PRÁCTICA:
GRÁFICA DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

En esta práctica analizaremos cualitativamente las gráficas de las funciones de una variable (real).

Prerrequisitos: Límites y continuidad. Propiedades de las funciones elementales (racionales, trigonométricas, exponencial y logaritmo).

1. Dominio de definición

A lo largo de esta práctica estudiaremos la representación gráfica de las funciones

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}, \quad g(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}, \quad h(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}.$$

> Para introducir las funciones anteriores en MAXIMA, escribimos:
>
> ```
> f(x):=sqrt((x^2-1)/(x^2-4))
> g(x):=(1-cos(x))/sin(x)
> h(x):=exp(x/(x^2-1))
> ```

El punto de partida del análisis de una función de una variable real es el dominio de definición de dicha función. Si la función no está definida en un punto x_0, en ese punto la función no admite una representación gráfica.

> Vamos a representar la función f en el intervalo $[-3, 3]$. Para ello tecleamos la siguiente órden en MAXIMA:
>
> ```
> wxplot2d(f(x),[x,-3,3])
> ```
>
> Observa que MAXIMA no pinta la imagen de ningún punto que pertenezca a $[-2, -1)$ ni a $(1, 2]$ aunque hemos indicado a MAXIMA que pinte la gráfica de la función en todo punto del intervalo $[-3, 3]$.

Vamos a estudiar el dominio de definición de las tres funciones anteriores para ver dónde están definidas y comparar con las gráficas obtenidas.

- Dominio de $f(x)$. Estudiaremos el dominio de una función compuesta comenzando por las funciones más internas y terminando en la más externa. En el caso de $f(x)$, las primeras operaciones que hay que evaluar son $x^2 - 1$ y $x^2 - 4$, que por ser polinomios están definidas en todo $\mathbb{R}$.

A continuación tenemos el cociente de ambas, que estará definido cuando no se anule el denominador. En este caso $x^2 - 4 = 0$ sólo cuando $x = \pm 2$, luego hay que excluir esos dos puntos del dominio.

Finalmente, la raíz cuadrada sólo está definida cuando el número es mayor o igual que cero, luego tenemos que estudiar los signos de la función $(x^2 - 1)/(x^2-4)$. Se verifica que $(x^2-1)/(x^2-4) < 0$ si y sólo si $x \in (-2,-1) \cup (1,2)$.

En conclusión:

$$Dom(f) = \mathbb{R} \backslash (\{\pm 2\} \cup (-2,-1) \cup (1,2)) = (-\infty,-2) \cup [-1,1] \cup (2,+\infty).$$

- Dominio de $g(x)$. Repitiendo el proceso anterior, como $\sin x$ y $\cos x$ están definidas en todo $\mathbb{R}$, los únicos puntos que no pertenecen al dominio de g son aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $\sin x$. Resolviendo $\sin x = 0$, tenemos $x = \arcsin(0) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Luego

$$Dom(g) = \mathbb{R} \backslash \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Como habrás visto, uno de los puntos clave (y más complicado) es determinar el signo o los ceros de una función. Más adelante veremos cómo utilizar el ordenador para obtener cierta ayuda (aunque parcial).

> **Ejercicio 1.** Representa con el ordenador las funciones f, g y h sobre el intervalo $[-3,3]$. Calcula los límites de cada función en los puntos que no están en su dominio.

2. Simetrías y periodicidad

Las simetrías y periodicidad de las funciones son importantes porque nos permiten simplificar su estudio; si una función tiene una simetría, es suficiente estudiar uno de los lados, mientras que si es periódica, basta estudiar un periodo.

Para ver si una función es par o impar, podemos mirar su gráfica. Si es par será simétrica respecto al eje "y" (un lado es la imágen especular del otro) y si es impar, es simétrica respecto al origen (el lado izquierdo es el simétrico del derecho "dado la vuelta"). También podemos calcular $f(x) - f(-x)$ y $f(x) + f(-x)$; si f es par, la diferencia $f(x) - f(-x)$ será una función muy pequeña (debería ser cero, pero por los errores de aproximación puede no serlo) y si f es impar, $f(x) + f(-x)$ será muy pequeña.

Representamos en MAXIMA las funciones $f(x) - f(-x)$ y $f(x) + f(-x)$:

```
wxplot2d(f(x)-f(-x),[x,0,3])
wxplot2d(f(x)+f(-x),[x,0,3])
```

Vemos claramente que la función es par.

Demostremos ahora que es cierto lo que hemos comprobado numéricamente.

$$f(-x) = \sqrt{\frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 4}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}} = f(x).$$

Ejercicio 2. Estudia las simetrías (par/impar) de las funciones g y h gráfica y analíticamente como en el ejemplo expuesto con $f(x)$. En el caso de g habrá que usar las simetrías de las funciones $\sin x$ y $\cos x$[1].

La periodicidad de una función se puede observar gráficamente porque la función "se repite" en intervalos de la misma anchura. Podemos estimar el periodo de la función calculando en la gráfica la distancia entre dos puntos iguales en dichas repeticiones.

Representamos en MAXIMA la función $g(x)$:

```
wxplot2d(g(x),[x,0,8*%pi])
```

Se puede observar que la función es periódica de periodo algo superior a 6.

En las funciones periódicas es imprescindible obtener el periodo de modo muy exacto. Si la función que estamos estudiando se obtiene a partir de sumas, productos, potencias, logaritmos o exponenciales de funciones trigonométricas del tipo $\sin(k_i\alpha x + x_i)$ ó $\cos(\alpha x/k_i + x_i)$, donde $\alpha, x_i \in \mathbb{R}$ y los k_i son números enteros, entonces la función es periódica de periodo el mínimo común múltiplo de los k_i, multiplicado por $2\pi/\alpha$.

