Universidad de Extremadura
Departamento de Matemáticas

Apuntes de

Matemáticas I

para primer curso de la Escuela de Ingenierías Agrarias

Pedro Martín Jiménez

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Badajoz, octubre 2012

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Índice

Introducción

El texto que sigue no es definitivo ni exhaustivo. Se irá reformando a medida que se detecten fallos o se modifique el contenido para mejorarlo. Debéis emplearlo como una ayuda para preparar la asignatura Matemáticas I de la Ingeniería y como complemento de las notas que toméis en clase.

Espero que os sirva.

Pedro Martín.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos. Sucesiones. Funciones.

1.1. Conjuntos Numéricos

1.1.1. Números naturales, enteros y racionales

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ está incluido en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, que a su vez está contenido en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, es decir, los números que se pueden expresar como fracción de dos números enteros:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \qquad \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$$

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 4, -4, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 5, -5, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, ...\}$$

Los números racionales se pueden sumar y se pueden multiplicar. Además, están ordenados, es decir, dados dos números racionales distintos es posible determinar cual es el menor y cual es el mayor. Las propiedades que tienen las operaciones suma y producto en el conjunto $\mathbb{Q}$ hacen que tenga estructura de cuerpo conmutativo y ordenado.

1.1.2. Números reales

La longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 es $\sqrt{2}$, que es un número real no racional. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ y a otros números llamados irracionales $\mathbb{I}$ que no se pueden expresar en forma de fracción de números enteros.

Entre dos números reales cualesquiera siempre hay números reales racionales e irracionales.

Los números reales se pueden sumar, multiplicar y ordenar, y las propiedades que cumplen estas operaciones con el orden establecido hacen que $\mathbb{R}$ tenga estructura de cuerpo conmutativo y ordenado. Con los números reales podemos medir cualquier distancia (por ejemplo, la diagonal del cuadrado de lado 1), a diferencia de lo que ocurría con $\mathbb{Q}$.

Una **cota superior** de un conjunto de números reales es un número real mayor o igual que todos los del conjunto. Un conjunto de números reales está **acotado superiormente** si existe una cota superior para el conjunto. Por ejemplo, 1 y 1.7 son cota superior de los intervalos $[0,1]$ y $[0,1)$. Ambos intervalos están acotados superiormente.

Una **cota inferior** de un conjunto de números reales es un número real menor o igual que todos los del conjunto. Un conjunto de números reales está **acotado inferiormente** si existe una cota inferior para el conjunto. Por ejemplo, -1 y 0 son cota inferior de los intervalos $(0,1]$ y $[0,1)$. Ambos intervalos están acotados inferiormente.

Un conjunto está **acotado** si están acotado superior e inferiormente. Por ejemplo $[0,1)$ están acotado.

El **supremo** de un conjunto, si existe, es la menor de las cotas superiores. Si el supremo es un elemento del conjunto entonces se llama **máximo**. El **ínfimo** de un conjunto, si existe, es la mayor de cotas inferiores. Si el ínfimo de un conjunto es un elemento del conjunto entonces se llama **mínimo**. Por ejemplo, respecto a $(0,1]$, 1 es supremo y máximo pero 0 es ínfimo pero no mínimo.

Todos los conjuntos de números reales acotados tiene supremo e ínfimo.

Dado un número real x se define **valor absoluto** de x al número real positivo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y se verifica que

1. $x \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. $|xy| = |x||y|$
3. $|-x| = |x|$
4. $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$
5. $|x| < r \Rightarrow x \in (-r, r)$

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define **bola abierta** de centro a y radio $r > 0$ y se denota $B(a, r)$, al conjunto de números reales mayores que $a - r$ y menores que $a + r$, es decir al intervalo abierto $(a - r, a + r)$

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x - a| < r\}.$$

Un conjunto de números reales es **abierto** si para todo elemento del conjunto se verifica que existe una bola abierta centrada en el elemento que a su vez está contenida en el conjunto. Un conjunto es **cerrado** si es el complementario de un abierto.

Se define **bola cerrada** de centro a y radio $r > 0$ y se denota $B[a, r]$, al conjunto de números reales mayores o iguales que $a - r$ y menores o iguales que $a + r$, es decir, al intervalo cerrado $[a - r, a + r]$

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x - a| \leq r\}.$$

Se denomina recta ampliada al conjunto $\{\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\}$.

Dado un número real x se define **parte entera de** x al mayor número entero que sea menor o igual que x.

Todo número real x admite una **expresión decimal** de la forma

$$p' a_1 a_2 ... a_n ...$$

donde $p \in \mathbb{Z}$ y $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ tal que

$$x = p + a_1 * 10^{-1} + a_2 * 10^{-2} + ... + a_n * 10^{-n} + ...$$

Si la expresión decimal es finita o periódica entonces x es un número racional. En otro caso x será irracional. La expresión decimal de un número real es única salvo casos similares a este:

$$1'34000 = 1{,}33\widehat{99}.$$

A veces es necesario recortar el número de decimales de una determinada expresión. En este caso, este truncamiento ha de hacerse usando las reglas de **redondeo**: el último dígito que se conserva se aumenta en uno si el primer dígito descartado es mayor que 5; si es 5 o es 5 seguido de ceros, entonces el último dígito retenido se incrementa en uno solo si este último es impar:

número	5 cifras decimales	7 cifras decimales
5.6170431500	5.61704	5.6170432
5.6170462500	5.61705	5.6170462

Las reglas de redondeo minimizan los errores de aproximación. Se define error E como

$$E = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}$$

A menudo se trabaja con el error absoluto ($|E|$). El error relativo es

$$e = \frac{E}{\text{valor verdadero}}.$$

Este último compara la magnitud del error cometido con la magnitud del valor que se pretende estimar y puede interpretarse en términos de %.

1.1.3. Números complejos

La solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es el número complejo $i = \sqrt{-1}$. Se define el conjunto de los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \{x + yi / \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

La expresión $a + bi$ de un número complejo se denomina **forma binómica**. Todo número real x es también un número complejo cuya forma binómica será $x + 0i$.

Dados dos números complejos $(a + bi)$ y $(c + di)$, se define la suma y el producto de ambos así:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

El conjunto $\mathbb{C}$ con las operaciones suma y producto tiene estructura de cuerpo en el que no es posible establecer un orden. El número complejo $a + bi$

se puede representar en el plano XY como el vector (a, b). Se denomina **afijo** del complejo $a + bi$ al punto (a, b) del plano.

Dado el número complejo $z = a + bi$ se define **conjugado** de z y se denota $\bar{z}$ a:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Dados dos números complejos z y z', se verifica que

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

El **módulo** de un complejo $z = a + bi$ es el número real positivo

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

que representa la distancia del afijo $a + bi$ al 0. Para dividir dos complejos, es decir, multiplicar uno por el inverso del otro, podemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \bar{w}.$$

Se verifica que:

1. $|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.
3. $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \ \forall z \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$, siendo z^{-1} el inverso de z.
4. $|z + w| \leq |z| + |w| \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.
5. $\big||z| \pm |w|\big| \leq |z \pm w| \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.
6. $\frac{z}{|z|}$ tiene módulo 1.

Dado el complejo $z = a + bi \neq 0$, se define **argumento principal** de z al número real $\theta \in (0, 2\pi]$ tal que:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

Gráficamente, θ representa el ángulo que forma el vector (a, b) con la parte positiva del eje X. El conjunto de argumentos de z es

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi : \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Se tiene que

$$z = a + bi = |z|\cos(\theta) + |z|\operatorname{sen}(\theta)i = |z|(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i)$$

La expresión $|z|(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)i)$ es la **forma trigonométrica** de z.

La expresión $|z|_\theta$ es la forma **módulo-argumento** de z, siendo θ uno de los argumentos de z. Dos complejos z y w son iguales si tienen iguales sus módulos y sus argumentos difieren en un múltiplo entero de 2π :

$$|z|_\theta = |w|_\psi \quad \Leftrightarrow \quad |z| = |w| \quad \text{y} \quad \theta - \psi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

El conjugado de $|z|_\theta$ es $|z|_{2\pi-\theta} = |z|_{-\theta}$.

La forma módulo-argumento es útil para realizar operaciones de producto y potencia de exponente entero. Si z, $w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que

1. $|z|_\theta \cdot |w|_\psi = \big(|z| \cdot |w|\big)_{\theta+\psi}$
2. $\frac{|z|_\theta}{|w|_\psi} = \big(\frac{|z|}{|w|}\big)_{\theta-\psi}$
3. $\big(|z|_\theta\big)^n = z \cdot z \cdot$ ...(n-veces)... $\cdot\, z = \big(|z|^n\big)_{n\theta}$

Ejercicio: *Calcula los números complejos tales que* $z^3 \cdot \bar{z} = -1$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de z si $w^n = z$. Un número complejo distinto de 0 tiene n raíces n-ésimas y $\sqrt[n]{z}$ representa al conjunto de todas ellas. Puesto que $z = w^n$, se tiene que $|z|_\theta = \big(|w|^n\big)_{n\psi}$ y por tanto

- $|z| = |w|^n \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$
- $\theta - n\psi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi = \frac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Ejercicio: *Calcula las raíces sextas de 1 y las raíces sextas de* -1.

Partiendo de la forma trigonométrica del número complejo

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

se llega a la **forma exponencial**

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

1.2. Sucesión de números reales. Propiedades

Una **sucesión de números reales** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto de infinitos números reales que están ordenados, es decir, que hay un primer número (a_1), un segundo (a_2), un tercero (a_3), un n-ésimo (a_n), etc. Los siguientes son ejemplos de sucesiones:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{5},\ \dots$$

$$1, \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ 1,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ 1,\ \dots$$

Puesto que a cada número real de la sucesión se le asigna un lugar (primero, segundo, etc.), de forma exacta y rigurosa se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Podemos identificar una sucesión mediante alguna de estas posibilidades:

- el **término general** $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n})$

- una **definición por recurrencia** $(b_1 = 0{,}5,\ b_n = 2b_{n-1} - 1)$
- mostrando **sus primeros términos** $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$.

Una sucesión puede representarse en unos ejes cartesianos, situando los valores de n en el eje X y los valores de a_n en el eje Y. También se suelen representar solo los valores de a_n en la recta real, pero en este caso la representación no permite identificar el orden de la sucesión.

Intuitivamente, se dice que una **sucesión es convergente** si los términos de la sucesión se van acercando a un número real l (se denota $\lim\limits_{n\to\infty} = l$) . Más precisamente se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a $l \in \mathbb{R}$ o tiene como límite l si se verifica alguna de estas propiedades equivalentes:

- Todos y cada uno de los intervalos centrados en l de cualquier radio r, $(l-r, l+r)$, contienen todos los términos de la sucesión a_n salvo, quizás, una cantidad finita de ellos; es decir, a partir de un término a_ν, todos los posteriores están contenidos en el intervalo $(l-r, l+r)$.

- Para todo $r > 0$, existe un término en la sucesión (a_ν) tal que para los términos a_n posteriores $(n \geq \nu)$ se cumple que $a_n \in (l - r, l + r)$.

Intuitivamente una **sucesión** de números reales es de **Cauchy** si, a medida que avanzamos en la sucesión, los términos cada vez están más cerca unos de otros. De forma más precisa, se dice que una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si sea cual sea la distancia $\epsilon > 0$ que fijemos, existe un término a_ν a partir del cual, si elegimos dos términos cualesquiera posteriores a_n y a_m $(n, m \geq \nu)$, la distancia entre ellos es menor que ϵ $(|a_n - a_m| < \epsilon)$.

Una sucesión $(a_n)_{n\in N}$ se dice que es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in N$ y **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$. De forma similar se define sucesión **decreciente** y **estrictamente decreciente**. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

Una sucesión a_n se dice que está **acotada superiormente** si existe un número M tal que $a_n \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Una sucesión a_n se dice que está **acotada inferiormente** si existe un número m tal que $m \leq a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Una sucesión a_n se dice que está **acotada** si existen unos números m y M tal que $m \leq a_n \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, es decir, si está acotada superior e inferiormente.

1.3. Cálculo de límites de una sucesión

1.3.1. Operaciones con sucesiones convergentes

Una sucesión se puede sumar, multiplicar, dividir con otra sucesión término a término. También se puede multiplicar una sucesión por un número real multiplicando cada término por el número real. Así mismo es posible considerar una sucesión elevada a otra sucesión $(a_n^{b_n})$ término a término o calcular el logaritmo a los términos de una sucesión (Ła_n).

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. El límite de una sucesión convergente es único.

2. Las operaciones suma, producto y producto por un número de sucesiones convergentes da como resultado una sucesión convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n.$$

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $l < k$, entonces $a_n < k$ a partir de un término en adelante.

4. Si $a_n < k$ a partir de un término en adelante, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \leq k$.

5. Si $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, entonces $a_n < b_n$ a partir de un término en adelante.

6. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ y $a_n \leq c_n \leq b_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

7. Toda sucesión formada con términos extraídos de otra sucesión convergente (subsucesión) es convergente al mismo límite.

8. Toda sucesión convergente es de Cauchy y que toda sucesión de Cauchy es acotada.

9. Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente. Equivalentemente, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente

Ejercicio: *Construye una sucesión formada por números racionales que converja a* $\sqrt{2}$.

La sucesión del ejercicio anterior es una sucesión de Cauchy de números racionales, sin embargo el límite no es un número racional sino un número real. Por cuestiones como la anterior se dice que :

$$\boxed{\textit{El conjunto } \mathbb{Q} \textit{ no es completo.}}$$

Por el contrario, no es posible encontrar una sucesión de Cauchy formada por números reales cuyo límite no sea un número real puesto que

Teorema: *Toda sucesión de Caychy de números reales es convergente en los números reales.*

El resultado anterior se conoce como **teorema de completitud de** $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\textbf{\textit{El conjunto }} \mathbb{R} \textbf{\textit{ es completo.}}}$$

1.3.2. Límites infinitos

Se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a infinito o tiene como límite infinito ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$) si se verifica alguna de estas propiedades equivalentes:

- Todos y cada uno de los intervalos de la forma (k, ∞), $k \in \mathbb{N}$ contienen todos los términos de la sucesión a_n salvo, quizás, una cantidad finita de ellos; es decir, a partir de un término a_ν, todos los posteriores están contenidos en (k, ∞).

- Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ entonces $a_n > k$.

De forma similar se define $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Una sucesión es **divergente** si tiene como límite $\pm\infty$.

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

2. La operación suma con las sucesiones da como resultado lo siguiente:

$+$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l < 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p \geq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$p + l$

3. La operación producto con las sucesiones da como resultado lo siguiente:

$\cdot$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l < 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = p > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$p \cdot l$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$	?	?	0

4. El producto de un número real λ por una sucesión da como resultado lo siguiente:

$\cdot\lambda$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$
$\lambda > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\lambda \cdot l$
$\lambda < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$\lambda \cdot l$
$\lambda = 0$	0	0	0

5. En general, al manejar sucesiones con potencias, logaritmos y cocientes, el resultado de la operación correspondiente es una sucesión con límite igual a la potencia, logaritmo o cociente de los límites correspondiente, teniendo en cuenta la regla de los signos en los cocientes. Además, se pueden presentar los siguientes casos que son indeterminaciones y hay que estudiarlos de forma particular:

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \ \infty - \infty, \ 0 \cdot (\pm\infty), \ 1^{\pm\infty}, \ \infty^0.$$

1.3.3. Infinitésimos

Un **infinitésimo** es una sucesión convergente a 0. El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo y el producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo.

