PRÁCTICA
SUCESIONES Y LÍMITES DE FUNCIONES

En esta práctica se utilizará la representación gráfica de funciones para facilitar que el alumno visualice el concepto de límite.

Prerrequisitos: ninguno.

1. Sucesiones de números reales

Una sucesión de números reales a_n es un conjunto infinito de números reales que están ordenados, el primero es a_1, el segundo a_2, ...

Ejemplo 1. Ejemplos de sucesiones son:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots$$

$$\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \dots$$

El término general de una sucesión es una expresión en n que nos permite calcular cualquier término de la sucesión. En los ejemplos anteriores los términos generales son respectivamente:

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \text{de modo que:} \qquad a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ \dots$$

$$b_n = \frac{n+2}{n+1}, \qquad \text{de modo que:} \qquad b_1 = \frac{3}{2},\ b_2 = \frac{4}{3},\ \dots$$

Para definir una sucesión con MAXIMA introducimos el término general como si se tratara de una función, con la variable n entre corchetes para que la trate como un subíndice. Por ejemplo:

```
a[n]:=1/n
b[n]:=(n+2)/(n+1)
```

De modo que los distintos términos de la sucesión se obtienen escribiendo `a[1]`, `a[2]`, ...

También se puede utilizar el comando **`makelist`** para calcular varios términos. Comprueba el resultado de escribir:

```
makelist(a[n],n,1,20)
```

Una sucesión numérica también puede definirse por medio de una ley de recurrencia, es decir, una expresión matemática que nos permite calcular cada término de la sucesión a partir de los términos anteriores. Si se define la sucesión de esta manera, además de la ley de recurrencia es necesario conocer los primeros términos de la sucesión.

Ejemplo 2. Ejemplos de sucesiones definidas de forma recurrente:

$$a_n = \frac{n+1}{n}\, a_{n-1}\,, \qquad \text{siendo} \qquad a_1 = 2\,;$$

$$b_n = b_{n-2} + b_{n-1}\,, \qquad \text{siendo} \qquad b_1 = 1, \quad b_2 = 1\,.$$

En MAXIMA, estas sucesiones se definirían de la siguiente manera:

```
a[1]:2;
a[n]:=(n+1)/n*a[n-1]
```

Comprueba el resultado al calcular, por ejemplo, a_4 y a_5.

En el caso de b_n, la definición sería:

```
b[1]:1;
b[2]:1;
b[n]:=b[n-2]+b[n-1]
```

2. Límite de una sucesión

Una definición intuitiva del límite de una sucesión es "valor al que se aproximan los términos de la sucesión". En los siguientes ejemplos, calculamos los primeros términos de cada sucesión e "intuimos" cuál será su límite:

Ejemplo 3.

$$a_n = \frac{n+2}{n+1} \qquad \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots \qquad 1'5,\ 1'33,\ 1'25,\ 1'2,\ \cdots \qquad L = 1$$

Ejemplo 4.

$$b_n = n^2 \qquad 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots \qquad L = \infty$$

Si el límite es un valor finito, como el de la sucesión a_n, se dice que la sucesión es convergente; si es infinito, como el de la sucesión b_n, se dice que es una sucesión divergente; finalmente, si la sucesión no tiene límite, se denomina sucesión oscilante.

Ejemplo 5.

$$c_n = \cos n \qquad \cos 1,\ \cos 2,\ \cos 3,\ \cdots$$

La sucesión c_n es oscilante porque no tiene límite. ¿Sabes justificarlo?

El límite de una sucesión se denota de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Para calcular el límite de una sucesión utilizando MAXIMA se escribe:
`limit(a[n], n, inf);`
si previamente se ha definido la sucesión $a[n]$. Caso de no haber definido previamente la sucesión, se puede sustituir $a[n]$ en la sintaxis anterior por el término general.

Ejemplo 6. Comprueba estos resultados utilizando MAXIMA:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \qquad \text{(sucesión divergente)};$$

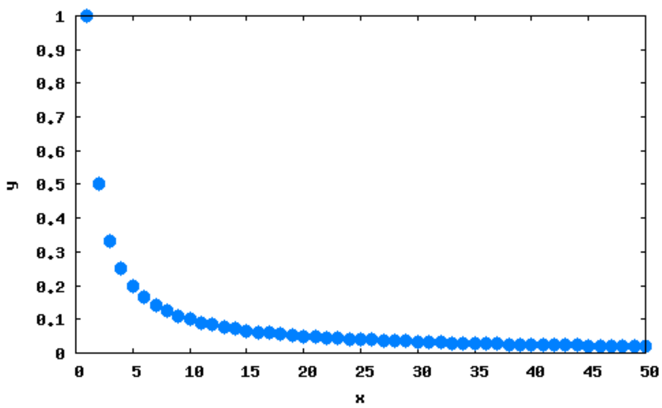
$$\lim_{n\to\infty} \cos n = \nexists \qquad \text{(sucesión oscilante)};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \qquad \text{(sucesión convergente)}.$$

Para tener una imagen gráfica del límite de una sucesión podemos representar en el plano cartesiano los puntos de coordenadas $(n,\ a_n)$.