Ejemplo 1. La función $s(x) = \sin(x/2) + \cos(x/3)$ tiene periodo $\mathrm{mcm}(2,3) \cdot 2\pi = 12\pi$.

Ejercicio 3. Trata de estimar el valor del periodo de la función $g(x)$. Si llamamos a ese periodo T, representa la gráfica de $g(x) - g(x+T)$ (si aciertas con el valor del periodo, la función $g(x) - g(x+T)$, debería ser la función constante cero).

3. Continuidad. Puntos de corte con los ejes. Signo

Las funciones f, g, h son continuas en todo su dominio de definición, pues son composición de funciones continuas.

El elemento más complicado del análisis de una función es obtener sus puntos de corte con el eje OX, es decir, los ceros de $f(x)$. Veamos cómo se calcularían para las funciones f, g y h.

- Puntos de corte con los ejes de f. Como $f(0) = 1/2$, f se corta con el eje OY en el punto $(0, 1/2)$. Para calcular los puntos de corte con el eje OX tenemos que resolver la ecuación $f(x) = 0$. Elevando al cuadrado los dos términos de la igualdad obtenemos $(x^2 - 1)/(x^2 - 4) = 0$. Como la fracción se anulará únicamente cuando lo haga el numerador, es decir, en $x = \pm 1$, concluimos que los puntos de corte son $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.
- El punto de corte con el eje OY no existe pues $g(0)$ no está definida. Tampoco hay puntos de corte con el eje OX pues el cociente se anulará donde lo haga el numerador, es decir, donde $1 - \cos x = 0$, luego $x = \arccos(1) = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, y en dichos puntos g no está definida.
- Como $h(0) = 1$, h se corta con el eje OY en el punto $(0, 1)$. Por otra parte, la exponencial es siempre una función positiva, luego no se puede cortar con el eje OX.

Veamos ahora cómo puede ayudarnos el ordenador en la búsqueda de los ceros.

MAXIMA es un programa de cálculo simbólico, por tanto, a veces podrá obtener los ceros de modo exacto.
En primer lugar, la gráfica de la función nos permite estimar dónde están los ceros. Para calcular su valor podemos utilizar la función de MAXIMA `solve` y si no nos ofrece una salida satisfactoria y, además, la función es un polinomio podemos utilizar la función de MAXIMA `realroots`.
Consideremos la función $f(x)$. Si queremos obtener los ceros del polinomio $x^2 - 1$ (que serán los ceros de la función), podemos utilizar la función `solve`:

```
solve([x^2-1=0],[x])
```

O bien `realroots`:

```
realroots(x^2-1)
```

El uso de `solve` con funciones trigonométricas es especial pues MAXIMA utiliza funciones trigonométricas inversas para resolver la ecuación, y por tanto, puede ignorar algunas soluciones. Como ejemplo intentemos calcular los puntos donde no está definida la segunda función:

```
solve([1-cos(x)=0],[x])
```

Notar que MAXIMA nos ofrece tan sólo la solución $x = 0$ y hay otras.

Una vez determinados los ceros, para determinar el signo únicamente tenemos que dividir la recta en intervalos en los que la función sea continua y no tenga ceros. Así, por el Teorema de Bolzano en todo ese intervalo tendrá un mismo signo.

Tomemos la primera función. Sabemos que el dominio es $(-\infty,-2)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$. Eliminamos los puntos donde se anula y tenemos tres intervalos: $(-\infty,-2),(-1,1),(2,+\infty)$. Para ver el signo en cada uno de ellos, basta tomar un punto cualquiera en cada trozo.

```
puntosSigno:[-3,0,3]
```

```
makelist(sign(f(i)),i,puntosSigno)
```

Vemos que es positiva en todo punto (ya lo sabíamos pues es una raíz cuadrada.

Ejercicio 4. Calcula los signos de g, h y $(x^2-1)/(x^2-4)$.

4. Asíntotas

Las asíntotas nos informan de cómo se comporta la función en los puntos "conflictivos", esto es, para x muy grandes o pequeñas o muy cercanas a puntos en los que la función no está definida o no es continua.

Comencemos por x grandes o pequeñas. Es decir, los límites de la función en la dirección $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$. Si los calculamos para la función f, tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1.$$

Es decir, f tiene asíntota horizontal, en la dirección $x\to+\infty$ y también en la dirección $x\to-\infty$. Podemos verlo gráficamente usando el ordenador.

Pasemos ahora a las asíntotas verticales. Éstas aparecerán en los puntos donde la función no está definida o en puntos donde pueda tener discontinuidades. En la gráfica de la función se verá cómo la función sube mucho o baja mucho.

Para la función $f(x)$, son candidatos a asíntotas verticales los puntos ±2, pues son puntos en los que la función no está definida. Si estudiamos los límites, tenemos

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty=\lim_{x\to-2^-} f(x).$$

Es decir tiene dos asíntotas verticales.

Las posibles asíntotas oblícuas $y=mx+n$ se obtiene calculando los siguientes límites:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx.$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad n=\lim_{x\to-\infty} f(x)-mx.$$

Si tiene asíntotas horizontales en una dirección, no tendrá asíntotas oblícuas en la misma dirección (aunque sí podría tenerlas en otra dirección).

Ejercicio 5. Haz los cálculos necesario y determina si las funciones g y h tienen asíntotas verticales, horizontales u oblícuas.