Dos infinitésimos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que son equivalentes ($a_n \sim b_n$) si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

En el cálculo de límites, si tenemos un infinitésimo como factor en la expresión de un producto o cociente, podemos sustituirlo por un infinitésimo equivalente. Si $a_n \to 0$, son infinitésimos equivalentes los siguientes:

$$\text{Ł}(1 + a_n) \sim a_n \qquad \operatorname{sen} a_n \sim \tan a_n \sim a_n \qquad 1 - \cos a_n \sim \frac{1}{2}a_n^2$$

1.4. Funciones. Conceptos básicos

Tendremos una función real de variable real ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) cuando a cada elemento x de un conjunto de números reales (llamado dominio) le asignemos un elemento $f(x)$ (llamado imagen de x) y solo uno de un conjunto (llamado recorrido o conjunto imagen).

$$\text{Dominio de } f(x) = D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} / \text{ existe } f(x)\}$$

$$\text{Recorrido de } f(x) = \{y \in \mathbb{R}/y \text{ es imagen de algún } x\}$$

Sea $f(x)$ una función definida alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$. Diremos que: $f(x)$ **es creciente en** a, si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x, y \in B$,

$$x < a < y \Rightarrow f(x) \leq f(a) \leq f(y)$$

Será **estrictamente creciente en** a si

$$x < a < y \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y).$$

$f(x)$ **es decreciente en** a, si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x, y \in B$,

$$x < a < y \Rightarrow f(x) \geq f(a) \geq f(y)$$

Será **estrictamente decreciente en** a si

$$x < a < y \Rightarrow f(x) > f(a) > f(y).$$

$f(x)$ alcanza un **mínimo relativo en** a si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x \in B$,

$$f(x) \geq f(a).$$

El mínimo será estricto si $f(x) > f(a)$ para todo $x \in B$.

$f(x)$ alcanza un **máximo relativo en** a si existe una bola B centrada en a tal que para todo $x \in B$,

$$f(x) \leq f(a).$$

El máximo será estricto si $f(x) < f(a)$ para todo $x \in B$.

Una función $f(x)$ se dice que es **periódica** en un conjunto I si se existe una cantidad P tal que

$$f(x + P) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Se denomina periodo de la función $f(x)$ al valor mínimo P que verifica lo anterior.

Ejemplo: Las funciones $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\text{tg}(x)$ son periódicas.

Una función $f(x)$ está **acotada superiormente** en un conjunto I si existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq k \quad \forall x \in I$$

Una función $f(x)$ está **acotada inferiormente** en un conjunto I si existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq k \quad \forall x \in I$$

Una función se dice que es **par** o simétrica respecto al eje OY si

$$f(x) = f(-x) \quad \forall\ x \in D[f(x)].$$

Una función se dice que es **impar** o simétrica respecto al punto $(0,0)$

$$-f(x) = f(-x) \quad \forall\ x \in D[f(x)].$$

Una función se dice que es periódica si existe $T \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall\ x \in D[f(x)].$$

Al menor valor T que verifique lo anterior se le denomina período de $f(x)$.

Una función $f(x)$ está **acotada** en un conjunto I si existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq k \quad \forall x \in I$$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones. El resultado de **componer** la función g con la función f (se escribe $g \circ f$) es la función que resulta de aplicar primero la función f y al resultado aplicarle la función g. La composición $g \circ f$ solo se podrá hacer si las imágenes de $f(x)$ están contenidas en el dominio de $g(x)$.

$$\begin{array}{rccccc} g \circ f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

De forma similar la composición de f con g (se escribe $f \circ g$) es la función que resulta de aplicar primero g y al resultado aplicarle f. Solo se podrá hacer si el dominio de f contiene al recorrido de g.

La **función recíproca o inversa** de f es otra función f^{-1} tal que

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in \text{Dominio de } f$$

$$f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in \text{Dominio de } f^{-1}$$

La inversa de una función solo está definida en un intervalo donde la función original tenga valores de las imágenes no repetidos. Por ejemplo, la inversa de $f(x) = x^2$ es la función $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, \infty)$. Así mismo, la inversa de $\operatorname{sen}(x)$ es el $\operatorname{arc\,sen}(x)$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, que es donde el seno es estrictamente creciente y no tiene imágenes repetidas.

1.5. Funciones elementales

La funciones **polinómicas** son de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

con $n \in \mathbb{N}$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$. Las de grado impar tiene siempre un número impar de raíces y las de grado para tienen siempre un número par de raíces.

Las funciones **racionales** son de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Su dominio son todos los números reales excepto los valores donde se anula el denominador.

Las funciones **trigonométricas** son seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente.

Las funciones seno y coseno tiene su dominio en $(-\infty, \infty)$ y son periódicas de periodo 2π.

La función tangente tiene su dominio en todos los números reales salvo en $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, y es periódica de período π.

Las funciones **exponenciales** son de la forma a^x, con $a > 0$. Son crecientes si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$. Las funciones **logarítmicas** de la forma $log_a(x)$ son las inversas de las exponenciales a^x.

Las funciones **hiperbólicas** son las siguientes:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

y sus inversas son, respectivamente

$$\text{Ł}(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad \text{Ł}(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad \frac{\text{Ł}\frac{1-x^2}{1-x}}{2}$$

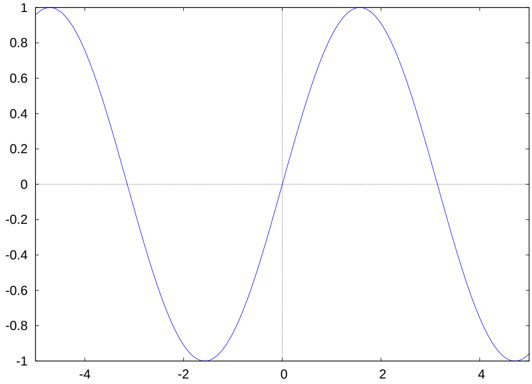


Figura 1.1: función $\mathrm{sen}(x)$.

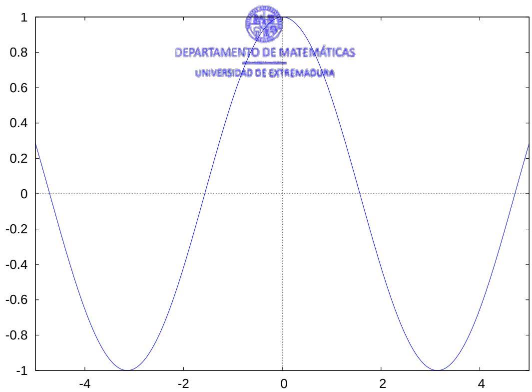


Figura 1.2: función $\cos(x)$.

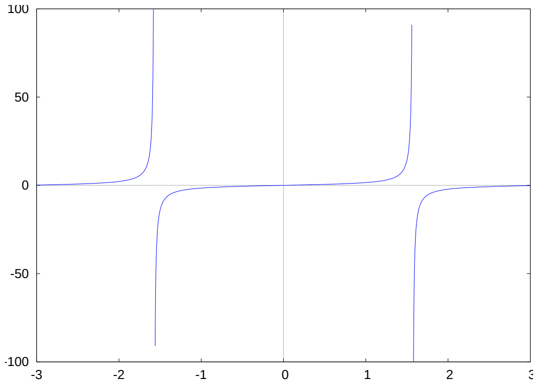


Figura 1.3: función $\mathrm{tg}(x)$.

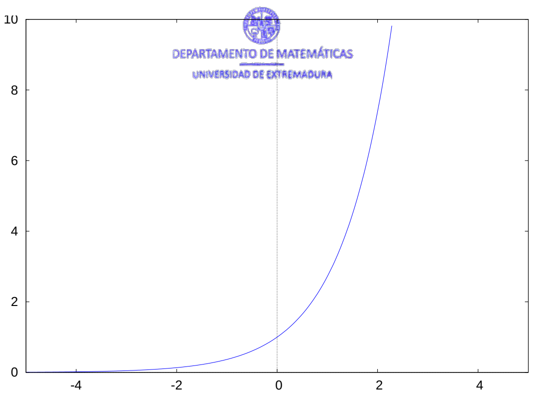


Figura 1.4: función e^x.

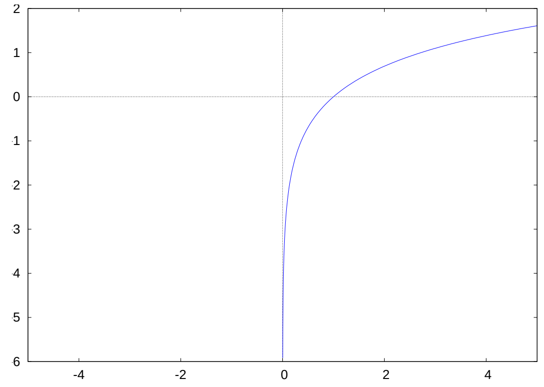


Figura 1.5: función Ł(x).

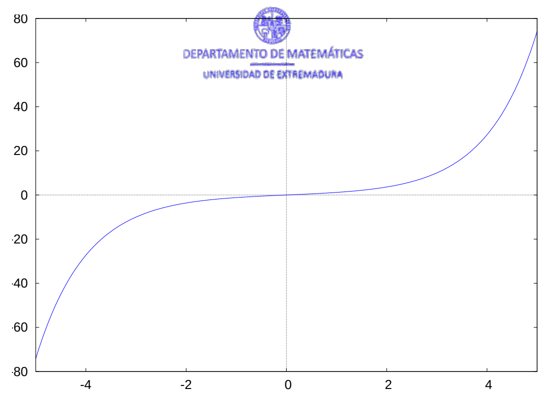


Figura 1.6: función senh(x).

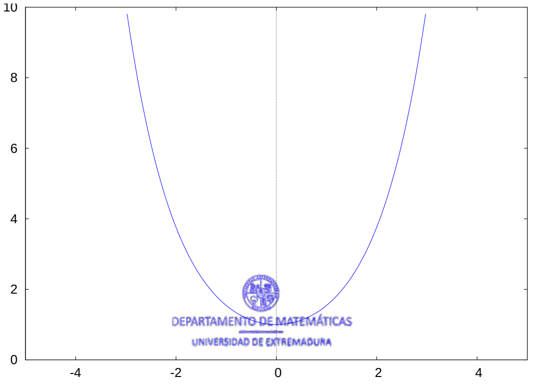


Figura 1.7: función $\cosh(x)$.

Capítulo 2

Límites y continuidad de funciones

2.1. Límite de una función en un punto. Límites laterales

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada en la figura 2.1 y definida así

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

cuyo domino es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

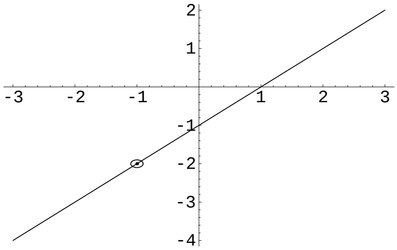


Figura 2.1: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Intuitivamente, se dice que $f(x)$ tiene límite $l = -2$ en el punto $a = -1$

(simplificadamente $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$) porque todos los valores de x cercanos a -1 tienen sus imágenes cerca de -2. Dicho de otra forma: dada cualquier sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a -1, se verifica que la sucesión de sus imágenes $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a -2.

Por similares razones, se dice que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = 0 \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x+1} = 1.$$

En general, se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene límite l cuando x tiende al número a (simplificadamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$) cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(l, \epsilon)$, existe una bola $B(a, \delta)$ tal que si $x \in B(a, \delta)$ y $x \neq a$ entonces $f(x) \in B(l, \epsilon)$.

- Dada cualquier sucesión de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ que converja a a, la sucesión de sus imágenes $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$ converge a l.

Consideremos la función representada en la figura 2.2

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

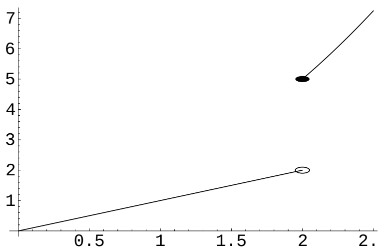


Figura 2.2: función sin límite en 2.

Si nos *acercamos* a 2 por la izquierda el límite de las imágenes es 2, pero si nos *acercamos* a 2 por la derecha el límite es 5.

Se dice que una función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene **límite lateral** l **por la derecha de** a y se representa $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$, cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(l, \epsilon)$, existe una bola $B(a, \delta)$ tal que si $x \in B(a, \delta)$ y $x > a$ entonces $f(x) \in B(l, \epsilon)$.
- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a a con puntos mayores estrictos que a, la sucesión de sus imágenes converge a l.

De forma similar se define **límite lateral por la izquierda**.

De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

1. Si una función $f(x)$ tiene límite real en un punto a, entonces ese límite es único y coincide con los límites laterales de la función en a.
2. Si una función $f(x)$ tiene límites laterales reales en a y son iguales, entonces existe el límite de $f(x)$ en a y coincide con el valor de los límites laterales.

2.2. Límites infinitos y límites en el infinito

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada en la figura 2.3 definida así

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2}.$$

Intuitivamente, se dice que $f(x)$ tiene límite infinito en el punto $a = 1$ (simplificadamente $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$) porque los valores de x *cercanos* a 1 tienen sus imágenes positivas y no acotadas. Dicho de otra forma: dada cualquier sucesión de puntos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converja a 1, se verifica que la sucesión de sus imágenes $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a infinito.

Por similares razones, se dice que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = 1 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{-x^2-1}{(x-1)^2} = -\infty.$$

En general, se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene **límite infinito cuando** x **tiende al número** a (simplificadamente $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$) si se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

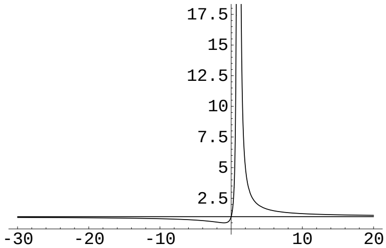


Figura 2.3: $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$

- Dado cualquier valor $k > 0$, existe una bola $B(a, \delta)$ tal que si $x \in B(a, \delta)$ y $x \neq a$ entonces $f(x) > k$.
- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a a con puntos distintos de a, la sucesión de sus imágenes converge a infinito.

De forma similar se define

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Se dice que una función cualquiera $f(x)$ tiene **límite** l **cuando** x **tiende a infinito** (simplificadamente $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$) cuando se verifica algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- Dada cualquier bola $B(l, \epsilon)$, existe un número $k > 0$ tal que si $x > k$ entonces $f(x) \in B(l, \epsilon)$.
- Dada cualquier sucesión de puntos que converja a infinito, la sucesión de sus imágenes converge a l.

De forma similar se define $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

2.2.1. Asíntotas

Dada una función $f(x)$, se dice que una recta vertical $x = a$ es **asíntota** de $f(x)$ cuando x tiende al número a por la derecha si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

De forma similar se define asíntota cuando x tiende al número a por la izquierda.

Se dice que la recta $y(x) = mx + n$ es asíntota de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} \big[f(x) - y(x)\big] = 0$$

Las rectas asíntotas pueden ser verticales, horizontales u oblicuas. Para calcularlas procederemos así:

Horizontales: hay que localizar valores $n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = n$$

En ese caso, $y = n$ será la asíntota.

Verticales: hay que localizar valores a tales que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

En cualquiera de los dos casos la recta $x = a$ será asíntota de $f(x)$.

Oblicuas: hay que localizar valores $m, n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = n.$$

En ese caso, la recta $y = mx + n$ será asíntota de $f(x)$.

