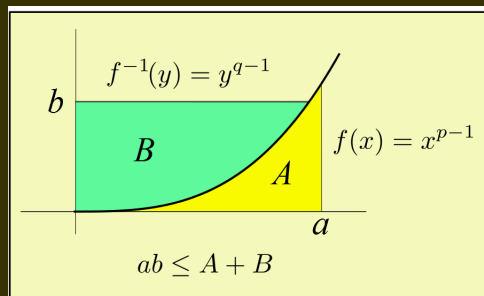


Apuntes de Teoría de la Medida

Badajoz, 22 de enero de 2018

Volumen 2



$ab \leq A + B$. Fig. pág. 243.

Apuntes de Teoría de la Medida

Volumen 2

Índice general

1. Medida	1
1.1. Introducción Histórica.	1
1.2. σ -álgebras de conjuntos	4
1.2.1. Anillos, Álgebras y σ -álgebras.	4
1.2.2. σ -álgebra de Bórel.	6
1.2.3. El conjunto de Cantor.	9
1.2.4. Clases monótonas	11
1.3. Medida	14
1.3.1. Definición y propiedades	14
1.4. Extensión de medidas	20
1.4.1. Medidas exteriores	20
1.4.2. Teoremas de extensión de medidas	23
1.5. Medidas de Lebesgue–Stieltjes	27
1.5.1. Medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R} .	27
1.5.2. Medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R}^n .	31
1.5.3. Propiedades de la medida de Lebesgue.	38
1.6. Medidas de Hausdorff	40
1.6.1. Medidas exteriores métricas	40
1.6.2. Las medidas de Borel H_p	42
1.6.3. Medidas de Hausdorff en \mathbb{R}^n .	44
1.6.4. Conjuntos p -dimensionales	46
1.6.5. Longitud de curvas de \mathbb{R}^n .	50
1.7. Apéndice	53
1.7.1. Conjuntos de \mathcal{F}_δ y de \mathcal{F}_σ	53
1.7.2. Cargas.	55
1.7.3. Propiedades de haz en los espacios de medida.	56
1.7.4. Aproximación de medibles	57
1.7.5. Compleción	58

1.7.6.	Regularidad.	62
1.7.7.	Sobre los conjuntos Lebesgue medibles.	65
1.8.	Bibliografía y comentarios	67
2.	Integración	75
2.1.	Introducción histórica	75
2.2.	Funciones medibles	76
2.2.1.	Propiedades de las funciones medibles	76
2.2.2.	Funciones simples	79
2.2.3.	Operaciones básicas de las funciones medibles.	82
2.2.4.	Existencia de Lebesgue medibles no de Borel.	82
2.3.	Integración	85
2.3.1.	Integral de funciones medibles	85
2.3.2.	Propiedades básicas de la integral.	88
2.4.	Teoremas básicos de integración	90
2.4.1.	Teorema de la carga	90
2.4.2.	Teorema convergencia monótona	93
2.4.3.	Integral de una suma	94
2.4.4.	Teorema de la convergencia dominada.	97
2.4.5.	Dependencia de un parámetro.	100
2.4.6.	Otras propiedades.	103
2.4.7.	Integrales de Riemann y de Lebesgue	110
2.5.	Bibliografía y comentarios	115
3.	Espacio de medida producto	119
3.1.	Introducción	119
3.2.	Producto finito de espacios medibles	121
3.3.	Medida producto de dos espacios	124
3.3.1.	Medidas de transición	125
3.4.	El Teorema de Fubini	131
3.4.1.	Teorema de Fubini para dos espacios	131
3.5.	Compleción de la medida producto	137
3.6.	Aplicaciones	139
3.6.1.	Cálculo de volúmenes especiales	141
3.6.2.	Medida en la esfera invariante por rotaciones	146
3.6.3.	Convolución.	149
3.7.	Producto de mas de dos espacios	151
3.7.1.	Producto de n espacios medibles.	151
3.7.2.	Producto de infinitos espacios medibles.	153
3.8.	Bibliografía y comentarios	158

4. El Teorema de Radon–Nikodym	161
4.1. Introducción	161
4.2. Teorema de descomposición de carga	162
4.3. Medidas reales y medidas complejas	168
4.4. El Teorema de Radon–Nikodym	172
4.5. Singularidad	183
4.6. Bibliografía y comentarios	187
5. Diferenciación	191
5.1. Introducción	191
5.2. Diferenciación de medidas	192
5.3. Derivación e integración	198
5.3.1. Funciones de variación acotada.	198
5.3.2. Medidas y funciones de variación acotada.	201
5.3.3. Teorema fundamental del cálculo.	202
5.4. Transformaciones diferenciables	206
5.4.1. Transformaciones lineales.	206
5.4.2. Transformaciones y medidas de Hausdorff.	210
5.5. El teorema de cambio de variable	211
5.5.1. Coordenadas polares	219
5.5.2. Coordenadas esféricas	220
5.5.3. Forma de volumen. Variedad Riemanniana	220
5.5.4. Coordenadas hiperesféricas	222
5.6. Cálculo de la constante γ_n	229
5.7. Bibliografía y comentarios	234
6. Espacios de funciones medibles	239
6.1. Los espacios \mathcal{L}_p	239
6.1.1. El espacio \mathcal{L}_∞	240
6.2. Los espacios de Banach L_p	242
6.2.1. Desigualdades fundamentales.	242
6.2.2. El espacio \mathcal{L}_p para $0 < p < 1$	245
6.2.3. Los espacios L_p	246
6.2.4. Completión de los espacios L_p	248
6.3. Espacio dual	254
6.4. El espacio dual de L_p	258
6.5. Tipos de convergencias	267
6.6. Aplicaciones que conservan la medida	272
6.7. Bibliografía y comentarios	274

7. Espacios de Hilbert	281
7.1. Espacios prehilbertianos	281
7.2. Propiedades de los espacios de Hilbert	283
7.3. Clasificación de los Espacios de Hilbert	287
7.4. Teorema Ergódico en L_2	289
8. Espacios de Banach	293
8.1. El Teorema de Hahn–Banach	293
8.2. Teoremas clásicos	296
8.3. El Teorema de Vitali—Hahn–Saks	298
9. La transformada de Fourier	301
9.1. Análisis de Fourier en $L_2(T)$	301
9.2. Análisis de Fourier en $L_1(T)$ y $\mathcal{C}(T)$	304
9.3. Análisis de Fourier en $L_1(\mathbb{R})$	306
9.4. El Teorema de inversión	308
9.5. Teorema de Plancherel	310
9.6. El álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R})$	313
9.7. La transformada de Fourier–Stieltjes	315
10. Medida y topología	325
10.1. Espacios Hausdorff LC	325
10.2. Medidas regulares	330
10.2.1. Funciones continuas y funciones medibles	333
10.3. Teoremas de representación de Riesz	337
10.4. Regularidad. T. de Radón–Nikodym	345
10.5. El dual de L_1 en un espacio Hlc	346
10.6. Funcionales de Radón	347
10.7. Producto de dos espacios HLC	351
10.8. Producto no numerable de espacios	354
10.9. Medida de Haar en grupos compactos	357
10.10 La integral de Daniell	359
10.11 Bibliografía y comentarios	363
Densidades	371
Ejercicios difíciles	375
Ejercicios resueltos	377
Otros Ejercicios	409

Índice de figuras

1.1. Conjunto de Cantor $K = \cap K_n$	9
1.2. Semi-rectángulos acotados y no acotados de \mathbb{R}^2	32
1.3.	36
1.4. Partición entera del semirectángulo	36
1.5.	40
1.6.	46
1.7.	53
2.1. Gráficas de s_1 y s_2	80
2.2. Algunos peldaños de la función de Cantor	83
2.3. Gráficas de las funciones $\beta_P \leq f \leq \alpha_P$	110
3.1. Las secciones E_x y E^y de E	122
3.2. El volumen del Toro es $(2\pi R)(\pi r^2)$	141
3.3. Cilindro cortado.	143
3.4. Proyección en yz del centro de masa.	144
3.5.	145
4.1.	163
5.1.	209
5.2. Interpretación geométrica del determinante	209
5.3. Volumen y Area de un cuerpo de revolución.	226
6.1.	243
10.1. Tractriz	434
10.2. Pseudoesfera y Esfera de igual radio	435
10.3. Arco, segmento y sector de la circunferencia.	437
10.4. Centroides de un segmento de parábola.	438

10.5. Casquete esférico.	439
10.6. Segmento esférico.	439
10.7. Sector esférico.	440

Capítulo 1

Medida

1.1. Introducción Histórica.

El concepto de *medida* tiene una larga historia de más de 5000 años, que surge del manejo de longitudes, áreas y volúmenes fundamentalmente y de la necesidad de su cálculo. Estos tres ejemplos particulares de medidas son los que han servido como guía para sacar a la luz el concepto que detrás de ellos se escondía.

El *Papiro de Moscú*, considerado del 1800 A.C., es, con el de Rhind, uno de los documentos egipcios con problemas matemáticos, mas antiguos que se conocen (ver pág.435). En él encontramos problemas como el del cálculo del volumen de un tronco de pirámide ó el cálculo del área de una superficie curva (en él no se aprecia con claridad si se trata de una semiesfera o de un semicilindro de altura el diámetro, los cuales tienen igual area). En cualquier caso en la solución que da el papiro de este problema se hace uso, aparentemente, de la aproximación de π , $4(1 - 1/9)^2 = 3,160\dots$

Sin embargo no es hasta el libro de EUCLIDES (300 a.c.?) *Los Elementos* (ver VANDALEN–MONNA, p. 78 y BOYER, p. 129), que aparecen las primeras demostraciones satisfactorias de teoremas relativos a áreas y volúmenes. Aunque, también es cierto, en este libro no hay definiciones

de *longitud*, *área* ó *volumen*; Euclides las considera características que puede medir respectivamente en las figuras que sí define, como son:

Línea es una *longitud sin anchura*. (Libro I, Def.2).

Superficie es lo que sólo tiene *longitud y anchura* (Libro I, Def.5).

Sólido es lo que tiene *longitud, anchura y profundidad* (Libro XI, Def.1).

y tampoco define qué es *medir*, es una palabra que utiliza no sólo cuando habla de estas tres “magnitudes” geométricas, sino también en el ámbito de la aritmética; por ejemplo en el libro VII, las definiciones 3 y 4 dicen

3.- *Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.*

4.- *Pero partes cuando no lo mide.*

por ejemplo 3 es *parte* de 15 y 6 es *partes* de 15.

Las longitudes las daba en comparación con un segmento unidad, las áreas con un cuadrado unidad y los volúmenes con un cubo unidad, de este modo dio los valores correspondientes a figuras simples como polígonos y poliedros y demostró teoremas como el de Pitágoras. Otros autores griegos más que dar la medida de una figura daban resultados del tipo: *A y B tienen igual área ó volumen*. Por ejemplo ARQUÍMEDES (287–212 a.c.) atribuye a EUDOXO (408–355 a.c.) la demostración de que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro de la misma base y altura. Esto sin conocer este volumen, para el que hace falta conocer el área del círculo, que descubrió casi 100 años después el propio ARQUÍMEDES demostrando que es el de un triángulo rectángulo con un cateto el radio y el otro la longitud de la circunferencia; suyo también es que el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ el volumen del cilindro ó que el área de la esfera es la del cilindro circunscrito (ver BOYER, p.177). Para esta última, que demuestra en *Sobre la esfera y el cilindro* (ver la bibliografía en la pág.70), utiliza los axiomas de Euclides junto con cinco principios de los que destacan,

4.- *Dos superficies que tienen los mismos límites en un plano son desiguales cuando ambas son cóncavas en la misma dirección y una de ellas está completamente limitada por la otra y por el plano que tiene los mismos límites que esta otra, o cuando una de ellas sólo está parcialmente limitada por la otra y el resto es común. La superficie limitada es la menor.*

5.- *Dadas dos líneas, dos superficies o dos sólidos desiguales, si el exceso de una de estas figuras sobre la otra se añade a sí mismo un*

cierto número de veces, se puede superar una u otra de las figuras que se comparan entre sí.

(este último es el conocido **Axioma de Arquímedes**). Y en la demostración hace un uso riguroso del concepto de límite.

Por último suya es también la mejor acotación de π de la época: $3 + (10/71) < \pi < 3 + (10/70)$.

Así se mantuvieron mas o menos las cosas durante 2000 años, hasta que en 1883 G. CANTOR (1845–1918) dio la primera definición de medida $m(A)$ de un conjunto arbitrario (acotado) $A \subset \mathbb{R}^n$. Otros autores como STOLZ en 1884 y HARNACK en 1885 dan definiciones equivalentes en \mathbb{R} . Para ellas la propiedad aditiva de la medida $m[A \cup B] = m[A] + m[B]$, para conjuntos disjuntos A y B , se satisfacía si los conjuntos estaban “*completamente separados*”, pero no en general, pues con sus definiciones un conjunto y su adherencia median lo mismo y por tanto los racionales y los irracionales de $[0, 1]$ median 1, lo mismo que todo $[0, 1]$.

El primero en considerar qué conjuntos A son medibles y dar una definición de su medida fue en 1887 G. PEANO (1858–1932), el cual consideró la medida $m[A]$ de sus predecesores (que en el caso del plano definía mediante aproximaciones externas de A con polígonos) y a la que llamó *medida exterior* y consideró, para $A \subset R$, con R un rectángulo, la *medida interior* de A como $m[R] - m[R \setminus A]$; definió conjunto medible como aquel cuya medida interna coincide con la externa y demostró que la medida era aditiva. Además explicó la relación existente entre medida e integración, demostrando (ver PESIN, p.38) que una función acotada $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, era Riemann integrable si y sólo si el conjunto E de \mathbb{R}^2 limitado por la gráfica de f y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ era medible, en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = m[E].$$

En 1892 C. JORDAN (1838–1922) dio una definición mas simple utilizando una malla de cuadrados de igual lado, en lugar de polígonos, para aproximar el conjunto.

Sin embargo estas definiciones eran pobres, pues por ejemplo con ellas los racionales ya no eran medibles.

E. BOREL (1871–1956) dio, en su doctorado de 1894, el siguiente paso importante considerando la numerable aditividad para sus medidas. Además dio una definición razonable de conjuntos de medida nula, de hecho mientras que para sus antecesores los racionales de $[0, 1]$ medían 1,

BOREL concluyó que medían menos que $\epsilon \sum (1/n^2)$ —y por tanto cero—, considerando para cada $r_n \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ un segmento de longitud ϵ/n^2 , con $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño.

Se sabía desde CANTOR que todo abierto $A \subset \mathbb{R}$ era unión, $A = \cup I_n$, a lo sumo numerable de intervalos abiertos I_n disjuntos. BOREL define su medida como la serie $m[A] = \sum m[I_n]$ y describe la clase de los conjuntos (ahora llamados *Borelianos*) que pueden obtenerse a partir de los abiertos, mediante iteraciones en las que se hacen uniones ó diferencias $A \setminus B$ numerables de conjuntos de la clase, e indica que para estos conjuntos puede definirse una medida que es *numerablemente aditiva* (i.e. la medida de una unión numerable y disjunta de conjuntos medibles es la suma de sus medidas). La numerable aditividad de BOREL frente a la finita aditividad de PEANO–JORDAN fue una propiedad básica que permitió obtener los resultados fundamentales en la teoría de integración abstracta, teoría que desarrolló fundamentalmente H. LEBESGUE (1875–1941) a partir de su tesis de 1902. La numerable aditividad y la integración están muy relacionadas, de hecho la originalidad de LEBESGUE no reside tanto en haber extendido la integral de Riemann, como en su descubrimiento —obtenido independientemente por W.H. YOUNG para funciones semicontinuas— del teorema fundamental sobre el paso al límite de la integral, que obtiene como consecuencia de ser la medida numerablemente aditiva.

1.2. σ –álgebras de conjuntos

1.2.1. Anillos, Álgebras y σ –álgebras.

Entre las actividades características de la ciencia destaca la observación de magnitudes —es decir de las propiedades físicas susceptibles de ser medibles—, y su medición. En la lección siguiente definiremos el concepto general de *medida*, que engloba términos como: *longitud*, *área*, *volumen*, *probabilidad* ó *carga* y en esta primera nos fijaremos de forma muy general en la colección de los objetos o sucesos a medir. Uno podría

pensar que podemos medir el volumen de cualquier subconjunto del espacio tridimensional, pero no es así. Es por ello que debemos aclarar las propiedades que deben tener esos subconjuntos que queremos medir. Para ello consideraremos un conjunto arbitrario Ω del que queremos *medir* (en algún sentido) algunos de sus subconjuntos, daremos la estructura que tiene esa colección y estudiaremos sus propiedades y consecuencias básicas.

Definición. Llamaremos *anillo* en Ω , a una colección no vacía $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, para la que:

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A},$$

lo cual implica que $A \cap B \in \mathcal{A}$ (ver el ejercicio 10.11.2, pág.409). Observemos que $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{A}$, pero Ω no está necesariamente en \mathcal{A} . Llamaremos *álgebra* a un anillo \mathcal{A} para el que $\Omega \in \mathcal{A}$ y por tanto cerrada por paso al complementario y por uniones o intersecciones finitas. Llamaremos *σ -álgebra* a un álgebra \mathcal{A} cerrada para uniones numerables, por lo tanto con las siguientes propiedades:

- a) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- b) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
- c) Si $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Se sigue de forma inmediata que un álgebra y un anillo son cerrados para intersecciones finitas y una σ -álgebra para intersecciones numerables.

Ejemplo 1.2.1 $\mathcal{P}(\Omega)$ es la mayor σ -álgebra de Ω .

Ejemplo 1.2.2 $\{\emptyset, \Omega\}$ es la menor σ -álgebra de Ω .

Ejemplo 1.2.3 Sea Ω con infinitos elementos (numerable o no) y consideremos la colección \mathcal{A} de todos los subconjuntos $A \subset \Omega$, tales que A ó A^c sea numerable. Entonces \mathcal{A} es σ -álgebra de Ω .

Ejemplo 1.2.4 Sea Ω con infinitos elementos y consideremos la colección \mathcal{A} de todos los subconjuntos A de Ω , tales que A ó A^c sea finito. Entonces \mathcal{A} es álgebra pero no σ -álgebra de Ω .

Ejemplo 1.2.5 Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y \mathcal{A} la colección de todas las uniones finitas y disjuntas de los semiintervalos¹ acotados $(a, b]$, con $-\infty < a \leq b < \infty$. Entonces \mathcal{A} es anillo pero no álgebra ni σ -álgebra.

¹Para $a = b$, entendemos $(a, a] = \emptyset$

Ejemplo 1.2.6 Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y \mathcal{A} la colección de todas las uniones finitas y disjuntas de intervalos del tipo $(a, b]$ ó (a, ∞) , con $-\infty \leq a \leq b < \infty$. Entonces \mathcal{A} es álgebra pero no σ -álgebra.

Definición. Llamaremos *espacio medible* al par (Ω, \mathcal{A}) , donde Ω es un conjunto y \mathcal{A} es una σ -álgebra de Ω y *conjuntos medibles* a los elementos de \mathcal{A} .

Definición. Diremos que una aplicación entre espacios medibles,

$$F: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2),$$

es una *aplicación medible*, si $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ para todo $B \in \mathcal{A}_2$, es decir² $F^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.

Nota 1.2.7 Es obvio que la intersección arbitraria de σ -álgebras en Ω es una σ -álgebra, esto justifica la siguiente definición.

Definición. Si \mathcal{C} es una familia de subconjuntos de Ω , denotaremos con $\sigma(\mathcal{C})$ la mínima σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} , que por la nota anterior existe y es la intersección de todas las σ álgebras que la contienen (observemos que al menos hay una, $\mathcal{P}(\Omega)$). Del mismo modo se tiene la existencia de la mínima álgebra que contiene a la familia, que denotamos $\alpha(\mathcal{C})$.

Nota 1.2.8 Si hay confusión y necesitamos hacer referencia al conjunto Ω denotaremos las familias de conjuntos anteriores: $\sigma_\Omega(\mathcal{C})$, $\alpha_\Omega(\mathcal{C})$.

1.2.2. σ -álgebra de Bórel.

Un caso particularmente importante de espacio medible se tiene cuando (Ω, \mathcal{T}) es un espacio topológico. Recordemos que $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una *topología* si verifica:

- 1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{T}$.
- 2) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$.
- 3) Dada una colección arbitraria de $A_i \in \mathcal{T}$, su unión $\bigcup_i A_i \in \mathcal{T}$.

Definición. Dado un espacio topológico (Ω, \mathcal{T}) , llamaremos *σ -álgebra de Borel* a la generada por sus abiertos, que denotaremos $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\Omega)$ y a sus elementos los llamamos *borelianos*.

²Notación: Si $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$, denotamos

$$F^{-1}(\mathcal{C}) = \{F^{-1}(B) : B \in \mathcal{C}\}.$$

Ejemplo 1.2.9 Los abiertos y cerrados son borelianos y si el espacio es Hausdorff también los compactos (pues son cerrados).

En el siguiente resultado vamos a utilizar el *principio de los buenos conjuntos*.

Lema 1.2.10 Para cada $A \subset \Omega$ se tiene que³

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A = \sigma_A(\mathcal{C} \cap A).$$

Demostración. Se demuestra fácilmente que $\sigma(\mathcal{C}) \cap A$ es una σ -álgebra de A que contiene a $\mathcal{C} \cap A$, por lo tanto

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A \supset \sigma_A(\mathcal{C} \cap A),$$

y para demostrar la otra inclusión consideramos la familia de “buenos conjuntos”

$$\mathcal{A} = \{C \in \sigma(\mathcal{C}) : C \cap A \in \sigma_A(\mathcal{C} \cap A)\},$$

la cual es σ -álgebra y satisface $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$, por tanto $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ y se tiene el resultado. ■

Proposición 1.2.11 Si \mathcal{X} es un espacio topológico e $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ es un subespacio suyo, entonces

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}.$$

Demostración. Por ser $\mathcal{T}(\mathcal{Y}) = \mathcal{T}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y}$ y por el Lema anterior (1.2.10). ■

Definición. Llamamos *base* de un espacio topológico a una colección de abiertos tal que todo abierto del espacio es unión de abiertos de la base.

