensión** de V al número de vectores de una de sus bases.

$$\dim V = \{\text{número de vectores de una base}\}$$

El **rango** de un sistema de vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es la dimensión del subespacio generado por el sistema.

Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita. Esta son algunas propiedades que se deducen de todo lo anterior:

1. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es un sistema libre, siempre es posible completarlo hasta formar una base.
2. Si $\dim V = n$, todo sistema de más de n vectores es ligado.
3. Si $\dim V = n$, todo sistema generador tiene al menos n vectores.
4. Si $\dim V = n$, entonces $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es base si cumple **alguna** de estas condiciones

- B es libre
- B es sistema generador

5. Si $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es una base de V y $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p}\} \subset V$ es un sistema libre, se puede asegurar que hay $n-p$ vectores de B que añadidos a $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p}\}$ forman una base.

6. El rango del sistema $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ coincide con el máximo número de vectores independientes contenidos en el sistema.

7. Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V de dimensión finita, entonces

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

17.5. Coordenadas de un vector en una base

Sea $(V, + \cdot \mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión n. Dada una base $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$, si $\vec{v} \in V$ existen unos únicos números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n}$$

Dichos números $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ son las **coordenadas** de $\vec{v}$ en la base B.

Estas son algunas propiedades que se deducen de lo anterior:

1. Un mismo vector $\vec{v}$, en general, tiene unas coordenadas diferentes en cada base.

2. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es una base de V, las coordenadas de $\vec{v_i}$ son

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_i = 1,\ \ldots,\ \alpha_n = 0,$$

es decir

$$\vec{v_1} = (1, 0, \ldots, 0),\ \vec{v_2} = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \vec{v_n} = (0, 0, \ldots, 1)$$

3. Se llama base canónica de $\mathbb{R}^n$ a la formada por los vectores

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$$

4. Fijada una base $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$, cualquier espacio vectorial de dimensión n se puede identificar con el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

17.6. Cambio de base

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión n y $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ y $B' = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ dos bases de V. Si $\vec{v} \in V$ tendrá unas coordenadas en la base B y otras en la base B':

$$\vec{v} = \alpha_1\ \vec{v_1} + \alpha_2\ \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\ \vec{v_n} \qquad \vec{v} = \beta_1\ \vec{u_1} + \beta_2\ \vec{u_2} + \cdots + \beta_n\ \vec{u_n}$$

Los vectores de la base B tendrán a su vez unas coordenadas en la base B':

$$\begin{array}{c} \vec{v_1} = a_{11}\ \vec{u_1} + a_{21}\ \vec{u_2} + \cdots + a_{n1}\ \vec{u_n} \\ \vec{v_2} = a_{12}\ \vec{u_1} + a_{22}\ \vec{u_2} + \cdots + a_{n2}\ \vec{u_n} \\ \cdots \\ \vec{v_1} = a_{1n}\ \vec{u_1} + a_{2n}\ \vec{u_2} + \cdots + a_{nn}\ \vec{u_n} \end{array}$$

Puesto que

$$\begin{array}{l} \vec{v} = \alpha_1\ \vec{v_1} + \alpha_2\ \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\ \vec{v_n} = \\ \qquad \alpha_1\ (a_{11}\ \vec{u_1} + a_{21}\ \vec{u_2} + \cdots + a_{n1}\ \vec{u_n}) + \\ \qquad \alpha_2(a_{12}\ \vec{u_1} + a_{22}\ \vec{u_2} + \cdots + a_{n2}\ \vec{u_n}) + \\ \qquad \cdots \\ \qquad \alpha_n(a_{1n}\ \vec{u_1} + a_{2n}\ \vec{u_2} + \cdots + a_{nn}\ \vec{u_n}) \end{array}$$