2.3. Cálculo de límites. Infinitésimos.

En el cálculo de límites de funciones, siempre que tenga sentido la expresión correspondiente y salvo las indeterminaciones que se vieron en los límites con sucesiones, se verifica que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) + g(x) &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \\
\lim_{x\to a} f(x)g(x) &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \\
\lim_{x\to a} \log_{\mathrm{b}} f(x) &= \log_{\mathrm{b}}(\lim_{x\to a} f(x)) \\
\lim_{x\to a} b^{f(x)} &= b^{\lim_{x\to a} f(x)} \\
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}
\end{aligned}$$

siendo a un número real o $\pm\infty$.

Un **infinitésimo en** a es una función cuyo límite en a es 0.

Un **infinito en** a es una función cuyo límite en a es $\pm\infty$.

Dos infinitésimos o dos infinitos $f(x)$ y $g(x)$ en a son equivalentes y se representa como $f(x) \overset{x\to a}{\sim} g(x)$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Sea $f(x)$ un infinitésimo en $a \in \mathbb{R}$. Son equivalentes los siguientes infinitésimos:

$$f(x),\ \operatorname{sen} f(x),\ \tan f(x),\ \operatorname{arc\,sen} f(x),\ \arctan f(x),\ \text{Ł}(1+f(x)),\ e^{f(x)}-1$$

Por ejemplo, son equivalentes los infinitésimos:
x, $\operatorname{sen} x$, $\tan x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\arctan x$, $\text{Ł}(1+x)$ y $e^x - 1$ en $x = 0$.
$1 - \cos x$ y $\frac{x^2}{2}$ en $x = 0$
$x - 1$ y $\text{Ł}x$ en $x = 1$.

En el cálculo de límites de productos o cocientes se puede sustituir un infinitésimo o infinito por otro equivalente. Se verifica que:

1. Si $f(x)$ es un infinitésimo en a y $g(x)$ está acotada en una bola $B(a,\epsilon)$, entonces $f(x)g(x)$ es un infinitésimo en a.

2. Si $f(x)$ es un infinito en a y $g(x)$ está acotada inferiormente en una bola $B(a,\epsilon)$, entonces $f(x)+g(x)$ es un infinito en a.

3. Si $f(x)$ es un infinito en a, entonces $\frac{1}{f(x)}$ es un infinitésimo en a.

Ejercicio: *Calcula los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3-\text{Ł}x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+3x} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 x)^{\tan^2 x}$$

2.4. Función continua

Intuitivamente una función $f(x)$ es continua en un punto a cuando valores de x *cercanos* a a tiene imágenes *cercanas* a $f(a)$, es decir, la gráfica de la función $f(x)$ tiene un trazo continuo *alrededor* de a.

Sea $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un abierto que contenga a $a \in \mathbb{R}$. De forma más precisa, se dice que $f(x)$ **es continua en** a si se cumple estas condiciones:

- Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es un número real.
- Existe $f(a)$.
- $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Si la función no es continua en a se dice que tiene una discontinuidad en a. La discontinuidad puede ser:

Evitable: existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es un número real.

Esencial: no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ o es $\pm\infty$. A su vez, esta puede ser:

- De salto infinito: existen los límites laterales y alguno es $\pm\infty$.
- De salto finito: existen los límites laterales y ambos son finitos.
- De segunda especie: no existe algún límite lateral.

Una función $f(x)$ **es continua por la derecha de** $a \in \mathbb{R}$ si existe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, es un número real y coincide con $f(a)$. De forma equivalente se define continuidad por la izquierda.

Sea $f(x)$ continua en a. Se verifica que:

1. $f(x)$ está acotada en una bola $B(a, \delta)$.
2. Si $f(a) \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene el mismo signo que a en una bola $B(a, \delta)$.
3. Si $g(x)$ es continua en a, entonces $f + g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ también son continuas en a.
4. b^x, $\log_b x$, x^n $(n \in \mathbb{N})$, x^x, polinomios, funciones racionales y funciones trigonométricas son continuas en su dominio.
5. Si $g(x)$ es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

Ejercicio: *Estudia la continuidad de las funciones:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -4 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq \frac{-\pi}{2} \\ m \operatorname{sen} x + n & \text{si } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Se dice que una función $f(x)$ es **continua en el intervalo** (a, b) si es continua en todos los puntos del intervalo.

Se dice que una función $f(x)$ es **continua en el intervalo** $[a, b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

De forma similar se define continuidad en $[a, b)$ y en $(a, b]$.

2.4.1. Teoremas sobre funciones continuas

Teorema (de Bolzano): *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Ejercicio: *Pon un ejemplo de: 1) una función definida en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ y no exista $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$; 2) una función continua en (a, b) tal que $f(a)f(b) < 0$ y $f(c) \neq 0$ en todo punto $c \in (a, b)$; 3) una función continua en $[a, b]$ y tal que no exista $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Teorema de valor intermedio: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $d \in [f(a), f(b)]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Ejercicio:*Sea $f(x) = x^3 + 3x^2$ una función que representa la evolución de la temperatura en grados centígrados de un motor en función del tiempo x medido en minutos. ¿Existe algún instante entre el minuto 1 y el 2 en el que la temperatura sea 15^oC?*

Teorema: *Si $f(x)$ es continua en un intervalo I, entonces la imagen $f(I)$ también es un intervalo. Además, si el intervalo es de la forma $[a, b]$, entonces existen valores $m, M \in [a, b]$ tales $f(m)$ y $f(M)$ son, respectivamente, el mínimo y el máximo de la función $f(x)$ en $[a, b]$.*

Ejercicio:*Calcula el conjunto imagen para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[-1, 2]$. ¿En cuál de los casos la imagen es un intervalo? ¿En cuál de los casos la función alcanza valores máximo y mínimo?*

Ejercicio: *Encuentra ejemplos donde falle alguna de las hipótesis de los dos teoremas anteriores y no se verifiquen la tesis correspondiente.*

Capítulo 3

Derivadas

3.1. Derivada de una función en un punto.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Se dice que $f(x)$ es derivable en el punto a, si existe (es un número real) alguno de estos dos límites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, a ese número real se le llama derivada de $f(x)$ en a y se denota $f'(a)$ o $Df(a)$.

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es derivable en $a = 4$ porque

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4}}}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x - 4} =$$
$$= \lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{2\sqrt{x}(x-4)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 4} \frac{-1}{2\sqrt{x}(2+\sqrt{x})} = \frac{-1}{16}.$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ en 4 existe y vale $f'(4) = -1/16$.

$\square$

Ejemplo: La función $f(x) = x^2$ es derivable en $a = 2$ porque

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0} h+4 = 4.$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ en 2 existe y vale $f'(2) = 4$.

$\square$

¿Qué significa que la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *en 4 sea*

$$f'(4) = -1/16 = -0{,}0625 \quad ?$$

(Ver figura 3.1)

1. Elijamos una sucesión que converja a $a = 4$, por ejemplo $x_n = 4 + 1/n$.

2. Calculemos los cocientes $\frac{f(x_n)-f(4)}{x_n-4}$. Cada uno de estos cocientes representan la inclinación de la recta que pasa por los puntos $(x_n, f(x_n))$ y por $(4, f(4))$ (es decir, la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X).

3. Cuando x_n se acerca a 4, las rectas anteriores se acercan a la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto 4.

4. El límite de dichos cocientes (inclinaciones) cuando avanzamos en la sucesión, es decir, cuando x_n se acerca a 4, representa la inclinación de la recta tangente en 4.

x_n	inclinación
$x_{200} = 4{,}005$	$-0{,}06244146721847$
$x_{1000} = 4{,}001$	$-0{,}06248828369088$
$x_{2500} = 4{,}0004$	$-0{,}06249531289054$
$x_{140345} = 4{,}000007125298372$	$-0{,}0624999165060$
$x_{2345678} = 4{,}000000426315974$	$-0{,}06249999507708$

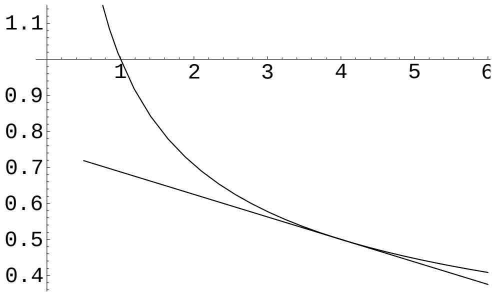


Figura 3.1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

¿Puede existir una función que en un punto a sea derivable y en ese mismo punto no sea continua ? No.

Propiedad: *Toda función derivable en a es continua en a.*

Demostración. Si $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es un número real entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

y esto último significa que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, es decir, que $f(x)$ es continua en a.

$\square$

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Se dice que $f(x)$ **es derivable en el punto** a **por la derecha**, si existe (es un número real) alguno de estos dos límites

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

En ese caso, a ese número real se le llama derivada de $f(x)$ en a por la derecha y se denota $f'_+(a)$.

De forma similar se define función derivable en a por la izquierda y derivada en a por la izquierda:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Propiedad: *Una función $f(x)$ es derivable en un punto a si y solo si es derivable por la izquierda y por la derecha en a y ambas derivadas laterales coinciden.*

Demostración. $f(x)$ es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

es decir, si y solo si existen los límites laterales

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y son iguales.

$\square$

Ejemplo: La función $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no es derivable, porque $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$.

3.2. Función derivada

¿Cuánto vale la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en un punto cualquiera a?

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} =$$
$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo I. Se dice que $f(x)$ es derivable en I si es derivable en todo $x \in I$. En tal caso, podemos construir otra función tal que a cada punto x le asigne la derivada de $f(x)$ en ese punto:

$$x \in I \xrightarrow{f'} f'(x).$$

Dicha función se llama *función derivada de* $f(x)$ o simplemente la *derivada de* $f(x)$, y se denota $f'(x)$.

Ejercicio: *¿Qué diferencia hay entre la derivada de una función en un punto y la derivada de una función?*

□

Las funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son derivables en cualquier punto de su dominio. Estas son las derivadas de las funciones elementales:

función	derivada	función	derivada	función	derivada
$k \in \mathbb{R}$	0	$L(x)$	$1/x$	$\mathrm{Log}_a(x)$	$\frac{1}{x}\mathrm{Log}_a\, e$
e^x	e^x	$a^x,\ a>0$	$a^x La$	$x^k,\ k \in \mathbb{R}$	kx^{k-1}
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathrm{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\mathrm{sen}(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$\mathrm{arc\,sen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	senh	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathrm{senh}(x)$
$\tanh(x)$	$1-\tanh^2(x)$	$\mathrm{arcsenh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$				

Nota.- Se define seno, coseno y tangente hiperbólica como

$$\mathrm{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Ejercicio: Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = |x^2 - 7x + 10|.$$

□

Si $f(x)$ es derivable en un intervalo I y su derivada $f'(x)$ es también derivable en I, entonces la derivada de esta última es la derivada segunda de $f(x)$ y se denota $f''(x)$. De forma similar se definen $f'''(x)$, $f^{4)}$, $f^{5)}$, etc.

3.3. Operaciones con funciones derivables

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en I, entonces:

1. La función suma $(f+g)(x)$ y la diferencia $(f-g)(x)$ son funciones derivables en I y las derivadas de una y otra son

$$f'(x)+g'(x) \qquad \text{y} \qquad f'(x)-g'(x).$$

2. La función $\alpha \cdot f(x)$ es derivable $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, y

$$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x).$$

Ejercicio: Calcula la ecuación de la recta:

   a) Tangente a $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ y paralela a la recta $y + 3x = 7$.
   b) Tangente a $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ en el punto $x = -2$.

3. La función producto $(f \cdot g)(x)$ es derivable en I, y

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

4. La función cociente f/g es derivable en todo $x \in I$ tal que $g(x) \neq 0$ y

$$\frac{f'}{g}(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

5. Si $f(x)$ es derivable en I, $g(x)$ es derivable en $f(I)$, entonces la composición $g \circ f$ es derivable en I y $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ (Regla de la cadena).

$\square$

Ejemplo: La función derivada de $\operatorname{sen}(f(x))$ en un punto a es

$$\cos(f(a)) \cdot f'(a).$$

Ejercicio: Sabiendo que la composición de una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ es la función identidad $((f \circ f^{-1})(x) = x)$, demuestra que la derivada del arcoseno es $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

$\square$

3.3.1. Derivada de una función implícita

Sea $F(x, y) = 0$ una expresión que depende de x y de y. Supongamos que existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una función $y = f(x)$ tal que si $x \in I$ entonces $F(x, f(x)) = 0$. Se dice que la función $f(x)$ está definida implícitamente por la expresión $F(x, y) = 0$.

Ejemplo: La expresión $x^2+y^2 = 0$ define implícitamente la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y la función $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

$\square$

Si una función $f(x)$ está definida implícitamente por una expresión $F(x, y) = 0$, es posible calcular la derivada de la función $y = f(x)$ respecto a la variable x en algún punto (x_0, y_0) que verifique la expresión $F(x_0, y_0) = 0$. El proceso sería el siguiente:

1. Se deriva la expresión $F(x, y)$ (considerando que y es una función que depende de x) y se iguala a 0.

2. Se sustituye (x, y) en la expresión derivada anterior por (x_0, y_0).

3. Se despeja el valor de $y'(x_0)$.

Ejemplo: Calculamos la derivada de y respecto de x en el punto $(1/2, \sqrt{3}/2)$ sabiendo que $x^2 + y^2 = 1$.

1. Se deriva la expresión $x^2 + y^2 - 1$ y se iguala a 0:

$$D_x(F(x, y)) = 2x + 2yy' = 0$$

2. Se sustituye en la expresión derivada anterior (x, y) por $(1/2, \sqrt{3}/2)$:

$$2 * 1/2 + 2 * \sqrt{3}/2 * y'(1/2) = 0$$

3. Se despeja el valor de $y'(x_0)$:

$$y'(1/2) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio: *Calcula la derivada de* y *respecto de* x *en el punto* $(1, 2)$ *sabiendo que* $xy^2 = (1 + x)^2 - \text{Ł}x$.

3.3.2. Derivadas sucesivas. Fórmula de Leibniz

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un intervalo abierto I. La fórmula de Leibniz permite calcular la derivada n-ésima del producto:

$$D^n(fg) = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) f^{n-i)} g^{i)}.$$

Capítulo 4

Propiedades de la funciones derivables

4.1. Comportamiento en un punto de las funciones derivables. Crecimiento y decrecimiento.

Sea $f(x)$ una función definida alrededor de un punto $a \in \mathbb{R}$. Recordando los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximo relativo y mínimo relativo que se definieron en la sección 1.4, podemos enunciar las siguientes propiedades:

1. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y creciente (equivalentemente, decreciente) en a, entonces $f'(a) \geq 0$ ($f'(a) \leq 0$).*

   Demostración. El valor de $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ es mayor o igual que 0, porque si $x < a$, el numerador y el denominador son negativos, y si $x > a$, ambos son positivos. $\square$

2. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y $f'(a) > 0$ (equivalentemente, $f'(a) < 0$), entonces $f(x)$ es estrictamente creciente en a (estrictamente decreciente en a).*

   Demostración. Como $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, existe una bola centrada en a tal que si $x < a$, el numerador y el denominador son negativos, con lo que $f(x) < f(a)$; si $x > a$, ambos son positivos, con lo que $f(x) > f(a)$. $\square$

3. *Si $f(x)$ es una función derivable en a y alcanza un mínimo relativo en a (equivalentemente, máximo relativo), entonces $f'(a) = 0$.*

   Demostración. Por ser a un mínimo relativo, se tiene que $f(x) - f(a)$ y $x - a$ tienen el mismo signo si $x < a$ y distinto signo si $x > a$. Por tanto $f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ y $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Se concluye que $f'(a) = 0$. De forma similar se razona para un máximo relativo. $\square$

¿Si $f(x)$ es estrictamente creciente en a entonces $f'(a) > 0$?

