

Límites de funciones y continuidad

1. Calcula los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|}$$

2. Cuando x tiende a 0, considera los infinitésimos siguientes:

$$x^2 \quad \operatorname{sen}(4x) \quad x \cos x \quad 1 - \cos(3x)$$

Indica si son del mismo orden que x , de orden superior o inferior.

3. Calcula los siguientes límites si existen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen} x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)}{\operatorname{Ln}\left(1 + \frac{x+3}{x^2+7}\right)}$$

4. Obtén las asíntotas de las siguientes funciones:

$$xe^{1/x} \quad \operatorname{Ln}(x^2 + 3x + 2) \quad \cos x - \operatorname{Ln}(\cos x) \quad \frac{x^3}{e^x}$$

5. En cada caso dar ejemplos de funciones que verifiquen

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \\ \text{(b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \\ \text{(c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

6. Determina el valor de a para que exista el límite de $f(x)$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7. Calcula los siguientes límites empleando infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Ln} x}{e^x - e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(x+1)}{2^x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\cos(3x)(1 - \operatorname{sen} x)}$$

8. Calcula a para que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 4$

9. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} \quad (b \neq 1)$$

10. Estudia la continuidad de la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

11. Demuestra que la función $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ tiene cuatro raíces reales.
12. Determina cuáles de las siguientes funciones están acotadas superior e inferiormente y cuáles tienen máximo y mínimo absoluto en los intervalos que se indican:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1+x^2} & \text{en } [0, 5] \\ \frac{3}{2+x} & \text{en } [-3, 2] \\ x + E[x] & \text{en } [-2, 2] \end{array}$$

siendo $E[x]$ la parte entera de x .

13. Considera las funciones reales de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x + \text{Ln } x & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Estudia la continuidad de $f(x)$ y $g(x)$ en todo su dominio.
- (b) Utiliza los teoremas estudiados para determinar si está acotada la función $f \circ g$ en el intervalo $[-1, 2]$.
- (c) Prueba que existen dos puntos x_1 y x_2 en el intervalo $(1, e^2)$ tales que $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$ y $f(x_2) = \frac{3\pi}{2}$.
- (d) Deduce del apartado anterior que existe $x_0 \in (1, e^2)$ tal que $(f \circ g)(x_0) = 0$.
14. Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y $x = e$ y determina el valor de a para que sea continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \text{Ln } x & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ \frac{x}{e} & \text{si } x > e \end{cases}$$

15. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(1 + L(\frac{x^3+3}{x^3+1}))\text{sen } x}{\text{sen}(\frac{1}{x})}$$

16. ¿Puede existir una función real continua en todo \mathbb{R} y tal que $f(x)$ vale 0 si y solo si $x \in (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$?
17. Sean f, g dos funciones continuas en \mathbb{R} y tal que $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}$. Demuestra que entonces $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
18. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y $g(x) = x(1 - x^2)$. Estudia la continuidad de

- (a) $g \circ f$
 (b) $f \circ g$.

19. Prueba que toda ecuación polinómica $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ tiene alguna raíz si n es impar.

20. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

21. (a) ¿Qué significa que $f(x)$ y $g(x)$ sean infinitésimos equivalentes en a ?
 (b) En el desarrollo del siguiente límite se comete un error. Encuentra cuál es ese error y explica por qué es un error. Resuelve el límite correctamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

22. Estudia la continuidad de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

23. Calcula detalladamente, si existen, los siguientes límites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

24. Pon un ejemplo de cada una de las siguientes situaciones, razonando la respuesta.

- Una función f no continua en un punto, tal que su valor absoluto $|f|$ sí lo es.
- Una función f discontinua, otra función g discontinua de forma que la suma $f + g$ sea continua.
- Una función f continua, otra función discontinua de forma que su producto $f \cdot g$ sea continua.

25. Demuestra, enunciando todos los resultados teóricos que utilices, que la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ toma el valor 2 en algún punto interior al intervalo $[-2, 0]$

26. Calcula detalladamente los siguientes límites caso de que existan:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x^2}}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2 - 1}.$$

27. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{3x} + \frac{\mu}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ \gamma & \text{si } x = 0 \\ \alpha + \beta \text{Ln}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

determina los valores que deben tomar los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ para que:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$
- (c) f sea continua en $x = 0$

28. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x L|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Comprueba si es continua en $x = 0$ calculando los límites necesarios.
- (b) Calcula sus asíntotas.
- (c) Comprueba si existe en $x = 0$ el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

29. Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$$

- (a) Calcula los coeficientes de las asíntotas oblicuas.
- (b) Representa gráficamente la función de forma aproximada cuando x tiende a ∞ y a $-\infty$.

30. Dada la función $f(x) = \frac{3x}{(x-1)(\sqrt{2-x})}$, determina el signo de $f(x)$ según los valores de x y sus asíntotas.

31. Dada la función $f(x) = x \exp(\frac{2x}{x^2-1})$

- (a) Halla sus asíntotas.
- (b) Estudia el límite de la función $f(x)$ en los puntos donde tenga asíntota vertical.
- (c) Dibuja la gráfica de las asíntotas y de $f(x)$ en donde los valores de ambas sean parecidos.

32. Dada la función $f(x) = \frac{1}{|x|^{1/2}}$,

- (a) Estudia la continuidad de $f(x)$
- (b) Calcula sus asíntotas

33. Dada la función $f(x) = L(x^3 - x)$

- (a) Estudia su dominio de definición
- (b) Enuncia en qué Teorema te puedes apoyar para calcular, de forma aproximada, un punto de corte de la gráfica de $f(x)$ con el eje OX
- (c) Calcula un intervalo de longitud uno en el que se encuentre este punto de corte