de donde

$$\begin{array}{l} \vec{v} = (\alpha_1\ a_{11} + \alpha_2\ a_{12} + \cdots + \alpha_n\ a_{1n})\ \vec{u_1} + \\ \qquad (\alpha_1\ a_{21} + \alpha_2\ a_{22} + \cdots + \alpha_n\ a_{2n})\ \vec{u_2} + \\ \qquad \cdots \\ \qquad (\alpha_1\ a_{n1} + \alpha_2\ a_{n2} + \cdots + \alpha_n\ a_{nn})\ \vec{u_n} \end{array}$$

y por comparación con $\vec{v} = \beta_1\ \vec{u_1} + \beta_2\ \vec{u_2} + \cdots + \beta_n\ \vec{u_n}$ deducimos las siguientes **ecuaciones de cambio de coordenadas** de base B a base B':

$$\begin{array}{c} \beta_1 = \alpha_1\ a_{11} + \alpha_2\ a_{12} + \cdots + \alpha_n\ a_{1n} \\ \beta_2 = \alpha_1\ a_{21} + \alpha_2\ a_{22} + \cdots + \alpha_n\ a_{2n} \\ \cdots \\ \beta_n = \alpha_1\ a_{n1} + \alpha_2\ a_{n2} + \cdots + \alpha_n\ a_{nn} \end{array}$$

Capítulo 18

Espacio afín

18.1. El espacio afín bidimensional y tridimensional

Sea E el conjunto de puntos del plano y V el conjunto de vectores del plano. Cada par de puntos $A, B \in E$ definen un único vector del plano $\vec{v} = [\vec{AB}]$. Es posible definir la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : E \times E & \rightarrow & V \\ (A, B) & \mapsto & \vec{v} = [\vec{AB}] \end{array}$$

Esta aplicación verifica que

1. $f(A, B) = \vec{0} \Rightarrow A = B$
2. Si $A, B, C \in E$, entonces $f(A, B) = f(A, C) + f(C, B)$
3. Dado un vector $\vec{v} \in V$ y un punto $A \in E$, existe un único punto $B \in E$ tal que $f(A, B) = \vec{v}$.

En las condiciones anteriores, la terna (E, V, f) constituye el espacio afín bidimensional (simplificadamente, E_2).

Si E es el conjunto de puntos del espacio y V es el conjunto de vectores del espacio, la terna (E, V, f) constituye el espacio afín tridimensional (simplificadamente, E_3).

18.1.1. Espacio afín n-dimensional

Si E es un conjunto no vacío cualquiera de puntos, V es un espacio vectorial de dimensión n y f es una aplicación que verifica las condiciones anteriores, la terna (E, V, f) constituye el espacio afín n-dimensional (simplificadamente, E_n).

En todo espacio afín E_n se verifica además que

1. $f(A, B) = -f(B, A)$.
2. Si $f(A, B) = f(C, D)$, entonces $f(A, C) = f(B, D)$.

Ejemplo: Si E es el conjunto de puntos del plano, V es el espacio vectorial de los vectores del plano y f es la aplicación que a cada dos puntos del plano A, $B \in E$ le asigna el vector $\vec{AB}$, la terna (E, V, f) constituye el **espacio afín bidimensional** E_2.

Ejemplo: Si E es el conjunto de puntos del espacio, V es el espacio vectorial de los vectores del espacio y f es la aplicación que a cada dos puntos del espacio A, $B \in E$ le asigna el vector $\vec{AB}$, la terna (E, V, f) constituye el **espacio afín tridimensional** E_3.

18.1.2. Subespacio afín

Dado un espacio afín $E_n = (E, V, f)$, se llama subespacio afín de E_n determinado por un punto $p \in E$ y por un subespacio vectorial W de V, al conjunto de puntos

$$\{x = p + \vec{w} / \vec{w} \in W\}$$

Los subespacios afines en el espacio afín bidimensional son los puntos, las rectas y todo el espacio.

Los subespacios afines en el espacio afín tridimensional son los puntos, las rectas, los planos y todo el espacio.

18.2. Sistemas de referencia afín. Coordenadas de un punto.

Sea $E_n = (E, V, f)$ un espacio afín. Si $O \in E$ y $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ es una base de V, se denomina sistema de referencia afín de E_n a $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$.