¿Si $f'(a) = 0$ entonces a es un máximo o mínimo?

4.2. Teoremas fundamentales del cálculo diferencial

Ejercicio: *Sea $f(x) = x^3 - 9x + 1$ la función que muestra el beneficio en el intervalo de años $[-3, 3]$, siendo 0 el año presente. Calcula el beneficio 3 años antes y 3 años después y calcula si el crecimiento del beneficio ha sido 0 algún año.*

El beneficio hace 3 años fue $f(-3) = 1$ y el beneficio 3 años después será $f(3) = 1$. El crecimiento del beneficio se valora con la derivada de la función y será 0 si $f'(x)$ es 0 en algún valor del intervalo $[-3, 3]$. Esto último se puede asegurar que ocurre basándonos en el teorema de Rolle:

Teorema de Rolle: *Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, por una propiedad de las funciones continuas (ver sección 2.4.1), alcanzará un valor máximo (M) y un valor mínimo (m) en $[a, b]$. Si M o m se corresponden con un punto $c \in (a, b)$, entonces $f'(c) = 0$ por ser máximo o mínimo relativo. Si M y m se alcanzan en a y b, entonces $M = f(a) = f(b) = m$, con lo que $f(x)$ es constante en $[a, b]$ y su derivada vale 0 en todo punto de $[a, b]$.

$\square$

Teorema de Cauchy de valor medio: *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$.*

Demostración. Basta comprobar que la función $f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]$ cumple el teorema de Rolle en $[a, b]$.

$\square$

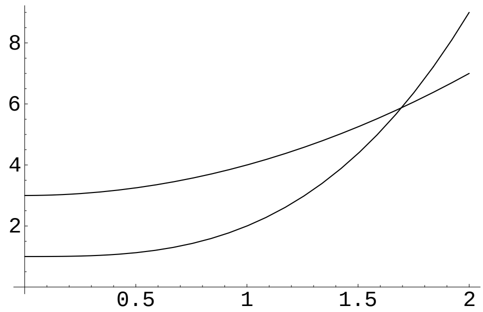


Figura 4.1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ejercicio: *Las expresiones $f(t) = t^3 + 1$ y $g(t) = t^2 + 3$ representan los beneficios en función del tiempo de dos empresas (ver figura 4.1). Comprueba que el incremento de los beneficios de una de ellas es el doble que el incremento del beneficio de la otra en el intervalo de tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 2$. ¿En algún instante el crecimiento de los beneficios de una fue el doble que el crecimiento de los beneficios de la otra?*

$\square$

Teorema de Lagrange de valor medio: *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)[b - a]$.*

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior a $f(x)$ y a $g(x) = x$.

$\square$

Ejercicio: *En el ejercicio anterior, calcula el incremento medio de los beneficios en el periodo $[0, 2]$. ¿En algún instante de ese periodo el crecimiento de los beneficios fue igual que el incremento medio?*

$\square$

Regla de L'Hôpital: *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en todos los puntos de un entorno reducido*[1] *B de $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Si ambas funciones son derivables en B y $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in B$, entonces:*

1. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, *entonces*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

2. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, *entonces*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Demostración del Caso 1. Si $a \in \mathbb{R}$, definimos $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, con lo que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $B \cup a$. Si $x \in B$, podemos aplicar el teorema de Cauchy al intervalo $[x, a]$ (o al intervalo $[a, x]$) y tendremos que existe un punto $c_x \in [x, a]$ (o $c_x \in [a, x]$) tal que
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Por tanto,
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a, c_x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
Si $a = \pm\infty$, basta hacer el cambio $t = 1/x$ y aplicar lo anterior.

□

Observación: La regla de L'Hôpital también es válida para calcular límites laterales. En este caso, será necesario que las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ estén definidas a la derecha o a izquierda del punto a, según el límite lateral que queramos calcular. Por ejemplo:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{L}\, x}{x}$$

[1]Un entorno reducido de a puede ser una bola abierta centrada en a a la que se le quita el centro.

Capítulo 5

Aproximación y representación de funciones

5.1. Teorema de Taylor en una variable

5.1.1. Polinomio de Taylor

Dada una función $f(x)$, *¿cómo construir una función sencilla que "se parezca" a $f(x)$ alrededor de un cierto punto $a \in \mathbb{R}$?*

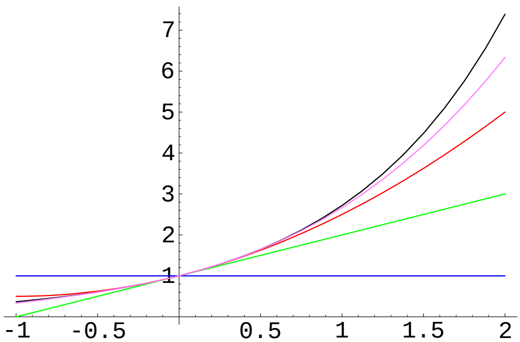


Figura 5.1: Polinomios de Taylor de e^x en 0 de orden 0, 1, 2 y 3.

Diremos que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivables hasta orden m en $x = a$, tienen un punto de contacto en a de orden m, si en el punto a se verifica que:

$$f(a) = g(a) \qquad f'(a) = g'(a) \qquad f^{2)}(a) = g^{2)}(a) \qquad \ldots \qquad f^{m}(a) = g^{m}(a)$$

Cuando más derivadas tengan iguales en un punto dos funciones, más se parecerán alrededor de ese punto.

Ejercicio: Comprueba que si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivables hasta orden m en $x = a$, tienen un punto de contacto en a de orden m, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_a^m f(x)}{(x-a)^r}$$

siendo $r = 0, 1, \ldots, m$.

Teorema (local de Taylor): *Sea B una bola abierta centrada en un punto $a \in \mathbb{R}$, y $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable m veces en a. Existe una única función polinómica de grado menor o igual que m que tiene un contacto en a con $f(x)$ de orden m. Dicha función es:*

$$P_a^m f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

$P_a^m f(x)$ es el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en el punto a.

Demostración del Teorema local de Taylor. Consideremos un polinomio cualquiera de grado m expresado en forma de sumas de potencias de $(x - a)$:

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_m(x-a)^m.$$

Si $f(x)$ y $P(x)$ tienen un contacto de orden m en a, entonces se cumplirá lo siguiente:

1. $f(a) = P(a) \Rightarrow \boxed{c_0 = f(a).}$

2. Puesto que $P'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + m(x-a)^{m-1}$, se tiene que:

$$f'(a) = P'(a) = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = f'(a).}$$

3. Puesto que $P^{2)}(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + m \cdot (m-1)(x-a)^{m-2}$, se tiene que:

$$f^{2)}(a) = P^{2)}(a) = 2c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \tfrac{f^{2)}(a)}{2}.}$$

Razonando de forma similar hasta $r = m$ se obtiene que los únicos coeficientes posibles para el polinomio son los siguientes

$$\boxed{c_0 = f(a) \quad c_1 = f'(a) \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad \cdots \quad c_m = \frac{f^{m)}(a)}{m!}.}$$

$\square$

Ejercicio: *Calcula los polinomios de Taylor para la funciones e^x y $\operatorname{sen}(x)$ en el punto 0 de orden $1, 2, 3, 4$. Deduce la expresión para orden n.*

$\square$

$\square$

Ejercicio: *Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, ¿cuáles son sus polinomios de Taylor de grado $0, 1, 2, \ldots, m$?*

$\square$

5.1.2. Teorema de Taylor. Fórmula de Taylor

Ejercicio: *Calcula aproximadamente el valor de $e^{0,2}$ haciendo uso de los polinomios de Taylor de grado 1,2,3 y 4.*

$\square$

¿Cómo estimar el error cometido al aproximar un cierto valor haciendo uso de los polinomios de Taylor?

Si $f(x)$ es $m+1$ veces derivable en $[a, b)$ y m veces derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

Teorema: *Sean $f(x)$ una función definida en $[a, b]$, continua en $[a, b]$, m veces derivable en $[a, b)$ y $m+1$ veces derivables en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\boxed{f(b) = P_a^m f(b) + \frac{f^{m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.}$$

La expresión

$$f(b) - P_a^m f(b) = \frac{f^{m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}$$

sirve para estimar la diferencia entre el valor de $f(x)$ en un punto b cuando lo aproximamos por el valor del polinomio de Taylor en b, es decir, se utiliza para acotar el error cometido en la aproximación.

Ejercicio: *Calcula una cota de los errores cometidos en el ejercicio anterior, al aproximar $e^{0,2}$ haciendo uso de los polinomio de Taylor de grado 1,2,3 y 4.*

Ejercicio: ¿Qué polinomio usarías para encontrar una aproximación de e^1 con seis cifras decimales exactas?

Ejercicio: ¿Qué polinomio usarías para encontrar una aproximación de $\operatorname{sen}(3)$ con error menor que 10^{-10}?

Ejercicio: Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

haciendo uso de la fórmula de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ en 0.

5.2. Estudio local de la gráfica de una función

Si $f(x)$ una función diferenciable en a, $f(x)$ estará definida alrededor de a y tendrá una única recta tangente a en a. La gráfica de la función tendrá ecuación $y = f(x)$ y la recta tangente en a tendrá ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Se dice que $f(x)$ tiene en a un punto de

1. **concavidad**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por encima de la gráfica de $f(x)$:

$$f(a) + f'(a)(x - a) \geq f(x)$$

2. **convexidad**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por debajo de la gráfica de $f(x)$:

$$f(a) + f'(a)(x - a) \leq f(x)$$

3. **inflexión**, si existe una bola centrada en a tal que la recta tangente está por encima de la gráfica de $f(x)$ si $x < a$ y por debajo de $f(x)$ si $x > a$.

   Se dice que una función $f(x)$ es

4. **creciente en un intervalo I** (equivalentemente, **estrictamente creciente**) si para todo $x, y \in I$

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (f(x) < f(y)),$$

5. **decreciente en un intervalo** I (equivalentemente, **estrictamente decreciente**) si para todo $x, y \in I$, si

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (f(x) > f(y)),$$

6. **convexa en un intervalo** I si para todo $x, y, z \in I$, si

$$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

7. **cóncava en un intervalo** I si para todo $x, y, z \in I$, si

$$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

En general, no tiene por qué ocurrir ninguna de las tres cosas.

Teorema: *Sea $f(x)$ una función derivable varias veces. Si la primera derivada en a de orden mayor que 1 que no se anula es*

1. *de orden par y positiva, entonces a es un punto de convexidad para $f(x)$;*
2. *de orden par y negativa, entonces a es un punto de concavidad para $f(x)$;*
3. *de orden impar, entonces a es un punto de inflexión para $f(x)$.*

Demostración. Caso 1. Supongamos que

$$f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{m-1)}(a) = 0, f^{m)}(a) > 0.$$

Por el teorema local de Taylor sabemos que $f(x)$ y $P_a^m f(x)$ tiene un punto de contacto de orden m en a, luego (ver el ejercicio de la página 46):

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_a^m f(x)}{(x-a)^m} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^m(a)}{m!}(x-a)^m]}{(x-a)^m},$$

es decir

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{f^{m)}(a)}{m!} > 0.$$

De modo que el numerador y denominador de la fracción $\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^m}$ tienen que tener el mismo signo alrededor del punto a. Por ser m par, el signo de $(x-a)^m$ es positivo y como consecuencia

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$$

alrededor de a, que es la condición para que a sea punto de convexidad.

Los casos 2 y 3 se razonan de forma similar.

$\square$

Teorema: *Sea $f(x)$ una función derivable varias veces. Si la primera derivada en a es 0 y a es un punto de*

1. *convexidad, entonces a es un mínimo relativo para $f(x)$*
2. *concavidad, entonces a es un máximo relativo para $f(x)$.*

Demostración. Similar a la anterior.

□

Teorema: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

1. *$f(x)$ es creciente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*
2. *$f(x)$ es decreciente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.*

Proposición: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

1. *$f(x)$ es convexa en $I \Leftrightarrow f'(x)$ es creciente en I*
2. *$f(x)$ es cóncava $\Leftrightarrow f'(x)$ es decreciente en I.*

Teorema: *Sea I un intervalo abierto (acotado o no) y $f(x)$ una función derivable definida en I. Entonces:*

$$f(x) \text{ es convexa} \Leftrightarrow f'(x) \text{ es creciente} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I$$

5.3. Representación gráfica de funciones

La representación gráfica de una función debe incluir el estudio de lo siguiente:

1. Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} / \quad \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$.
2. Simetrías: par $f(x) = f(-x)$ o impar $-f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D$.
3. Periodicidad: existe $T \in \mathbb{R}$ llamado período tal que

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall\, x \in D.$$

4. Puntos de corte con los ejes: en el eje OX los puntos de la forma $(x, 0)$ y en el eje OY los puntos de la forma $(0, f(0))$.

5. Signo de la función: los conjunto de puntos $\{x \in \mathbb{R}/ \quad f(x) > 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R}/ \quad f(x) < 0\}$.

6. Puntos de discontinuidad:

   Evitable: existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es un número real.

   Esencial: no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ o es $\pm\infty$. A su vez, esta puede ser:

   - De salto infinito: existen los límites laterales y alguno es $\pm\infty$.
   - De salto finito: existen los límites laterales y ambos son finitos.
   - De segunda especie: no existe algún límite lateral.

7. Asíntotas:

   Horizontales: son rectas de la forma $y = b$ tales que

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

   Verticales: son rectas de la forma $x = a$ tales que

   $$\lim_{x \to a^+, a^-} f(x) = \pm\infty$$

   Oblicuas: son rectas de la forma $y = mx + n$ tales que

   $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = n.$$

8. Regiones de crecimiento y decrecimiento

9. Máximos o mínimos relativos.

10. Regiones de concavidad y convexidad.

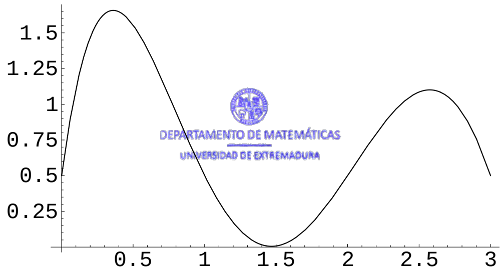
11. Puntos de inflexión.

$\square$

Capítulo 6

Integral de Riemann

6.1. Definición y propiedades de la integral de Riemann



Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función positiva definida en un intervalo $[a, b]$. Pretendemos calcular el área delimitada por la gráfica de la función f y por el eje X desde $x = a$ hasta $x = b$, que denotaremos $\int_a^b f(x)dx$.

Para calcular el área, elegimos una **partición** $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, es decir, un conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \qquad \text{y} \qquad [a, b] = \cup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k].$$

A partir de la partición anterior, se puede calcular el valor $s(f, P)$, que será la suma de las área de los rectángulos de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura el valor ínfimo de $f(x)$ en intervalo $[x_{k-1}, x_k]$:

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)|x_k - x_{k-1}| \quad \text{siendo} \quad m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

De forma similar, se puede calcular el valor $S(f,P)$, que será la suma de las áreas de los rectángulos de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura el valor supremo de $f(x)$ en intervalo $[x_{k-1}, x_k]$:

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)|x_k - x_{k-1}| \quad \text{siendo} \quad M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

De esta forma, tenemos acotado el valor del área que pretendíamos calcular:

$$s(f,P) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S(f,P).$$

Si queremos aproximarnos más al valor del área buscada, podemos elegir una partición P' más fina que P, es decir, una partición del intervalo $[a,b]$ con más puntos. Se puede comprobar fácilmente que si P' es más fina que P, entonces

$$s(f,P) \leq s(f,P') \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S(f,P') \leq S(f,P)$$

Siguiendo este proceso de forma que la anchura de los "trocitos"$[x_{k-1}, x_k]$ de las particiones tienda a 0, podremos aproximar el valor del área buscada tanto como queramos, siempre que se verifique que los límites de las sumas $s(f,P)$ y $S(f,P)$ converjan al mismo valor. En ese caso, el área $\int_a^b f(x)dx$ es la integral de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ y se define como

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim S(f,P) = \lim s(f,P)}$$

y la función $f(x)$ se dice que es integrable.