Proposición 1.2.12 Si un espacio topológico tiene una base numerable de abiertos⁴ \mathcal{N} , entonces $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{N})$.

Demostración. Obvio pues $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{N})$, por tanto $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\Omega)$. ■

³Notación: Dada una familia de conjuntos \mathcal{C} en Ω y un $A \subset \Omega$, consideramos la familia en A

$$\mathcal{C} \cap A = \{C \cap A : C \in \mathcal{C}\}.$$

⁴Esto suele nombrarse diciendo que el espacio satisface el *segundo axioma de numerabilidad*.

Ejemplo 1.2.13 En $\Omega = \mathbb{R}$ con la topología usual $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, de las uniones arbitrarias de intervalos abiertos (a, b) , podemos tomar como $\mathcal{N} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$, para el que $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como consecuencia veamos que

$$\mathcal{C} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$$

(en los ejercicios se verán más familias generadoras).

Demostración. Por una parte $(a, b] = (a, \infty) \cap (b, \infty)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y por otra

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n} \right],$$

por lo que $\mathcal{N} \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y el resultado se sigue. ■

Ejemplo 1.2.14 En $\Omega = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, definimos la topología $\overline{\mathcal{T}}$, formada por las uniones arbitrarias de intervalos del tipo

$$[-\infty, b), \quad (a, b), \quad (a, \infty],$$

con $a \leq b \in \mathbb{R}$, para la que $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \overline{\mathcal{T}} \cap \mathbb{R}$. Esta topología tiene una base numerable $\mathcal{N}_{\overline{\mathbb{R}}}$ formada por los mismos intervalos pero con $a, b \in \mathbb{Q}$. Observemos que por (1.2.11) se tiene

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R},$$

por lo tanto como $\mathbb{R}, \{-\infty\}, \{\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, se tiene que

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{E, E \cup \{\infty\}, E \cup \{-\infty\}, E \cup \{\infty, -\infty\} : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Ejemplo 1.2.15 Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, podemos considerar la base numerable \mathcal{N} formada por los rectángulos abiertos (a, b) con $a, b \in \mathbb{Q}^n$, donde para $a = (a_i), b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ utilizamos la notación

$$(a, b) = \prod (a_i, b_i) = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i\},$$

$$(a, b] = \prod (a_i, b_i] = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i < x_i \leq b_i\}, \quad \text{etc...}$$

Proposición 1.2.16 La σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ está generada por cualquiera de las clases:

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(a, b], a, b \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \{H = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \leq b\}, \text{ para algún } 1 \leq i \leq n \text{ y } b \in \mathbb{R}\}.$$

Demostración. Por una parte todo abierto es unión numerable de rectángulos abiertos con extremos en \mathbb{Q}^n , por otra parte observemos que

$$(a, b] = \{x_1 \leq a_1\}^c \cap \{x_1 \leq b_1\} \cap \cdots \cap \{x_n \leq a_n\}^c \cap \{x_n \leq b_n\},$$

por tanto se tienen la primera y tercera inclusiones (las otras son obvias)

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \quad \blacksquare$$

1.2.3. El conjunto de Cantor.

Hay un compacto K en \mathbb{R} , que por sus peculiares propiedades resulta muy útil a la hora de construir ejemplos o contraejemplos en Teoría de la medida. Consideremos la sucesión de compactos de \mathbb{R} :



Figura 1.1. Conjunto de Cantor $K = \bigcap K_n$

$$\begin{aligned} K_0 &= [0, 1] \supset K_1 = \\ K_1 &= K_0 \cap (1/3, 2/3)^c = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \supset K_2 = \\ K_2 &= K_1 \cap (1/9, 2/9)^c \cap (7/9, 8/9)^c = \\ &= [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1] \supset K_3 = \\ K_3 &\supset \cdots \supset K_n \supset \cdots \supset \bigcap K_n = K, \end{aligned}$$

observemos que cada K_n es unión de 2^n intervalos disjuntos de longitud $(1/3^n)$.

Definición. Llamaremos *conjunto de Cantor* a $K = \bigcap K_n$.

Lema 1.2.17 Sea \mathcal{X} un espacio topológico y $A \subset \mathcal{X}$, entonces

$$(\overset{\circ}{A})^c = \overline{A^c}.$$

Demostración. Como $\overline{A^c}$ es abierto y $(\overset{\circ}{A})^c$ es cerrado, se tiene

$$\begin{aligned} A^c \subset \overline{A^c} &\Rightarrow \overline{A^c} \subset A \Rightarrow \overline{A^c} \subset \overset{\circ}{A} \\ \overset{\circ}{A} \subset A &\Rightarrow A^c \subset (\overset{\circ}{A})^c \Rightarrow \overline{A^c} \subset (\overset{\circ}{A})^c. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.2.18 *El conjunto de Cantor es compacto, perfecto (cada $x \in K$ es límite de puntos $x_n \in K \setminus \{x\}$), es denso en ningún lado ($\overset{\circ}{K} = \emptyset$), su complementario en $[0, 1]$ es denso en $[0, 1]$, tiene la cardinalidad del continuo y tiene medida de Lebesgue nula.*

Demostración. Es compacto por ser cerrado de $[0, 1]$ que es compacto. Cada K_n es unión de 2^n intervalos disjuntos de longitud $(1/3^n)$, cuyos extremos están en K , pues cada extremo de un intervalo de K_n es extremo de un intervalo de K_{n+1} . Ahora dado $x \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, como $x \in K_n$, uno de sus 2^n intervalos de longitud $(1/3^n)$ lo contiene y podemos elegir x_n como uno de los extremos de dicho intervalo (que sea distinto de x), como $|x - x_n| \leq 3^{-n}$ se sigue que K es perfecto.

Que $m(K) = 0$ se sigue de que

$$0 \leq m(K) \leq m(K_n) = \frac{2^n}{3^n} \rightarrow 0,$$

lo cual a su vez implica que $\overset{\circ}{K} = \emptyset$, pues si existe un intervalo abierto $(a, b) \subset K$, tendríamos que $0 < m(a, b) = b - a \leq m(K)$, lo cual es absurdo, por tanto en $\mathcal{X} = [0, 1]$, el interior de K también es el \emptyset y esto equivale por el Lema (1.2.17), a que $[0, 1] \setminus K = [0, 1]$, es decir $[0, 1] \setminus K$ es denso en $[0, 1]$.

Por último, que tiene la cardinalidad del continuo se ve considerando la biyección entre el conjunto de sucesiones de ceros y unos ($\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$) —del que quitamos las sucesiones que a partir de un término son 1— y el conjunto $[0, 1)$ (que tiene la cardinalidad del continuo), mediante la aplicación

$$(x_i) \longrightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i},$$

por lo que $0, x_1x_2x_3 \dots$ es la expresión binaria de x . Ahora consideramos la biyección que a cada tal sucesión le hace corresponder el punto de $K - \{1\}$

$$(x_i) \longrightarrow y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i},$$

y el resultado se sigue, pues observemos que $0, y_1 y_2 y_3 \dots$ es la expresión ternaria de y , la cual corresponde a un punto de K si y sólo si los $y_i = 0$ ó $y_i = 2$. ■

1.2.4. Clases monótonas

Definición. Llamaremos *límite superior* y *límite inferior* de una sucesión de conjuntos A_n respectivamente a los conjuntos

$$\text{lím sup } A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \quad \text{lím inf } A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n,$$

y denotaremos con

$$\begin{aligned} A_n \uparrow A &\Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \bigcup A_n = A. \\ A_n \downarrow A &\Leftrightarrow A_n \supset A_{n+1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \bigcap A_n = A. \end{aligned}$$

Definición. Una *clase monótona* \mathcal{C} de Ω es una familia de subconjuntos de Ω satisfaciendo las condiciones:

- a) Si $A_n \in \mathcal{C}$ y $A_n \uparrow A$, entonces $A \in \mathcal{C}$.
- b) Si $A_n \in \mathcal{C}$ y $A_n \downarrow A$, entonces $A \in \mathcal{C}$.

Ejemplo 1.2.19 Sea $\Omega = \mathbb{R}$, la colección de todos los intervalos es clase monótona y no es σ -álgebra.

A continuación damos unas simples propiedades de las estructuras conjuntistas definidas.

Proposición 1.2.20 Una familia \mathcal{A} de Ω es una σ -álgebra si y sólo si es álgebra y clase monótona.

Demostración. Hágase como ejercicio. Obsérvese que toda unión numerable $\bigcup A_i$, se puede poner como unión de una sucesión creciente de conjuntos del álgebra

$$B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i. \quad \blacksquare$$

También se tiene que la intersección arbitraria de clases monótonas es clase monótona y por tanto dada una clase \mathcal{C} de subconjuntos de Ω ,

existe la mínima clase monótona que la contiene, que denotamos con $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Para la que se tiene que si $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ entonces

$$\alpha(\mathcal{C}) \subset \alpha(\mathcal{D}), \quad \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D}) \quad \text{y} \quad \mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{D}).$$

El siguiente resultado es importante no sólo por lo que dice sino porque nos ofrece un buen ejemplo en el que se utiliza (tres veces) una técnica común en Teoría de la medida, el *principio de los buenos conjuntos*.

Lema 1.2.21 *Si \mathcal{A} es álgebra, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es álgebra.*

Demostración. 1.- $\Omega \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ es obvio pues $\Omega \in \mathcal{A}$.

2.- $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, pues la clase $\{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ es monótona⁵ y contiene al álgebra \mathcal{A} , por tanto es $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

3.- En primer lugar veamos (i) que si $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y $B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, para ello observemos que fijado $B \in \mathcal{A}$, la clase

$$\{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\},$$

es monótona y contiene a \mathcal{A} , por tanto es $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Ahora veamos que si $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, entonces $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, para ello fijemos A y consideremos

$$\{B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

que es clase monótona y por (i) contiene a \mathcal{A} , por tanto es $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. ■

Teorema de la clase monótona 1.2.22 *Si \mathcal{A} es álgebra entonces*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Demostración. Por (1.2.20) $\sigma(\mathcal{A})$ es clase monótona, por tanto $\sigma(\mathcal{A}) \supset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Por el lema anterior $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es álgebra y por (1.2.20) σ -álgebra, por tanto $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. ■

⁵Observemos que la demostración no se hace para un elemento A , sino para todos los elementos a la vez, viendo que tienen estructura de clase monótona. En esto consiste el principio de los buenos conjuntos.

Ejercicios

Ejercicio 1.2.1 Demostrar que una clase no vacía \mathcal{A} es un álgebra en Ω si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:

- i) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
- ii) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 1.2.2 Dada una aplicación $F: \Omega \rightarrow \Omega'$, demostrar las siguientes propiedades:

- (i) $F^{-1}(\cup B_i) = \cup F^{-1}(B_i)$, $F^{-1}(\cap B_i) = \cap F^{-1}(B_i)$, $F^{-1}(B^c) = [F^{-1}(B)]^c$,
- (ii) $F(\cup A_i) = \cup F(A_i)$, $F(\cap A_i) \subset \cap F(A_i)$,
- (iii) Si F es sobre $F(A)^c \subset F(A^c)$.
- (iv) Si F es inyectiva $F(A)^c \supset F(A^c)$ y $F(A)^c \cap F(\Omega) = F(A^c)$.

Ejercicio 1.2.3 Dada una aplicación $F: \Omega \rightarrow \Omega'$, demostrar que:

- (a) Si \mathcal{A} es una σ -álgebra de Ω , $\mathcal{A}' = \{B \subset \Omega' : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ lo es de Ω' .
- (b) Si \mathcal{A}' es una σ -álgebra de Ω' , $\mathcal{A} = F^{-1}[\mathcal{A}'] = \{F^{-1}(B) \subset \Omega : B \in \mathcal{A}'\}$ lo es de Ω .
- (c) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega')$, $\sigma[F^{-1}(\mathcal{C})] = F^{-1}[\sigma(\mathcal{C})]$.
- (d) Demostrar que si (Ω, \mathcal{T}) y (Ω', \mathcal{T}') son espacios topológicos y F es continua, entonces $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega)$, para todo $B \in \mathcal{B}(\Omega')$. (Sol.)

Ejercicio 1.2.4 Consideremos las siguientes extensiones de una familia \mathcal{C} de subconjuntos de Ω :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{C} \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_i \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : A_i \in \mathcal{C}_2, n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Demostrar que $\mathcal{C}_3 = \alpha(\mathcal{C})$. (Sol.)

Ejercicio 1.2.5 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Demostrar que la familia de los productos de medibles,

$$\mathcal{R} = \{A_1 \times \cdots \times A_n \subset \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{A}_i\},$$

es una clase elemental (es decir que satisface las condiciones: (i) $\emptyset \in \mathcal{C}$, (ii) si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{C}$ y (iii) si $A \in \mathcal{C}$, A^c es unión finita disjunta de elementos de \mathcal{C}). (Sol.)

Ejercicio 1.2.6 Demostrar que si \mathcal{C} es una clase elemental, la familia de uniones finitas disjuntas de conjuntos de \mathcal{C} es el álgebra $\alpha(\mathcal{C})$. (Sol.)

Ejercicio 1.2.7 Demostrar que la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se genera por las familias:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_2 &= \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_4 &= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{C}_5 &= \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}, & \mathcal{C}_6 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.8 Demostrar que la σ -álgebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ se genera por la familia $\mathcal{C} = \{(a, b] : a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$.

Ejercicio 1.2.9 Demostrar: (a) $\emptyset \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \Omega$.
(b) Si $A_n \uparrow A$ (ó $A_n \downarrow A$), entonces $\limsup A_n = \liminf A_n = A$.

Ejercicio 1.2.10 ¿Puede una σ -álgebra infinita contener sólo una colección numerable de elementos? (Sol.)

1.3. Medida

1.3.1. Definición y propiedades

Definición. Por una *medida*⁶, en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) —con \mathcal{A} álgebra ó anillo—, entenderemos una función no negativa

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty],$$

que satisfice:

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$.
(b) Es *numerablemente aditiva*, es decir si dados $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ disjuntos —es decir tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ — y cuya unión esté en \mathcal{A} (esto es automático si \mathcal{A} es σ -álgebra), entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

⁶Algunos autores la llaman *medida positiva*.

Si la condición (b) sólo es válida para colecciones finitas de conjuntos disjuntos, A_1, \dots, A_n , diremos que la medida es *aditiva*.

Diremos que una medida μ es σ -finita si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos $A_n \in \mathcal{A}$, tal que $\cup A_n = \Omega$ y cada $\mu(A_n) < \infty$. Llamaremos *probabilidad* a toda medida verificando $\mu(\Omega) = 1$.

Definición. Llamaremos *espacio de medida* a toda terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, donde μ es una medida sobre la σ -álgebra⁷ \mathcal{A} de Ω .

Definición. Diremos que un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es *completo* si para cada $B \subset A$, con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, también es $B \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.3.1 La medida delta de Dirac. Consideremos $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $x \in \Omega$ y para cada $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$, si $x \notin E$ y $\mu(E) = 1$, si $x \in E$. Es la **probabilidad concentrada en x** , ó *delta de Dirac en x* , suele denotarse con δ_x .

Ejemplo 1.3.2 La medida de contar. Consideremos $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, con los puntos x medibles, $\{x\} \in \mathcal{A}$ y $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) = n$ si A es finito y tiene $n \in \mathbb{N}$ elementos y $\mu(A) = \infty$ en cualquier otro caso.

Ejemplo 1.3.3 Consideremos $\Omega = \mathbb{N}$, y una sucesión de números reales no negativos $p_n \geq 0$. Para cada $A \subset \mathbb{N}$ definimos

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} p_n,$$

la cual es una medida en $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, para la que $\mu(\{n\}) = p_n$. Si la $\sum p_n = 1$ entonces es una probabilidad y si $p_n = 1$ para cada n , μ es la medida de contar en los naturales.

Otros ejemplos de medidas, de las que estudiaremos algunas a lo largo del curso, son:

Ejemplo 1.3.4 La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Demostraremos la existencia de una única medida, definida en los borelianos de \mathbb{R}^n , invariante por traslaciones y que en el cubo unidad vale 1.

Ejemplo 1.3.5 Las medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.3.6 La medida de Haar en un grupo localmente compacto⁸, que generaliza a la de Lebesgue en el sentido de que son invariantes

⁷En algunas ocasiones \mathcal{A} es sólo álgebra ó anillo, en cuyo caso lo especificaremos.

⁸Ver la definición de espacio topológico localmente compacto en la pág.325.

por traslaciones en el grupo (ver COHN; FOLLAND).

Ejemplo 1.3.7 La medida asociada a una variedad Riemanniana.

Ejemplo 1.3.8 Las medidas de Hausdorff en un espacio métrico. Más generales que la de Lebesgue nos permitirán definir el área de una superficie del espacio.

Proposición 1.3.9 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, entonces para $A, B \in \mathcal{A}$:

- (a) $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$.
- (b) Si $A \subset B$ entonces $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.
- (c) Si $A \subset B$ y $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(B) = \infty$.
- (d) Si $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (e) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (f) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
- (g) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

Demostración. (e) Como $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$, tendremos que

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B) \\ &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B). \end{aligned}$$

(g) Por inducción y usando (f). ■

Nota 1.3.10 Los apartados anteriores son válidos si \mathcal{A} es anillo y μ es aditiva.

Una de las propiedades básicas y más útiles de las medidas consecuencia de ser numerablemente aditivas, es la de la “*continuidad secuencial*”.

Proposición 1.3.11 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $A_n \in \mathcal{A}$ una sucesión, entonces:

- (a) Si $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.
- (b) Si $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Demostración. (a) Consideremos los conjuntos disjuntos

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1} = A_n \cap A_{n-1}^c,$$

para los que por inducción se tiene $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$ y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, por tanto

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \mu(B_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{m=1}^n B_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(b) Como $A_n \subset A_1$, tenemos por (1.3.9)–(b) que

$$\mu(A_n) + \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) = \mu(A) + \mu(A_1 \setminus A),$$

y todos los términos son finitos por serlo la suma. Ahora como $A_n \downarrow A$, entonces $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$ y por (a) $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$. ■

Por último se tiene que si de una medida μ sólo sabemos que es aditiva, el siguiente resultado nos dice cuando es numerablemente aditiva.

Teorema 1.3.12 *Una medida aditiva μ sobre un anillo \mathcal{A} es numerablemente aditiva, si se verifica una de las dos condiciones:*

(a) μ es continua superiormente, es decir dados $A_n, A \in \mathcal{A}$ con $A_n \uparrow A$, $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

(b) μ es continua inferiormente en el \emptyset , es decir si dados $A_n \in \mathcal{A}$, con $A_n \downarrow \emptyset$, se tiene $\mu(A_n) \rightarrow 0$.

Demostración. Sea $A_n \in \mathcal{A}$ una sucesión de conjuntos disjuntos tales que $A = \bigcup A_n \in \mathcal{A}$, entonces para $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ tendremos que $B_n \uparrow A$, por tanto en el caso (a)

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \mu(B_n) \rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i),$$

y el resultado se sigue. Ahora en el caso (b) como $A \setminus B_n \downarrow A \setminus A = \emptyset$, tendremos que $\mu(A \setminus B_n) \rightarrow 0$, y como

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B_n) + \mu(B_n),$$

el resultado se sigue. ■

Ejercicios

Ejercicio 1.3.1 Consideremos $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, el espacio de medida de contar en los naturales. Encontrar una sucesión $A_n \downarrow \emptyset$ para la que no se verifique $\mu(A_n) \rightarrow \mu(\emptyset) = 0$.

Ejercicio 1.3.2 Consideremos $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, para $\mu(A) = 0$ si A es finito y $\mu(A) = \infty$ en caso contrario.

(a) Demostrar que μ es aditiva pero no numerablemente aditiva.

(b) Encontrar una sucesión $A_n \uparrow A$ para la que no se verifique $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Ejercicio 1.3.3 Dada una medida μ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 1.3.4 Sea $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, aditiva en un álgebra \mathcal{A} . Dada una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos cuya unión está en \mathcal{A} , demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ejercicio 1.3.5 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que:

i) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.

ii) Que si $\mu(\cup A_n) < \infty$, entonces $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$. (Sol.)

Ejercicio 1.3.6 Demostrar el Lema de Borel–Cantelli: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $C_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup C_n) = 0. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 1.3.7 Dada una medida finita μ sobre una σ -álgebra \mathcal{A} y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, demostrar que $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Ejercicio 1.3.8 Dada una sucesión doble $x_{nm} \in (-\infty, \infty]$, tal que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $x_{nm} \leq x_{n+1,m}$ y $x_{nm} \leq x_{n,m+1}$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 1.3.9 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y una sucesión de medidas en él μ_n . Demostrar: a) Si $\mu_n \leq \mu_{n+1}$, entonces $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$ define una medida en el espacio. b) Sean como sean las μ_n , $\mu(A) = \sum \mu_n(A)$, define una medida en el espacio.

Ejercicio 1.3.10 Dado un conjunto Ω no numerable, demostrar que

$$\mathcal{A} = \{E \subset \Omega : E \text{ ó } E^c \text{ es numerable}\},$$

es σ -álgebra y en ella $\mu(E) = 0$ si E es numerable y $\mu(E) = 1$, si E^c es numerable, es una medida. (Sol.)

Ejercicio 1.3.11 Dado un espacio de medida semifinita $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, es decir tal que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$, demostrar que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ y todo $r > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $r < \mu(F) < \infty$. (Sol.)

Ejercicio 1.3.12 Demostrar que toda medida σ -finita es semifinita. Dar un contraejemplo para el recíproco.