Las rectas $O+ < \vec{u_1} >$, $O+ < \vec{u_2} >$, $\ldots$,$O+ < \vec{u_n} >$ se denominan ejes coordenados.

Fijar un sistema de referencia afín es fijar un punto O como origen y una base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ del espacio vectorial correspondiente.

Se llaman coordenadas cartesianas de un punto $P \in E$ en el sistema de referencia afín $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, a las coordenadas del vector $\vec{OP}$ en la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$:

$$\vec{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{u_n}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las coordenadas cartesianas de P en el sistema de referencia $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$.

Si en el sistema $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ $P \in E_n$ y $Q \in E_n$ tienen coordenadas $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, respectivamente, entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene coordenadas $(q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, p_n - q_n)$:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P, \qquad P = Q + \overrightarrow{PQ}, \qquad Q = P - \overrightarrow{PQ}$$

18.2.1. Cambios de sistema de referencia afín

Sean $\{0; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ y $\{O'; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ dos sistemas referencia en un espacio afín E_n.

Un mismo punto $P \in E_n$ tendrá coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el primer sistema y coordenadas $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ en el segundo. Dado que

$$\vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$$

se deduce que la relación entre ambas coordenadas es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ & & \ldots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

simplificadamente $X' = a + AX$, siendo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ las coordenadas de O en $\{O'; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ y

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ & & \ldots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz de cambio de base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ a base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$

Para obtener las coordenadas de forma inversa:

$$X' - a = AX \Rightarrow X = A^{-1}(X' - a) \Rightarrow X = A^{-1}X' - A^{-1}a$$

es decir

$$X = BX' + b$$

siendo $B = A^{-1}$ la matriz de cambio de base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ a base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$ y $b = -A^{-1}a$ las coordenadas de O' en el sistema $\{O; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$.

18.3. La recta en el espacio afín

Una recta en el espacio afín E_n queda determinada por un punto A contenido en la recta y un vector director $\overrightarrow{v}$ no nulo que determine la dirección. Todo punto X de la recta verifica que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{v} \qquad \text{o bien} \qquad X = A + \lambda \overrightarrow{v}$$

que son las ecuaciones vectoriales de la recta. Sustituyendo las coordenadas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

nos queda

$$x_1 = a_1 + \lambda v_1,\ x_2 = a_2 + \lambda v_2,\ \ldots,\ x_n = a_n + \lambda v_n$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta. Si $a_i \neq 0$ para todo $i \in 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{v_n}$$

que es la ecuación de la recta forma continua.

Como los vectores $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{v}$ son dependientes, la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 \\ \cdots & \\ x_n - a_n & v_n \end{pmatrix}$$

tendrá rango 1. De esta última condición se obtienen las ecuaciones cartesianas o implícitas de la recta.

Por ejemplo, si $n = 3$, y $v_1 \neq 0$ quedarían así:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & v_3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 \\ x_3 - a_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

es decir:

$$v_2(x_1 - a_1) - v_1(x_2 - a_2) = 0, \qquad v_3(x_1 - a_1) - v_1(x_3 - a_3) = 0$$

y simplificando obtenemos las ecuaciones implícitas

$$v_2x_1 - v_1x_2 = v_2a_1 - v_1a_2, \qquad v_3x_1 - v_1x_3 = v_3a_1 - v_1a_3.$$

18.4. El plano en el espacio afín

Un plano en el espacio afín queda determinado por un punto A contenido en el plano y dos vectores directores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ que indican la dirección. Si X es un punto del plano, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u} \qquad \text{o bien} \qquad X = A + \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u}$$

que son las ecuaciones vectoriales del plano. Sustituyendo las coordenadas

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)& \\ +\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \mu(u_1, u_2, \ldots, u_n)&\end{aligned}$$

nos queda

$$\begin{aligned}x_1 = a_1 + \lambda v_1 + \mu u_1,\ x_2 = a_2+\lambda v_2 + \mu u_2, \ldots& \\ \ldots,\ x_n = a_n + \lambda v_n + \mu u_n&\end{aligned}$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano.

