Conjuntos numéricos. Sucesiones. Funciones

Conjuntos numéricos

1. ¿Pertenece el número real 2.15 al entorno de centro 2.2 y radio 0.1?

2. Representa gráficamente el conjunto de puntos tales que

   (a) $|x+6| < 2$
   (b) $|x+4| < 0.5$

3. Escribe tres cotas superiores del conjunto $(2, -1)$. Escribe también tres cotas inferiores. ¿El número 1 es cota superior de este conjunto? ¿Existe alguna cota superior menor que 1?

4. ¿Están acotados los siguientes conjuntos?

   (a) $1, 1/2, 1/3, \ldots$
   (b) $(4, \infty)$
   (c) Si K es una cota superior de un conjunto de números reales ¿lo es también $K+1$? ¿y $K-1$? ¿Cuántas cotas superiores tiene un conjunto acotado?

5. Determina, si existe, el ínfimo de los siguientes conjuntos

   (a) $[1, 5]$
   (b) $(-3, 1) \cup (4, 5)$
   (c) $[-3, 4] \cup [1, 5]$
   (d) $(-\infty, 3)$

6. Sea E el conjunto de números de la forma $3 + 1/n$, donde n es un número natural distinto de cero. Determina si tiene máximo o mínimo y si tiene supremo o ínfimo.

7. Sea E el conjunto de números del intervalo $(2, 3)$ junto con los números del intervalo $[4, 5]$. Determina el máximo y el mínimo de E, si existen, así como el supremo y el ínfimo, si existen.

8. Enuncia y dibuja los intervalos

   (a) $-3 < x < 5$
   (b) $2 \leq x \leq 6$
   (c) $-4 < x \leq 0$
   (d) $x > 5$
   (e) $x \leq 2$

9. Enuncia y dibuja los intervalos

   (a) $|x| < 2$
   (b) $|x| > 3$
   (c) $|x-3| < 1$

(d) $|x-2| < d (d > 0)$

(e) $0 < |x+3| < d (d > 0)$

10. Calcula a y b para que $\frac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real y tenga de módulo 1.

11. Calcular a para que $\frac{3-2ai}{4-3i}$

    (a) Sea un número imaginario puro

    (b) Sea un número real

    (c) Su afijo esté sobre la bisectriz del primer cuadrante

12. Demuestra que todo número complejo $z \neq -1$, con módulo 1 se puede escribir de modo único en la forma
$$\frac{1-xi}{1+xi}$$

13. Calcula $(1+4i)^3$, utilizando la fórmula del binomio de Newton y expresando el complejo en forma módulo argumental.

14. Resuelve la ecuación $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

15. Halla, en cada caso, los números complejos que verifican

    (a) $\bar{z} = \frac{1}{z}$

    (b) $|z-a| = |z-b|$, siendo $a, b \in \mathbb{C}$

    (c) $|z-1+i| < 2$

16. Un triángulo equilátero tiene su centro en el punto $(1,1)$ y uno de sus vértices es el punto $(1,3)$. Hallar los otros dos vértices.

17. Calcula las raíces de:
    (a) $\sqrt[3]{-1}$ (b) $\sqrt[4]{-1}$ (c) $\sqrt[6]{-8}$ (d) $\sqrt[5]{i}$

18. Describir geométricamente los conjuntos de puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que:

    (a) $|Rez| \leq 1 \quad |Imz| \leq 1$

    (b) $|z| \leq 1 \quad \sigma_1 \leq \arg(z) \leq \sigma_2$, con $-\pi < \sigma_1 < \sigma_2 \leq \pi$

19. Calcula $\sqrt[3]{1-i}$ expresando los resultados en forma trigonométrica.

20. Determina el conjunto de números complejos z que verifican:
$$z + \bar{z} = |z|.$$

21. Determina el conjunto de números complejos z que verifican: $z^3\bar{z} = -1$. (Idea: utiliza la forma módulo-argumento.)

22. Calcula:

(a) $\sqrt[6]{-8}$ y presenta el resultado en forma binómica, módulo-argumento y trigonométrica;
(b) el valor de x tal que
$$3 = \frac{1 - xi}{1 + xi}$$

23. Sea el número complejo (en forma módulo-argumento) $z = (2\sqrt{2})_{\frac{3\pi}{4}}$:
    (a) Calcula $\sqrt[3]{z}$.
    (b) Transforma uno de los resultados anteriores a forma binómica y forma trigonométrica.

24. Obtén la forma binómica de los números complejos que verifican la ecuación:
$$z^6 + 19z^3 - 216 = 0.$$

25. Dado el número complejo en forma módulo-argumento $z = 16_{\frac{2\pi}{3}}$, calcula la forma cartesiana y trigonométrica de z y la forma cartesiana de los diferentes valores de $\sqrt[4]{z}$. Presenta los resultados exactos (sin hacer uso de expresiones decimales.)

26. Dado el número complejo en forma módulo-argumento $z = 8_{\frac{-\pi}{4}}$, calcula la forma cartesiana y trigonométrica de z. Presenta los resultados exactos (sin expresiones decimales).