Ejercicio 1.3.13 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, definimos $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, de la siguiente manera

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A \text{ y } \mu(B) < \infty\},$$

demostrar que:

- λ es una medida semifinita.
- Que si μ es semifinita entonces $\lambda = \mu$. (Sol.)

1.4. Extensión de medidas

1.4.1. Medidas exteriores

A menudo nos encontraremos ante la situación de tener definida una medida μ sobre una clase reducida de conjuntos y quererla extender a una clase más amplia. Tomemos por ejemplo las medidas de la forma

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a),$$

sobre la clase \mathcal{C} de los semiintervalos acotados $(a, b] \subset \mathbb{R}$ cerrados a la derecha. Donde F es una función real, monótona creciente y continua a la derecha. En particular para $F(x) = x$ tendríamos $\mu(a, b] = b - a$, la longitud del intervalo. La cuestión es: ¿Podremos extender μ al anillo \mathcal{A}_0 , de las uniones finitas de elementos de \mathcal{C} , de manera que sea una medida?. No es difícil ver que sí, lo veremos en (1.5.4) de la página 29. Lo que no es tan fácil de ver es que también puede extenderse de un único modo a la σ -álgebra $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. El objetivo de esta lección consiste en demostrar que dada una medida

$$\mu_0 : \mathcal{A}_0 \longrightarrow [0, \infty]$$

definida en un anillo \mathcal{A}_0 de Ω , existe una σ -álgebra \mathcal{A} que contiene a \mathcal{A}_0 y una medida μ sobre \mathcal{A} , que coincide con μ_0 en \mathcal{A}_0 y que además es única si μ_0 es σ -finita en \mathcal{A}_0 . El procedimiento que seguiremos se basa en la noción de medida exterior.

Definición. Una *medida exterior* en Ω es una función de conjunto

$$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$$

verificando las siguientes condiciones:

- a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- b) Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- c) Si B_n es una sucesión de subconjuntos de Ω , entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

Ejemplo 1.4.1 Consideremos un conjunto Ω . La función $\mu^*(\emptyset) = 0$ y $\mu^*(A) = 1$ en cualquier otro caso, define una medida exterior en $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ejemplo 1.4.2 Consideremos un conjunto infinito Ω . La función $\mu^*(A) = 0$ si A es numerable y $\mu^*(A) = 1$ en cualquier otro caso, define una medida exterior en $\mathcal{P}(\Omega)$.

A continuación construimos una gran cantidad de medidas exteriores.

Proposición 1.4.3 Sea \mathcal{C} una colección de subconjuntos de Ω y $\rho: \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una función cualquiera, tales que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\rho(\emptyset) = 0$. Para cada $B \subset \Omega$,

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : A_n \in \mathcal{C}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\},$$

define⁹ una medida exterior (que llamaremos la medida exterior generada por ρ), para la que $\mu^*(A) \leq \rho(A)$, para $A \in \mathcal{C}$. Además si $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ es un anillo y ρ una medida, μ^* coincide con ρ sobre \mathcal{A}_0 .

Demostración. Las dos primeras propiedades son inmediatas. Veamos la tercera, para ello sea B_n una sucesión de subconjuntos de Ω . Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) = \infty$, la desigualdad es obvia, en caso contrario $\mu^*(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \infty$, para todo n . Tomemos ahora un $\epsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ elijamos una sucesión $A_{nm} \in \mathcal{C}$ tal que

$$B_n \subset \bigcup_m A_{nm}, \quad \text{y} \quad \sum_m \rho(A_{nm}) \leq \mu^*(B_n) + \frac{\epsilon}{2^n},$$

entonces los A_{nm} son una colección numerable de conjuntos de \mathcal{C} , cuya unión contiene la $\bigcup B_n$, por tanto

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m \rho(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \epsilon,$$

y el resultado se sigue. Ahora que $\mu^*(B) \leq \rho(B)$, para $B \in \mathcal{C}$ se sigue de la definición.

⁹Con el convenio $\inf \emptyset = \infty$, con el que se verifica que si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, entonces $\inf B \leq \inf A$, —incluido $A = \emptyset$ —.

Por último supongamos que $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ es anillo y veamos que $\mu^*(B) = \rho(B)$, para cada $B \in \mathcal{A}_0$. Para ver la desigualdad que nos falta consideremos una sucesión $A_n \in \mathcal{A}_0$ tales que $B \subset \cup A_n$, entonces $B = \cup(B \cap A_n)$ y como ρ es una medida en \mathcal{A}_0 tendremos

$$\rho(B) \leq \sum_n \rho(B \cap A_n) \leq \sum_n \rho(A_n),$$

y por tanto $\rho(B) \leq \mu^*(B)$. ■

Ejemplo 1.4.4 Medida exterior de Lebesgue. En \mathbb{R} , sea $\mathcal{C} = \{(a, b] : a \leq b \in \mathbb{R}\}$ y $\rho(a, b] = b - a$, entonces para $A \subset \mathbb{R}$

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n \leq b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

es una medida exterior (en el ejercicio (1.4.1) se dan otras clases con las que también se genera m^*).

Ejemplo 1.4.5 Medida exterior de Hausdorff. Sea (Ω, d) un *espacio métrico* (i.e. un conjunto Ω , con una aplicación $d: \Omega^2 \rightarrow [0, \infty)$, llamada *distancia*, tal que $d(x, y) = 0$ sii $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ y $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$). Llamamos *diámetro* de un $B \subset \Omega$ al valor¹⁰

$$d(B) = \sup \{d(x, y) : x, y \in B\}.$$

Ahora para cada $p > 0$ y $\delta > 0$ definimos la función de conjunto que para cada $A \subset \Omega$ vale,

$$H_{p,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d(B_n)^p : A \subset \cup B_n, d(B_n) \leq \delta \right\},$$

(con el convenio $\inf \emptyset = \infty$), las cuales son medidas exteriores por (1.4.3), que verifican

$$\delta \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad H_{p,\delta}(A) \geq H_{p,\epsilon}(A),$$

y por tanto existe el límite, que también es medida exterior (ver ejercicio (1.3.8), pág.19)

$$H_p(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{p,\delta}(A),$$

y que llamamos *la medida exterior p -dimensional de Hausdorff*¹¹. Volveremos a las medidas de Hausdorff en las páginas 40 y 210.

¹⁰Con el convenio $\sup \emptyset = 0$, por tanto $d(\emptyset) = 0$.

¹¹Para $p = 0$ también vale la definición pero hay que precisarla. Entendemos que

1.4.2. Teoremas de extensión de medidas

Aunque una medida exterior μ^* tiene la ventaja de estar definida en todo $\mathcal{P}(\Omega)$, tiene el defecto de no ser numerablemente aditiva, ni siquiera aditiva. Por ello trataremos de encontrar una σ -álgebra, sobre la que sí sea numerablemente aditiva. Veremos que tal σ -álgebra existe y que su construcción se basa en una simple aunque notable condición debida a CARATHEODORY, (aunque el germen de la definición se encuentra en PEANO, ver la introducción).

Definición. Sea μ^* una medida exterior en Ω . Diremos que $E \subset \Omega$ es μ^* -medible si para todo $A \subset \Omega$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

y denotaremos con \mathcal{A}_* la familia de los conjuntos μ^* -medibles.

Nota 1.4.6 Se sigue de la definición que $E \in \mathcal{A}_*$ sii $E^c \in \mathcal{A}_*$ y que si $\mu^*(E) = 0$ entonces $E \in \mathcal{A}_*$, pues

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A),$$

de donde se sigue que $\emptyset \in \mathcal{A}_*$ y por tanto $\Omega \in \mathcal{A}_*$. Además se seguirá que el espacio de medida (ver el siguiente resultado) $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es completo.

Teorema de extensión de Caratheodory 1.4.7 (1) Sea μ^* una medida exterior en Ω , entonces \mathcal{A}_* es una σ -álgebra, la restricción a ella de μ^* es una medida y $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es completo. (2) Si además μ^* es la medida exterior generada por una medida ρ de un anillo \mathcal{A}_0 de Ω , entonces es

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_* \quad \text{y} \quad \rho = \mu^* \quad \text{en} \quad \mathcal{A}_0.$$

Demostración. (1) Veamos en primer lugar que \mathcal{A}_* es un álgebra. Por la Nota anterior $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}_*$ y si $E \in \mathcal{A}_*$ entonces $E^c \in \mathcal{A}_*$. Consideremos $B_1, B_2 \in \mathcal{A}_*$ y demostremos que $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{A}_*$, para ello sea

$d(\emptyset)^p = 0$, para todo $p \geq 0$ y $d(A)^0 = 1$, para todo $A \neq \emptyset$, en particular debemos entender que $d(\{x\})^0 = 1$. Con estos convenios se tiene que para $p = 0$, H_p es la medida de contar.

$A \subset \Omega$, entonces usando la medibilidad de los B_i

$$\begin{aligned}
 & \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2)] + \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2)^c] = \\
 & = \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1] + \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c] + \\
 & \quad + \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2)^c] \\
 & = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*[A \cap B_2 \cap B_1^c] + \mu^*[A \cap B_1^c \cap B_2^c] \\
 & = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c) = \mu^*(A).
 \end{aligned}$$

Ahora bien toda unión numerable de conjuntos E_n del álgebra \mathcal{A}_* se puede poner como unión numerable disjunta de los conjuntos $B_1 = E_1$ y $B_n = E_n \cap E_{n-1}^c \cap \cdots \cap E_1^c$, del álgebra y para cada $A \subset \Omega$

$$\begin{aligned}
 \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c) \\
 &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\
 &= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_2) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*[A \cap (\bigcap_{i=1}^n B_i^c)] \quad (\text{por ind. en } n) \\
 &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*[A \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c)],
 \end{aligned}$$

y tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \mu^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*[A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c] \\
 &\geq \mu^*[A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)] + \mu^*[A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c] \geq \mu^*(A),
 \end{aligned}$$

por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}_*$ y \mathcal{A}_* es σ -álgebra. Pero además

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*[A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c],$$

y tomando $A = \bigcup B_n$ se sigue la numerable aditividad de μ^* en \mathcal{A}_* , y por tanto es una medida. Que es completo se sigue del Lema.

(2) Supongamos ahora que μ^* es la medida exterior generada por una medida ρ de un anillo \mathcal{A}_0 de Ω . En (1.4.3) vimos que $\rho = \mu^*$ en \mathcal{A}_0 , falta pues ver que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_*$, para ello sea $E \in \mathcal{A}_0$ y $A \subset \Omega$ y veamos que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

para ello tomemos $B_n \in \mathcal{A}_0$, con $A \subset \cup B_n$, ahora como $A \cap E \subset \cup (B_n \cap E)$ y $A \cap E^c \subset \cup (B_n \cap E^c)$, tendremos que

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\leq \sum_n \rho(B_n \cap E) + \sum_n \rho(B_n \cap E^c) = \sum_n \rho(B_n), \end{aligned}$$

y el resultado se sigue tomando el ínfimo de estas sumas. ■

En el caso particular de que ρ sea σ -finita, es decir que exista una sucesión $A_n \in \mathcal{A}_0$, tal que $\Omega = \cup A_n$ y $\rho(A_n) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la extensión de ρ a la σ -álgebra \mathcal{A}_* es única.

Teorema de extensión de Hahn 1.4.8 *Toda medida σ -finita en un anillo \mathcal{A}_0 se extiende de modo único a cada σ -álgebra \mathcal{A} entre \mathcal{A}_0 y \mathcal{A}_* .*

Demostración. Sea μ^* la medida exterior generada por ρ y supongamos que λ es una medida en \mathcal{A} que coincide con ρ en \mathcal{A}_0 . Sea $E \in \mathcal{A}$ y $B_n \in \mathcal{A}_0$ tales que $E \subset \cup B_n$, entonces como $\cup B_n \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(B_n),$$

tendremos que $\lambda(E) \leq \mu^*(E)$. Ahora sean $A_n \in \mathcal{A}_0$, tales que $A_n \uparrow \Omega$ y $\lambda(A_n) = \mu^*(A_n) = \rho(A_n) < \infty$, por tanto como

$$\lambda(E \cap A_n) + \lambda(E^c \cap A_n) = \lambda(A_n) = \mu^*(A_n) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E^c \cap A_n),$$

tendremos que $\lambda(E \cap A_n) = \mu^*(E \cap A_n)$, pero entonces

$$\mu^*(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(E \cap A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E \cap A_n) = \lambda(E). \quad \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 1.4.1 Demostrar que la medida exterior de Lebesgue en \mathbb{R} , se puede definir en vez de con la clase $\mathcal{C} = \{(a, b]\}$, como vimos en el ejemplo (1.4.4), de la página 22, con cualquiera de las clases $\mathcal{C}_1 = \{(a, b)\}$, $\mathcal{C}_2 = \{[a, b]\}$, $\mathcal{C}_3 = \{[a, b)\}$ y con ρ de cualquier intervalo también la diferencia de extremos. (Sol.)

Ejercicio 1.4.2 Sea μ^* una medida exterior en Ω y λ la medida restricción de μ^* a la σ -álgebra \mathcal{A}_* . Demostrar que:

- (a) $\mu^* \leq \lambda^*$.
- (b) Si μ^* es la medida exterior generada por una medida μ en un álgebra \mathcal{A} , entonces $\mu^* = \lambda^*$.
- (c) Encontrar una medida exterior μ^* en $\Omega = \{0, 1\}$, para la que $\mu^* \neq \lambda^*$. (Sol.)

Ejercicio 1.4.3 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Demostrar:

- (a) Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(A \Delta B) = 0$ entonces $\mu(A) = \mu(B)$.
- (b) La relación entre conjuntos medibles $A \simeq B$ si y sólo si $\mu(A \Delta B) = 0$, es de equivalencia.
- (c) En el espacio cociente $\mathcal{X} = \mathcal{A}/\simeq$ la aplicación

$$\rho(A, B) = \mu(A \Delta B),$$

satisface $\rho(A, A^c) = \mu(\Omega)$, por tanto en general $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ toma el valor ∞ , sin embargo define una métrica en el sentido¹² de que verifica las tres propiedades habituales. Demostrar que para la topología natural —en la que las bolas abiertas de radio finito son base—, para cada $A \in \mathcal{X}$, los B que están a distancia finita de A es un abierto y que estos abiertos o coinciden o son disjuntos y descomponen \mathcal{X} en componentes abiertas que sí son espacios métricos y son tales que la aplicación $A \in \mathcal{X} \rightarrow A^c \in \mathcal{X}$ es una isometría que lleva una componente en otra (si $\mu(\Omega) = \infty$) y las aplicaciones de $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$

$$(A, B) \rightarrow A \cup B, \quad (A, B) \rightarrow A \cap B, \quad (A, B) \rightarrow A \Delta B,$$

son continuas.

¹²Observemos que el concepto habitual de métrica exige que $d(x, y) < \infty$, aunque no es esencial.

1.5. Medidas de Lebesgue–Stieltjes

1.5.1. Medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R} .

El teorema de extensión de Caratheodory–Hahn, nos da la posibilidad de construir una amplia clase de medidas en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición. Llamaremos *función de distribución* a toda función

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

monótona creciente y continua a la derecha. Llamaremos *medida de Lebesgue–Stieltjes* en \mathbb{R} , a toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finita en cada compacto (equivalentemente finita en cada intervalo acotado).

A continuación veremos que existe una biyección entre ambos conceptos, siempre que identifiquemos cada dos funciones de distribución que difieran en una constante.

Teorema 1.5.1 *Sea μ una medida de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R} . Entonces cada función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que para todo $a < b \in \mathbb{R}$ verifique*

$$F(b) - F(a) = \mu(a, b],$$

es una función de distribución. Existen infinitas y cada dos difieren en una constante.

Demostración. Es monótona pues si $a < b$, $F(b) - F(a) = \mu(a, b] \geq 0$ y continua a la derecha pues para $x < x_n$ y $x_n \rightarrow x^+$ tenemos $(x, x_n] \downarrow \emptyset$ y como $\mu(x, x_1] < \infty$

$$F(x_n) = F(x) + \mu(x, x_n] \rightarrow F(x).$$

Es obvio que si F y G satisfacen el resultado difieren en una constante, pues para $x < y$,

$$F(y) - F(x) = \mu(x, y] = G(y) - G(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) - G(x) = F(y) - G(y),$$

y que todas son traslaciones $F_0 + c$ de una de ellas, por ejemplo de

$$F_0(x) = \begin{cases} \mu(0, x], & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -\mu(x, 0], & \text{si } x < 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Veamos ahora el recíproco, que dada una función de distribución $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, existe una única medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ que para $a < b \in \mathbb{R}$, verifica

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a).$$

Tal medida la conocemos sobre los semiintervalos acotados

$$\mathcal{C} = \{(a, b] : a \leq b \in \mathbb{R}\}.$$

Demostremos en una serie de pasos, primero que μ se extiende de un modo único al anillo \mathcal{A}_0 formado por las uniones finitas disjuntas (ó simplemente uniones finitas) de elementos de \mathcal{C} y después a los Borelianos, sabiendo que $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definimos $\mu(\emptyset) = 0$ (observemos que es la única posibilidad, pues si $a_n \rightarrow a^+$, entonces $(a, a_n] \downarrow \emptyset$ y $\mu(a, a_n] = F(a_n) - F(a) \rightarrow 0$).

Ahora si un semiintervalo acotado $(a, b]$ es unión finita disjunta de semiintervalos $(a_i, b_i]$, ordenándolos se tiene necesariamente que

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_{n-1} = a_n < b_n = b,$$

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(b_i) - F(a_i)] = \sum_{i=1}^n \mu(a_i, b_i],$$

esto nos permite definir μ de modo único en \mathcal{A}_0 , como

$$(1.1) \quad \mu[A] = \sum_{i=1}^n \mu(I_i), \quad \text{para } A = \bigcup_{i=1}^n I_i$$

pues si $\cup_{i=1}^n I_i = \cup_{j=1}^m J_j$ se tiene por lo anterior que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu(I_i) &= \sum_{i=1}^n \mu(\cup_{j=1}^m (I_i \cap J_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(I_i \cap J_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^m \mu(J_j), \end{aligned}$$

de esto se sigue que μ es aditiva en \mathcal{A}_0 , pues si $A, B \in \mathcal{A}_0$ son disjuntos siendo $A = \cup_{i=1}^n I_i$ y $B = \cup_{j=1}^m J_j$, tendremos que

$$\mu(A \cup B) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i) + \sum_{j=1}^m \mu(J_j) = \mu(A) + \mu(B).$$

Ahora para demostrar que μ es medida necesitamos un par de resultados previos.

Lema 1.5.2 *Para cada $A \in \mathcal{A}_0$ y todo $\epsilon > 0$, existe un $B \in \mathcal{A}_0$, con $\overline{B} \subset A$ tal que $\mu(A \setminus B) < \epsilon$.*

Demostración. Como A es unión finita disjunta de semiintervalos acotados, basta demostrarlo para un semiintervalo acotado $(a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Como F es continua a la derecha, podemos tomar $a_n \rightarrow a^+$, tal que $[a_n, b] \subset (a, b]$ y

$$\mu((a, b] \setminus [a_n, b]) = \mu(a, a_n] = F(a_n) - F(a) \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Lema 1.5.3 *Dada una colección de compactos K_i en un espacio topológico Hausdorff, tales que $\bigcap K_i = \emptyset$, entonces existe una colección finita de ellos K_{i_1}, \dots, K_{i_n} , tales que $\bigcap_{j=1}^n K_{i_j} = \emptyset$.*

Demostración. En un Hausdorff todo compacto es cerrado, pues si $x \notin K$ podemos tomar para cada $y \in K$ sendos entornos disjuntos V_x^y y V_y de x y y respectivamente. Ahora K podemos recubrirlo con un número finito de los V_y , que corresponden a un número finito de V_x^y cuya intersección es un entorno de x que no corta a ningún V_y y por tanto a K .