El proceso anterior y la correspondiente definición de integral de $f(x)$ en $[a,b]$ es válido también cuando la función es negativa o cuando tiene una parte positiva y otra negativa.

Si la función es negativa, el resultado de $\int_a^b f(x)dx$ será el valor del área definida por $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, pero con el signo negativo.

Si la función tiene una parte positiva y otra negativa en $[a, b]$, el valor de $\int_a^b f(x)dx$ obtenido mediante el proceso anterior **es la suma del área definida por la parte positiva de la función menos el área definida por la parte negativa de la función en el intervalo** $[a, b]$**.**

En resumen, una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada es **integrable** en $[a, b]$ si

$$\text{lím}\, S(f, P) = \text{lím}\, s(f, P)$$

cuando la partición P se hace más fina y la distancia mínima de los puntos de la partición tiende a 0 . En ese caso se llama integral de $f(x)$ en $[a, b]$ a

$$\int_a^b f(x)dx = \text{lím}\, S(f, P) = \text{lím}\, s(f, P)$$

y su valor representa la suma del área definida por el eje X y la parte positiva de la función $f(x)$ menos el área definida por el eje X y la parte negativa de la función $f(x)$, todo ello dentro del intervalo $[a, b]$

6.1.1. Propiedades de la integral

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en un intervalo $[a, b]$.

1. Si $f(x)$ es monótona (creciente o decreciente) o continua en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.

2. Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces $-f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

3. Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

4. Si $f(x)$y $g(x)$ son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

5. Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces $|f(x)|$ también y $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

6. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$ entonces $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ también y $\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7. Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ $\forall a < c < b$ y $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

8. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

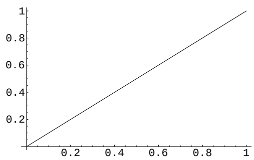
9. Si $f(x)$ tiene, como mucho, un número de discontinuidades finitas o infinitas numerables (tantas discontinuidades como números naturales hay), entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.

6.2. Teorema fundamental del cálculo integral

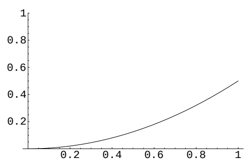
Sea $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$. Una **primitiva** de $f(x)$ en $[a,b]$ es una función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Ejemplo: $\frac{x^2}{2}$ y $\frac{x^2}{2} + 56$ son primitivas de x en todo $\mathbb{R}$.

Teorema fundamental del cálculo integral: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a,b) y es una primitiva de $f(x)$ en (a,b), es decir, $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.



$f(x) = x$



$F(x) = \frac{x^2}{2}$

$\square$

Regla de Barrow

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $G(x)$ una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Ejemplo: $\int_1^3 x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$

6.3. Primitivas de una función. Primitivas inmediatas

Denotaremos $\int f(x)\ dx$ al conjunto de funciones primitivas de $f(x)$, es decir, las funciones cuya derivada es $f(x)$. Ya justificamos en el tema anterior que dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante, por tanto, conocida una primitiva, se conocerán todas las demás. A continuación se presentan las primitivas de algunas funciones que denominaremos primitivas inmediatas:

$\int k\ dx = kx \quad \forall k \in \mathbb{R}$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\ dx = \mathrm{L}\,\lvert x\rvert$	$\int e^x\ dx = e^x$
$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{La}$	$\int \operatorname{sen}(x)\ dx = -\cos(x)$
$\int \cos(x)\ dx = \operatorname{sen}(x)$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\ dx = -\operatorname{cotg}(x)$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = \operatorname{tg}(x)$	$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \operatorname{arc\,tg}(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arc\,sen}(x) = -\operatorname{arcos}(x)$	

6.4. Integración por partes

Sea $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones. Dado que

$$(u(x) \cdot v(x))' = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

se deduce que

$$u(x) \cdot v'(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x)$$

y por tanto

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Ejercicios: Calcula $\int \text{L}\, x \, dx$ $\qquad \int \frac{\text{Ł}x}{x} \, dx$ $\qquad \int x \cos x \, dx$ $\qquad \int e^x \cos x \, dx$

6.5. Integración por cambio de variable

Sea $f(x)$ una función. Supongamos que x es función de otra variable t (x=g(t)). En ese caso, se puede demostrar que

$$\int f(x) \; dx \overset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \; g'(t) \; dt$$

Si se utiliza este método de integración, hay que tener en cuenta que, o bien expresamos el resultado final en la variable original deshaciendo el cambio ($t = g^{-1}(x)$), o bien cambiamos los límites de integración en el caso de que lo estemos aplicando al cálculo de una integral $\int_a^b f(x) \; dx$.

Ejercicio: Calcula $\int_1^3 x\sqrt{x-1} \; dx$

6.5.1. Integración de funciones trigonométricas

En esta sección se presentan cambios de variables que permiten simplificar el cálculo de integrales del tipo

$$\int R(sen(x), cos(x))dx$$

donde R una función racional en las variables $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, es decir, R es una fracción en la que el numerador y/o el denominador son sumas y productos de $sen(x)$ y $cos(x)$.

Ejemplos:

$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1} \; dx$ $\qquad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \; dx$ $\qquad \int \operatorname{sen}^3 x \; \cos x \; dx$ $\qquad \int \frac{4 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \; dx$

Los cambios de variable permiten transformar la integral en una integral de cocientes de polinomios como las de la sección 6.6, pero puede haber otros métodos más cortos o sencillos para resolver el cálculo. Son los siguientes:

Si la función verifica...	Cambio de variable
$R(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$	$\cos(x) = t$
$R(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$	$\operatorname{sen}(x) = t$
$R(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$ $R(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$	$\operatorname{tg}(x) = t$
En todos los casos	$\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = t$

Ejercicio: Calcula la siguiente integral

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^3 x}\, dx$$

6.6. Integración de funciones racionales

Una función racional en la variable x es un cociente de polinomios en dicha variable. En esta sección resolveremos integrales de funciones racionales.

Ejemplos:

$\int \frac{x^2}{x-1}\, dx \quad \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\, dx \quad \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\, dx \quad \int \frac{1}{x^3+1}\, dx \quad \int \frac{2x^3-2x^2+16}{x(x^2+4)^2}\, dx$

Caso 1: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ **con** $\text{grado}(P) \geq \text{grado}(Q)$.

Se utiliza la división de polinomios $P(x) = Q(x)\dot{C}(x) + R(x)$ para descomponer la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx$$

En la integral de $\frac{R(x)}{Q(x)}$ el numerador tiene menor grado que el denominador y corresponde al caso 2.

Ejercicio: Calcula $\int \frac{x^2}{x-1}\, dx$

Caso 2: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ grado$(P) <$ grado(Q).

Caso 2.1: $Q(x)$ solo tiene raíces reales simples Es decir,

$$Q(x) = k(x - x_1)\dots(x - x_p)$$

con $k, x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$. Siempre es posible descomponer la fracción de esta forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_q}{x - x_p}\right) dx$$

siendo $A_i \in \mathbb{R}$. Las integrales que quedan en la suma son de tipo logaritmo.

Ejercicio: Calcula $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\, dx$

Caso 2.2: $Q(x)$ tiene raíces reales simples y múltiples:

$$Q(x) = k(x - x_1)^{\alpha_1}\dots(x - x_p)^{\alpha_p}$$

con $k, x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}$. Siempre es posible descomponer la fracción de esta forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1^1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{A_p^1}{x - x_p} + \cdots + \frac{A_p^{\alpha_p}}{(x - x_p)^{\alpha_p}}\right) dx$$

con $A_i^j \in \mathbb{R}$.

Ejercicio: $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\, dx$

Caso 2.3: $Q(x)$ tiene raíces complejas simples

$$Q(x) = k(x - x_1)^{\alpha_1}\dots(x - x_p)^{\alpha_p}\ [(x - b_1)^2 + c_1^2]\dots[(x - b_k)^2 + c_k^2]$$

con $k, x_i, a_j, c_j \in \mathbb{R}$ y $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Siempre es posible descomponer la fracción de esta forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1^1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots \right.$$
$$\dots + \frac{A_p^1}{x-x_p} + \dots + \frac{A_p^{\alpha_p}}{(x-x_p)^{\alpha_p}} +$$
$$\left. + \frac{M_1 x + N_1}{[(x-b_1)^2 + c_1^2]} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{[(x-b_k)^2 + c_k^2]} \right) dx$$

siendo $M_j, N_j \in \mathbb{R}$

Ejercicio: $\int \frac{1}{x^3+1}\ dx$

Caso 2.4: $Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples

Ejemplo: $\int \frac{2x^3-2x^2+16}{x(x^2+4)^2}\ dx$

Para resolver integrales como la del ejemplo se puede emplear el método de Hermite que permite calcular primitivas de cocientes de polinomios rebajando el grado de los polinomios implicados en sucesivos pasos. Supongamos que

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Capítulo 7

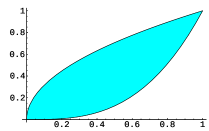
Aplicaciones de la integral definida. Integración numérica

7.1. Aplicaciones de la integral definida

7.1.1. Área definida por dos funciones

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ integrables que se cortan en dos puntos a y b y tal que $f(x) \geq g(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$, el área que definen esas dos funciones se puede calcular con la integral

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Ejercicios: Calcula en cada uno de los siguientes casos el área definida por las curvas:

1. $x = 3$, $x = -3$, $y = x^2 - 4$, $y = 0$.

2. $y = 1/2$, $x = 1$, $y = x^3$, $x = 2$.

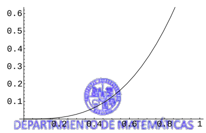
3. $y = x^4$, $y = 8x^2 + 9$.

4. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 1/2$.

7.1.2. Longitud de un arco de curva

Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$ y derivable en (a, b). La longitud de la curva entre los puntos $x = a$ y $x = b$ se puede calcular con la integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$



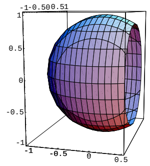
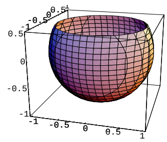
$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$

La longitud de una curva en paramétricas $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ entre los puntos $((x(t_1), y(t_1)$ y $(x(t_2), y(t_2))$ se puede calcular con la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

7.1.3. Área de una superficie de un cuerpo de revolución

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$. Si hacemos girar la función alrededor del eje X o del eje Y, se generará una figura tridimensional que se llama cuerpo de revolución. Lo mismo ocurre si en lugar de una función consideramos una curva cualquiera $(x(t), y(t))$ entre los puntos $(x(t_1), y(t_1))$ y $(x(t_2), y(t_2))$.

El área de la **superficie de un cuerpo de revolución generado al girar una función alrededor del eje** X se puede calcular con la integral

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Si en lugar de una función $f(x)$ tenemos una curva $(x(t), y(t))$, el cálculo de la superficie sería

$$2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

El área de la **superficie de un cuerpo de revolución generado al girar una función alrededor del eje** Y se puede calcular con la integral

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Si en lugar de una función $f(x)$ tenemos una curva $(x(t), y(t))$, el cálculo de la superficie sería

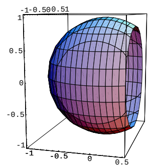
$$2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

Ejercicio: Calcula el área de la superficie de una esfera de radio 3.

7.1.4. Volumen de un cuerpo

El volumen de un cuerpo tridimensional contenido entre los planos $x = a$ y $x = b$ se puede calcular con la integral

$$\int_a^b A(x)dx$$



Siendo $A(x)$ el área de la superficie que resulta de intersecar el cuerpo con un plano perpendicular al eje X que pase por el punto $(x, 0, 0)$.

En el caso de que el cuerpo sea de revolución resultado de girar la función $f(x)$ alrededor del eje X entre los valores $x = a$ y $x = b$, lo anterior se reduce a calcular la integral

$$\int_b^a \pi[f(x)]^2 dx$$

Se pueden obtener expresiones similares en función de las variables y o z.

Ejercicio:

1. Calcula el volumen que encierra un cono de altura b y base una circunferencia de radio a.

2. Calcula el volumen que encierra una esfera de radio 3.

7.2. Integración numérica

En numerosas ocasiones, la primitiva de una función $f(x)$ no es fácil de calcular. En esos casos, el valor de la integral de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se debe puede calcular de forma aproximada con método numéricos con los que se exponen a continuación.

7.2.1. Regla del trapecio

Cuando la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se aproxima por la integral del polinomio de grado 1 que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, el método de integración numérica se conoce como **método del**

trapecio. En este caso, se obtiene la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

El error en la aproximación anterior es igual a

$$\text{error} = \frac{f''(\xi)}{2}\frac{(a-b)^3}{6}$$

para un cierto valor $\xi \in (a,b)$, que será, en general, desconocido. Esto implica que la regla de aproximación dará un resultado exacto, no aproximado, si se aplica a funciones que sean polinomios de grado 1.

En resumen, si $h = b-a$, la **Regla del Trapecio** quedaría así:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \qquad \text{con error}= -\,f''(\xi)\frac{h^3}{12}} \tag{7.1}$$

para un cierto $\xi \in [a,b]$.

Ejemplo: *Calcula* $\int_0^{0,2} e^{x^2}dx$ *con la regla del trapecio.*

$$\int_0^{0,2} e^{x^2}dx \approx \frac{0,2-0}{2}[e^0+e^{0,2^2}] = 0,20408107741924$$

Sabiendo que si $x \in [0,0,2]$ entonces

$$|f''(x)| = |2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}| \leq |f''(0,2)| = |2e^{0,2^2}+4\cdot 0,2e^{0,2^2}| = 2,248151272255559,$$

una cota del error será

$$|-2,248151272255559\frac{0,2^3}{12}| = 0,00149876751484.$$

$\square$

7.2.2. Regla de Simpson

Cuando la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ se aproxima por la integral del único polinomio de grado 2 que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, siendo $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$, el método de integración numérica se conoce como **método del Simpson 1/3**. En este caso, se obtiene la fórmula:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] \quad \text{con error} - f^{4)}(\xi)\frac{h^5}{90}}$$

para un cierto $\xi \in [a,b]$.

De la expresión del error se deduce que será un método exacto si se aplica a funciones que sean polinomios de grado menor o igual que 3.

Ejemplo: *Calcula $\int_0^{0,2} e^{x^2}dx$ con la regla de Simpson.*

$$\int_0^{0,2} e^{x^2}dx \approx \frac{0,2/2}{3}[e^0 + 4e^{0,1^2} + e^{0,2^2}] = 0,2027$$

Sabiendo que $x \in [0, 0,2]$, entonces

$$\begin{aligned}|f^{4)}(x)| = |12e^{x^2} + 48e^{x^2}x^2 + 16e^{x^2}x^4| &\leq |f^{4)}(0,2) \\ &= |12e^{0,2^2} + 48e^{0,2^2}0,2^2 + 16e^{0,2^2}0,2^4| = 14,5147,\end{aligned}$$

y una cota del error será

$$|-14,5147\frac{(0,2/2)^5}{90}| = 1,6 * 10^{-6}$$

□

Ejercicios.

