Cuádricas del Espacio Afín $\mathbb{A}_3$

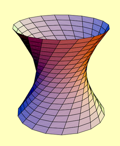
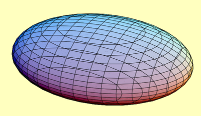
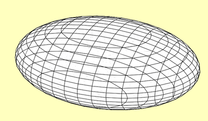
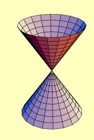
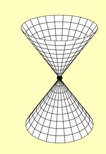
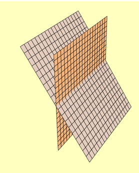
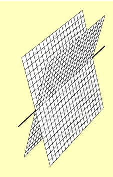
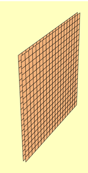
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

Definición. Sea $\mathcal{X}$ una cuádrica del espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ de ecuación (en coordenadas homogéneas) $\sum_{i,j=1}^{n+1} \lambda_{ij} x_i x_j = 0$. Sean p y q el número de autovalores positivos y negativos respectivamente de la forma cuadrática anterior. Se llama *rango* de $\mathcal{X}$ a $r = p + q$, e *índice* de $\mathcal{X}$ a $i = \min\{p, q\}$.

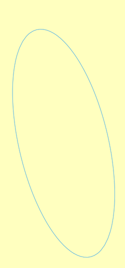
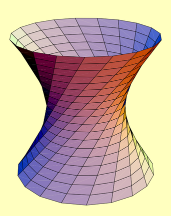
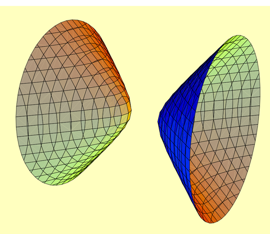
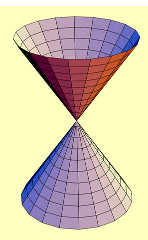
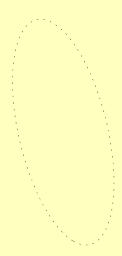
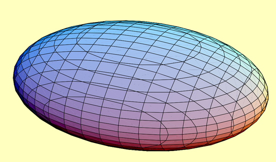
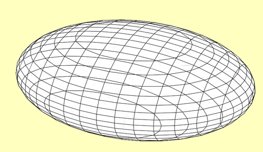
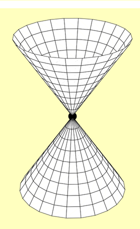
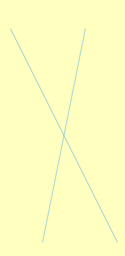
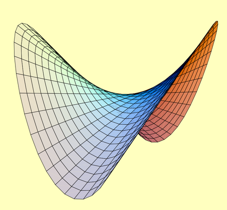
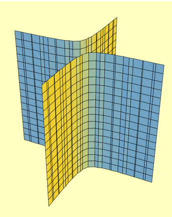
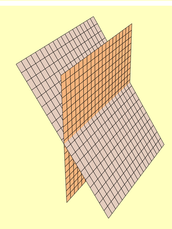
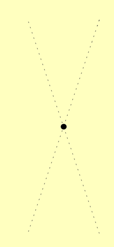
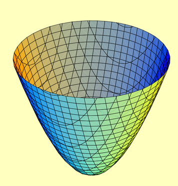
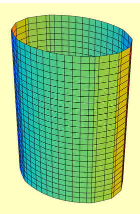
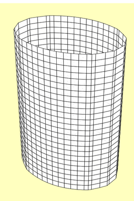
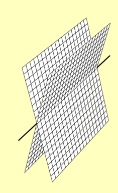
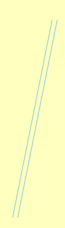
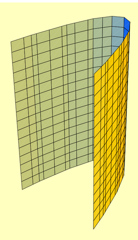
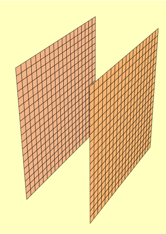
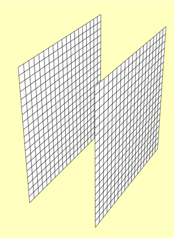
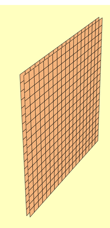
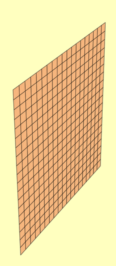
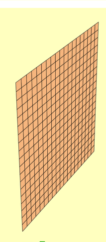
Clasificación proyectiva de las cuádricas: Dos cuádricas del espacio proyectivo real $\mathbb{P}_n$ son *proyectivamente equivalentes* (esto es, existe una proyectividad que transforma una cuádrica en la otra) si y sólo si poseen los mismos rango e índice, (r, i).