Consideremos ahora K_{i_0} , uno cualquiera de los compactos, entonces

$$\begin{aligned} \bigcap_j K_j = \emptyset &\Rightarrow K_{i_0} \subset \left(\bigcap_{j \neq i_0} K_j \right)^c = \bigcup_{j \neq i_0} K_j^c \\ &\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n : K_{i_0} \subset \bigcup_{j=1}^n K_{i_j}^c \Rightarrow \bigcap_{j=0}^n K_{i_j} = \emptyset. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.5.4 *La función de conjunto $\mu: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$, definida en (1.1), es la única medida que satisface $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$, además es una medida σ -finita, que diremos generada por F .*

Demostración. Basta demostrar por (1.3.12) que si $A_n \in \mathcal{A}_0$ y $A_n \downarrow \emptyset$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$, por el primer Lema para cada A_n existe un $B_n \in \mathcal{A}_0$, $\overline{B_n} \subset A_n$ y $\mu(A_n \setminus B_n) < \epsilon 2^{-n}$. Ahora como $\bigcap \overline{B_n} \subset \bigcap A_n = \emptyset$ y los $\overline{B_n}$ son compactos tendremos por el Lema (1.5.3) que existe un N tal que

$$\bigcap_{n=1}^N B_n \subset \bigcap_{n=1}^N \overline{B_n} = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n=1}^N B_n^c = \mathbb{R},$$

y como A_n es decreciente, para todo $n \geq N$

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \mu\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^N B_i^c\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^N (A_n \cap B_i^c)\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^N (A_i \cap B_i^c)\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(A_i \setminus B_i) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

por tanto $\mu(A_n) \rightarrow 0$. Por último μ es σ -finita pues $\mu(-m, m] = F(m) - F(-m) < \infty$. ■

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.5 *Dada una función de distribución F en \mathbb{R} , existe una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$, para cada $a < b$ de \mathbb{R} y es una medida de Lebesgue–Stieltjes.*

Demostración. Por el resultado anterior existe una única medida, definida en el anillo \mathcal{A}_0 , que satisface la propiedad. Además es σ -finita, por tanto se sigue de los Teoremas de Caratheodory y Hahn que tiene una única extensión a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y es de Lebesgue–Stieltjes. ■

Nota 1.5.6 Observemos que para cada punto $x \in \mathbb{R}$

$$\mu\{x\} = \lim \mu(x - 1/n, x] = F(x) - F(x^-),$$

y por tanto, como F es continua a la derecha, es decir $F(x) = F(x^+)$, se tiene que

$$F \text{ es continua en } x \Leftrightarrow \mu\{x\} = 0.$$

Podemos expresar la medida de cualquier intervalo en términos de la función de distribución, por ejemplo

$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= \lim \mu(a, b - 1/n] = F(b^-) - F(a), \\ \mu[a, b) &= \mu(\{a\}) + \mu(a, b) = F(b^-) - F(a^-), \\ \mu[a, \infty) &= F(\infty) - F(a^-), \quad \mu(-\infty, \infty) = F(\infty) - F(-\infty). \end{aligned}$$

Nota 1.5.7 Ahora podemos generar ya un buen número de medidas en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por ejemplo si

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

es no negativa e integrable (Riemann por ahora), sobre cada intervalo finito (eso significa que la integral en ese intervalo es finita), podemos definir la función de distribución (continua)

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -\int_x^0 f(t)dt, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

y se puede construir la medida μ de Lebesgue–Stieltjes asociada, que satisface

$$\mu(a, b] = \int_a^b f(t)dt.$$

Ejemplo 1.5.8 La medida de Lebesgue unidimensional. Tomando en particular la función de distribución

$$F(x) = x, \quad \mu(a, b] = b - a,$$

la correspondiente medida σ -finita $\mu: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$ define la *medida exterior de Lebesgue* que para $A \subset \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf\left\{\sum \mu(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_0, A \subset \cup A_i\right\} \\ &= \inf\left\{\sum \mu(I_i) : I_i \in \mathcal{C}, A \subset \cup I_i\right\} \\ &= \inf\left\{\sum (b_i - a_i) : a_i \leq b_i, A \subset \cup (a_i, b_i]\right\}. \end{aligned}$$

Definición. A los conjuntos de la σ -álgebra \mathcal{A}_* , definida por la medida exterior de Lebesgue, los llamamos *Lebesgue medibles* de \mathbb{R} , y *medida de Lebesgue* a la restricción $m = \mu^*|_{\mathcal{A}_*}$, de la medida exterior a esta σ -álgebra, que denotaremos $\mathcal{A}_* = \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

1.5.2. Medidas de Lebesgue–Stieltjes en \mathbb{R}^n .

Vamos a considerar ahora las medidas de *Lebesgue–Stieltjes* y las funciones de distribución en \mathbb{R}^n .

Definición. Llamaremos *rectángulo (acotado)* en \mathbb{R}^n al producto de n intervalos (acotados) de \mathbb{R} . Llamaremos *rectángulo semicerrado a la derecha* (a menudo lo llamaremos simplemente *semi-rectángulo*), de \mathbb{R}^n al producto $\prod I_i$, de n semi-intervalos de \mathbb{R} , del tipo $(-\infty, b]$, $(a, b]$

ó (a, ∞) , de estos consideraremos especialmente los semi-rectángulos acotados, que son producto de $I_i \in \mathcal{C}$, es decir del tipo considerado en el caso unidimensional $(a, b]$. Denotaremos con \mathcal{C}^n el conjunto de los semi-rectángulos acotados. Llamaremos *cubo semicerrado a la derecha* (ó simplemente *semicubo*) a un semi-rectángulo $(a, b]$ con todos los lados $b_i - a_i$ iguales. Llamaremos *semi-cubo unidad* a $(0, 1]^n$ y *cubo unidad* a $Q = [0, 1]^n$.

Por ejemplo en \mathbb{R}^2 los semi-rectángulos (acotados y no acotados) son conjuntos de uno de los nueve tipos de la Fig.1.2

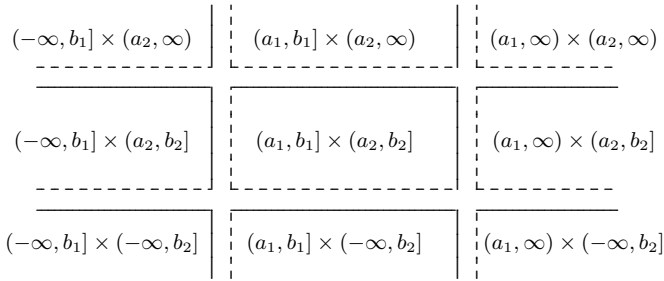


Figura 1.2. Semi-rectángulos acotados y no acotados de \mathbb{R}^2

Nota 1.5.9 Denotaremos $(-\infty, x] = \prod_{i=1}^n (-\infty, x_i]$, para cada $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$. Dados $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \overline{\mathbb{R}^n}$, diremos que $a < b$ ($a \leq b$) si $a_i < b_i$ ($a_i \leq b_i$) para $i = 1, \dots, n$. Si para algún i , $a_i = b_i$, tendremos que $(a, b] = \prod (a_i, b_i] = \emptyset$ y podemos entender el conjunto vacío como un semi-rectángulo.

Nota 1.5.10 Recordemos que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la σ -álgebra generada por los abiertos de \mathbb{R}^n y por (1.2.16) también es la generada por los semi-rectángulos acotados de \mathbb{R}^n , $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n)$.

Proposición 1.5.11 *La familia \mathcal{A}_0 de las uniones finitas disjuntas de semi-rectángulos acotados de \mathbb{R}^n es un anillo.*

Demostración. Se tienen las siguientes propiedades: (1) Si $A \in \mathcal{C}^n$, y B es semi-rectángulo acotado o no, $A \cap B \in \mathcal{C}^n$. (2) Si $B = I_1 \times \dots \times I_n \in \mathcal{C}^n$, entonces B^c es unión finita disjunta de semi-rectángulos (no acotados),

$$B^c = (I_1^c \times \mathbb{R}^{n-1}) \cup (I_1 \times I_2^c \times \mathbb{R}^{n-2}) \cup \dots \cup (I_1 \times \dots \times I_{n-1}) \times I_n^c,$$

por tanto si $A, B \in \mathcal{C}^n$, $A \cap B^c \in \mathcal{A}_0$. (3) Si $A = \cup A_i \in \mathcal{A}_0$ y $B \in \mathcal{C}^n$, $A \setminus B = \cup(A_i \cap B^c) \in \mathcal{A}_0$. (4) Si $A, B = \cup_{j=1}^m B_j \in \mathcal{A}_0$, se tiene por (3) que

$$A \cap B^c = A \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_m^c \in \mathcal{A}_0.$$

Además $A \cup B = B \cup (A \cap B^c) \in \mathcal{A}_0$, por ser unión disjunta de elementos de \mathcal{A}_0 . ■

Definición. Diremos que una medida $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, es de *Lebesgue–Stieltjes* si es finita en los compactos (equivalentemente en los acotados) de \mathbb{R}^n .

Definición. Para cada $a = (a_i) \leq b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ definimos $S_{ab} = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i = a_i \text{ ó } x_i = b_i\}$ el conjunto de *esquinas del rectángulo definido por a y b* y la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma: S_{ab} &\longrightarrow \{-1, 1\}, \\ \sigma(x) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = a_i \text{ para un n}^\circ \text{ par de } i, \\ -1, & \text{si } x_i = a_i \text{ para un n}^\circ \text{ impar de } i, \end{cases} \end{aligned}$$

Definición. Diremos que $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de distribución* si:

- Es *continua a la derecha*, es decir si $x \leq \cdots \leq x_{n+1} \leq x_n$ y $x_n \rightarrow x$, entonces $F(x_n) \rightarrow F(x)$.
- Es *monótona creciente* en el siguiente sentido, para $a \leq b \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x) \geq 0.$$

Por ejemplo para $n = 3$, que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x) &= F(b_1, b_2, b_3) - F(a_1, b_2, b_3) - F(b_1, a_2, b_3) + \\ &+ F(a_1, a_2, b_3) - F(b_1, b_2, a_3) + F(a_1, b_2, a_3) + \\ &+ F(b_1, a_2, a_3) - F(a_1, a_2, a_3) \geq 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.12 Dadas n funciones de distribución en \mathbb{R} , F_1, \dots, F_n ,

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n),$$

es una función de distribución en \mathbb{R}^n , pues es continua a la derecha y es monótona, pues por inducción en n se demuestra la última igualdad en

$$\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x) = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F_1(x_1) \cdots F_n(x_n) = \prod_{i=1}^n [F_i(b_i) - F_i(a_i)].$$

Ejemplo 1.5.13 Para el caso particular $F_i(x) = x$, para $i = 1, \dots, n$, tenemos la función de distribución $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$.

Como para el caso unidimensional tenemos una biyección entre medidas de *Lebesgue–Stieltjes* y *funciones de distribución*, si identificamos funciones de distribución que dan el mismo valor a $\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x)F(x)$, para todo semi-rectángulo acotado $(a, b]$ —observemos que si F es función de distribución también lo es $F + c$, para cada $c \in \mathbb{R}$, pues se tiene que $\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) = 0$ (esto es una simple consecuencia de (1.5.12), para $F_i(x) = 1$, por tanto $F(x) = 1$), además por esta misma razón F y $F + c$ están identificadas pues ambas funciones dan el mismo valor a la expresión—. Sin embargo encontrar una función de distribución de la clase de equivalencia a partir de la medida no es inmediato en general, por ello optaremos por dar los siguientes resultados que serán útiles en Teoría de Probabilidades.

Teorema 1.5.14 *Sea μ una medida finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $F(x) = \mu(-\infty, x]$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ es una función de distribución que verifica $\sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x)F(x) = \mu(a, b]$, para cada $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $a < b$.*

Demostración. La continuidad a la derecha se sigue por ser μ una medida finita, pues si $x_n \downarrow x$, con $x_{n+1} \leq x_n$, entonces $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ y $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Que es monótona creciente se sigue de

$$\begin{aligned} \mu(a, b] &= \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]) \\ &= \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_n]) - \\ &\quad - \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]) \\ &= \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_{n-1}] \times (-\infty, b_n]) - \\ &\quad - \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, a_{n-1}] \times (-\infty, b_n]) - \\ &\quad - \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_{n-1}] \times (-\infty, a_n]) + \\ &\quad + \mu((a_1, b_1] \times \cdots \times (-\infty, a_{n-1}] \times (-\infty, a_n]) \\ &= \cdots = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) \mu((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) \\ &= \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x) F(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.5.15 *Dada F función de distribución en \mathbb{R}^n , hay una única medida μ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\mu(a, b] = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x)F(x)$, para cada semi-rectángulo acotado $(a, b]$. Además μ es de *Lebesgue–Stieltjes*.*

Demostración. Como en el caso unidimensional construiremos en una serie de pasos la medida. En primer lugar la hipótesis nos la da en los semi-rectángulos acotados

$$\mu(a, b] = \sum_{x \in S_{ab}} \sigma(x)F(x),$$

con $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$; y definimos $\mu(\emptyset) = 0$. Ahora observamos que es aditiva en el siguiente sentido. Dados $a = (a_i) < b = (b_i)$ y $a_j < e_j < b_j$ para un j , se tiene (ver Fig. 1.3)

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times \cdots \times ((a_j, e_j] \cup (e_j, b_j]) \times \cdots \times (a_n, b_n] = (a, c] \cup (d, b],$$

para $c = (c_i)$ y $d = (d_i)$ con

$$c_i = \begin{cases} b_i & \text{si } i \neq j \\ e_j & \text{si } i = j, \end{cases} \quad d_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \neq j \\ e_j & \text{si } i = j, \end{cases}$$

por tanto

$$S_{ac} = \{x : x_i = a_i \text{ ó } b_i \ (i \neq j) \text{ y } x_j = a_j \text{ ó } e_j\},$$

$$S_{db} = \{x : x_i = a_i \text{ ó } b_i \ (i \neq j) \text{ y } x_j = e_j \text{ ó } b_j\},$$

y tenemos que

$$S_{ac} \cap S_{db} = \{x : x_i = a_i \text{ ó } b_i \ (i \neq j) \text{ y } x_j = e_j\}$$

$$S_{ac} \cup S_{db} = S_{ab} \cup (S_{ac} \cap S_{db})$$

siendo la unión de la derecha disjunta, y se demuestra fácilmente que

$$\mu(a, b] = \mu(a, c] + \mu(d, b],$$

pues si $x \in S_{ac} \cap S_{db}$, los signos $\sigma_{ac}(x)$ y $\sigma_{db}(x)$, correspondientes a $F(x)$ en $\mu(a, c]$ y en $\mu(d, b]$ se cancelan. Ahora aplicando sucesivamente este argumento se tiene que dada una partición entera del semi-rectángulo acotado $(a, b]$, es decir del tipo

$$\begin{aligned} (a, b] &= \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] = \prod_{i=1}^n \left((a_i, a_i'] \cup (a_i', a_i^{(2)}] \cup \cdots \cup (a_i^{(k_i-1)}, b_i] \right) \\ &= \bigcup_{j_1=1}^{k_1} \cdots \bigcup_{j_n=1}^{k_n} \prod_{i=1}^n (a_i^{(j_i-1)}, a_i^{(j_i)}], \quad \text{para } a_i = a_i^{(0)} \text{ y } b_i = a_i^{(k_i)} \end{aligned}$$

como unión disjunta de $k_1 \cdots k_n$ semi-rectángulos acotados, tendremos que

$$\mu(a, b) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} \mu\left(\prod_{i=1}^n \left(a_i^{(j_i-1)}, a_i^{(j_i)}\right]\right),$$

es decir es aditiva. Esto implica que si un semi-rectángulo acotado $R = (a, b]$ es unión finita disjunta de semi-rectángulos acotados R_i , entonces $\mu(R) = \sum \mu(R_i)$, lo cual se demuestra considerando una partición entera de $(a, b]$, de la que se pueden seleccionar particiones enteras de cada R_i (ver la Fig.1.4).

Esto nos permite extender μ al anillo \mathcal{A}_0 de las uniones finitas disjuntas de semi-rectángulos acotados, $\mu(\cup_{i=1}^k R_i) = \sum \mu(R_i)$, de este modo μ es aditiva en \mathcal{A}_0 y vemos, como en el caso unidimensional, que es medida, demostrando primero que para cada $A \in \mathcal{A}_0$ y cada $\epsilon > 0$ existe un $B \in \mathcal{A}_0$, con $\overline{B} \subset A$ y $\mu(A \setminus B) < \epsilon$, y como A es unión finita disjunta de semi-rectángulos, bastará demostrarlo para $A = (a, b]$ un semi-rectángulo, en cuyo caso se tiene que si $a < a^{(k+1)} \leq a^{(k)}$ y $a^{(k)} \rightarrow a$, entonces para

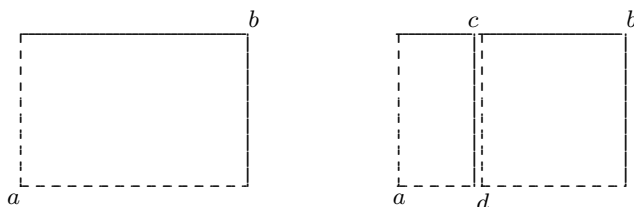


Figura 1.3.

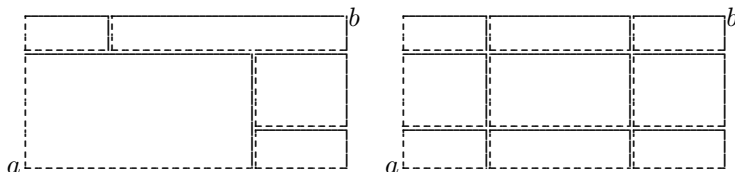


Figura 1.4. Partición entera del semirectángulo

$B_k = (a^{(k)}, b]$, $\overline{B}_k = [a^{(k)}, b] \subset (a, b]$ y

$$\mu(B_k) = \sum_{x \in S_{a^{(k)}b}} \sigma_{a^{(k)}b}(x)F(x) \rightarrow \sum_{x \in S_{ab}} \sigma_{ab}(x)F(x) = \mu(A),$$

pues F es continua a la derecha y para cada esquina $x = (x_1, \dots, x_n)$, de $(a, b]$, con $x_i = a_i$ ó b_i , existe una única esquina $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$, con los correspondientes valores $x_i^k = a_i^k$ ó b_i , de $B_k = (a^{(k)}, b]$, siendo el signo de $x^{(k)}$ el mismo que el de x y $x^{(k)} \downarrow x$, por tanto $F(x^{(k)}) \rightarrow F(x)$. Por tanto como μ es aditiva y $\mu(A) < \infty$, $\mu(A \setminus B_k) = \mu(A) - \mu(B_k) \rightarrow 0$. Ahora que μ es medida se demuestra como en el caso unidimensional. Por tanto $\mu: \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$ es una medida σ -finita y se extiende de un único modo a una medida en los borelianos, y es de Lebesgue–Stieltjes ya que

$$\mu((-m, m]^n) < \infty. \quad \blacksquare$$

Nota 1.5.16 Observemos que el teorema de Caratheodory construye la medida exterior $\mu^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, asociada a μ , de la forma

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_0, A \subset \cup A_i \right\} \\ (1.2) \quad &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) : R_i \in \mathcal{C}^n, A \subset \cup R_i \right\} \end{aligned}$$

pues \mathcal{A}_0 son las uniones finitas y disjuntas de semi-rectángulos acotados, es decir de elementos de \mathcal{C}^n .

Ejemplo 1.5.17 La medida de Lebesgue n -dimensional. Consideremos la función de distribución $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$, entonces su medida asociada en los semi-rectángulos vale

$$\mu(a, b] = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n),$$

y el teorema de Caratheodory–Hahn construye el espacio de medida completo correspondiente

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_*, \mu^*) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m).$$

Definición. A m la llamamos la *medida de Lebesgue n -dimensional* y los conjuntos de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ los llamamos *Lebesgue medibles de \mathbb{R}^n* . Además ese espacio es la completación de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$, pues μ es σ -finita.

1.5.3. Propiedades de la medida de Lebesgue.

Veamos algunas propiedades básicas de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.5.18 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(B) = m(B + x)$. Además si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $B + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. En primer lugar $\mu(a, b] = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ es invariante por traslaciones en los semi-rectángulos acotados, y se sigue de (1.2) que también lo es la medida exterior que genera $\mu^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$. Por tanto para cualquier $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu^*(A) = \mu^*(A + x)$, ahora si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, tendremos que para cualquier $E = A + x \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \\ &= \mu^*((A \cap B) + x) + \mu^*((A \cap B^c) + x) \\ &= \mu^*(E \cap (B + x)) + \mu^*(E \cap (B^c + x)) \\ &= \mu^*(E \cap (B + x)) + \mu^*(E \cap (B + x)^c), \end{aligned}$$

y por tanto $B + x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(B) = \mu^*(B) = \mu^*(B + x) = m(B + x)$.

Que la traslación $B + x$ de un boreliano B es un boreliano, es consecuencia de que $y \in \mathbb{R}^n \rightarrow y + x \in \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. ■

Además la medida de Lebesgue en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la única medida de Lebesgue–Stieltjes (salvo un factor de proporcionalidad), no nula e invariante por traslaciones.

Teorema 1.5.19 *Sea μ una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ invariante por traslaciones, tal que $\mu[(0, 1]^n] < \infty$. Entonces existe $c \in [0, \infty)$ tal que $\mu(A) = c \cdot m(A)$, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Consideremos $B = (0, 1]^n$, el semi-cubo unidad, y sea $c = \mu(B)$. Si $c = 0$, poniendo \mathbb{R}^n como unión numerable de semi-cubos $B + z$, con $z \in \mathbb{Z}^n$, tendríamos $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\mu = 0$. Si $0 < c < \infty$, veamos que $\lambda = (1/c)\mu$ es la medida de Lebesgue; observemos que $\lambda(B) = m(B)$ y que ambas son invariantes por traslaciones, por lo que si para cada $k \in \mathbb{N}$, dividimos cada $(0, 1]$ en k intervalos disjuntos

$$\left(0, \frac{1}{k}\right], \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right], \dots, \left(\frac{k-1}{k}, 1\right],$$

B se descompone en unión disjunta de k^n semi-cubos B_i , que son traslaciones de $(0, 1/k]^n$, por lo que λ y m coinciden en cada B_i , pues

$$k^n \lambda(B_i) = \sum_{i=1}^{k^n} \lambda(B_i) = \lambda(B) = m(B) = k^n m(B_i),$$

de donde se sigue que ambas coinciden en los semi-cubos de lado $1/k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y por aditividad en cada semi-rectángulo $(a, b]$ con $b - a \in \mathbb{Q}^n$, pues si $a = 0$ y $b = (m_i/k_i) \in \mathbb{Q}^n$, podemos expresar $(0, b] = \prod (0, \frac{m_i}{k_i}]$ como unión finita disjunta de semi-cubos de lado $1/k$, con $k = k_1 \cdots k_n$, por tanto λ y m coinciden sobre ellos y por traslación sobre todos los semi-rectángulos $(a, b]$ con $b - a \in \mathbb{Q}^n$. Por tanto coinciden sobre todos los semi-rectángulos $(a, b]$, pues podemos tomar una sucesión $(a_m, b] \uparrow (a, b]$, con $b - a_m \in \mathbb{Q}^n$. Como consecuencia se tiene que coinciden en el anillo \mathcal{A}_0 de las uniones finitas disjuntas de semirectángulos acotados, en el que son σ -finitas y por el Teorema de Hahn en todos los borelianos. ■

Ejercicios

Ejercicio 1.5.1 Sean $\mu_i : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, para $i = 1, \dots, n$ medidas de Lebesgue–Stieltjes. Demostrar que existe una única medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, tal que para cada semi-rectángulo acotado $(a, b]$,

$$\mu(a, b] = \mu_1(a_1, b_1] \cdots \mu_n(a_n, b_n]. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 1.5.2 Demostrar que toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de Lebesgue–Stieltjes es σ -finita. Encontrar una que sea σ -finita pero no de Lebesgue–Stieltjes. (Sol.)