Como los vectores AX, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ son dependientes, la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 & u_2 \\ \ldots & & \\ x_n - a_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

tendrá rango 2. De esta última condición se obtienen las ecuaciones cartesianas o implícitas del plano.

Por ejemplo, si $n = 3$ quedarían así:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & v_3 & u_3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificando lo anterior, se obtendría una expresión del tipo

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = D$$

que es la ecuación implícita de un plano en el espacio.

18.5. Incidencia, intersección y paralelismo en E_3

Consideremos el espacio afín E_3. Un punto $P \in E_3$ es incidente con una subvariedad afín o está contenido en ella si P pertenece a la subvariedad.

18.5.1. Puntos

Tres puntos A, B, C están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

Tres puntos A, B, C están siempre en el mismo plano.

Cuatro puntos A, B, C, X son coplanarios si los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AX}$ son dependientes.

18.5.2. Haz de planos

Se llama haz de planos que pasan por una recta de ecuación

$$\begin{array}{c} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array}$$

al conjunto de planos que contienen a esa recta. Si en la expresión

$$ax + by + cz + d + \ \lambda \ (a'x + b'y + c'z + d')$$

le damos valores al parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ obtendremos todos los planos del haz salvo el de ecuación $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

18.5.3. Radiación de planos y rectas

Se llama radiación de planos (equivalentemente, de rectas) que pasan por un punto $P \in E_3$ al conjunto de planos (de rectas) que pasan por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$. La ecuación de cualquier plano que pasa por P es de la forma

$$Ax + By + Cz - (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) = 0$$

La ecuación de cualquier recta que pasa por $P = (p_1, p_2, p_3)$ es de la forma

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{x - p_2}{v_2} = \frac{x - p_3}{v_3}.$$

18.5.4. Posición relativa de dos rectas

Dos rectas $A + \lambda \overrightarrow{v}$ y $B + \alpha \overrightarrow{u}$:

- Son paralelas si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ son proporcionales. Serán coincidentes si además tienen algún punto en común.
- Son secantes si tiene algún punto en común. En este caso, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{AB}$ serán linealmente dependientes. Los puntos comunes se calculan resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.
- Se cruzan si no son paralelas ni secantes. En este caso, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{AB}$ serán linealmente independientes.

Para estudiar la posición relativa de dos rectas se puede estudiar el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{array}{cc} ax + by + cz + d = 0 & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & a'_1x + b'_1y + c'_1z_1 + d'_1 = 0 \end{array}$$

Si A es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las cuatro ecuaciones y A^* es la matriz ampliada, se tiene que:

1. Si $\text{rango}(A) = 3 \neq \text{rango}(A^*) = 4$, las rectas se cruzan.
2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, las rectas son secantes en un solo punto.
3. Si $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, las rectas son paralelas.
4. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, las rectas son iguales.

18.5.5. Posición relativa de una recta y un plano

Dados una recta $A + \lambda \overrightarrow{v}$ y un plano $B + \alpha < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} >$, se dice que

- Son paralelos si $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.
- Son secantes si tienen algún punto en común.
- La recta están contenida en el plano si son paralelos y tienen algún punto en común.

Para estudiar la posición relativa de una recta y un plano se puede estudiar el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{aligned} \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$$

Si A es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las tres ecuaciones y A^* es la matriz ampliada, se tiene que:

1. Si rango(A) = rango$(A^*) = 3$, la recta y el plano se cortan en un solo punto.
2. Si rango$(A) = 2 \neq$ rango$(A^*) = 3$, la recta y el plano paralelos.
3. Si rango(A) = rango$(A^*) = 2$, la recta están contenida en el plano.

18.5.6. Posición relativa de dos planos

Dados dos planos $A + \lambda < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ y $B + \alpha < \overrightarrow{m}, \overrightarrow{n} >$, se dice que

- Son paralelos si los vectores $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{n}$ son dependientes tomados de tres en tres.
- Son secantes si tienen algún punto en común.
- Son coincidentes si son paralelos y tienen algún punto en común.