27. Obtén en forma binómica y módulo-argumento los números complejos que verifican la ecuación:
$$z^2 + z + 1 = 0.$$

28. (a) Obtén la forma cartesiana de los números complejos que verifican la ecuación $z^6 + 9z^3 + 8 = 0$.
    (b) Siendo $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ los números complejos obtenidos en el apartado anterior, obtén detalladamente la forma cartesiana del número complejo:
$$w = \left(\frac{w_1^2 w_2^3}{w_3}\right)\left(\frac{w_4^3 w_5^2}{w_6^5}\right)^3.$$

29. Encuentra los números complejos z tales que $\frac{3\pi}{2}$ es el argumento de $\frac{z+1}{z+2}$.

30. Obtén la forma cartesiana, el módulo y el argumento de los números complejos z que verifican la ecuación: $z^2 - z + 1 = 0$.

31. Obtén el módulo y el argumento de los números complejos z tales que $\dfrac{z+1}{z+2}$ es un número real positivo

32. Calcula las soluciones de la ecuación
$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$
    Si z_1 y z_2 son las soluciones,
    (a) Calcula forma módulo argumento, trigonométrica y exponencial de z_1.
    (b) Calcula las raíces cuartas de z_1.

    Haz los cálculos sin usar expresiones decimales.

33. Calcula expresando los resultados en forma trigonométrica de $\sqrt[3]{1+i}$

Sucesiones de números reales

34. Demuestra que la sucesiones

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \qquad b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

son ambas convergentes y al mismo límite.

35. La sucesión a_n está definida por la ley

$$a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\, a_n$$

siendo $a_1 = 2$. Demuestra que es decreciente, está acotada y razona que es convergente.

36. Dada la sucesión definida por recurrencia en la forma

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}.$$

Se pide demostrar que si es o no convergente y calcular su límite para los diferentes valores de $k > 0$.

37. Demuestra que la sucesión

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

tiene por límite 1, acotando la sucesión entre otras dos que tengan el mismo límite.

38. Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n$$

39. Pon un ejemplo de una sucesión a_n convergente a un número real b y tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1.$$

40. Se sabe que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Pon un ejemplo para demostrar que el recíproco no es cierto.

41. Calcula $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{3}{n}}{L(\frac{n}{n-1})}$.

42. Sea la sucesión

$$a_1 = 3, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad si \quad n \geq 2$$

Demuestra que es convergente y calcula su límite.

43. Calcula $\lim_{n\to+\infty}[1+L(n^2-5n+8)-L(n^2+3n-9)]^{2n-7}$.

44. Escribe una sucesión que contenga todos los números racionales.

45. Considera la sucesión de números reales definida por:

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}+x_n^2 \quad n\in\mathbb{N}; x_1>0$$

   (a) Suponiendo que x_n tiene como límite un número real, halla éste.
   (b) Demuestra que x_n es una sucesión creciente.
   (c) Determina para qué valores positivos de x_1 la sucesión x_n resulta convergente.

46. Considera la sucesión a_n definida por recurrencia:

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad a_1>0$$

   (a) Demuestra que la sucesión está acotada inferiormente por 2.
   (b) Demuestra que la sucesión es decreciente.
   (c) Justifica que la sucesión a_n es convergente y calcula su límite.

47. Calcula detalladamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{1+n+2n^2}\right)^{\left(\frac{1+n^2}{1+n}\right)}$$

48. Calcula detalladamente el valor del siguiente límite caso de que exista:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-n\cos^2\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)}{2+\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)}.$$

49. Estudia el límite de la sucesión $x_n=\frac{a^n}{n^k}$ en función de los valores de los parámetros a y k reales.

50. Calcular los 10 primeros términos y el límite de la sucesión siguiente

$$n\,\mathrm{L}\left(\frac{4n+3}{4n-3}\right)$$

51. Calcula razonadamente el límite de la sucesión $a_n=\dfrac{3}{n\,\mathrm{L}\left(\frac{n}{n-1}\right)}$

Funciones

52. Estudia la paridad de las siguientes funciones

$$\frac{\operatorname{sen} x + x + x^3}{x^2 + \cos x + 4} \qquad \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(3x)}{\cos(2x) + 1}$$

53. Estudia si las siguientes funciones son periódicas. En caso afirmativo calcular su período.

$$f(x) = \sin x + \cos x \qquad g(x) = \operatorname{sen} x + e^{-x} \qquad h(x) = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x/2)$$

54. Se consideran las funciones

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = e^x \qquad h(x) = \operatorname{Ln} x \qquad k(x) = \operatorname{tg} x$$

Calcula

$$(h \circ f \circ k)(x) \qquad (g \circ k)(x) \qquad (k \circ f \circ g)(x)$$

55. Estudia la relación entre la gráfica de $f(x)$ y las de $f(x + \beta)$ y $\beta f(x)$, siendo $\beta \in \mathbb{R}$. Aplícalo al caso de $f(x) = x^2$.

56. Responde razonadamente las siguientes cuestiones:

    (a) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones pares. ¿Son pares las funciones $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$?
    (b) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones impares. ¿Cómo son las funciones $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$?
    (c) Sea una función par y una función impar. ¿Qué se puede decir de las funciones $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$?

57. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones periódicas. ¿Son periódicas las funciones $f(x) + g(x)$ y $f(x)g(x)$?

58. Halla el dominio de las siguientes funciones

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 3} \qquad \sqrt{x^4 - 1} \qquad \cos\left(\frac{x + 3}{x^2 + 1}\right) \qquad \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{x + 1}\right)$$