Conjuntos numéricos. Sucesiones. Funciones

Conjuntos numéricos

1. ¿Pertenece el número real 2.15 al entorno de centro 2.2 y radio 0.1?

2. Representa gráficamente el conjunto de puntos tales que

   a) $|x+6| < 2$

   b) $|x+4| < 0{,}5$

3. Escribe tres cotas superiores del conjunto $(2, -1)$. Escribe también tres cotas inferiores. ¿El número 1 es cota superior de este conjunto? ¿Existe alguna cota superior menor que 1?

4. ¿Están acotados los siguientes conjuntos?

   a) $1, 1/2, 1/3, \ldots$

   b) $(4, \infty)$

   c) Si K es una cota superior de un conjunto de números reales ¿lo es también $K+1$? ¿y $K-1$? ¿Cuántas cotas superiores tiene un conjunto acotado?

5. Determina, si existe, el ínfimo de los siguientes conjuntos

   a) $[1, 5]$

   b) $(-3, 1) \cup (4, 5)$

   c) $[-3, 4] \cup [1, 5]$

   d) $(-\infty, 3)$

6. Sea E el conjunto de números de la forma $3+1/n$, donde n es un número natural distinto de cero. Determina si tiene máximo o mínimo y si tiene supremo o ínfimo.

7. Sea E el conjunto de números del intervalo $(2,3)$ junto con los números del intervalo $[4,5]$. Determina el máximo y el mínimo de E, si existen, así como el supremo y el ínfimo, si existen.

8. Enuncia y dibuja los intervalos

   a) $-3 < x < 5$

   b) $2 \leq x \leq 6$

   c) $-4 < x \leq 0$

   d) $x > 5$

   e) $x \leq 2$

9. Enuncia y dibuja los intervalos

   a) $|x| < 2$

   b) $|x| > 3$

   c) $|x-3| < 1$

   d) $|x-2| < d(d > 0)$

   e) $0 < |x+3| < d(d > 0)$

10. Calcula a y b para que $\frac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real y tenga de módulo 1.

11. Calcular a para que $\frac{3-2ai}{4-3i}$

    a) Sea un número imaginario puro

    b) Sea un número real

    c) Su afijo esté sobre la bisectriz del primer cuadrante

12. Calcula $(1+4i)^3$, utilizando la fórmula del binomio de Newton y expresando el complejo en forma módulo argumental.

13. Resuelve la ecuación $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

14. Halla, en cada caso, los números complejos que verifican

a) $\bar{z} = \frac{1}{z}$

b) $|z - a| = |z - b|$, siendo $a, b \in \mathbb{C}$

c) $|z - 1 + i| < 2$

15. Un triángulo equilátero tiene su centro en el punto $(1, 1)$ y uno de sus vértices es el punto $(1, 3)$. Hallar los otros dos vértices.

16. Calcula las raíces de:

    (a) $\sqrt[3]{-1}$ (b) $\sqrt[4]{-1}$ (c) $\sqrt[6]{-8}$ (d) $\sqrt[5]{i}$

17. Describir geométricamente los conjuntos de puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que:

    a) $|\text{Re}(z)| \leq 1 \quad |\text{Im}(z)| \leq 1$

    b) $|z| \leq 1 \quad \sigma_1 \leq \arg(z) \leq \sigma_2$, con $-\pi < \sigma_1 < \sigma_2 \leq \pi$

18. Calcula $\sqrt[3]{1 - i}$ expresando los resultados en forma trigonométrica.

19. Determina el conjunto de números complejos z que verifican:

$$z + \bar{z} = |z|.$$

20. Determina el conjunto de números complejos z que verifican: $z^3\bar{z} = -1$. (Idea: utiliza la forma módulo-argumento.)

21. Calcula:

    a) $\sqrt[6]{-8}$ y presenta el resultado en forma binómica, módulo-argumento y trigonométrica;

    b) el valor de x tal que

$$3 = \frac{1 - xi}{1 + xi}$$

22. Sea el número complejo (en forma módulo-argumento) $z = (2\sqrt{2})_{\frac{3\pi}{4}}$:

    a) Calcula $\sqrt[3]{z}$.

    b) Transforma uno de los resultados anteriores a forma binómica y forma trigonométrica.

23. Obtén la forma binómica de los números complejos que verifican la ecuación:
$$z^6 + 19z^3 - 216 = 0.$$

24. Dado el número complejo en forma módulo-argumento $z = 16_{\frac{2\pi}{3}}$, calcula la forma cartesiana y trigonométrica de z y la forma cartesiana de los diferentes valores de $\sqrt[4]{z}$. Presenta los resultados exactos (sin hacer uso de expresiones decimales.)

25. Dado el número complejo en forma módulo-argumento $z = 8_{\frac{-\pi}{4}}$, calcula la forma cartesiana y trigonométrica de z. Presenta los resultados exactos (sin expresiones decimales).

26. Obtén en forma binómica y módulo-argumento los números complejos que verifican la ecuación:
$$z^2 + z + 1 = 0.$$

27. *a*) Obtén la forma cartesiana de los números complejos que verifican la ecuación $z^6 + 9z^3 + 8 = 0$.

    b) Siendo $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ los números complejos obtenidos en el apartado anterior, obtén detalladamente la forma cartesiana del número complejo:
$$w = \left(\frac{w_1^2 w_2^3}{w_3}\right)\left(\frac{w_4^3 w_5^2}{w_6^5}\right)^3.$$

28. Encuentra los números complejos z tales que $\frac{3\pi}{2}$ es el argumento de $\frac{z+1}{z+2}$.

29. Obtén la forma cartesiana, el módulo y el argumento de los números complejos z que verifican la ecuación: $z^2 - z + 1 = 0$.

30. Obtén el módulo y el argumento de los números complejos z tales que $\dfrac{z+1}{z+2}$ es un número real positivo

31. Calcula las soluciones de la ecuación
$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

    Si z_1 y z_2 son las soluciones,

a) Calcula forma módulo argumento, trigonométrica y exponencial de z_1.

b) Calcula las raíces cuartas de z_1.

Haz los cálculos sin usar expresiones decimales.

32. Calcula expresando los resultados en forma trigonométrica de $\sqrt[3]{1+i}$

33. Si llamamos z_1 y z_2 a las soluciones de $z^2 - 2z + 2 = 0$, obtén $z_1 + z_2$, z_1/z_2 y $\sqrt[3]{z_1^2}$ en forma binómica.

34. Calcular $\sqrt[3]{1-i}$ y comprobar que los afijos de los resultados son los vértices de un polígono regular.

Sucesiones de números reales

35. Demuestra que la sucesiones

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \qquad b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

son ambas convergentes y al mismo límite.

36. La sucesión a_n está definida por la ley

$$a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\, a_n$$

siendo $a_1 = 2$. Demuestra que es decreciente, está acotada y razona que es convergente.

37. Dada la sucesión definida por recurrencia en la forma

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}.$$

Se pide demostrar que si es o no convergente y calcular su límite para los diferentes valores de $k > 0$.

38. Demuestra que la sucesión

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

tiene por límite 1, acotando la sucesión entre otras dos que tengan el mismo límite.

39. Calcula
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n$$

40. Pon un ejemplo de una sucesión a_n convergente a un número real b y tal que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\neq 1.$$

41. Se sabe que si $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,\ a_n\geq 0\quad \forall n\in\mathbb{N}$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$$
Pon un ejemplo para demostrar que el recíproco no es cierto.

42. Calcula $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3}{n}}{L(\frac{n}{n-1})}$.

43. Sea la sucesión
$$a_1=3, a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}\quad si\quad n\geq 2$$
Demuestra que es convergente y calcula su límite.

44. Calcula $\lim_{n\to+\infty}[1+L(n^2-5n+8)-L(n^2+3n-9)]^{2n-7}$.

45. Escribe una sucesión que contenga todos los números racionales.

46. Considera la sucesión de números reales definida por:
$$x_{n+1}=\frac{1}{4}+x_n^2\quad n\in\mathbb{N}; x_1>0$$
   a) Suponiendo que x_n tiene como límite un número real, halla éste.
   b) Demuestra que x_n es una sucesión creciente.
   c) Determina para qué valores positivos de x_1 la sucesión x_n resulta convergente.

47. Considera la sucesión a_n definida por recurrencia:
$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad a_1>0$$

a) Demuestra que la sucesión está acotada inferiormente por 2.

b) Demuestra que la sucesión es decreciente.

c) Justifica que la sucesión a_n es convergente y calcula su límite.

48. Calcula detalladamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{1+n+2n^2}\right)^{\left(\frac{1+n^2}{1+n}\right)}$$

49. Calcula detalladamente el valor del siguiente límite caso de que exista:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-n\cos^2\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)}{2+\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)}.$$

50. Estudia el límite de la sucesión $x_n=\frac{a^n}{n^k}$ en función de los valores de los parámetros a y k reales.

51. Calcular los 10 primeros términos y el límite de la sucesión siguiente

$$n\,\mathrm{L}\left(\frac{4n+3}{4n-3}\right)$$

52. Calcula razonadamente el límite de la sucesión $a_n=\dfrac{3}{n\,\mathrm{L}\left(\frac{n}{n-1}\right)}$

53. Dada la sucesión definida por recurrencia $a_1=3/2$, $a_{n+1}=\frac{3a_n-2}{2a_n-1}$:

a) Calcula los primeros términos y deduce la expresión explícita (no por recurrencia) de a_n.

b) Justifica si es convergente y calcula el límite.

Funciones

54. Estudia la paridad de las siguientes funciones

$$\frac{\operatorname{sen}x+x+x^3}{x^2+\cos x+4}\qquad\qquad\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(3x)}{\cos(2x)+1}$$

55. Estudia si las siguientes funciones son periódicas. En caso afirmativo calcular su período.

$$f(x) = \sin x + \cos x \qquad g(x) = \operatorname{sen} x + e^{-x} \qquad h(x) = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x/2)$$

56. Se consideran las funciones

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = e^x \qquad h(x) = \mathrm{L}\, x \qquad k(x) = \operatorname{tg} x$$

Calcula

$$(h \circ f \circ k)(x) \qquad (g \circ k)(x) \qquad (k \circ f \circ g)(x)$$

57. Estudia la relación entre la gráfica de $f(x)$ y las de $f(x+\beta)$ y $\beta f(x)$, siendo $\beta \in \mathbb{R}$. Aplícalo al caso de $f(x) = x^2$.

58. Responde razonadamente las siguientes cuestiones:

a) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones pares. ¿Son pares las funciones $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$?

b) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones impares. ¿Cómo son las funciones $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$?

c) Sea una función par y una función impar. ¿Qué se puede decir de las funciones $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$?

59. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones periódicas. ¿Son periódicas las funciones $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$?

60. Halla el dominio de las siguientes funciones

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 3} \qquad \sqrt{x^4 - 1} \qquad \cos\left(\frac{x+3}{x^2+1}\right) \qquad \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Límites de funciones y continuidad

1. Calcula los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|}$$

2. Cuando x tiende a 0, considera los infinitésimos siguientes:

$$x^2 \qquad \operatorname{sen}(4x) \qquad x\cos x \qquad 1-\cos(3x)$$

Indica si son del mismo orden que x, de orden superior o inferior.

3. Calcula los siguientes límites si existen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} \qquad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{x+1}{x^2+3})}{\mathrm{L}(1+\frac{x+3}{x^2+7})}$$

4. Obtén las asíntotas de las siguientes funciones:

$$xe^{1/x} \qquad \mathrm{L}(x^2+3x+2) \qquad \cos x - \mathrm{L}(\cos x) \qquad \frac{x^3}{e^x}$$

5. En cada caso dar ejemplos de funciones que verifiquen

   a) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

   b) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

   c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

6. Determina el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 3-ax & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7. Calcula los siguientes límites empleando infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{L}\, x}{e^x - e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{L}(x+1)}{2^x-1} \qquad \lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x} \qquad \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\cos(3x)\,(1-\operatorname{sen} x)}$$

8. Calcula a para que $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x = 4$

9. Calcula

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{1/x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{b^x-1} \quad (b\neq 1)$$

10. Estudia la continuidad de la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{1/x}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

11. Demuestra que la función $2x^4-14x^2+14x-1$ tiene cuatro raíces reales.

12. Determina cuáles cuáles de las siguientes funciones están acotadas superior e inferiormente y cuáles tienen máximo y mínimo absoluto en los intervalos que se indican:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1+x^2} & \text{en } [0,5] \\ \frac{3}{2+x} & \text{en } [-3,2] \\ x+E[x] & \text{en } [-2,2] \end{array}$$

siendo $E[x]$ la parte entera de x.

13. Considera las funciones reales de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x+\mathrm{L}\,x & \text{si } x>1 \\ x^2 & \text{si } x\leq 1 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x>0 \\ e^x & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de $f(x)$ y $g(x)$ en todo su dominio.

b) Utiliza los teoremas estudiados para determinar si está acotada la función $f\circ g$ en el intervalo $[-1,2]$.

c) Prueba que existen dos puntos x_1 y x_2 en el intervalo $(1,e^2)$ tales que $f(x_1)=\frac{\pi}{2}$ y $f(x_2)=\frac{3\pi}{2}$.

d) Deduce del apartado anterior que existe $x_0\in(1,e^2)$ tal que $(f\circ g)(x_0)=0$.

14. Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y $x = e$ y determina el valor de a para que sea continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \mathrm{L}\, x & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ \frac{x}{e} & \text{si } x > e \end{cases}$$

15. Calcula

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(1 + L(\frac{x^3+3}{x^3+1}))senx}{sen(\frac{1}{x})}$$

16. ¨Puede existir una función real continua en todo $\mathbb{R}$ y tal que $f(x)$ vale 0 si y solo si $x \in (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$?

17. Sean f, g dos funciones continuas en $\mathbb{R}$ y tal que $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}$. Demuestra que entonces $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

18. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y $g(x) = x(1 - x^2)$. Estudia la continuidad de

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$.

19. Prueba que toda ecuación polinómica $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ tiene alguna raíz si n es impar.

20. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

21. a) ¿Qué significa que $f(x)$ y $g(x)$ sean infinitésimos equivalentes en a?

b) En el desarrollo del siguiente límite se comete un error. Encuentra cuál es ese error y explica por qué es un error. Resuelve el límite correctamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

22. Estudia la continuidad de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

23. Calcula detalladamente, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

24. Pon un ejemplo de cada una de las siguientes situaciones, razonando la respuesta.

- Una función f no continua en un punto, tal que su valor absoluto $|f|$ sí lo es.
- Una función f discontinua, otra función g discontinua de forma que la suma $f+g$ sea continua.
- Una función f continua, otra función discontinua de forma que su producto $f \cdot g$ sea continua.

25. Demuestra, enunciando todos los resultados teóricos que utilices, que la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ toma el valor 2 en algún punto interior al intervalo $[-2, 0]$

26. Calcula detalladamente los siguientes límites caso de que existan:

$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x); \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}; \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{-x^2}}{x^2-1}; \quad \lim_{x\to \infty} e^{-x^2}; \quad \lim_{x\to \infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2-1}.$$

27. Dada la función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \lambda e^{3x} + \frac{\mu}{x^3} & \text{si} & x < 0 \\ \gamma & \text{si} & x = 0 \\ \alpha + \beta Ln\,(x) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right\}$$

determina los valores que deben tomar los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ para que:

a) $\lim_{x\to\infty} f\,(x) = \infty$

b) $\lim_{x\to 0} f\,(x) = 2$

c) f sea continua en $x = 0$

28. Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x\,\mathrm{L}\,|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

a) Comprueba si es continua en $x = 0$ calculando los límites necesarios.

b) Calcula sus asíntotas.

c) Comprueba si existe en $x = 0$ el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

29. Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$$

a) Calcula los coeficientes de las asíntotas oblicuas.

b) Representa gráficamente la función de forma aproximada cuando x tiende a ∞ y a $-\infty$.