Para estudiar la posición relativa de dos planos se puede estudiar el sistema que forman sus ecuaciones:

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$$

Si A es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las dos ecuaciones y A^* es la matriz ampliada, se tiene que:

1. Si rango(A) = rango$(A^*) = 2$, los planos se cortan en una recta.
2. Si rango$(A) = 1 \neq$ rango$(A^*) = 2$, los planos son paralelos y no se cortan.
3. Si rango(A) = rango$(A^*) = 1$, los planos son coincidentes.

18.5.7. Posición relativa de tres planos

Dados tres planos de ecuaciones

$$ax + by + cz + d = 0 \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

si A es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las tres ecuaciones y A^* es la matriz ampliada, se tiene que:

1. Si rango(A) = rango$(A^*) = 3$, los planos se cortan en un punto.
2. Si rango$(A) = 2 \neq$ rango$(A^*) = 3$, los planos no tienen ningún punto en común.
3. Si rango(A) = rango$(A^*) = 2$, los planos se cortan en una recta.
4. Si rango$(A) = 1 \neq$ rango$(A^*) = 2$, los planos son paralelos (dos de ellos pueden coincidir).
5. Si rango(A) = rango$(A^*) = 1$, los planos son coincidentes.

Capítulo 19

Espacio afín euclídeo

19.1. Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo

Sea V un espacio vectorial. Un **producto escalar** sobre V es una aplicación

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ \vec{u}, \vec{v} & \mapsto & \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$

que verifique

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0 \ \forall \vec{u} \neq \vec{0}$. Además, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
4. $\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

Dada una base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ de un espacio vectorial V_n de dimensión n, el producto escalar habitual (que será el que utilicemos salvo que se indique lo contrario) es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

La base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ la denominaremos base canónica.

Un espacio vectorial V dotado de un producto escalar es un **espacio vectorial euclídeo**.

Otra propiedades que se deducen en todo espacio vectorial euclídeo:

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

2. $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall\vec{u},\vec{v}\in V$

3. $\vec{u}\cdot\vec{0} = 0\ \forall\vec{u}\in V$

19.1.1. Norma de un vector

Dado un espacio euclídeo $(V,\cdot)$, se denomina norma $\|\ \|$ a la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \|\ \| : V & \to & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \mapsto & \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \end{array}$$

Propiedades de la norma:

1. $\|\vec{u}\| > 0\ \forall\vec{u}\neq\vec{0}$. Además, $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

2. $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\ \|\vec{u}\| \forall\vec{u},\vec{v}\in V$

3. $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\ \|\vec{u}\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall\vec{u}\in V$

4. $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, $\forall\vec{u},\vec{v}\in V$

La norma de un espacio euclídeo es una forma de "medir"los vectores del espacio.

En el espacio euclídeo habitual, $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$.

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, los vectores $\frac{\pm\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ tienen norma 1 y se les denomina unitarios.

19.1.2. Vectores ortogonales

Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales (se representa $\vec{u}\perp\vec{v}$) o que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ o que $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Se verifica que

1. $\vec{0}$ es ortogonal a todos los vectores y es el único vector ortogonal a sí mismo.

2. Su $\vec{u}\perp\vec{v}$, lo mismo ocurre con todos sus proporcionales.

3. Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ y $\vec{u}\perp\vec{w}$, $\vec{u}$ es ortogonal a las combinaciones lineales de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

4. Si $\vec{u}\perp\vec{v}$, entonces $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

Se dice que una base es

- *ortogonal* si los vectores que la forman son ortogonales dos a dos.
- *ortonormal* si los vectores que la forma son unitarios y ortogonales dos a dos.

19.1.3. Ángulo determinado por dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos de un espacio euclídeo, se define ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (denotado $\widehat{uv}$) al único número real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

Si alguno de los vectores es $\vec{0}$, el ángulo determinado se dice que es nulo. Se deduce que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{uv})$.