Ejercicio 1.5.3 Demostrar que para $a < b \in \mathbb{R}^n$ y la medida de Lebesgue n -dimensional

$$m(a, b) = m[a, b) = m(a, b] = m[a, b]. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 1.5.4 Demostrar que si $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(tB) = |t|^n m(B)$. Además si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (Sol.)

Ejercicio 1.5.5 Demostrar que la medida de Lebesgue es invariante por rotaciones. (Sol.)

Ejercicio 1.5.6 ¿Se puede poner un cuadrado del plano como unión numerable de segmentos?

1.6. Medidas de Hausdorff

1.6.1. Medidas exteriores métricas

Definición. Sea (Ω, d) un espacio métrico, diremos que una medida exterior μ^* es *métrica* si dados $A, B \subset \Omega$, tales que $d(A, B) > 0$,

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Proposición 1.6.1 Si μ^* es una medida exterior métrica en un espacio métrico (Ω, d) , entonces $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}_*$.

Demostración. Basta demostrar que si $U \subset \Omega$ es abierto, $U \in \mathcal{A}_*$. Para lo cual basta demostrar que si $A \subset \Omega$ tiene $\mu^*(A) < \infty$, entonces $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$.

Como U es abierto, $U_n \uparrow U$ para $U_n = \{x : d(x, U^c) \geq n^{-1}\}$, por tanto $A \cap U_n \uparrow A \cap U$ y por otra parte

$$\begin{aligned} d(A \cap U_n, A \cap U^c) &\geq d(U_n, U^c) \geq \frac{1}{n} > 0 \quad \Rightarrow \\ \mu^*(A) &\geq \mu^*[(A \cap U_n) \cup (A \cap U^c)] = \mu^*(A \cap U_n) + \mu^*(A \cap U^c), \end{aligned}$$

por tanto basta demostrar que para $B_n = A \cap U_n \uparrow B = A \cap U$, $\lim \mu^*(B_n) = \mu^*(B)$ y si consideramos los conjuntos disjuntos (ver la Fig.1.5), $C_1 = B_1$, y para $n \geq 2$, $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$,

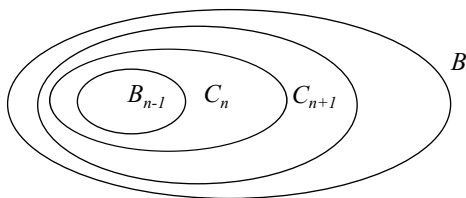


Figura 1.5.

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*[B_n \cup C_{n+1} \cup C_{n+2} \cup \dots] \leq \mu^*(B_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^*(C_j) \\ \Rightarrow \quad 0 &\leq \mu^*(B) - \mu^*(B_n) \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^*(C_j),\end{aligned}$$

y basta demostrar que la serie $\sum \mu^*(C_j)$ converge. Para ello observemos que si $x \in B_{n-1}$ e $y \in C_{n+1}$, entonces $y \notin U_n$, es decir $d(y, U^c) < n^{-1}$ y por lo tanto $d(x, y) \geq 1/n(n-1)$, pues

$$\frac{1}{n-1} \leq d(x, U^c) \leq d(x, y) + d(y, U^c) < d(x, y) + \frac{1}{n},$$

de esto se sigue que

$$d(B_{n-1}, C_{n+1}) \geq \frac{1}{n(n-1)} > 0,$$

por lo tanto

$$\mu^*(B_{n-1}) + \mu^*(C_{n+1}) = \mu^*(B_{n-1} \cup C_{n+1}) \leq \mu^*(B_{n+1}),$$

lo cual implica que por inducción en n

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \mu^*(C_{2i-1}) &\leq \mu^*(B_{2n-1}) \leq \mu^*(A), \\ \sum_{i=1}^n \mu^*(C_{2i}) &\leq \mu^*(B_{2n}) \leq \mu^*(A)\end{aligned}$$

y como $\mu^*(A) < \infty$, la serie $\sum \mu^*(C_n)$ converge. ■

Ejemplo 1.6.2 Medida exterior no-métrica.¹³ Consideremos en \mathbb{R} la colección \mathcal{C} de los semiintervalos $(a, b] \subset \mathbb{R}$ y la función

$$\rho: \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty), \quad \rho((a, b]) := \sqrt{b-a}.$$

que genera la medida exterior que vale 1 en los semiintervalos de longitud 1, para lo cual basta verlo en $(0, 1]$ pues ρ es invariante por traslaciones.

¹³Ver pág. 110 del STERNBERG, S.: "Theory of functions of a real variable."

Para demostrar esto veamos antes que si $[a, b] \subset \cup(a_i, b_i)$, entonces $b - a \leq \sum(b_i - a_i)$: Por la compacidad de $[a, b]$ podemos extraer un subrecubrimiento finito, por tanto existe n tal que $[a, b] \subset \cup_{i=1}^n(a_i, b_i)$ y se demuestra por inducción en n que $b - a \leq \sum_{i=1}^n(b_i - a_i) \leq \sum(b_i - a_i)$, pues si algún intervalo no corta a $[a, b]$ se puede quitar de la unión y aplicamos el caso $n - 1$ y si todos cortan tomamos el intervalo (a_1, b_1) que contenga a a y si $b_1 \in [a, b]$ tomamos el segundo intervalo tal que $b_1 \in (a_2, b_2)$, en cuyo caso $(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$ y $b_2 - a_1 \leq b_2 - a_2 + b_1 - a_1$; en caso contrario si $b_1 \notin [a, b]$, $[a, b] \subset (a_1, b_1)$ y el resultado es obvio. Como consecuencia se tiene para semiintervalos, es decir que si $(a, b] \subset \cup(a_i, b_i]$, entonces $b - a \leq \sum(b_i - a_i)$, para ello basta observar que para $\epsilon > 0$ pequeño tendremos que

$$[a + \epsilon, b] \subset (a, b] \subset \cup(a_i, b_i] \subset \cup(a_i, b_i + \frac{\epsilon}{2}),$$

y aplicando el caso compacto, tendremos que $b - a - \epsilon \leq \epsilon + \sum(b_i - a_i)$ y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene el resultado.

Veamos ahora que $\mu_*(0, 1] = 1$: por una parte $\mu_*(0, 1] \leq \rho(0, 1] = 1$ y por otra parte si consideramos $(0, 1] \subset \cup(a_i, b_i]$, se sigue de lo anterior que $1 \leq \sum(b_i - a_i)$, por tanto como $(x + y)^2 \geq x^2 + y^2$

$$\left(\sum \sqrt{b_i - a_i}\right)^2 \geq \sum(b_i - a_i) \geq 1,$$

y se tiene que $\mu_*((a, a + 1]) = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Para esta medida exterior los borelianos no son medibles, pues $[0, 1] \notin \mathcal{A}_*$ ya que

$$\begin{aligned} \mu_*(-1, 1] &\leq \rho(-1, 1] = \sqrt{2} < 2 = \mu_*(0, 1] + \mu_*(-1, 0] = \\ &= \mu_*([0, 1] \cap (-1, 1]) + \mu_*([0, 1]^c \cap (-1, 1]). \end{aligned}$$

y por el teorema se sigue que esta medida exterior no es métrica, lo cual vemos directamente si consideramos dos semiintervalos de longitud 1, $I = (a - 1, a]$ y $J = (b, b + 1]$ a una pequeña distancia $b - a = \epsilon < 2$, su unión $I \cup J$ está en el intervalo $(a - 1, b + 1]$ de longitud $2 + \epsilon$, y

$$\mu_*(I \cup J) \leq \rho(a - 1, b + 1] = \sqrt{2 + \epsilon} < 2 = \mu_*(I) + \mu_*(J). \quad \blacksquare$$

1.6.2. Las medidas de Borel H_p

Ahora consideremos en el espacio métrico (Ω, d) , la medida exterior de Hausdorff p -dimensional, para cada $p \geq 0$, $H_p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$. Veremos a continuación que aunque en general las $H_{p,\delta}$ no son medidas exteriores métricas, su límite H_p sí lo es.

Teorema 1.6.3 $H_p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ es una medida exterior métrica.

Demostración. Sean $A, B \subset \Omega$ con $d(A, B) > 0$ y consideremos un $0 < \delta < d(A, B)$, entonces para cada sucesión $C_n \subset \Omega$, con $d(C_n) < \delta$ y $A \cup B \subset \cup C_n$, consideramos los conjuntos disjuntos

$$I = \{n \in \mathbb{N} : C_n \cap A \neq \emptyset\}, \quad J = \{n \in \mathbb{N} : C_n \cap B \neq \emptyset\},$$

para los que $A \subset \cup_{n \in I} C_n$ y $B \subset \cup_{n \in J} C_n$, por lo que

$$\begin{aligned} H_{p,\delta}(A \cup B) &\leq H_{p,\delta}(A) + H_{p,\delta}(B) \\ &\leq \sum_{n \in I} d(C_n)^p + \sum_{n \in J} d(C_n)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} d(C_n)^p \Rightarrow \\ H_{p,\delta}(A \cup B) &= H_{p,\delta}(A) + H_{p,\delta}(B) \end{aligned}$$

y tomando límites ($\delta \rightarrow 0$), $H_p(A \cup B) = H_p(A) + H_p(B)$. ■

Definición. Llamamos *medida de Hausdorff p -dimensional*, a la restricción de H_p a los borelianos $\mathcal{B}(\Omega)$, de nuestro espacio métrico.

Proposición 1.6.4 Sea $A \subset \Omega$ y sean $0 \leq p < q$, entonces

$$\begin{aligned} H_p(A) < \infty &\Rightarrow H_q(A) = 0, \\ H_q(A) > 0 &\Rightarrow H_p(A) = \infty. \end{aligned}$$

Demostración. Basta demostrar la primera, pues la segunda es su contrarrecíproca. Sea $\delta > 0$ y B_n un recubrimiento de A , con $d(B_n) < \delta$, entonces¹⁴ para $q > p$,

$$H_{q,\delta}(A) \leq \sum d(B_n)^q < \delta^{q-p} \sum d(B_n)^p,$$

y tomando ínfimo, $H_q(A) \leq \delta^{q-p} H_p(A)$, y haciendo $\delta \rightarrow 0$ se sigue el resultado pues $H_p(A) < \infty$. ■

De esto se sigue que si $I = \{p \geq 0 : H_p(A) = \infty\}$ es no vacío, es un intervalo; pues si $p \in I$, $[0, p] \subset I$ y lo mismo $J = \{q > 0 : H_q(A) = 0\}$, pues si $q \in J$ entonces $[q, \infty) \subset J$ y que estos dos intervalos son disjuntos con un extremo común (que puede ó no, pertenecer a ellos). Como consecuencia podemos dar la siguiente definición.

¹⁴Recordemos que tenemos el convenio $d(\emptyset)^p = 0$, para todo $p \geq 0$ y $d(A)^0 = 1$, para todo $A \neq \emptyset$, con el cual es cierto que $d(A_i)^q = d(A_i)^p d(A_i)^{q-p}$, incluso para $A_i = \emptyset$ y $p = 0$.

Definición. Llamaremos *dimensión de Hausdorff* de $A \subset \Omega$ al valor

$$\dim_H(A) = \sup\{p \geq 0 : H_p(A) = \infty\} = \inf\{q > 0 : H_q(A) = 0\}.$$

Nota 1.6.5 Pero como alguno de los conjuntos anteriores puede ser vacío, consideramos el convenio que ya hemos considerado de $\inf \emptyset = \infty$ y $\sup \emptyset = 0$.

Ejemplo 1.6.6 Por ejemplo la dimensión del conjunto de Cantor es $p = \log_3 2$ (remitimos al lector interesado en la demostración a la pág.49).

Por último veamos que las medidas de Hausdorff tienen una propiedad similar a la de Lebesgue, en el sentido de que son invariantes por transformaciones que conservan la distancia.

Proposición 1.6.7 Sea $T: \Omega \rightarrow \Omega$ una aplicación biyectiva isométrica, es decir tal que $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$, entonces para todo $B \subset \Omega$ y todo $p \geq 0$, $H_p[T(B)] = H_p(B)$.

Demostración. Basta ver el resultado para las $H_{p,\delta}$ y para ellas es cierto pues $d[T(B)] = d(B)$, para cada $B \subset \Omega$ y dado A_i existe un B_i , tal que $T(B_i) = A_i$, por tanto

$$\begin{aligned} H_{p,\delta}[T(B)] &= \inf\left\{\sum d(A_i)^p : T(B) \subset \cup A_i, d(A_i) < \delta\right\} \\ &= \inf\left\{\sum d[T(B_i)]^p : T(B) \subset \cup T(B_i), d[T(B_i)] < \delta\right\} \\ &= \inf\left\{\sum d(B_i)^p : B \subset \cup B_i, d(B_i) < \delta\right\} \\ &= H_{p,\delta}(B). \blacksquare \end{aligned}$$

1.6.3. Medidas de Hausdorff en \mathbb{R}^n .

Un caso especialmente importante lo tenemos para el espacio métrico \mathbb{R}^n , con la métrica euclídea $d(x, y) = \sqrt{\sum (y_i - x_i)^2}$.

Lema 1.6.8 Sea $B = B[0, 1]$ la bola unidad cerrada de \mathbb{R}^n , m la medida de Lebesgue y $Q = [0, 1]^n$ el cubo unidad, entonces

$$\frac{1}{m[B]} \leq H_n(Q) \leq (\sqrt{n})^n.$$

Demostración. Veamos primero que $1/m[B] \leq H_{n,\delta}(Q)$, para ello sea $\delta > 0$ y consideremos un recubrimiento A_i de Q , con $d(A_i) < \delta$ y veamos que $1 \leq m[B] \sum d(A_i)^n$.

Para cada i elegimos un $x_i \in A_i$ y la bola $B_i = B[x_i, r_i] = x_i + r_i B$, con $r_i = d(A_i)$, por tanto $A_i \subset B_i$, $Q \subset \cup A_i \subset \cup B_i$ y por (1.5.18), pág.38 y (1.5.4), pág.39, $m[B_i] = m[r_i B] = d(A_i)^n m[B]$, por lo que

$$1 = m[Q] \leq m[\cup B_i] \leq \sum m[B_i] = m(B) \sum d(A_i)^n,$$

y tomando el ínfimo se tiene el resultado.

Ahora para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos dividir cada lado $[0, 1]$ en m intervalos

$$\left[0, \frac{1}{m}\right], \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right], \dots, \left[\frac{m-1}{m}, 1\right],$$

de tal forma que Q se descompone en unión de m^n cubos Q_i , que son traslaciones de $Q_1 = [0, 1/m]^n$. Como además dados $x, y \in [0, r]^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$, con $b_i = r$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{nr^2} = r\sqrt{n} = d(0, b),$$

tendremos que $d(Q_i) = \sqrt{n}/m$ y para cada δ y m tales que $\sqrt{n}/m < \delta$

$$H_{n,\delta}(Q) \leq \sum_{i=1}^{m^n} d(Q_i)^n = (\sqrt{n})^n,$$

por tanto $H_n(Q) \leq (\sqrt{n})^n$. ■

Teorema 1.6.9 *Existe una constante $\gamma_n > 0$, tal que $\gamma_n H_n$ es la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n .*

Demostración. Es consecuencia de (1.5.19) pues H_n es invariante por simetrías —en particular por traslaciones—, y por el lema anterior $0 < H_n(Q) < \infty$, para el cubo unidad $Q = [0, 1]^n$. ■

Nota 1.6.10 Veremos en la pág.229 que las constantes del resultado anterior son

$$\gamma_n = m(B) = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(1 + (n/2))},$$

para $B = B_2[0, 1/2]$ la bola cuadrática de \mathbb{R}^n de diámetro 1 (radio 1/2).

No obstante el caso $n = 1$ es elemental. Veamos que $\gamma_1 = 1$, es decir que $H_1 = m_1$ ó equivalentemente que $H_1[0, 1] = 1$. Para ello sabemos por el Lema anterior (1.6.8), que $H_1[0, 1] \leq 1$, para ver la otra desigualdad observemos que para $A \subset \mathbb{R}$, $A \subset [\inf A, \sup A] = I$, por tanto $m^*(A) \leq m^*(I) = d(A)$. Ahora consideremos un $\delta > 0$ y un recubrimiento numerable B_i de $[0, 1]$, con $d(B_i) \leq \delta$, entonces

$$1 = m^*[0, 1] \leq \sum m^*[B_i] \leq \sum d(B_i),$$

por tanto $1 \leq H_{1,\delta}[0, 1] \leq H_1[0, 1]$.

El resultado anterior nos induce a definir las medidas de \mathbb{R}^n :

$\gamma_1 H_1 = H_1$, que nos da la longitud de curvas de \mathbb{R}^n ;

$\gamma_2 H_2$, que nos da el área de superficies de \mathbb{R}^n , etc.

Veremos en la pág.220 un método práctico para el cálculo de estas medidas mediante la integral de Lebesgue.

1.6.4. Conjuntos p -dimensionales

Para cada $p \in (0, 1)$, vamos a construir un conjunto

$$B \subset [0, 1] \subset \mathbb{R},$$

tal que $H_p(B) = 1$, por tanto de dimensión Hausdorff p .

Para ello sea $q = 1/p > 1$, y consideremos la función convexa $f(x) = x^q$ y definamos $a_n = f(1/2^n)$, por tanto $a_n^p = 1/2^n$, de donde $2a_n^p = a_{n-1}^p$ y $a_{n-1} = 2^{1/p} a_n > 2a_n$.

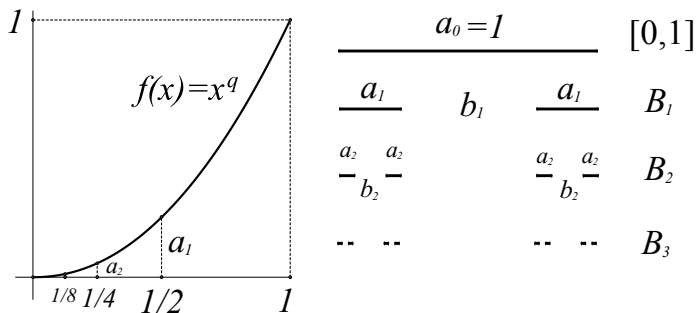


Figura 1.6.

Por ser $a_{n-1} > 2a_n$, se sigue que en cada intervalo de longitud a_{n-1} podemos incluir dos de longitud a_n y aun nos queda espacio para incluir otro de longitud $b_n = a_{n-1} - 2a_n$ (ver fig. 1.6). De este modo podemos considerar la sucesión contractiva $B_n \subset [0, 1]$

$$B_1 = [0, a_1] \cup [1 - a_1, 1] = I_{1,1} \cup I_{1,2},$$

$$B_2 = [0, a_2] \cup [a_1 - a_2, a_1] \cup [1 - a_1, 1 - a_1 + a_2] \cup [1 - a_2, 1] = \cup_{j=1}^4 I_{2,j},$$

$$B_n = \cup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}, \dots$$

de uniones disjuntas de 2^n intervalos cerrados $I_{n,j}$ de igual longitud a_n , que consideramos ordenados y cada dos de ellos seguidos, $I_{n,j}$ e $I_{n,j+1}$, espaciados entre si uno de los n valores

$$(1.3) \quad b_n < \dots < b_i = a_i - 2a_{i+1} < \dots < b_1.$$

Nuestro conjunto B es su intersección, $B_n \downarrow B$.

A continuación desarrollamos unos resultados previos.

Lema 1.6.11 (Número de Lebesgue) *Si K es un compacto de \mathbb{R}^n y A_i es una colección de abiertos tales que $K \subset \cup A_i$, entonces existe un $\epsilon > 0$, tal que para todo $x \in K$ existe un i para el que $B(x, \epsilon) \subset A_i$.*

Demostración. En caso contrario para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que la bola $B(x_n, 1/n)$ no está en ningún A_i . Ahora bien por ser K compacto, x_n tiene una subsucesión x_{n_k} convergente a un $x \in K$, que por tanto está en algún A_i , para el que, al ser abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A_i$. Ahora tomando k suficientemente grande, tal que $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$ y $1/n_k < \epsilon/2$, tendremos que $B(x_{n_k}, 1/n_k) \subset B(x, \epsilon) \subset A_i$ lo cual es una contradicción. ■

Lema 1.6.12 *Dados $0 < a < b < c$ y $p \in (0, 1)$, se tiene que $(a-b+c)^p > a^p - b^p + c^p$.*

Demostración. Sea $d = a-b+c$, entonces $a < b$, $d < c$, siendo $d+b = a+c$, y para $\lambda = (c-b)/(c-a) \in (0, 1)$, se tiene que $\lambda a + (1-\lambda)c = b$ y $\lambda c + (1-\lambda)a = d$. El resultado se sigue por la estricta concavidad de $f(x) = x^p$, pues

$$f(b) = f(\lambda a + (1-\lambda)c) > \lambda f(a) + (1-\lambda)f(c),$$

$$f(d) = f(\lambda c + (1-\lambda)a) > \lambda f(c) + (1-\lambda)f(a),$$

y sumando se tiene $d^p + b^p > a^p + c^p$. ■

Lema 1.6.13 Si $F \subset \mathbb{N}_n = \{1, \dots, 2^n\}$ tiene m elementos y A es un intervalo tal que $\cup_{j \in F} I_{n,j} \subset A$, entonces $d(A)^p \geq m \cdot d(I_{n,j})^p$.