30. Dada la función $f(x) = \frac{3x}{(x-1)(\sqrt{2-x})}$, determina el signo de $f(x)$ según los valores de x y sus asíntotas.

31. Dada la función $f(x) = x\ \exp(\frac{2x}{x^2-1})$

a) Halla sus asíntotas.

b) Estudia el límite de la función $f(x)$ en los puntos donde tenga asíntota vertical.

c) Dibuja la gráfica de las asíntotas y de $f(x)$ en donde los valores de ambas sean parecidos.

32. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{|x|^{1/2}}$,

    a) Estudia la continuidad de $f(x)$

    b) Calcula sus asíntotas

33. Dada la función $f(x) = \mathrm{L}(x^3 - x)$

    a) Estudia su dominio de definición

    b) Enuncia en qué Teorema te puedes apoyar para calcular, de forma aproximada, un punto de corte de la gráfica de $f(x)$ con el eje OX

    c) Calcula un intervalo de longitud uno en el que se encuentre este punto de corte

34. Calcula los siguientes límites:

    a) $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 + 2x})$

    b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

35. Considera la función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^m \ \operatorname{sen} 1/x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} + ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Estudia la continuidad para los diferentes valores de $m \in \mathbb{Z}$ y de $a, b, c \in \mathbb{R}$.

36. Calcula los siguientes límites:

    a) $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 + 2x})$

    b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

Derivadas

1. Halla los puntos de la curva $y = x^3 - 3x + 5$ en los cuales la recta tangente es

    a) Paralela a la recta $y + 2x = 0$.

    b) Perpendicular a la recta $y + 2x = 0$.

    c) Perpendicular a la recta $y + x/9 = 0$.

2. Halla el ángulo bajo el cual se cortan la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = 2 - x$

3. Demuestra que las hipérbolas equiláteras $x^2 - y^2 = a^2$ y $xy = b$ y se cortan entre sí formando un ángulo recto.

4. Dada la parábola $y = x^2$, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola desde el punto $(3, 7)$.

5. Determina los puntos de la función $y = x^2 - 5x + 6$ en los que las rectas tangentes forman ángulos iguales con los ejes coordenados.

6. Demuestra que la recta $y = 11x - 14$ es tangente a la curva $y = x^3 - x + 1$.

7. Halla los ángulos que forman las semirrectas tangentes por la derecha y por la izquierda en el punto $(0,0)$ a la curva de ecuación $y = \sqrt{x^3 + 4x^2}$.

8. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones:

    (a) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

9. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

    a) Demuestra que es continua.

    b) Halla su derivada y estudia la continuidad de esta.

10. Determina para las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^3 - x$:

    a) La recta tangente a cada una de ellas en los puntos en que se cortan entre sí.

   b) El ángulo que forman dichas rectas.

11. Calcula la recta tangente, normal (perpendicular a la tangente) y una bisectriz de las dos anteriores en los siguientes casos:

    a) La función $f(x) = (1+x)^{L(1+x)}$ en el punto $x = 0$.
    b) La función $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ en el punto $(3, 2)$.
    c) La circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en un punto con coordenada $x = 1$.
    d) La elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 2$ en un punto con coordenada $x = 2$.
    e) La función $y = \frac{8}{4+x^2}$ en el punto con coordenada $x = 2$.

12. Una señal se trasmite en un medio siguiendo la trayectoria de la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, siendo

$$x(t) = t^2 \quad y(t) = t^4 \quad t \in (0, \infty)$$

    donde t es el tiempo:

    a) ¿Qué velocidad instantánea lleva en $t = 1$? Determina la dirección del vector velocidad.
    b) Si la trayectoria viniese dada por

$$x(t) = t \quad y(t) = t^2 \quad t \in (0, \infty)$$

       ¿Qué diferencia existiría con el apartado anterior?

13. Halla la derivada segunda de y respecto de x siendo

$$y = t^3 \quad x = L(t)$$

14. Estudia la derivabilidad y calcula la función derivada de:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ -\sqrt{|x|} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

15. a) ¿Es cierto que toda función derivable en un punto $a \in \mathbb{R}$ es continua en a? Si la respuesta es afirmativa, demuéstrese. Si la repuesta es negativa, póngase un ejemplo.

b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de $f(x)$ y de $f'(x)$.

16. Dada la curva:

$$x = t^2$$

$$y = \frac{1}{t}$$

calcula la ecuación de la recta tangente a la curva cuando $t = 1$ y los puntos donde la recta tangente es horizontal o vertical.

17. Estudia la continuidad y la derivabilidad y calcula la función derivada de:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

18. Estudia la continuidad y la derivabilidad y calcula la función derivada de:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

19. Estudia detalladamente la continuidad y derivabilidad de la función: $f(x) = |x|$.

20. Sabiendo que f es una función derivable en todo punto y que $f'(a) \neq 0$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{p \to 0} \frac{p}{f(a) - f(a + 2p)}$$

Indicación: utiliza la definición de derivada de una función en un punto.

21. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$$

22. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x\text{Ł}|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. Si es posible, pon un ejemplo de una función derivable en un punto $a \in \mathbb{R}$ que no sea continua en a y otro ejemplo de una función continua en un $a \in \mathbb{R}$ que no sea derivable en a. Razona tu respuesta.

Propiedades de las funciones derivables (Teoremas del cálculo diferencial)

1. El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demostrar que rompiéndolo en dos partes existe una depreciación de su valor, y que esta depreciación es máxima cuando las dos partes son iguales.

2. Un depósito de chapa está formado por un cilindro de radio R de altura H, cerrado en cada extremo por una semiesfera. La superficie total es constante e igual 2 . Hallar las dimensiones del cilindro para que el volumen sea máximo.

3. Deseamos hacer una lata cilíndrica de 100 cm3 de capacidad. El material del fondo y de la tapa cuesta dos veces más caro que el del lateral. Hallar el radio y la altura de la lata más económica.

4. Un río tiene un recodo de 135 grados. Un granjero desea bordear el corral con una valla de 100 m y por el otro lado el río. Hallar las dimensiones del corral de área máxima sabiendo que los lados de la valla son perpendiculares.

5. Un camión viaja a v km/h. El coste por kilómetro es (10+v/9) céntimos/km el conductor cobra 900 céntimos/h. ¿Cuál es la velocidad más económica en un viaje de 600 km.?

6. Las dimensiones de un terreno de fútbol en metros son 60 x 90. Se supone una portería de 7 m. ¿Desde qué punto de la banda tiene el extremo el ángulo de tiro óptimo?

7. Una ventana está formada por un semicírculo en su parte alta y un rectángulo el resto. Dado el perímetro de la ventana (p) calcular sus dimensiones para que la cantidad de luz que pase a través de la ventana sea máxima.

8. Un navío está anclado a 6 km de una playa rectilínea frente a un pueblo A situado en la misma playa. Se desea enviar un mensajero en el menor tiempo posible a una población también situada en la misma playa. El mensajero sale del navío en una lancha de remos a una velocidad de 3 km/h y se sabe que sobre la playa puede correr a 5 km/h. Averiguar

dónde debe tomar tierra sabiendo que la distancia AB es de m km. Considerar los casos particulares m=4 y m=5.

9. Dos establos A y B están situados a 10 km y 15 km de un río, debiendo aprovisionarse ambos establos de un mismo depósito D construido sobre el borde del río. ¿En qué punto debe construirse este depósito para que la longitud de los tubos de conducción sea mínima sabiendo que las proyecciones sobre el río de los establos distan 20 km.

10. Una placa de vidrio rectangular de dimensiones 15x10 se ha roto en una esquina un pedazo de forma triangular de tal modo que l al longitud ha disminuido en 5cm y la anchura en 3 cm. De la parte sobrante se puede formar una placa rectangular de área máxima. ¿Cuáles son las dimensiones de la nueva placa?

11. Un jardinero ha de construir un parterre de forma de sector circular de un perímetro de 20 m. ¿Cuál será el radio que dará el parterre de área máxima?

12. Una sala de cine en sección tiene su pantalla sobre el eje OY y los extremos superiores e inferiores distan 6m y 2m respectivamente del origen enontrar desde que punto de la recta 10 y = x, que contiene los distintos puntos de vista, se ve la pantalla bajo el mayor ángulo posible.

13. Calcular el tiempo necesario para cruzar con mínima velocidad y en línea recta una calle de anchura k por la que circulan en el mismo sentido en el centro de la calle con velocidad v automóviles de anchura a y separados unos de otros una longitud b.

14. Un submarino cuyas velocidades sumergido y en superficie son de 10 nudos y 20 nudos respectivamente, se encuentra en superficie en un punto P a 30 millas del centro O de un circulo de 60 millas de radio estrechamente vigilado por una escuadra enemiga. Se pide determinar el menor tiempo necesario para que el submarino se traslade al punto opuesto de diámetro que pasa por P. Se desprecia la esfericidad de la tierra.

15. Un lazo corredizo formado por una cuerda fina envuelve a una columna cilíndrica de radio R perfectamente lisa, estando sujeto el extremo libre al cuello de un perro. Éste ve venir a su amo y al ir hacia él rompe la cuerda. Averiguar a qué distancia de la columna estaba el nudo corredizo en el momento de romperse la cuerda.

16. Los ejes de dos calles forman un ángulo recto. Una de ellas tiene 27 m de ancha y la otra 8 m. Hallar la longitud máxima de una viga que puede pasar girando sobre la esquina de ambas calles y estando siempre en un plano horizontal.

17. Demuestra que

    a) $e^x = 1 + x$ tiene exactamente una solución real.

    b) $e^x - 1 = 2x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

    c) $x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$ posee raíces reales. Determina cuántas.

    d) $x^5 - 5x - 1$ posee raíces reales. Determina cuántas.

    e) Todo polinomio de grado impar posee raíces reales.

18. Demuestra que $e^x > \frac{1}{1+x}$ si $x > 0$.

19. Demuestra mediante ejemplos que las tres hipótesis del teorema de Rolle son necesarias, es decir, busca ejemplos en dónde no se cumpla una de las hipótesis y falle el teorema.

20. Utilizando el teorema del valor medio y el que $\sqrt[3]{1728} = 12$, encuentra una aproximación de $\sqrt[3]{1730}$ con error menor que 10^{-3}.

21. Demuestra que $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{senx}{1+cosx}\right) = \frac{1}{2}x$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

22. Calcula estos límites:

    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - cos(ax)}{e^{bx} - cos(bx)} \quad b \neq 0$

    b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{cos(x)L(x-a)}{L(e^x - e^a)}$

23. Calcula usando el teorema del valor medio

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}$$

24. *a*) ¿Qué significa que $f(x)$ y $g(x)$ sean infinitésimos equivalentes en a?

    b) En el desarrollo del siguiente límite se comete un error. Encuentra cuál es ese error y explica por qué es un error. Resuelve el límite correctamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

25. *a*) Enuncia el teorema de Rolle.

    b) Dada la función $f(x) = \cos(x)\frac{e^x+e^{-x}}{2} + 1$, demuestra que:

    1) $f(x)$ tiene alguna raíz real.
    2) $f(x)$ tiene infinitas raíces reales.

26. *a*) Completa los huecos en el enunciado siguiente y demuestra el teorema:

    "Teorema de Rolle: Si f es una función   en el intervalo $[a, b]$, f es   en (a, b) y además   , entonces existe un punto $c \in$ en el que   ."

    b) Demuestra mediante ejemplos que las tres hipótesis del teorema de Rolle son necesarias, es decir, busca tres ejemplos tal que en cada uno no se cumpla una de las hipótesis y falle el teorema.

27. Dada la función $f(x) = e^x - 3x^2$

    a) Localiza un intervalo que contenga una solución de $f(x) = 0$. Enuncia el resultado teórico que utilices.

    b) Encuentra una aproximación de un valor donde se anule la derivada de $f(x)$ y comprueba si es un máximo, un mínimo.

28. Determina el número de raíces reales de la ecuación:

$$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5 = 0.$$

29. Demuestra que la ecuación $e^x - 1 = 2x$ tiene exactamente dos soluciones reales y localiza dos intervalos disjuntos tales que cada uno contenga a una raíz. Enuncia rigurosamente los resultados teóricos que utilices.

30. Determinar el número exacto de raíces de la ecuación: $3 + \cos x = 3x$ y separarlas en intervalos disjuntos de longitud 1. Enunciar los resultados teóricos de los que se haga uso.

31. Estudia los extremos de la función: $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 2x$.

    Se sugiere el siguiente proceso:

    a) Localizar los puntos críticos de dicha función, esto es, las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$, para ello se propone la utilización de métodos de localización y separación de raíces de una ecuación.

b) Una vez localizados los puntos críticos de dicha función, estudiar para cada uno de ellos, si se trata o no de un extremo y, en caso afirmativo, estudiar de qué tipo de extremo se trata (máximo o mínimo).

32. Enuncia el teorema de Rolle. Demuestra mediante ejemplos que las tres hipótesis del teorema de Rolle son necesarias, es decir, busca ejemplos en dónde no se cumpla una de las hipótesis y falle el teorema.

33. Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{6-x^2}{2} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{2}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{array} \right\}$$

estudiar si es posible aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 3]$, y en caso afirmativo, aplicar dicho teorema.

34. Justifica que la ecuación $x^2 - x\,\text{sen}(x) - \cos(x) = 0$ posee alguna solución. Determina cuántas.

35. Con un material plástico en forma de cuadrado de 50 metros de lado se quiere construir un invernadero en forma de caja (techo y laterales de plástico). Halla las dimensiones del invernadero y calcula el cuadrado que hay que recortar en cada esquina para que el volumen del invernadero sea máximo.

36. Para disminuir todo lo posible el rozamiento del agua contra las paredes de un canal, el área mojada debe ser mínima. Si se trata de un canal rectangular abierto, de sección transversal A dada, demostrar que las dimensiones óptimas son aquellas en las que la anchura del canal es el doble que su altura.

37. Se desea construir un tubo cilíndrico de hormigón, abierto por su parte superior e inferior, con 8 m^3 de capacidad. El espesor del hormigón es de 0'2 m. ¿Qué radio y altura debe de tener el depósito para gastar en su construcción la mínima cantidad de hormigón?

38. Enuncia el teorema de Rolle y justifica si es o no aplicable a la función $f(x) = \text{L}(5 - x^2)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Aproximación y representación de funciones

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+1}$:

    a) Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 de f en $x = 0$.

    b) Calcula el valor aproximado de $\sqrt{1{,}02}$ usando el polinomio de Taylor de grado 2 de f y dando una estimación del error.

2. Obtén el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \frac{Lx}{x}$ en el punto $x = 1$.

3. Calcula usando desarrollos de Taylor
$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg(x)}{sen(x) - x}$$

4. Estudia los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
$f(x) = xe^x$.

5. Demuestra que $\text{sen}(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$.

6. Sea f tal que $f`(x) = \frac{x^3(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{1+x^2}$. Halla los extremos relativos de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

7. Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$:

    a) Calcula las asíntotas.

    b) Estudia la derivabilidad.

    c) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y concavidad.

    d) Determina los máximos y los mínimos.

    e) Dibuja la gráfica.

