Clasificación Proyectiva, Afín y Euclídea de las Cuádricas del Espacio

R. Faro y J. Sancho

Dpto. Matemáticas. Universidad de Extremadura

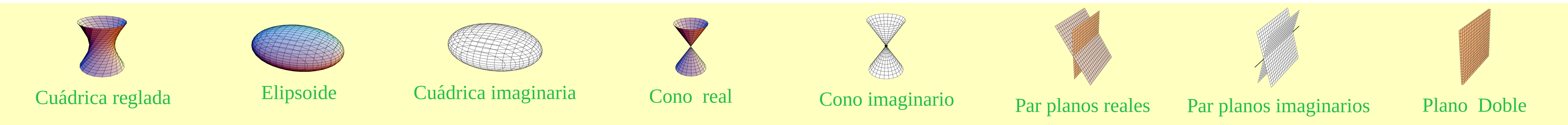
E-mails: ricarfr@unex.es, jsancho@unex.es

Definición. Sea $\mathcal{X}$ una cuádrica del espacio proyectivo $\mathbb{P}_n$ de ecuación (en coordenadas homogéneas) $\sum_{i,j=1}^{n+1} \lambda_{ij} x_i x_j = 0$. Sean p y q el número de autovalores positivos y negativos respectivamente de la forma cuadrática anterior. Se llama *rango* de $\mathcal{X}$ a $r = p + q$, e *índice* de $\mathcal{X}$ a $i = \min\{p, q\}$.

Clasificación proyectiva de las cuádricas: Dos cuádricas del espacio proyectivo real $\mathbb{P}_n$ son *proyectivamente equivalentes* (esto es, existe una proyectividad que transforma una cuádrica en la otra) si y sólo si poseen los mismos rango e índice, (r, i).

Clasificación afín de las cuádricas: Dos cuádricas del espacio afín real $\mathbb{A}_n = \mathbb{P}_n \backslash \mathbb{P}_{n-1}$ son *afínmente equivalentes* (esto es, existe una afinidad que transforma una cuádrica en la otra) si y sólo si son proyectivamente equivalentes y sus respectivos cortes con el hiperplano del infinito $\mathbb{P}_{n-1}$ también son proyectivamente equivalentes. Así pues una cuádrica $\mathcal{X}$ se clasifica afínmente por los invariantes (r, i) y (r', i'), siendo (r, i) el rango e índice de $\mathcal{X}$ y (r', i') el rango e índice de $\mathcal{X} \cap \mathbb{P}_{n-1}$.