Demostración. Lo haremos por inducción en $\text{card } F$. Si $\text{card } F = 1$ es obvio. Sea $m < 2^n$ y supongamos que es cierto para $\text{card } F = m$ y veamos que es cierto si $F = \{j_1, j_2, \dots, j_{m+1}\}$ tiene $m+1$ elementos que consideramos ordenados. Sea $F' = F \setminus \{j_{m+1}\}$ y sea I el mínimo intervalo cerrado que contiene a $\cup_{j \in F'} I_{n,j}$. Por (1.3) tenemos que entre I e $I_{n,j_{m+1}}$ hay un intervalo de longitud mayor o igual que $b_n = a_{n-1} - 2a_n$ y por tanto

$$d(A) \geq d(I) + b_n + a_n = d(I) + a_{n-1} - a_n,$$

y se sigue del Lema (1.6.12) y la hipótesis de inducción que

$$d(A)^p \geq (d(I) + a_{n-1} - a_n)^p > d(I)^p - a_n^p + a_{n-1}^p = d(I)^p + a_n^p \geq (m+1)a_n^p. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.6.14 Se tiene que $H_p(B) = 1$, en particular $\dim_H(B) = p$.

Demostración. Dado $\delta > 0$ sea n tal que $a_n = 1/2^{nq} < \delta$, entonces $B \subset \cup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$, siendo $d(I_{n,j}) = a_n < \delta$, por tanto

$$H_{p,\delta}(B) \leq \sum_{j=1}^{2^n} d(I_{n,j}^p) = 2^n a_n^p = 1,$$

y tomando límite $H_p(B) \leq 1$.

Ahora para la otra desigualdad consideremos un $\delta > 0$ y observemos que

$$H_{p,\delta}(B) = \inf \left\{ \sum d(A_i)^p, B \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \text{ intervalo abierto}, d(A_i) < \delta \right\},$$

ahora tomando cualquiera de los números $\sum d(A_i)^p$ del conjunto, tendremos que los intervalos abiertos A_i recubren al compacto B (pues es cerrado y acotado) y aplicando el Lema del Número de Lebesgue (1.6.11), existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in B$ existe un i para el que $B(x, \epsilon) \subset A_i$. Ahora tomemos n suficientemente grande para que $a_n < \epsilon/2$ y veamos que todo $I_{n,j}$ está en algún A_i . Para ello tenemos que $B \subset B_n = \cup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$ y si $x \in B \cap I_{n,j}$ (que es no vacío pues los extremos de los intervalos $I_{n,j}$ están en B), como $B \subset \cup A_i$, existe un i tal que $x \in A_i$ y como $d(I_{n,j}) = a_n < \epsilon/2$, tendremos que $I_{n,j} \subset B(x, \epsilon) \subset A_i$.

Consideremos ahora la colección disjunta cuya unión es $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, 2^n\}$

$$\begin{aligned} J_1 &= \{j \in \mathbb{N}_n : I_{n,j} \subset A_1\}, \\ J_2 &= \{j \in \mathbb{N}_n \setminus J_1 : I_{n,j} \subset A_2\}, \dots \\ J_i &= \{j \in \mathbb{N}_n \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_{i-1}) : I_{n,j} \subset A_i\}, \dots \end{aligned}$$

de este modo cada $j \in \mathbb{N}_n$ está en un único J_i y por tanto cada intervalo $I_{n,j}$ en un único A_i y cada A_i contiene una colección (que puede ser vacía) de intervalos $I_{n,j}$ para la que se tiene por el Lema (1.6.13)

$$d(A_i)^p \geq \sum_{j \in J_i} d(I_{n,j})^p, \quad \text{por tanto} \quad \sum_{j=1}^{2^n} d(A_i)^p \geq \sum_{j=1}^{2^n} d(I_{n,j})^p = 1,$$

de donde se sigue que $H_{p,\delta}(B) \geq 1$ y se tiene el resultado. ■

Nota 1.6.15 En particular tenemos que para $a_1 = 1/3$, el conjunto B es el de Cantor (ver la pág. 9), y como $a_1^p = 1/2$, tendremos que $3^p = 2$ y $p = \log_3 2$.

Ejercicios

Ejercicio 1.6.1 Demostrar que para $p = 0$, H_p es la medida de contar. (Sol.)

Ejercicio 1.6.2 Sea $\Omega' \subset \Omega$ y consideremos el espacio métrico (Ω', d) , con la métrica inducida. Demostrar que la medida exterior de Hausdorff en Ω' , $H'_p = H_{p|\mathcal{P}(\Omega')}$. (Sol.)

Ejercicio 1.6.3 Demostrar que si $A \subset \Omega$ y $0 < H_p(A) < \infty$, $\dim_H(A) = p$.

Ejercicio 1.6.4 Demostrar que $\dim_H(\{x\}) = 0$, para cada $x \in \Omega$. (Sol.)

Ejercicio 1.6.5 Demostrar que $\dim_H(\cup A_n) = \sup \dim_H(A_n)$. (Sol.)

Ejercicio 1.6.6 En los subespacios de \mathbb{R}^n con la métrica euclídea, demostrar que la dimensión vectorial y la de Hausdorff coinciden. (Sol.)

1.6.5. Longitud de curvas de \mathbb{R}^n .

En esta lección veremos la relación entre $H_1(C)$ para una curva continua $C \subset \mathbb{R}^n$ y el límite de longitudes de líneas poligonales con vértices en C .

Definición. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de extremos a, b , abierto ó cerrado $I = (a, b)$ ó $I = [a, b]$ y $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua. Dado $T \subset I$, un subconjunto finito y ordenado ($T = \{t_0 < \dots < t_m\} \subset I$), denotaremos la *longitud de la poligonal* correspondiente, con

$$p(T) = \sum_{i=1}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

y definimos la *longitud* de $C = \sigma(I)$, como

$$L(C) = \sup\{p(T) : T \subset I \text{ finito}\},$$

del mismo modo, para $t < s \in I$, denotamos

$$C_{at} = \{\sigma(r) : r \in I, r \leq t\}, \quad \text{y} \quad C_{ts} = \sigma[t, s],$$

y respectivamente, de forma análoga y obvia, sus longitudes $L(C_{at}), L(C_{ts})$.

Teorema 1.6.16 *Si $t < s \in I$, entonces $L(C_{as}) = L(C_{at}) + L(C_{ts})$.*

Demostración. "≥". Un subconjunto finito $T_1 \subset [a, t]$ ¹⁵ y otro $T_2 \subset [t, s]$, definen uno $T = T_1 \cup T_2$ en $[a, t]$ con poligonal $p(T) \geq p(T_1) + p(T_2)$, por tanto se tiene el ≥.

"≤". Dado $T = \{t_0 < \dots < t_m\} \subset [a, s]$, ocurre una de tres: que $t_m < t$, que $t < t_0$ (en cuyo caso $p(T) \leq L(C_{at}) + L(C_{ts})$) ó existe un k tal que $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ siendo en este caso

$$\begin{aligned} p(T) &\leq \sum_{i=1}^k \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| + \|\sigma(t) - \sigma(t_k)\| + \|\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t)\| + \\ &\quad + \sum_{i=k+2}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| \leq L(C_{at}) + L(C_{ts}), \end{aligned}$$

lo cual prueba la otra desigualdad ≤. ■

¹⁵ó $(a, t]$ si I es abierto. No volveremos a hacer esta distinción dándola por supuesto.

A continuación vemos la relación entre las dos “longitudes”, $H_1(C)$ y $L(C)$, pero antes necesitamos un resultado previo.

Lema 1.6.17 *Si $F: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq c\|x - y\|^\alpha,$$

con $c, \alpha > 0$ fijos y para todo $x, y \in U$, entonces para todo $B \subset U$, y todo $p > 0$,

$$H_{p/\alpha}[F(B)] \leq c^{p/\alpha} H_p[B].$$

Demostración. Por hipótesis $d[F(B)] \leq c d[B]^\alpha$, por tanto $d[F(B)]^{p/\alpha} \leq c^{p/\alpha} d[B]^p$. Ahora tomando $B_i \subset U$, con $d[B_i] \leq \delta$ y $B \subset \cup B_i$, tendremos que $F(B) \subset \cup F(B_i)$, con $d[F(B_i)] \leq c\delta^\alpha = \epsilon$, por tanto

$$H_{p/\alpha, \epsilon}[F(B)] \leq \sum d[F(B_i)]^{p/\alpha} \leq c^{p/\alpha} \sum d(B_i)^p,$$

por tanto $H_{p/\alpha, \epsilon}[F(B)] \leq c^{p/\alpha} H_{p, \delta}(B)$ y el resultado se sigue haciendo $\delta \rightarrow 0$. ■

Teorema 1.6.18 *Siempre se tiene que $L(C) \leq H_1(C)$ y si σ es inyectiva (salvo en un número finito de puntos), entonces $L(C) = H_1(C)$.*

Demostración. Por (1.6.16) se tiene que la función

$$l: I \rightarrow [0, L(C)], \quad l(t) = L(C_{at}) = L(\{\sigma(s) : s \in I, s \leq t\}),$$

es monótona creciente¹⁶. Veamos que si l es finita es continua, mas concretamente si $l(r_0) < \infty$, l es continua en los $t < r_0$ de I .

Por la continuidad de σ , dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $|t - r| < \delta$, $\|\sigma(t) - \sigma(r)\| \leq \epsilon$, y si $t < r < r_0$ existe $T = \{t_0 < \dots < t_m = r\} \subset I$, tal que

$$l(r) - \epsilon < p(T) \leq l(r),$$

y sin pérdida de generalidad podemos suponer que uno de los puntos de la partición es $t_k = t$ y que $t_{k+1} - t < \delta$ (para ello si es necesario metemos dos puntos más, con lo que la suma aumenta), por tanto

$$\begin{aligned} l(r) &< \sum_{i=1}^k \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| + 2\epsilon + \sum_{i=k+2}^m \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| \\ &\leq l(t) + 2\epsilon + l(r) - l(t_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad l(t_{k+1}) \leq l(t) + 2\epsilon, \end{aligned}$$

¹⁶Además lo es estrictamente en los t en los que es finita, a menos que σ sea constante en $[t, t + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$

y para los $t \leq s < t_{k+1}$, tendremos por ser l monótona creciente que

$$l(t) \leq l(s) \leq l(t_{k+1}) \leq l(t) + 2\epsilon,$$

y tenemos la continuidad a la derecha.

Para ver la continuidad a la izquierda, dado $\epsilon > 0$ existe $T = \{t_0 < \dots < t_{n+1} = t\}$ (introduciendo puntos si es necesario) tal que

$$l(t) - \epsilon \leq p(T) \leq l(t) \quad y \quad \|\sigma(t) - \sigma(t_n)\| \leq \epsilon,$$

por tanto para $Q = \{t_0, \dots, t_n\}$

$$l(t) - \epsilon \leq p(T) = p(Q) + \|\sigma(t) - \sigma(t_n)\| \leq p(Q) + \epsilon \leq l(t_n) + \epsilon \leq l(t) + \epsilon,$$

De dónde $0 \leq l(t) - l(t_n) \leq 2\epsilon$ lo cual implica la continuidad a la izquierda.

Ahora si $l: I \rightarrow [0, L(C)]$, es finita, entonces por lo anterior es continua y como es estrictamente creciente su imagen es un intervalo, que es compacto $J = [0, L(C)]$, si $I = [a, b]$ es compacto, ó abierto $J = (0, L(C))$, si $I = (a, b)$ es abierto. Denotemos su inversa con $g: J \rightarrow I$ para la composición $f = \sigma \circ g: J \rightarrow \mathbb{R}^n$, tendremos que

$$\|f(s) - f(s')\| \leq |s - s'|$$

por tanto se sigue de (1.6.17) y de (1.6.10), la desigualdad

$$H_1(C) = H_1[f(J)] \leq H_1[J] = H_1[0, L(C)] = L(C).$$

Por otra parte para R la recta que pasa por $x, y \in \mathbb{R}^n$, para el segmento que los une $[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0, 1]\}$, y para $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow R$ la proyección ortogonal a R , se sigue de (1.6.10) y de (1.6.17), para $p = \alpha = c = 1$ que

$$\|x - y\| = H_1[x, y] \leq H_1[\pi(C_{xy})] \leq H_1(C_{xy}),$$

por tanto para todo $T = \{t_0 < \dots < t_m\} \subset I$, y $x_i = \sigma(t_i)$ y si σ es inyectiva (salvo en una colección finita de puntos, por lo que $C_{x_i x_{i-1}}$ son esencialmente disjuntos, pues se cortan a lo sumo en un número finito de puntos) que

$$p(T) = \sum_{i=1}^n \|x_i - x_{i-1}\| \leq \sum_{i=1}^n H_1[C_{x_i x_{i-1}}] = H_1(C),$$

y se sigue la otra desigualdad $L(C) \leq H_1(C)$. ■

Ejemplo 1.6.19 Consideremos la curva $\sigma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\sigma(t) = (t, 0)$ para $t \in [-1, 0]$ y $\sigma(t) = (t, t \operatorname{sen}(\pi/t))$, para $t \in (0, 1]$. Demostrar que es continua y que en los términos anteriores $l(t) = 1 + t$, para $t \in [-1, 0]$ y $l(t) = \infty$ para $t \in (0, 1]$.

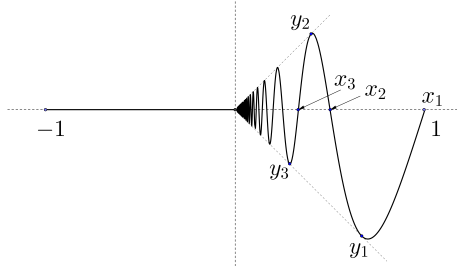


Figura 1.7.

Indicación.- La continuidad es obvia en $[-1, 0) \cup (0, 1]$ y en el 0 por la izquierda, por tanto falta verla por la derecha en 0, lo cual también es obvio pues para $t > 0$, $\|\sigma(t)\| \leq t\sqrt{2}$. Para ver que $l(t) = \infty$ para $t > 0$, consideremos

$$x_n = \sigma\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}, 0\right), \quad y_n = \sigma\left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}}, (-1)^n \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right).$$

Para los que $\|x_n - y_n\| \geq 1/(n+1)$, por tanto

$$\infty = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \|x_n - y_n\| \leq l(1/m). \quad \blacksquare$$

1.7. Apéndice

1.7.1. Conjuntos de \mathcal{F}_δ y de \mathcal{F}_σ

Definición. Dada una clase \mathcal{F} de conjuntos de Ω , denotaremos con

$$\mathcal{F}_\delta, \quad \mathcal{F}_\sigma,$$

las familias de las intersecciones numerables y uniones numerables respectivamente, de elementos de \mathcal{F} .

Estas clases de conjuntos juegan un papel importante en el estudio de la relación entre topología y medida (cuestión que trataremos en el Tema 10, pág.325). Por ahora veamos algunas relaciones conjuntistas entre estas familias.

Denotemos con \mathcal{C} y \mathcal{A} respectivamente las familias de los cerrados y de los abiertos de \mathbb{R}^n .

Proposición 1.7.1 *En los términos anteriores se tiene que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_\sigma, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_\delta, \quad \mathcal{A}_{\delta\delta} = \mathcal{A}_\delta, \quad \mathcal{C}_{\sigma\sigma} = \mathcal{C}_\sigma, \dots \\ \mathcal{A} &\subset \mathcal{A}_\delta \subset \mathcal{A}_{\delta\sigma} \subset \mathcal{A}_{\delta\sigma\delta} \subset \dots \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{C} &\subset \mathcal{C}_\sigma \subset \mathcal{C}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{C}_{\sigma\delta\sigma} \subset \dots \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

donde en las dos últimas filas queremos indicar que cada uno de los dos conjuntos a la izquierda de \subset está contenido en cada uno de los de la derecha y por tanto corresponden a cuatro inclusiones.

Nota 1.7.2 Como consecuencia del *Teorema de la categoría*¹⁷ de Baire, que se verá en Análisis Funcional, puede probarse sin dificultad que

$$\mathbb{Q} \in \mathcal{C}_\sigma, \quad \mathbb{Q} \notin \mathcal{A}_\delta$$

pues en caso contrario tendríamos abiertos V_n tales que

$$\mathbb{Q} = \bigcap V_n, \quad \mathbb{R} = \bigcup V_n^c \cup \mathbb{Q} = \bigcup V_n^c \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\} \cup \dots$$

y por el Teorema de Baire algún V_n^c tendría interior no vacío, siendo $V_n^c \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicios

Ejercicio 1.7.1 Demostrar que para cada función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: (a) El conjunto de puntos de continuidad de f , $C(f) \in \mathcal{A}_\delta$ y los de discontinuidad $D(f) \in \mathcal{C}_\sigma$. (b) Demostrar que $C(f)$ y $D(f)$ son borelianos. (Sol.)

¹⁷Este resultado dice que si un espacio métrico completo \mathcal{X} es unión de una sucesión de cerrados U_n , entonces para algún n , $\overset{\circ}{U}_n$ es no vacío (ver Ash, pág.398).

1.7.2. Cargas.

También hay medidas que toman valores negativos —un ejemplo en la física es la carga eléctrica—, pero preferimos no llamarlas medidas para evitar confusión.

Definición. Llamaremos *carga* en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , a toda función $\mu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$, numerablemente aditiva y tal que $\mu(\emptyset) = 0$ (como para las medidas la llamaremos *carga aditiva* si es aditiva). Obviamente las medidas son las cargas no negativas.

Nota 1.7.3 Entendemos que la suma en $\overline{\mathbb{R}}$, es la de \mathbb{R} y

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a - \infty = -\infty + a = -\infty, \quad \text{para } a \in \mathbb{R},$$

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

(para $a - b = a + (-b)$) y $\infty - \infty$ no está definido, además extendemos el orden siendo $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así se tiene por ejemplo que si $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ y $a + b, c + d$ están bien definidos entonces

$$(1.4) \quad a \leq c, \quad b \leq d \quad \Rightarrow \quad a + b \leq c + d.$$

Por otra parte observemos que toda carga (en particular toda medida) es aditiva, pues como $\mu(\emptyset) = 0$ tendremos que para A y B disjuntos

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots) = \mu(A) + \mu(B),$$

y por tanto aunque hubiésemos puesto que el rango de μ fuese $\overline{\mathbb{R}}$, el hecho es que si es aditiva el rango no puede contener ambos extremos infinitos, pues si existe A con $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c) = \infty$ y si existe A con $\mu(A) = -\infty$, entonces $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c) = -\infty$.

Por último observemos que si $\mu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ es numerablemente aditiva, entonces es una carga —salvo que sea degenerada y sólo tome el valor $\mu(A) = \infty$ para todo $A \in \mathcal{A}$ —, pues si existe un medible A con $\mu(A) \in \mathbb{R}$, tendremos

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots) = \mu(A) + \sum \mu(\emptyset),$$

y por tanto $\mu(\emptyset) = 0$.

Las cargas conservan algunas de las propiedades de las medidas.

Proposición 1.7.4 Sea μ una carga en (Ω, \mathcal{A}) , con \mathcal{A} anillo, entonces para $A, B, A_n, \cup A_n \in \mathcal{A}$:

- (a) $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$.
- (b) Si $A \subset B$ entonces $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.
- (c) Si $A \subset B$ y $\mu(A) = \infty$, entonces $\mu(B) = \infty$.
- (d) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (e) Si $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.
- (f) Si $A_n \downarrow A$ y $|\mu(A_1)| < \infty$, entonces $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Nota 1.7.5 Se sigue de (1.3.9)–(d) que una medida aditiva μ en un álgebra es acotada si y sólo si es finita, es decir que

$$\mu(\Omega) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mu(A) < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

tal resultado no es cierto en general si quitamos la no negatividad (ver prob.4 del Ash,p.12). Sin embargo veremos en (4.2.8) de la página 165, que sí es cierto para cargas sobre σ -álgebras.

Igual que para las medidas, si de una carga μ sólo sabemos que es aditiva, el siguiente resultado, que se demuestra como (1.3.12), nos dice cuando es numerablemente aditiva.

Teorema 1.7.6 Una carga aditiva μ sobre un anillo \mathcal{A} es numerablemente aditiva, si se verifica una de las dos condiciones:

- (a) μ es continua superiormente, es decir dados $A_n, A \in \mathcal{A}$ con $A_n \uparrow A$, $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.
- (b) μ es continua inferiormente en el \emptyset , es decir si dados $A_n \in \mathcal{A}$, con $A_n \downarrow \emptyset$, se tiene $\mu(A_n) \rightarrow 0$.

1.7.3. Propiedades de haz en los espacios de medida.

Definición. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Llamamos *restricción del espacio de medida* a un conjunto medible $B \in \mathcal{A}$, al nuevo espacio de medida $(B, \mathcal{A}_B, \mu|_B)$, para

$$\mathcal{A}_B = \{A \in \mathcal{A} : A \subset B\}, \quad \mu|_B(A) = \mu(A).$$

Proposición 1.7.7 *Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y una colección $(U_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha)$ de espacios de medida, con los $U_\alpha \in \mathcal{A}$ un recubrimiento de Ω y $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} \cap U_\alpha$ y las medidas tales que $\mu_\alpha = \mu_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$. Si existe un subrecubrimiento numerable de Ω , $U_n = U_{\alpha_n}$, entonces existe una única medida μ en \mathcal{A} que por restricción en cada U_α define μ_α .*

Demostración. Consideramos los medibles disjuntos $B_n = U_n \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} U_i)$ y definimos en \mathcal{A}

$$\mu(A) = \sum \mu_n(A \cap B_n),$$

la cual es medida, pues si $A_m \in \mathcal{A}$, son disjuntos y $A = \cup A_m$,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_n \mu_n(A \cap B_n) = \sum_n \sum_m \mu_n(A_m \cap B_n) \\ &= \sum_m \sum_n \mu_n(A_m \cap B_n) = \sum_m \mu(A_m). \end{aligned}$$

Coincide con μ_α en cada U_α , pues si $A \in \mathcal{A}_\alpha$,

$$\mu(A) = \sum \mu_n(A \cap B_n) = \sum \mu_\alpha(A \cap B_n) = \mu_\alpha(A).$$

Y es única pues si λ es otra tendremos que

$$\lambda(A) = \sum_n \lambda(A \cap B_n) = \sum_n \mu_n(A \cap B_n) = \sum_n \mu(A \cap B_n) = \mu(A). \quad \blacksquare$$

En los libros de TJUR, p.23 y LANG, p.339 se demuestra (ver el tema de medida y topología), que si Ω es *Hausdorff* y *localmente compacto* y los U_i son un recubrimiento por abiertos de Ω tal que la restricción a $U_i \cap U_j$ de $(U_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ y $(U_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ coinciden —donde las medidas μ_i satisfacen ciertas propiedades de regularidad—, entonces se puede construir un único espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ cuya restricción a cada U_i es $(U_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$.