Clasificación afín de las cuádricas: Dos cuádricas del espacio afín real $\mathbb{A}_n = \mathbb{P}_n \backslash \mathbb{P}_{n-1}$ son *afínmente equivalentes* (esto es, existe una afinidad que transforma una cuádrica en la otra) si y sólo si son proyectivamente equivalentes y sus respectivos cortes con el hiperplano del infinito $\mathbb{P}_{n-1}$ también son proyectivamente equivalentes. Así pues una cuádrica $\mathcal{X}$ se clasifica afínmente por los invariantes (r, i) y (r', i'), siendo (r, i) el rango e índice de $\mathcal{X}$ y (r', i') el rango e índice de $\mathcal{X} \cap \mathbb{P}_{n-1}$.

Clasificación Proyectiva

(rango,índice)	(4,2)	(4,1)	(4,0)	(3,1)	(3,0)	(2,1)	(2,0)	(1,0)
	 Cuádrica reglada $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$	 Elipsoide $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$	 Cuádrica imaginaria $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$	 Cono real $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	 Cono imaginario $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	 Par planos reales $x_1^2-x_2^2=0$	 Par planos imaginarios $x_1^2+x_2^2=0$	 Plano Doble $x_1^2=0$

Clasificación Afín

CORTE CON EL PLANO DEL INFINITO		(4,2)	(4,1)	(4,0)	(3,1)	(3,0)	(2,1)	(2,0)	(1,0)
 Cónica real	(3,1)	 Hiperboloide reglado $x^2+y^2-z^2=1$	 Hiperboloide no reglado $x^2-y^2-z^2=1$		 Cono $z^2=x^2+y^2$				
 Cónica imag.	(3,0)		 Elipsoide $x^2+y^2+z^2=1$	 Elipsoide imaginario $x^2+y^2+z^2=-1$		 Cono imaginario $x^2+y^2+z^2=0$			
 Par rectas	(2,1)	 Paraboloide reglado $z=x^2-y^2$			 Cilindro hiperbólico $x^2-y^2=1$		 Planos no paralelos $x^2-y^2=0$		
 Par rectas imag	(2,0)		 Paraboloide no reglado $z=x^2+y^2$		 Cilindro elíptico $x^2+y^2=1$	 Cilindro imaginario $x^2+y^2=-1$		 Planos no paralelos imag. $x^2+y^2=0$	
 Recta doble	(1,0)				 Cilindro parabólico $y=x^2$		 Planos paralelos $z^2=1$	 Planos paralelos imag. $z^2=-1$	 Plano doble $z^2=0$
 Plano	(0,0)						 Plano $z=0$		Vacío

Interpretación geométrica del rango e índice.

Un punto x_0 de una cuádrica $\mathcal{X}$ se dice *singular* si para todo $x \in \mathcal{X}$, la recta que los une, $x + x_0$, yace en $\mathcal{X}$.

Proposición. *Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}_n$ una cuádrica de rango r e índice i. El conjunto $\mathrm{Sing}(\mathcal{X})$ de los puntos singulares de $\mathcal{X}$ es una subvariedad lineal de dimensión $n - r$.*

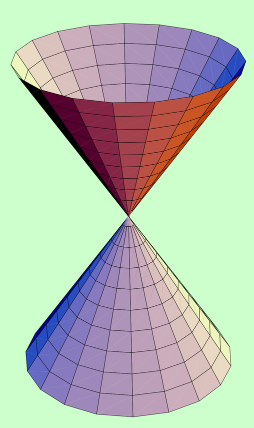
Todas las subvariedades lineales maximales de una cuádrica $\mathcal{X}$ contienen el locus singular $\mathrm{Sing}(\mathcal{X})$ y tienen dimensión $n - r + i$.

$$\boxed{\dim \mathrm{Sing}(\mathcal{X}) = n - r}$$

$$\boxed{\dim \text{subv.lineal max.} = n - r + i}$$

Ejemplo. Para un cono real del espacio $\mathbb{P}_3$, el locus singular se reduce a un sólo punto, el *vértice* del cono; y las subvariedades lineales maximales son rectas, las *generatrices* del cono. De las fórmulas precedentes se deducen el valor del rango y el índice del cono:

$$\left.\begin{aligned} 1 = \dim \text{subv.lineal max.} &= 3 - r + i \\ 0 = \dim \mathrm{Sing}(\mathcal{X}) &= 3 - r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} r &= 3 \\ i &= 1 \end{aligned}$$



e-mails: ricarfr@unex.es, jsancho@unex.es