Clasificación Proyectiva

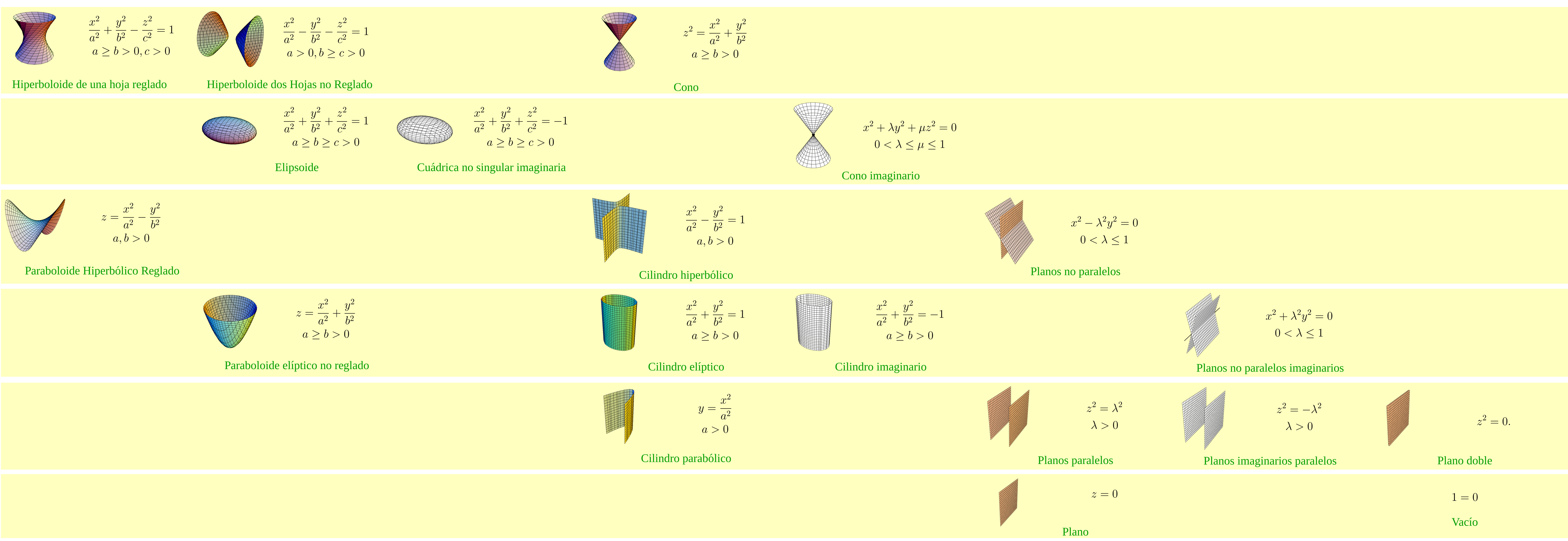


(4,2)	(4,1)	(4,0)	(3,1)	(3,0)	(2,1)	(2,0)	(1,0)
Cuádrica reglada	Elipsoide	Cuádrica imaginaria	Cono real	Cono imaginario	Par planos reales	Par planos imaginarios	Plano Doble

Clasificación afín

CORTE CON EL PLANO DEL INFINITO	(4,2)	(4,1)	(4,0)	(3,1)	(3,0)	(2,1)	(2,0)	(1,0)
(3,1)	Hiperboloide de una hoja reglado	Hiperboloide dos Hojas no Reglado		Cono				
(3,0)		Elipsoide	Cuádrica no singular imaginaria		Cono imaginario			
(2,1)	Paraboloide Hiperbólico Reglado			Cilindro hiperbólico		Planos no paralelos		
(2,0)		Paraboloide elíptico no reglado		Cilindro elíptico	Cilindro imaginario		Planos no paralelos imaginarios	
(1,0)				Cilindro parabólico		Planos paralelos	Par de planos imaginarios	Plano doble
(0,0)						Plano		Vacío

Clasificación euclídea



	(4,2)	(4,1)	(4,0)	(3,1)	(3,0)	(2,1)	(2,0)	(1,0)
(3,1)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $a \geq b > 0, c > 0$ Hiperboloide de una hoja reglado	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $a > 0, b \geq c > 0$ Hiperboloide dos Hojas no Reglado		$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $a \geq b > 0$ Cono				
(3,0)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $a \geq b \geq c > 0$ Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$, $a \geq b \geq c > 0$ Cuádrica no singular imaginaria		$x^2+\lambda y^2+\mu z^2=0$, $0 < \lambda \leq \mu \leq 1$ Cono imaginario			
(2,1)	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$, $a, b > 0$ Paraboloide Hiperbólico Reglado			$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a, b > 0$ Cilindro hiperbólico		$x^2-\lambda^2 y^2=0$, $0 < \lambda \leq 1$ Planos no paralelos		
(2,0)		$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $a \geq b > 0$ Paraboloide elíptico no reglado		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a \geq b > 0$ Cilindro elíptico	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, $a \geq b > 0$ Cilindro imaginario		$x^2+\lambda^2 y^2=0$, $0 < \lambda \leq 1$ Planos no paralelos imaginarios	
(1,0)				$y=\frac{x^2}{a^2}$, $a > 0$ Cilindro parabólico		$z^2=\lambda^2$, $\lambda > 0$ Planos paralelos	$z^2=-\lambda^2$, $\lambda > 0$ Planos imaginarios paralelos	$z^2=0.$ Plano doble
(0,0)						$z=0$ Plano		$1=0$ Vacío