19.2. Producto vectorial y producto mixto en V_3

Sea V_3 un espacio vectorial de dimensión 3 y sea $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ una base de V_3. Consideremos tres vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ linealmente independientes, cuyas coordenadas en la base son $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ y (c_1, c_2, c_3), respectivamente. Se dice que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ están orientados positivamente respecto a la base B si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$$

En caso contrario, están orientados negativamente.

19.2.1. Producto vectorial

Fijada una base, se llama producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos (denotado $\vec{u} \times \vec{v}$), al único vector de V_3 que verifica:

- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \; \operatorname{sen}(\widehat{uv})$
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ y $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$
- Los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ están orientados positivamente respecto a la base fijada.

Si algún vector es nulo, el producto vectorial se define como el vector $\vec{0}$.

Propiedades del producto vectorial:

1. Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, o algún vector es nulo o los vectores son paralelos.

2. Con el producto escalar habitual, si la base canónica es $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, entonces:
$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3} \qquad \vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1} \qquad \vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$$

3. Con el producto escalar habitual, si la base canónica es $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ y
$$u = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3} \qquad v = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3},$$
entonces
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e_3}$$
Lo anterior puede memorizarse (aunque no es una expresión matemática correcta) como
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

4. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3$

5. $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

6. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$

7. El producto vectorial no es asociativo.

19.2.2. Producto mixto

Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, se define el producto mixto de los tres vectores como
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Propiedades del producto mixto:

1. En valor absoluto, el producto mixto es el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores.

2. Con el producto escalar habitual se verifica que

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

3. Como consecuencia de las propiedades de los determinantes

$$\begin{aligned} [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] =& [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = \\ =& -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}] \end{aligned}$$

   $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_3$.

4. Si el producto mixto es 0, los tres vectores son linealmente dependientes.

5. $[\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u}',\vec{v},\vec{w}]$, $\forall \vec{u},\vec{u}',\vec{v},\vec{w} \in V_3$.

6. $[\lambda\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\lambda\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w}] = \lambda[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_3$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

19.3. Espacio afín euclídeo E_3

Un espacio afín euclídeo es aquel en el que el espacio vectorial asociado tiene definido un producto escalar.

En un espacio afín euclídeo es posible estudiar ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

Sea E_3 un espacio afín de dimensión 3 y $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ la base canónica para el producto escalar correspondiente, de modo que el producto escalar es

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

19.3.1. Vector normal a un plano

Un vector $\vec{n}$ es normal a un plano π si para cualesquiera dos puntos del plano A, B, se verifica que $\vec{n}\perp\vec{AB}$, es decir, $\vec{n}\cdot\vec{AB} = 0$.

Ecuación del plano que pasa por el punto $P = (p_1,p_2,p_3)$ y es perpendicular la vector $\vec{n} = (n_1,n_2,n_3)$:

$$\vec{n}\cdot\vec{PX} = 0 \Rightarrow n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0.$$

El plano de ecuación $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ tiene como vector normal $\vec{n} = (A,B,C)$.

19.3.2. Ángulo entre dos rectas

Se llama ángulo determinado por las rectas $r : A + \lambda\vec{u}$ y $s : B + \alpha\vec{v}$ al siguiente

$$\widehat{r,s} = \text{mín}[\widehat{uv}, \widehat{-uv}] = \arccos \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$$

Las rectas r y s son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales.

19.3.3. Ángulo entre dos planos

Se llama ángulo determinado por los planos

$$\pi : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \qquad \pi' : A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 + D' = 0$$

al menor de los ángulos que forman sus vectores ortogonales, que es igual al ángulo diedro formado por los planos. Si $\vec{n} = (A, B, C)$ y $\vec{n}' = (A', B', C')$, entonces

$$\widehat{\pi,\pi'} = \text{mín}[\widehat{nn'}, \widehat{-nn'}] = \arccos \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{\|\vec{n}\|\ \|\vec{n}'\|}$$

Las planos π y π' son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales.

19.3.4. Ángulo entre recta y plano

Se llama ángulo determinado por una recta $r : A + \lambda\vec{u}$ y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ al complementario del ángulo formado los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n} = (A, B, C)$, es decir:

$$\widehat{r\pi} = \operatorname{arc\,sen} \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{n}\|}$$

Recta y plano son perpendiculares si $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son paralelos.