1.7.4. Aproximación de medibles

Observemos que la idea intuitiva de construir $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ tomando complementarios y uniones e intersecciones numerables, en todas las formas posibles, con elementos de \mathcal{C} , sugiere que si \mathcal{C} es un álgebra \mathcal{A}_0 , entonces los conjuntos de \mathcal{A} debieran aproximarse bien por conjuntos de \mathcal{A}_0 . Esto realmente es así como a continuación formalizamos.

Definición. Llamaremos *diferencia simétrica* de dos conjuntos $A, B \subset \Omega$ al conjunto

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Teorema de aproximación 1.7.8 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_0 un álgebra de conjuntos de Ω tal que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$. Si μ es σ -finita en \mathcal{A}_0 y $\epsilon > 0$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) < \infty$, existe $B \in \mathcal{A}_0$ tal que $\mu(A \Delta B) < \epsilon$.

Demostración. Aplicando los teoremas de extensión de Caratheodory y de Hahn, tendremos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_*$ y $\mu = \mu^*$ en \mathcal{A} , por tanto

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : B_n \in \mathcal{A}_0, A \subset \cup B_n \right\},$$

y existe una sucesión $B_n \in \mathcal{A}_0$, tal que $A \subset \cup B_n = B \in \mathcal{A}$ y

$$\mu(A) \leq \mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \mu(A) + \frac{\epsilon}{2} < \infty,$$

ahora eligiendo $E_n = \cup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{A}_0$ tendremos que $E_n \uparrow B$ y que $\mu(E_n) \rightarrow \mu(B)$. Ahora basta observar que

$$\begin{aligned} \mu(A \Delta E_n) &= \mu(A \cap E_n^c) + \mu(A^c \cap E_n) \\ &\leq \mu(B \cap E_n^c) + \mu(A^c \cap B) \\ &\leq \mu(B) - \mu(E_n) + \mu(B) - \mu(A), \end{aligned}$$

y tomando $\mu(B) - \mu(E_n) \leq \epsilon/2$ se sigue el resultado. ■

Remitimos al lector a la pág. 21 del ASH donde se da un ejemplo en el que la medida no es σ -finita en el álgebra y los teoremas de Caratheodory y de aproximación no se satisfacen.

1.7.5. Completación

Definición. Diremos que un medible B de un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es *nulo* si $\mu(B) = 0$ y diremos que el espacio es *completo* si son medibles los subconjuntos de los conjuntos medibles nulos.

Ejemplo 1.7.9 Dada una medida exterior μ^* en Ω , vimos en el Teorema de Caratheodory (1.4.7) de la página 23, que $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ era completo.

Definición. Diremos que una propiedad *se verifica casi seguro respecto de μ* (c.s. (\mathcal{A}, μ) ó c.s. si no hay confusión), si el conjunto C de puntos donde no se verifica la propiedad está en un medible, $C \subset B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) = 0$.

Nota 1.7.10 Observemos que C no es necesariamente medible, pero sí lo es si el espacio es completo. En cualquier caso, si C es medible, $\mu(C) = 0$.

Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, podemos completarlo siguiendo la siguiente construcción. Consideramos

$$\mathcal{A}_\mu = \{E \subset \Omega : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset A \cup B \text{ y } \mu(B) = 0\},$$

y extendemos μ a \mathcal{A}_μ de la forma

$$\mu(E) = \mu(A),$$

para cada $A \in \mathcal{A}$ como en la definición (demuestre el lector que está bien definida, es decir que si $A \subset E \subset A \cup B$ y $C \subset E \subset C \cup D$, con $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) = \mu(D) = 0$, entonces $\mu(A) = \mu(C)$). Se tiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 1.7.11 $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ es un espacio de medida completo al que llamaremos *compleción de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$* .

Demostración. En primer lugar se tiene que $\Omega \in \mathcal{A}_\mu$. Veamos que es cerrado por paso al complementario, si $E \in \mathcal{A}_\mu$, con $A \subset E \subset A \cup B$, $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) = 0$ entonces $\mu(A^c \cap B) = 0$ y

$$(A \cup B)^c \subset E^c \subset A^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B)^c \cup (A^c \cap B),$$

por tanto $E^c \in \mathcal{A}_\mu$. Veamos ahora que es cerrado para uniones numerables; consideremos una sucesión $E_n \in \mathcal{A}_\mu$, con $A_n \subset E_n \subset A_n \cup B_n$, $A_n, B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(B_n) = 0$ entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right),$$

y $\bigcup E_n \in \mathcal{A}_\mu$. Veamos ahora que μ es una medida en \mathcal{A}_μ . Obviamente es no negativa y $\mu(\emptyset) = 0$, falta ver la numerable aditividad. Consideremos

una sucesión $E_n \in \mathcal{A}_\mu$, de conjuntos disjuntos entonces en los términos anteriores los A_n también son disjuntos y

$$\mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Por último veamos que es completo. Sea $E \in \mathcal{A}_\mu$ tal que $\mu(E) = 0$ y $C \subset E$. Ahora como existen $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset E \subset A \cup B$, $\mu(B) = 0$ y $\mu(E) = \mu(A) = 0$, tendremos que $\emptyset \subset C \subset A \cup B$ y $\mu(A \cup B) = 0$, por tanto $C \in \mathcal{A}_\mu$. ■

La extensión $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$, de $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu)$ en el teorema (1.4.7) es completa por la Nota (1.4.6). A continuación veremos de quien es completión $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$.

Teorema 1.7.12 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu)$ un espacio de medida con \mathcal{A}_0 anillo y μ σ -finita. Entonces el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ es la completión de $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}_0), \mu^*)$.*

Demostración. Denotemos $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ y sigamos llamando $\mu = \mu^*_{|\mathcal{A}}$ a la extensión (única) de nuestra medida μ en el anillo. Tenemos que ver que $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_\mu$, siendo obvia la inclusión $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_*$, pues $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A} \cup \mathcal{N}$, para $\mathcal{N} = \{N \subset A : A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0\}$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_*$ y \mathcal{A}_* es completo.

Veamos ahora la inclusión contraria, en primer lugar observemos que para cada $A \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : A \subset \bigcup B_n, B_n \in \mathcal{A}_0\right\} \\ &= \inf\{\mu^*(B) : A \subset B \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}, \\ &= \min\{\mu^*(B) : A \subset B \in \sigma(\mathcal{A}_0)\}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene porque dados $A \subset \bigcup B_n, B_n \in \mathcal{A}_0$, tendremos que $B = \bigcup B_n \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ y

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),$$

y la tercera igualdad porque el ínfimo se alcanza ya que podemos considerar para cada n un $B_n \in \mathcal{A}$, con $A \subset B_n$ tal que $\mu^*(B_n) \downarrow \mu^*(A)$ y $A \subset \bigcap B_n = B \in \mathcal{A}$, por tanto $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. En definitiva tenemos que dado cualquier $A \subset \Omega$, existe un $B \in \mathcal{A}$, tal que $A \subset B$ y $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

Como consecuencia tenemos que si $E \in \mathcal{A}_*$, entonces existe un $B \in \mathcal{A}$, tal que $E \subset B$ y $\mu^*(B \setminus E) = 0$. Esto es obvio si $\mu^*(E) < \infty$, pues $\mu^*(B) = \mu^*(E) + \mu^*(B \setminus E)$. En general consideremos una sucesión $A_n \in \mathcal{A}_0$, tal que $\mu(A_n) < \infty$ y la $\cup A_n = \Omega$, entonces por el caso finito como $E_n = E \cap A_n \in \mathcal{A}_*$ y $\mu^*(E_n) < \infty$, existen $B_n \in \mathcal{A}$ tales que

$$E_n \subset B_n, \quad \mu^*(B_n \setminus E_n) = 0,$$

por tanto $E = \cup E_n \subset B = \cup B_n \in \mathcal{A}$ y $\mu^*(B \setminus E) = 0$, pues

$$B \cap E^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E^c) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E_n^c),$$

ahora el mismo argumento aplicado a E^c prueba que existe $A^c \in \mathcal{A}$ tal que $E^c \subset A^c$, es decir $A \subset E$ y $\mu^*(E \setminus A) = \mu^*(A^c \setminus E^c) = 0$. Se sigue que $A \subset E \subset B$ y $\mu^*(B \setminus A) = 0$, por tanto $E \in \mathcal{A}_\mu$. ■

Nota 1.7.13 Debe observarse que aunque reemplazar un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ por su completión $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \mu)$, nos quita ciertos problemas, lo cierto es que introduce otros. Por ejemplo que la σ -álgebra \mathcal{A}_μ es a menudo más complicada que la original, o que al estar la σ -álgebra \mathcal{A}_μ determinada por la medida μ , si en nuestro espacio tenemos dos medidas distintas, en general obtendremos dos σ -álgebras completión distintas, por lo que las medidas extendidas no tendrían en principio el mismo dominio. Esta es una razón que justifica que en los hechos básicos de la teoría de la medida, suelen evitarse argumentos que dependan de la completión.

Ejercicios

Ejercicio 1.7.2 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_μ su completión y μ^* la medida exterior generada por μ . Demostrar que para cada $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, A \subset B\},$$

y que si definimos la “medida interior”

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\},$$

entonces si $A \in \mathcal{A}_\mu$ se tiene que $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ y recíprocamente si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$. (Sol.)

1.7.6. Regularidad.

Veamos algunas propiedades de aproximación de la medida de Lebesgue, de las medidas de *Lebesgue-Stieltjes* y de las σ -finitas.

Definición. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff. Diremos que una medida μ en los borelianos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ es *regular interior* en $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\},$$

diremos que es *regular exterior* en E si

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : A \text{ abierto y } E \subset A\}.$$

Diremos que μ es *regular* si es finita en los compactos y es regular exterior y regular interior en todo boreliano.

Se tienen las siguientes propiedades de una medida de Borel μ en un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$:

Proposición 1.7.14 (a) μ es regular interior en todo σ -compacto.

(b) Sea $A_n \uparrow A$. Si μ es regular interior en A_n , entonces es regular interior en A . Si μ es regular exterior en A_n , entonces es regular exterior en A .

Demostración. (a) Todo σ -compacto E es unión expansiva de compactos $K_n \uparrow E$ —pues la unión finita de compactos es compacto—, y $\mu(K_n) \uparrow \mu(E)$.

(b) Es regular interior pues $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$ y

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset A_n\} \\ &\leq \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset A\} \leq \mu(A) \end{aligned}$$

Si $\mu(A) = \infty$ es regular exterior obviamente. Si $\mu(A) < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe un abierto $V_n \supset A_n$, tal que $\mu(V_n) - \mu(A_n) \leq \epsilon 2^{-n}$ y para el abierto $V = \cup V_n \supset \cup A_n = A$,

$$\mu(V) - \mu(A) = \mu(V \setminus A) \leq \sum \mu(V_n \cap A^c) \leq \sum \mu(V_n \cap A_n^c) \leq \epsilon. \quad \blacksquare$$

Nota 1.7.15 Toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ es obviamente regular exterior en los abiertos, y también regular interior por el resultado siguiente y porque toda medida es regular interior en los σ -compactos (1.7.14).

Lema 1.7.16 *Todo abierto de \mathbb{R}^m es σ -compacto.*

Demostración. Cada abierto V es unión numerable de los compactos

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq n \text{ y } d(x, V^c) \geq 1/n\}. \blacksquare$$

Teorema 1.7.17 *Toda medida finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ es regular.*

Demostración. Haremos uso del *principio de los buenos conjuntos*. Por (1.2.20), pág.11, basta demostrar que

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \mu \text{ es regular en } E\},$$

es álgebra, clase monótona y contiene a los abiertos.

Contiene a los abiertos, en particular $\emptyset, \mathbb{R}^m \in \mathcal{C}$, por el resultado anterior (ver 1.7.15).

$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$: Consideremos una sucesión expansiva de compactos $C_n \uparrow \mathbb{R}^m$, por tanto $C_n^c \downarrow \emptyset$, de donde $\mu(C_n^c) \rightarrow 0$ (pues μ es finita). Ahora para todo $\epsilon > 0$, existe un n tal que $\mu(C_n^c) \leq \epsilon/2$ y existen un compacto K y un abierto V , tales que

$$\begin{cases} K \subset A \subset V \\ \mu(V \setminus K) < \epsilon/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n \cap V^c \subset A^c \subset K^c \\ \mu(K^c \setminus (C_n \cap V^c)) \leq \mu(C_n^c) + \mu(V \setminus K) \leq \epsilon, \end{cases}$$

siendo $C_n \cap V^c$ compacto y K^c abierto.

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$: Para todo $\epsilon > 0$ existen compactos K_A, K_B y abiertos V_A, V_B tales que

$$K_A \subset A \subset V_A \quad \text{y} \quad K_B \subset B \subset V_B,$$

y $\mu(V_A \setminus K_A) \leq \epsilon$, $\mu(V_B \setminus K_B) \leq \epsilon$ y basta considerar el compacto $K = K_A \cup K_B$ y el abierto $V = V_A \cup V_B$, para los que

$$K \subset A \cup B \subset V, \quad \mu(V \setminus K) \leq 2\epsilon.$$

Veamos que es clase monótona.

$$A_n \in \mathcal{C}, A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}: \text{ Se sigue de (1.7.14b).}$$

$A_n \in \mathcal{C}, A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$: Se sigue de que $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$ y lo anterior. \blacksquare

Corolario 1.7.18 *Si μ es σ -finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, es regular interior.*

Demostración. Por el resultado anterior toda medida es regular interior en todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ con $\mu(B) < \infty$, pues la medida $\lambda(A) = \mu(A \cap B)$ es finita y por tanto regular interior, de donde

$$\mu(B) = \lambda(B) = \sup\{\lambda(K) = \mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset B\}.$$

Ahora si μ es σ -finita, entonces todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ es unión expansiva de borelianos B_n de medida finita, por tanto en los que μ es regular interior. El resultado se sigue de (1.7.14b). ■

Teorema 1.7.19 *Si μ es de Lebesgue–Stieltjes en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, entonces es regular.*

Demostración. Toda medida de Lebesgue–Stieltjes es σ -finita y por el corolario anterior es regular interior.

Veamos que es regular exterior: Sea V un abierto con $\mu(V) < \infty$ y $B \subset V$ un boreliano. Si consideramos la medida finita —y por (1.7.17) regular exterior— $\lambda(A) = \mu(A \cap V)$, tendremos

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \lambda(B) = \inf\{\lambda(A) : A \text{ abierto y } B \subset A\} \\ &= \inf\{\mu(A \cap V) : A \text{ abierto y } B \subset A\} \\ &= \inf\{\mu(A) : A \text{ abierto y } B \subset A\}. \end{aligned}$$

por tanto μ es regular exterior en B .

En \mathbb{R}^m existen abiertos V_n , con adherencia compacta (por tanto con $\mu(V_n) < \infty$) y tales que $V_n \uparrow \mathbb{R}^m$ —por ejemplo las bolas centradas en 0 de radio n —, y para un boreliano cualquiera B , tendremos que $B_n = B \cap V_n \uparrow B$ y por lo anterior μ es regular exterior en B_n , por tanto se sigue de (1.7.14), que μ es regular exterior en B . ■

Volveremos sobre la noción de regularidad en la pág. 330.

Ejercicios

Ejercicio 1.7.3 Demostrar que la compleción de una medida regular es regular.

Ejercicio 1.7.4 Encontrar una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ que sea σ -finita pero no regular. (Sol.)

Ejercicio 1.7.5 Demostrar que toda medida semifinita $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ es regular interior. (Sol.)

1.7.7. Sobre los conjuntos Lebesgue medibles.

Tenemos las inclusiones $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y surgen dos preguntas de forma natural:

1) ¿Es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R})$? Contestaremos negativamente a esta cuestión en (2.2.11), pág.83. No obstante como μ es σ -finita sabemos por (1.7.12), pág.60, que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ es la σ -álgebra completación de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, con la medida de Lebesgue, así que un conjunto Lebesgue medible es la unión de un Borel con un subconjunto de un Borel de medida de Lebesgue nula.

2) ¿Es $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$?, es decir ¿es Lebesgue medible todo subconjunto de \mathbb{R} ?. Debemos observar que la demostración habitual de este resultado, que es la que vamos a dar, depende de la validez del axioma de elección.

Aunque al final de este tema trataremos esta cuestión de forma más extensa, digamos ahora que en 1970 SOLOVAY demostró que si admitimos ciertas hipótesis de consistencia, entonces la existencia de un subconjunto de \mathbb{R} , no Lebesgue medible, no puede probarse con los axiomas de la teoría de conjuntos de ZERMELO-FRENKEL, sin hacer uso del axioma de elección.

Teorema 1.7.20 $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ es distinto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demostración. Consideremos la relación de equivalencia en los reales $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Q}$ y haciendo uso del Axioma de elección definamos un conjunto $A \subset (0, 1)$ eligiendo un elemento en $(0, 1)$ de cada una de las clases de equivalencia. Para cada $x \in (0, 1)$, cuya clase es $x + \mathbb{Q}$, hay un representante $a = x + q \in A$ y como $a, x \in (0, 1)$ tendremos que $\pm q \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1) = N$, por tanto $(0, 1) \subset \cup_{q \in N} (q + A) \subset (-1, 2)$, siendo la unión numerable -del conjunto del medio- disjunta, pues si $p, q \in \mathbb{Q}$ son distintos $(A + p) \cap (A + q) = \emptyset$, pero entonces llegamos a una contradicción si A es Lebesgue medible, pues tomando medidas, $1 \leq \infty \cdot m(A) \leq 3$. ■

Pero se tiene aun mas, también consecuencia del Axioma de elección, de lo que el resultado anterior es una simple consecuencia.

Teorema 1.7.21 (Ver Cohn, p.33) Existe un $A \subset \mathbb{R}$ tal que $m(B) = 0$, para todo Lebesgue medible $B \subset A$ ó $B \subset A^c$.

Nota 1.7.22 Terminamos la lección demostrando la existencia de no medibles en la circunferencia unidad del plano \mathbb{R}^2 .

Consideremos un número real $\alpha > 0$, tal que α/π sea irracional, de este modo podemos asegurar que para enteros distintos n, m , también sean distintos los giros g_n y g_m de ángulos respectivos (en radianes) $n\alpha$ y $m\alpha$, pues en caso contrario $n\alpha = m\alpha + k2\pi$ y $\alpha/\pi = 2k/(n-m)$ sería racional. Ahora consideremos para cada $x \in S$, el conjunto de puntos girados de x , para todos los giros g_n , de ángulo $n\alpha$, $P_x = \{g_n x : n \in \mathbb{Z}\}$. Cada dos de estos conjuntos son iguales ó disjuntos, pues si $z \in P_x \cap P_y$, tendremos que existen giros g_n, g_m , tales que $g_n x = z = g_m y$, por tanto $P_x = P_y$.

Apliquemos el axioma de elección para construir un conjunto E que tenga un único elemento de cada uno de los P_x . Consideremos la colección numerable de sus girados $E_n = g_n E$, para $n \in \mathbb{Z}$, los cuales son disjuntos, pues si existiese un $z \in E_n \cap E_m$, tendríamos que existen $x, y \in E$ tales que $g_n x = g_m y$, lo cual implica $P_x = P_y$ y por tanto $x = y$, de donde $g_n = g_m$ y de esto se sigue que $n = m$. Por último $S = \cup E_n$, pues si $x \in S$ existe un $z \in E$ que está en P_x , es decir existe un g_n , tal que $x = g_n z$, por tanto $x \in E_n$. Ahora bien las medidas de Hausdorff H_p , son invariantes por giros, por tanto $H_1(E_n) = H_1(E)$ y si E fuese medible, tendríamos que

$$H_1(S) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_1(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_1(E),$$

lo cual es absurdo, pues como veremos en el ejercicio (5.5.4),

$$0 < H_1(S) = 2\pi < \infty.$$

Por tanto *admitiendo el axioma de elección* E no es medible.

1.8. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

- ASH, R.B.: "*Real Analysis and Probability*". Ac.Press, 1972.
 BARTLE, R.G.: "*The elements of integration*". John Wiley, 1966.
 COHN, D.L.: "*Measure theory*". Birkhauser (Boston), 1980.
 FOLLAND, G.B.: "*Real Analysis. Modern Techniques and their applications*", John Wiley, 1984.
 LANG, S.: "*Real Analysis*". Addison-Wesley, 1969.
 TJUR, T.: "*Probability based on Radon Measures*". J.Wiley, 1980.

Aunque nosotros hemos tratado y trataremos fundamentalmente las medidas numerablemente aditivas, no son las únicas de interés. Por ejemplo DUBINS y SAVAGE en un libro de 1965 titulado "*How to gamble if you must*", consideran ciertos problemas en procesos estocásticos, usando sólo funciones de conjunto finitamente aditivas. Y aseguran que para sus propósitos la finita aditividad evita algunas de las complicaciones de la numerable aditividad, sin sacrificar por ello potencia o generalidad.