8. Repite el ejercicio anterior con $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$

9. a) Definición de función cóncava en un punto a.

    b) Enuncia y demuestra la condición que deben cumplir las derivadas una función en un punto para que podamos decir que es una función cóncava en ese punto.

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad de la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$$

10. Dada una función $f(x)$ definida en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$, derivable m veces en a:

    a) ¿Cómo se calcula el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en a? Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 para la función $f(x) = L(\cos x)$ en el punto $a = 0$.

    b) ¿Qué característica tiene el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en a que no tenga ningún otro polinomio?

    c) ¿Qué problemas podemos resolver usando el polinomio de Taylor de una función $f(x)$?

11. a) Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 para la función $L(\sqrt{1+x})$ en el punto 0. Calcula también el término complementario o error.

    b) ¿Qué característica tiene el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado m en a que no tenga ningún otro polinomio? ¨Qué problemas se pueden resolver usando polinomios de Taylor?

12. Define qué significa que una función sea cóncava en un punto a. Enuncia y demuestra una condición necesaria y suficiente que tienen que cumplir las derivadas para que la función sea cóncava en el punto a.

13. De la función $f(x) = xe^{1/x}$:

    a) Calcula el dominio y estudia la continuidad y derivabilidad.

    b) Calcula las asíntotas.

    c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    d) Determina los intervalos de concavidad y convexidad así como los máximos y mínimos relativos.

14. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = 2\sqrt[3]{1+x}$ en el punto $a = 0$. Haciendo uso de dicho polinomio, calcula un valor aproximado de $\sqrt[3]{1'2}$, dando una acotación del error.

15. Sea $f(x)$ una función n veces diferenciable en un punto $a \in \mathbb{R}$. Completa lo siguiente:
    - El polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n en a es el único polinomio ...
    - El polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n en a se utiliza como ...

16. Dada la función $f(x) = (4 - x^2)\sqrt{x^2 - 1}$, estudia:
    a) dominio, regiones de existencia y puntos de corte con los ejes,
    b) asíntotas,
    c) crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos,
    d) concavidad, convexidad y puntos de inflexión,
    e) continuidad, derivabilidad y gráfica de la función.

17. Calcula un valor aproximado de sen(1) con un error menor que 10^{-6} sin usar la calculadora.

18. Probar que $\ln(1 + x) > \dfrac{x}{1 + x}$ si $x > 0$.

19. Calcula el polinomio de Taylor para $f(x) = \text{Ł}(x)$ en el punto 1 de grado 6.

20. Dada la función $f(x) = -xe^{1/x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Estudiar:
    a) Continuidad y derivabilidad.
    b) Asíntotas.
    c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos.
    d) Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
    e) Representación gráfica.

21. Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 de $\tan x$ en el punto 0.

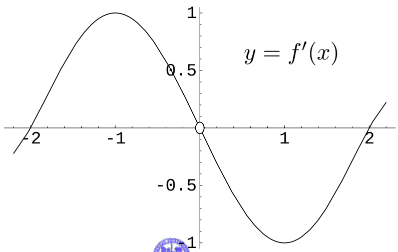
22. Dada la función $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{e^x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, estudia:
    - Intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.
    - Intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

23. Estudia detalladamente las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^{-x^2}}{x^2-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Haz un esbozo de su representación gráfica.

24. Dada la representación gráfica de la función $f'(x)$ (derivada de la función $f(x)$):



Estudia, razonada y detalladamente, la continuidad, derivabilidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión de la función $f(x)$.

25. Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto 0 de la función $f(x) = L(1-x^2)$ y utilízalo para calcular un valor aproximado de $L(0{,}99)$.

26. Dada la función $f(x) = L(1-x^2)$:

   a) Calcula su dominio, asíntotas y simetría.

   b) Determina los intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.

   c) Determina los intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

27. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, estudia:

a) Dominio de definición.

b) Asíntotas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos.

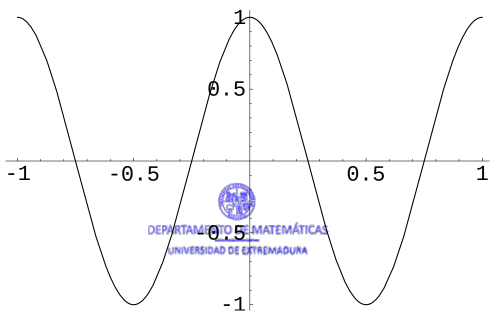
d) Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

e) Representación gráfica.

28. Estudia el crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, máximos, mínimos, puntos de inflexión y asíntotas de la función:

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

29. De una función $f(x)$ se sabe que la gráfica de su derivada es la siguiente:



Responde a las siguientes cuestiones acerca de $f(x)$ en el intervalo $[-1,1]$ justificando la respuesta: *a)* número máximo de raíces; *b)* intervalos de crecimiento o decrecimiento; *c)* máximos o mínimos; *d)* intervalos de convexidad y concavidad; *e)* puntos de inflexión.

30. Dada la función $f(x) = L(1-x^2)$. Estudia:

a) Dominio de definición.

b) Asíntotas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos.

d) Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

e) Representación gráfica.

31. Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, estudia

    a) Dominio, puntos de corte con los ejes, continuidad y derivabilidad.

    b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

    c) Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

    d) Asíntotas.

    e) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 2$.

32. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos de la función $f(x)$.

33. Dada la función $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$, determina:

    a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

    b) Intervalos de convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.

    c) Asíntotas.

34. Estudia el crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, máximos, mínimos, puntos de inflexión y asíntotas de la función:

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

35. Dada la función $f(x)$ definida en el intervalo $[0,\ 2\pi]$,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}$$

- Calcula sus máximos y mínimos y los intervalos de crecimimento
- Dibuja aproximadamente la gráfica de la función

36. Dada la función $e^x - 3x^2$, localiza una aproximación de un valor donde se anule la derivada de $f(x)$. Justifica si es un máximo o un mínimo. Enuncia los resultados teóricos que utilices.

37. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, estudia:

    a) Dominio, asíntotas, simetrías y tipos de discontinuidad.

b) Crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

38. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} -xe^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

a) Estudiar su continuidad.

b) Hallar sus asíntotas.

c) Calcular sus extremos.

d) Dibujar su gráfica.

39. Dada la función $f(x) = L(1 - x2)$,

a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto 0.

b) Utilizando este polinomio, calcular un valor aproximado de $L(0{,}99)$.

c) Dar una estimación del error que se comete al hacer esta aproximación.

40. Dada la función $f(x)$ definida en el intervalo $[0,\ 2\pi]$,
$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{\text{e}^x}$$

- Calcula sus máximos y mínimos y los intervalos de crecimimento
- Dibuja aproximadamente la gráfica de la función

Cálculo Integral

1. Calcula:

$a.\ \int tg^2(x)dx$	$b.\ \int \frac{e^{arcsenx}}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$c.\ \int \frac{x^3}{2+x^8}dx$	$d.\ \int \frac{1}{xLx}dx$
$e.\ \int e^x cos(x)dx$	$f.\ \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx$	$g.\ \int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}dx$	$h.\ \int \frac{1}{1+2senx}dx$
$i.\ \int \frac{senx}{1+cosx+cos^2x}dx$	$j.\ \int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$	$k.\ \int \frac{Lx}{x^3}$	$l.\ \int x^2Lx$
$m.\ \int \frac{x^3-2x^2+4x-6}{x^2-3x+2}$	$n.\ \int \frac{5x-8}{(x-3)(x^2+1)}$	$o.\ \int \sqrt{x^2-2x}$	$p.\ \int \frac{dx}{senx+cosx+1}$

2. Demuestra que $\left|\int_0^1 \frac{e^{-nx^2}}{x+1}dx\right| \leq L2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (idea: probar que $0 < \frac{e^{-nx^2}}{x+1} \leq \frac{1}{x+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (0,1)$).

3. Calcula la integral de

$$h(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ |x| & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ |x-3| & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

4. Haciendo uso del teorema fundamental del cálculo integral, estudia la derivabilidad de

$$F(x) = \int_0^x h(t)dt$$

   siendo

$$h(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } t < 1 \\ t^2 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ Lt & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

   y calcula $F'(x)$ donde sea posible.

5. Calcula el área limitada por las gráficas $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

6. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ y $g(x) = \frac{x-1}{8x}$ determina el área de la región limitada por sus gráficas y las rectas $y = 0$ y $x = 0{,}5$.

7. Calcula el área entre la función $f(x) = Lx$ y las rectas $x = 0{,}5$,$y = 0$,$x = 2$.

8. Halla la longitud de las curvas:

   a)
   $$y = x^2 - 2x + 5.$$

   b)
   $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

   (pon la curva en forma paramétrica).

9. Calcula el volumen de un cono de altura b y base un círculo de radio a.

10. Calcula el área que hay entre la función $f(x) = 3^{\sqrt{2x+1}}$ y las rectas $x = 0, x = 3/2, y = 0$.

11. Calcula el volumen de una bóveda cuyas secciones al cortar por planos horizontales son cuadradas y cuyas sección al cortar por el plano YZ es un cuadrante de círculo de radio a.

12. Calcula el área de la región definida por las curvas $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{4}{x\sqrt{x}}$ y $x = 3$ en la parte positiva del eje X.

13. *a*) ¿Qué condiciones debe de cumplir $f(t)$ para que $\int_0^x f(t)\, dt$ sea continua? ¿Y para que sea derivable?

    b) Calcula el área determinada por la función $f(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)+sen^2(x)}$ y los ejes X e Y en el intervalo $[0{,}5, 1]$.

14. Calcula la integral de la función $f(x) = e^x cos(x)$ en el intervalo $[-2\pi, 0]$.

15. Hallar el área de la región del plano comprendida entre la curva $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ y la recta $y = 1/2$.

16. *a*) Calcula integrando por partes: $\int \operatorname{arc\,sen}(x) dx$.

    b) Integra aplicando el cambio de variable $t = \tan(x)$: $\int \frac{1}{1+\tan(x)} dx$.

    c) Calcula el área que determinan la curvas: $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ $y = x$ $x = 1$.

17. Calcula el valor de
$$\int_1^3 \frac{L(1+x^2)}{x^2} dx$$

18. Calcula el área que determinan la curvas: $y = xe^x$, $y = x$, $x = 2$.

19. Resuelve la siguiente integral mediante cambio de variable: $\int_0^{L2} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

20. Calcula el área definida por la función $f(x) = \frac{20}{x^2+4x+16}$ y la recta $y = 1$.

21. Respecto a la función $\frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 10)$, calcula:

    a) El área definida por la función.

    b) El volumen de revolución generado al girar la función alrededor del eje x.

22. Dada la función $f(x) = \frac{3x}{(x-1)(\sqrt{2-x})}$, calcula el volumen de la figura que se genera al girar $f(x)$ alrededor del eje X entre los valores $x = 1{,}2$ y $x = 1{,}5$.

23. Calcula

    - $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
    - $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+1} dx$
    - $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+14} dx$

24. Calcula $\int_{-1}^{2} \frac{5x^2}{x^2-5x-6}$,

25. Se define la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+4} dt$$

    a) Determina una expresión explícita de $f(x)$ en donde no aparezca el símbolo de la integral.

    b) Sin hacer uso del apartado anterior, calcula $f'(x)$. Enuncia el resultado teórico que utilices.

26. Dada la función $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, justifica que:

    a) $f(x)$ es derivable para todo $x \in (0, 1)$.

    b) $f(x)$ es creciente para todo $x \in (0, 1)$.

    c) $f(x) = 1$ tiene una única solución en el intervalo $[0, 1]$.

    Enuncia cualquier resultado teórico que utilices en la resolución de este ejercicio.

27. Calcula el valor de
$$\int_1^4 \frac{L(1+x^2)}{x^2}dx$$

28. Calcula el área determinada por las curvas
$$x^{1/2}+y^{1/2}=1 \qquad x+y=1$$

29. De una función $f(x)$ se tienen los siguientes datos:

x	0.0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	2.25	3.75	5	6	5.5	6	7.25

Calcula un valor aproximado de $\int_0^3 f(x)dx$ utilizando los siguientes métodos:

a) Trapecios.

b) Simpson 1/3.

Representa gráficamente lo realizado.

30. Calcula $\int_0^1 sen(x^2)dx$ y representa gráficamente lo realizado:

a) Con el método de los trapecios.

b) Con el método de Simpson.

31. Repite el ejercicio anterior con $\int_1^2 e^{1/x}dx$.

32. Dada la función $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

a) Haz la representación gráfica de $f(x)$

b) Determina el área encerrada por la recta que pasa por los extremos de $f(x)$ y la gráfica de $f(x)$.

33. Calcula el área determinada por la función $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$ y la parte positiva de los ejes OX y OY.

34. Sea R la región del plano limitada entre la parábola $y=6-3x-x^2$ y la recta $x+y-3=0$. Hallar los volúmenes de revolución que genera R al girar alrededor de a) la recta $y=0$ b) la recta $x=3$

35. Demostrar que el área de la parábola $y = x^2$, comprendida dentro del paralelogramo ABCD es 2/3 del área de éste, siendo $A(-3, 9)$, $B(2, 4)$, el segmento CD tangente a la parábola y los segmentos AC y BD paralelos al eje OY.

36. Calcular el área de la región encerrada por las curvas

$$y^2 + 8x = 16 \qquad\qquad y^2 - 24x = 48$$

37. Hallar los valores del parámetro $k > 0$ para que el área limitada por la curva $y = \cos(x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/2$, quede dividida en dos áreas iguales por la curva $y = k\,\mathrm{sen}(x)$.

38. Dada la curva $x^2 + y^2 = 4$, obtener el área del recinto del primer cuadrante limitado por la curva, la recta tangente a la curva en el punto de abcisa $x = 1$, y el eje OX.

39. Hallar $a > 0$, para que el área limitada por la curva $y = 4 - x^2$ y las partes positivas de los ejes x e y, quede dividida en dos áreas iguales por la curva $y = ax^2$.

40. Hallar

    a) El área comprendida entre las curvas $y = -x^2 - 3x + 4$, $x + y = 1$ y el eje OX.

    b) El volumen generado por el área anterior cuando gira alrededor del eje OX.

    c) El volumen generado por el área anterior cuando gira alrededor de la recta $x = 1$.

41. Dada la parábola $y^2 = x - 2$, hallar

    a) El área comprendida entre la recta tangente a la parábola en el punto $(6, 2)$, el eje OX y dicha parábola

    b) El volumen del sólido de revolución obtenido al girar el área del apartado anterior alrededor del eje OX.

42. Dada la parábola $y^2 = 4ax$ y la recta $x = a$, hallar

    a) El área de la superficie S limitada por ambas *b*) El volumen del sólido generado al girar S alrededor del eje x

c) El volumen del sólido generado al girar S alrededor de la recta $y = -2a$

43. Calcula el volumen que genera la función $\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+14}}$ al girar alrededor del eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.

44. Dada la curva $x + y^2 = 4$, obtén:

    a) La recta tangente a la curva en el punto $(x = 2, y = \sqrt{2})$.

    b) El área limitada por la curva, la recta tangente anterior y el eje X.

45. Calcula el área definida por las curvas $4y = x^2$, $2y = x^2$, $y = x$, $x = 1$.

46. Calcula el volumen generado al girar la curva $y = 1/x$ para $x > 1$:

    a) alrededor del eje X

    b) alrededor del eje Y

47. Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

    a) Demostrar que tiene un único máximo P y un único mínimo Q.

    b) Hallar la recta r que pasa por los puntos P y Q.

    c) Calcular el área delimitada por la gráfica de $f(x)$ y la recta r.

48. Calcula el área delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, siendo:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{x}{4}$$