Utilizando MAXIMA, es necesario construir primero una lista de pares ordenados de coordenadas $(n,\ a_n)$. Llamamos "puntos" a esta lista:
`a[n]:=1/n; puntos:makelist([n,a[n]],n,1,50)`

La representación gráfica de esta línea de puntos se obtiene con el comando
`wxplot2d([discrete,puntos],[style,points])`



3. Ejercicios

Ejercicio 1. Dada la sucesión

$$a_n = \frac{n-1}{n} \ :$$

(1) Calcula sus 50 primeros términos y a partir del resultado obtenido, estima el valor del límite de esta sucesión.
(2) Haz una representación gráfica de los puntos de coordenadas (n, a_n), y comprueba que la sucesión tiende al límite estimado.
(3) Utilizando el comando apropiado, calcula el límte de a_n.

Ejercicio 2. Repite el ejercicio anterior para la sucesión

$$b_n = \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2\,n}}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)^n \ .$$

4. Límite de funciones

De manera intuitiva, podemos decir que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es el valor L al que se aproxima $f(x)$ cuando x toma valores próximos a x_0. Se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \,,$$

donde tanto x_0 como L pueden ser valores finitos o infinitos.

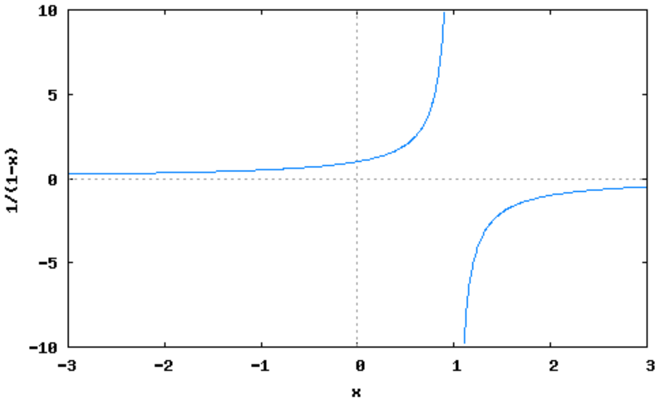
Una vez definida la función, para el cálculo del límite con MAXIMA se utiliza el mismo comando que en el cálculo de límites de sucesiones. En general, ésta será la sintaxis:
`limit (f(x), x,` x_0`);`
En el caso de límites laterales, para especificar si los valores próximos a x_0 son menores (límite por la izquierda) o mayores (límite por la derecha) que x_0 , se escribe el argumento `minus` (o `plus`, respectivamente).
Comprueba el resultado de escribir

```
f(x):= x/(1-x);
limit (f(x), x, 1, minus)
limit (f(x), x, 1, plus)
```

Ejemplo 7. La función $f(x)$ tiene límites laterales diferentes a la izquierda y a la derecha de 1:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$$

Estos resultados se ponen de manifiesto al hacer la representación gráfica de $f(x)$:



5. Ejercicios

Ejercicio 3. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 - x + 3} :$$

(1) Calcula los siguientes límites y comenta por escrito los resultados:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to 3^\pm} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) \qquad \lim_{x\to -1^\pm} f(x)$$

(2) Comprueba los resultados obtenidos representando gráficamente la función. Recuerda que la sintaxis para representar una función en MAXIMA es
`wxplot2d([f(x)],[x,min,max])`.

Ejercicio 4. Haz lo mismo que en el ejercicio 3 con la función $g(x)$ y los límites indicados:

$$g(x) = x\, \mathrm{e}^{1/x} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) \qquad \lim_{x\to 0^\pm} g(x)$$

Ejercicio 5. Haz lo mismo que en el ejercicio 3 con la función $h(x)$ y los límites indicados:

$$h(x) = \mathrm{L}(x^3 + 3x + 2) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} h(x) \qquad \lim_{x\to -2^\pm} h(x) \qquad \lim_{x\to -1^\pm} h(x)$$