19.3.5. Distancia entre dos puntos

Si A y B son dos puntos del espacio euclídeo E_3, se define distancia entre A y B a la norma del vector $\vec{AB}$:

$$d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB}\cdot\vec{AB}}$$

19.3.6. Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a un plano de ecuación $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ es la menor de las distancias entre P y los puntos del plano. Esta distancia se alcanza en el punto P' resultado de proyectar P ortogonalmente sobre el plano.

Si $\vec{n} = (A, B, C)$ y $X = (x_1, x_2, x_3)$ es un punto cualquiera del plano, se deduce que:

$$|\vec{PX} \cdot \vec{n}| = |(\vec{PP'} + \vec{P'X}) \cdot \vec{n}| = |\vec{PP'} \cdot \vec{n}| = \|\vec{PP'}\| \; \|\vec{n}\| \; \cos(\widehat{PP', n})$$

Como $\vec{PP'}$ y $\vec{n}$ son paralelos

$$|\vec{PX} \cdot \vec{n}| = \|\vec{PP'}\| \; \|\vec{n}\|$$

y

$$d(P, \pi) = \|\vec{PP'}\| = \frac{|\vec{PX} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Podemos calcular P' calculando previamente la recta perpendicular al plano π que pasa por P e intersecándola con el plano π.

19.3.7. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ a una recta $r : A + \lambda\vec{u}$ es la menor de las distancias entre P y los puntos de la recta. Esta distancia se alcanza en el punto P' resultado de proyectar P ortogonalmente sobre la recta.

Los vectores $\vec{AP}$ y $\vec{u}$ determinan un paralelogramo cuyo área es $\|\vec{AP} \times \vec{u}\|$ o bien $\|\vec{u}\| \cdot d(P, r)$. Por tanto

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Podemos calcular P' imponiendo la condición $\vec{PP'} \cdot \vec{u} = 0$.

19.3.8. Distancia entre dos rectas

Se llama distancia entre las rectas $r : A + \lambda\vec{u}$ y $B + \alpha\vec{v}$ a la mínima distancia entre dos puntos, uno de cada recta.

La distancia es 0 si las rectas se cortan

Si son paralelas, la distancia es la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra recta.

Si las rectas se cruzan, la distancia entre ambas es la distancia entre $P \in r$ y $Q \in S$, siendo P y Q puntos de la recta perpendicular común a r y s.

Los vectores $\vec{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinan un paralelepípedo cuyo volumen es $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$ o bien $\|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{PQ}\|$. Por tanto

$$d(r,s) = \|\vec{PQ}\| = \frac{[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Los puntos P y Q se pueden calcular como intersección de la recta perpendicular común con r y s, respectivamente. La perpendicular común a r y s es la recta definida por los planos

$$[\vec{AX}, \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}] = 0 \qquad [\vec{BX}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = 0$$

19.3.9. Distancia entre recta y plano

Se define como distancia entre una recta $r : A + \lambda\vec{u}$ y un plano $\pi : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ como la distancia mínima entre dos puntos, uno de la recta y otro del plano.

Si r y π se cortan, la distancia es 0.

Si r y π son paralelos, la distancia es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

19.3.10. Distancia entre dos planos

Se define distancia entre dos planos π y π' como la distancia mínima entre dos puntos, uno de cada plano.

Si π y π' se cortan, la distancia es 0.

Si π y π' son paralelos, la distancia es la distancia de un punto cualquiera de π a π'.

19.3.11. Áreas y volúmenes

Área de un paralelogramo definido por los puntos A, B, C, D:

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

siendo B y C los puntos contiguos al punto A en el paralelogramo. El triángulo de vértices A, B, C tiene área la mitad de lo anterior.

Volumen del paralelepípedo de aristas AB, AC y AD:

$$\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right|.$$

El tetraedro de vértices A, B, C, D tiene volumen la sexta parte de lo anterior.