Remitimos al lector interesado en resultados propios de medidas finitamente aditivas (tomando incluso valores en un espacio de Banach), a los libros

- BHASKARA RAO, K.P.S. AND BHASKARA RAO, M.: "*Theory of charges*". Ac. Press, 1983.
 DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: "*Linear operators, Vol,I*". John Wiley Interscience Pub., 1958.

Para una visión clásica de la teoría de la medida, pero considerando en vez de álgebras o σ -álgebras, anillos ó σ -anillos, es decir quitando la propiedad de que el espacio total sea medible, nos remitimos al

- HALMOS, P.R.: "*Measure Theory*". Springer-Verlag, 1974.

En cuanto a los textos clásicos los más importantes son en primer lugar la Tesis de HENRI LEBESGUE (1875-1941)

- LEBESGUE, H.: "*Integrale, longueur, aire*". Ann. di Math., serie III, t.VII, 231-359. Tesis, 1902.

en la que introduce el nuevo concepto de integral y desarrolla una teoría de la medida más general que la de EMILE BOREL (1871-1956) quien introdujo el concepto de medida de Borel en \mathbb{R} basándose en la propiedad

de que todo abierto puede ponerse como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos. Otra obra fundamental es

LEBESGUE, H.: “*Leçons sur l'intégration*” (1a.edición 1903, 2a.edición 1928). Reimp. de 2a. ed. por Chelsea Pub. Comp., 1973.

CONSTANTIN CARATHEODORY (1873–1950), dio en 1914 un método general de construcción de medidas exteriores en un espacio métrico. En su libro

CARATHEODORY, C.: “*Vorlesungen über reelle Funktionen*”. Leipzig–Berlin, 1918. Reimpreso por Chelsea en 1948

aparece por primera vez la medida como el concepto que ocupa el lugar de importancia frente al de integral. En él demuestra parte del teorema fundamental de extensión que lleva su nombre y aporta numerosas observaciones originales a la teoría de integración que habían iniciado LEBESGUE, RIESZ y RADÓN fundamentalmente. Otro volumen clásico de este autor, publicado a título póstumo, es

CARATHEODORY, C.: “*Measure and integration*”, 1956. Reed. de Chelsea Pub. Co., 1986.

El primero en demostrar el Teorema de unicidad de extensión de una medida, que hemos llamado **Teorema de extensión de Hahn**, fue

FRECHET, M.: “*Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits*”, Fund. Math. 5, 1924, 206–251.

aunque nosotros no hemos seguido su demostración, sino la que dieron de forma independiente HAHN y KOLMOGOROV —ambas basadas en los resultados de CARATHEODORY—, respectivamente en

HAHN, H.: “*Über die Multiplication total-additiver Mengenfunktionen*”, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, 2, 1933, 429–452.

KOLMOGOROV, A.N.: “*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*”, Editorial. Springer–Verlag, Berlin, 1933; Traducido como “*Foundations of the Theory of Probability*”, por Chelsea, New York, 1950.

Las medidas y la dimensión de HAUSDORFF fueron introducidas por FÉLIX HAUSDORFF (1868–1942) en

HAUSDORFF, F.: “*Dimension und äusseres Mass*”. Math. Ann. **79** (1919), 157–179.

El concepto de *dimensión* ha sido objeto de muchas definiciones. En topología hay al menos cinco, de las cuales dos son clásicas: la **inductiva**, sugerida en 1912 por HENRI POINCARÉ (1854–1913) y precisada por

BROWER en 1913, URYSOHN en 1922 y MENGER en 1923 (ver la p.4 del HUREWICZ) y la de **recubrimientos** sugerida por *Lebesgue* en 1911 y formulada por CECH en 1932 (ver la p.263 del libro de Janusz Cziz). Más actuales son: la de **retículos**, la **graduada** y la **aritmética** que estudian respectivamente

VINOKUROV, V.G.: “*Lattice method of defining dimension*”. Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 663–667.

ISELL, J.: “*Graduation and dimension in locales*”. London Math.Soc. Lecture Notes Ser., N°93. Cambridge Univ.Press, (1985), 195–210.

GALIAN, R.: “*Teoría de la dimensión*”. Serie Univ. Fund. Juan March, **107**, Madrid (1979), 663–667.

siendo esta última introducida por JUAN SANCHO GUIMERÁ, que a su vez se basa en la definición de dimensión de un anillo (*dimensión de Krull*). Estas tres últimas coinciden en cualquier espacio topológico, mientras que las dos primeras no. Todas son buenas según el ámbito de propiedades que se estudien, son invariantes topológicos, toman valores $\{-1, 0, 1, \dots, \infty\}$ y las cinco coinciden en espacios métricos separables (i.e. con un subconjunto denso y numerable). Sin embargo la dimensión de Hausdorff —que está definida en un espacio métrico— no es un invariante topológico, aunque sí lo es el ínfimo de las dimensiones para las métricas que definan el mismo espacio topológico (metrizable y separable) y coincide con las cinco anteriores. (Ver HUREWICZ, p.102 y la *Encyclopaedia of Mathematics*, Reidel, Kluwer Acad. Pub. Tomo 3, p.195 y Tomo 4, p.392). Remitimos al lector interesado en las medidas de Hausdorff y al concepto de dimensión a los libros

CZIZ, JANUSZ.: “*Paradoxes of measures and dimensions originating in Felix Hausdorff’s ideas*”. World Scientific Pub. 1994.

HUREWICZ, W. AND WALLMANN, H.: “*Dimension Theory*”. Princeton Univ. Press, 1941.

ROGERS, C.A.: “*Hausdorff Measures*”. Cambridge Univ. Press, 1970.

En 1918, los franceses GASTON JULIA y PIERRE FATOU estudiaron figuras obtenidas del siguiente modo: Para cada $c \in \mathbb{C}$ la función $f_c: z \in \mathbb{C} \rightarrow z^2 + c \in \mathbb{C}$ define, para cada z_0 inicial, una sucesión por la fórmula de recurrencia $z_n = f_c(z_{n-1})$ y observamos que para $c = 0$ el plano se divide en tres regiones: $R_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, tal que los z_0 que parten de ella definen una sucesión $z_n \rightarrow 0$, otra $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, tal que los z_0 que parten de ella definen una sucesión z_n que tiende a infinito y otra $R_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, tal que los z_0 que parten de ella definen una sucesión z_n que permanece en ella; de estas tres regiones

hay una, la circunferencia, que es borde de las otras dos. Para otros valores de c como por ejemplo $c = -0,12375 + 0,56508i$ observamos (ver fig.3, pág.10 del libro de PEITGEN AND RICHTER) que el plano también se divide en tres regiones similares y de nuevo una es curva borde de las otras dos, pero esta no es una curva diferenciable, es muy irregular, parece el contorno de una isla, aunque sigue siendo conexa. Por último hay valores c para los que la “curva borde” no es conexa. Sus trabajos sobre estas curvas, que ahora se conocen como *curvas de Julia*, se mantuvieron en el olvido hasta que en 1975 BENOIT MANDELBROT las recuperó llamándolas *fractales* (por ser curvas “fracturadas” en el sentido de quebradas, rotas) y con ayuda de un ordenador se le ocurrió representar los c para los que la curva de Julia correspondiente era conexa y se encontró con un conjunto realmente impresionante y bello (conocido como *conjunto de Mandelbrot*). La importancia para nosotros de este conjunto (de su frontera realmente), así como de alguna de las curvas de Julia, es que son curvas con dimensión de Hausdorff no entera. Remitimos al lector interesado en estos temas al artículo y los libros

BLANCHARD, P.: “*Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*”. Bull Amer Math Soc, 1984, **11**, 85–141.

MANDELBROT, BENOIT: “*The Fractal Geometry of Nature*”. Freeman and Company, 1983.

PEITGEN, HEINZ–OTTO AND RICHTER, PETER H.: “*The Beauty Of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems*”. Springer–Verlag, 1986.

PENROSE, R.: “*La nueva mente del emperador*”, Mondadori, 1991.

en este último la definición que da del conjunto de Mandelbrot, no es la que hemos dado (que es la del autor), sino que es la siguiente en los términos anteriores: Un punto c está en el conjunto de Mandelbrot si partiendo de $z_0 = 0$, la sucesión z_n está acotada. En el artículo de BLANCHARD se demuestra la equivalencia de las dos definiciones.

Para los lectores interesados en la parte de la historia de las matemáticas que tratan los comienzos de la medida y la integración, recomendamos los siguientes libros, en el primero de los cuales están los trabajos *Sobre la esfera y el cilindro y Medida del círculo*:

ARQUIMEDES, APOLONIO, ETC.: “*Científicos griegos II*”. Ed. Aguilar, 1970.

BOYER, CARL B.: “*Historia de la matemática*”. Alianza Univ. textos, N°94, 1986.

VAN DALEN, D. AND MONNA, A.F.: “*Sets and integration*”. Wollers–Noordhoff, 1972.

EUCLIDES: “*Los Elementos*”. Biblioteca Clásica Gredos, 1991.

HAWKINS, T.: “*Lebesgue’s Theory of integration*”. Chelsea Pub.Co., 1975.

PESIN, I.V.: “*Classical and modern integration theories*”. Acad. Press, 1970.

En cuanto al contenido del capítulo, vamos a hacer algunos comentarios. En 1902 LEBESGUE plantea en su libro “*Leçons sur l’intégration*” la siguiente cuestión: ¿Existe alguna medida μ en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante por traslaciones, verificando

$$\mu(a, b] = b - a, \quad \text{para } a < b \in \mathbb{R}?$$

En 1905 GUISEPPE VITALI (1875–1932) demuestra que no en VITALI, G.: “*Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*”. Bologne, 1905.

basándose para ello en el axioma de elección (ver FOLLAND), p.19). Nosotros lo hemos demostrado en 1.7.20, pág.65, siguiendo el BENEDETTO (pág. 49 cuya referencia damos a continuación), el cual a su vez sigue una demostración que en 1927 dio SIERPINSKI.

En cuanto a la existencia de una medida μ finitamente aditiva en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$, no nula, finita en los acotados y que tome el mismo valor en conjuntos congruentes, la respuesta es que no, como se prueba utilizando el axioma de elección en la forma de la **Paradoja de Hausdorff**, esto es:

“*La esfera unidad S_2 de \mathbb{R}^3 se puede poner como unión disjunta de cuatro subconjuntos A, B, C, D , de modo que D es numerable y A es congruente con B , con C y con $B \cup C$ ”.*

Como consecuencia tendríamos que los conos (reellenos) generados desde el centro de la esfera de estos cuatro conjuntos, llamémoslos \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} y \bar{D} , serían una partición de la bola unidad $B[0, 1]$ y si fueran medibles verificarían $\mu(\bar{D}) = 0$ y

$$\mu(\bar{A}) = \mu(\bar{B}) = \mu(\bar{C}) = \mu(\bar{B} \cup \bar{C}) = \mu(\bar{B}) + \mu(\bar{C}),$$

lo cual implicaría que todos son nulos y por tanto la bola unidad $B[0, 1]$ y del mismo modo cualquier bola.

Remitimos al lector interesado a la p.51 del

BENEDETTO, J.J.: “*Real variable and integration*”, B.G.Teubner Stuttgart, 1976.

En 1924 STEFAN BANACH (1892–1945) y ALFRED TARSKI (1901–1983) probaron otra asombrosa paradoja, consecuencia de la de Hausdorff, que dice:

“*Sean B y C dos bolas cerradas de \mathbb{R}^3 del mismo radio. Entonces existen sendas particiones (disjuntas) B_i y D_i , para $i = 1, \dots, 41$, de B y $B \cup C$ respectivamente, tales que cada B_i es congruente con D_i ”.*

Como consecuencia tendríamos que de una bola hacemos dos del mismo radio. De ellos es también la siguiente (ver FOLLAND, p.19):

“Sean A y B dos abiertos acotados de \mathbb{R}^n , con $n \geq 3$. Entonces existe una partición finita de A en $m \in \mathbb{N}$ conjuntos A_i , otra de B en también m conjuntos B_i , tales que los A_i son disjuntos, los B_i también, $A = \cup A_i$, $B = \cup B_i$, y para cada i A_i es congruente con B_i ”.

Uno estaría tentado a decir que esto implica que podemos coger en el espacio una bola abierta del tamaño de una canica, partirla convenientemente en un número finito de trozos y volverlos a unir en otro orden obteniendo una nueva bola abierta del tamaño de la tierra. Pero realmente el resultado sólo asegura que existen los trozos, no que puedan construirse. Y nuestra noción de lo existente a veces descansa en *axiomas* como el *de la elección*, del que hablaremos al final de estos comentarios.

Por otra parte los casos unidimensional y bidimensional se comportan de una manera esencialmente distinta al tridimensional, es decir que para $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ sí existen medidas finitamente aditivas no nulas, finitas en los acotados, invariantes por traslaciones y que coinciden con la medida de Lebesgue en los Lebesgue medibles, para $n > 2$ el resultado no es cierto. Este resultado, que veremos en (8.1.9) de la página 296, es de 1932 y se debe a

BANACH, S.: “*Theorie des operations lineaires*”. Reimp. con correcciones de la 1a. ed. de 1932 por Chelsea Pub.Co., 1978.

En 1950 KAKUTANI y OXTOPY obtuvieron en

KAKUTANI, S. AND OXTOPY, J.C.: “*Construction of a nonseparable invariant extension of the Lebesgue measure space*”. Ann. of Math., 52, 580-590, 1950.

una extensión de la medida de Lebesgue —numerablemente aditiva e invariante por traslaciones—, definida sobre una σ -álgebra que contenía propiamente a $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ver a este respecto las pp.113 y 137 respectivamente de los libros

MUHKERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.

HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: “*Real and abstract analysis*”. Springer-Verlag, 1965.

Hemos dicho anteriormente que VITALI, partiendo de los axiomas de ZERMELO-FRENKEL y del **Axioma de elección**, había probado en 1905

que

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

esto nos induce a hacer unos breves comentarios sobre el uso del **Axioma de elección** tanto en la teoría de la medida como en el resto de las matemáticas.

No cabe duda de que la naturaleza del **Axioma de elección** difiere bastante de la del resto de la axiomática de ZERMELO–FRENKEL. No obstante, su uso —siempre acompañado de reticencia y crítica— se mantiene porque hay “*Teoremas importantes*” que no se saben demostrar sin él ó incluso son equivalentes a él. Por ejemplo el **Teorema de Hahn–Banach** que es básico en Análisis Funcional pues su invalidez haría que desapareciesen la mitad de los espacios que aparecen en esa disciplina (los espacios duales). El **Teorema de Tychonov** en Topología —sobre la compacidad del producto de compactos—, fue durante mucho tiempo uno de los argumentos mas importantes a favor del **Axioma de elección**, pues son equivalentes (ver el VANDALEN–MONNA, p. 32, para una lista de resultados equivalentes).

No sabemos si se conoce algún tipo de alternativa para el **Teorema de Hahn–Banach** sin hacer uso del **Axioma de elección**, pero respecto al **Teorema de Tychonov** se ha demostrado recientemente que puede ser válido sin necesidad del **Axioma de elección**, si se entiende por topología un concepto no supeditado a un “conjunto de puntos”, sino que se parte de un retículo de abiertos como noción primitiva —como por otra parte ya hacía Hausdorff— y no de la de punto como es habitual. Remitimos al lector interesado al artículo de

JOHNSTONE, P.T.: “*Tychonoff’s Theorems without the axiom of choice*”. Fund. Math., 113, 21-35, 1981.

Volviendo al resultado de VITALI, este ha sido complementado con la demostración de que si la axiomática de ZERMELO–FRENKEL es consistente, es decir no tiene contradicción, entonces también es consistente

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\text{no axioma elección}} + \boxed{\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})},$$

lo cual significa que el **Axioma de elección** no es equivalente a $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Otro resultado en esta línea de 1965, aunque no publicado hasta 1970 es

SOLOVAY, R.M.: “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”. Ann. of Math., 92, 1-56, 1970. (MR42,1,64).

en el que se demuestra que si

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\text{hay un cardinal inaccesible}},$$

es consistente, entonces también lo es

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})}$$

por lo que no hay, en principio, una razón para creer en la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles, cosa que por otra parte facilitaría enormemente el uso de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Debemos decir no obstante que en ese mismo trabajo, SOLOVAY también demuestra que si

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\text{hay un cardinal inaccesible}},$$

es consistente, entonces también lo es

$$\boxed{\text{Zermelo–Frenkel}} + \boxed{\text{Todo } A \subset \mathbb{R}, \text{ tiene la propiedad de Baire}}$$

en cuyo caso el **Teorema de Hahn-Banach** es falso. Lo cual debiera hacernos pensar —entre otras cosas— si este Teorema no estará al mismo nivel de entendimiento que lo estaba el **Teorema de Tychonov** antes de 1981.

Remitimos al lector interesado en la relación existente entre la teoría de la medida y la teoría de conjuntos a

TALL, F.D.: “*Applying set theory to measure theory*”. Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, N.1033, 295-302, 1983.

Fin del Capítulo 1

Capítulo 2

Integración

2.1. Introducción histórica

En 1881 V. VOLTERRA, discípulo de U. DINI en Pisa¹, publicó un ejemplo de una función $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, derivable en todo punto, con derivada f' acotada pero no *Riemann integrable*. Es decir, encontró una función derivable para la que el *Teorema fundamental del cálculo* no era válido.

La particularidad de esta función f reside en que su derivada es discontinua en un conjunto de puntos de medida de Lebesgue positiva (ver el Teorema de caracterización (2.4.30), pág.112). Para su construcción utilizó la función g que en el origen vale $g(0) = 0$ y fuera del origen $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, que es derivable y su derivada es discontinua en 0. Esta f puede encontrarse en el propio trabajo de VOLTERRA, cuya referencia damos al final del tema, ó en la pág.20 del BENEDETTO.

En su Tesis de 1902 LEBESGUE observa que por esta razón, diferenciación e integración no podían considerarse operaciones inversas en el contexto, relativamente amplio, de las funciones Riemann integrables.

¹Ver Benedetto, pág.19

Este fue el motivo fundamental que le llevó a tratar de encontrar una noción de integración nueva, bajo la que derivación e integración sí fuesen operaciones inversas para una clase de funciones más amplia que las Riemann integrables.

Hay otras razones para querer extender la integración Riemann. Podemos juntarlas todas y decir simplemente que era necesaria una teoría que incluyese muchos resultados naturales para muchas funciones, como por ejemplo la integración término a término en una serie de funciones.

La idea principal de la integral de Lebesgue consiste en que, a diferencia de lo que ocurre en la integral de Riemann, los puntos se agrupan de acuerdo a la proximidad de los valores de la función a integrar y no de acuerdo a su proximidad en el conjunto de definición de la función, como hacía Riemann. Esto permite la posibilidad de extender, de forma inmediata, el concepto de integral a una clase muy amplia de funciones.

2.2. Funciones medibles

2.2.1. Propiedades de las funciones medibles

Definición. Diremos que una aplicación entre espacios medibles

$$F: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2),$$

es *medible* si para cada $B \in \mathcal{A}_2$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.

Si $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ —ó $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ —, diremos que F es una *función medible* —algunos autores la llaman *función Borel medible*—. Si además $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$, diremos que F es *Lebesgue medible*.

En el contexto de la Teoría de probabilidades las funciones medibles se llaman *variables aleatorias*.

Dada una función $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definimos las funciones

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0), \quad (\text{para las que } f = f^+ - f^-)$$

y las llamamos respectivamente *parte positiva* y *parte negativa* de f .

Hemos hablado en el Tema anterior de la suma en $\overline{\mathbb{R}}$, ahora completamos estas operaciones aritméticas considerando

$$\begin{aligned}x/\infty &= x/ -\infty = 0, & \text{para } x \in \mathbb{R}, \\x \cdot \infty &= \infty \cdot x = \infty, & \text{para } x \in (0, \infty], \\x \cdot \infty &= \infty \cdot x = -\infty, & \text{para } x \in [-\infty, 0), \\0 \cdot \infty &= \infty \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = -\infty \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

con estas definiciones se demuestra fácilmente que son válidas las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones medibles, pero antes observemos que si

$$f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

es medible, también lo es entendida en $\overline{\mathbb{R}}$

$$f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})),$$

pues la inclusión $i: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es continua, por tanto medible. Por lo que toda función real la entenderemos en $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposición 2.2.1 (a) *La composición de aplicaciones medibles es medible.*

(b) *Si $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ son espacios medibles y $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_2$ es tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_2$, entonces $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es medible si y sólo si para cada $B \in \mathcal{C}$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.*

(c) *Las aplicaciones continuas entre espacios topológicos son medibles para las σ -álgebras de Borel.*

Demostración. (b) Es consecuencia de que

$$\sigma(F^{-1}[\mathcal{C}]) = F^{-1}[\sigma(\mathcal{C})],$$

lo cual se demuestra fácilmente usando el principio de los buenos conjuntos.

(c) Es consecuencia de (b). ■

Proposición 2.2.2 (d) *Una función $f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, es medible si y sólo si para cada $c \in \mathbb{R}$,*

$$\{x \in \Omega : f(x) > c\} \in \mathcal{A}.$$

- (e) Si f es una función medible, $-f$ y $|f|$ son medibles.
 (f) Si f, g son funciones medibles $\max(f, g)$ es una función medible.
 (g) Si f es medible, f^+ y f^- son medibles.

Demostración. (d) es consecuencia de (b), pues la clase de los intervalos $(c, \infty]$ generan $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ y $\{f > c\} = f^{-1}(c, \infty]$.

(e) Es consecuencia de (d), pues para cada $c \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in \Omega : c < -f(x)\} = \{x : -c > f(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Además $\{|f| > c\} = \Omega$, para $c < 0$ y $\{f > c\} \cup \{f < -c\}$, para $c \geq 0$.

(f) Se sigue de (d) pues

$$\{\max(f, g) > c\} = \{f > c\} \cup \{g > c\}.$$

(g) Que f^\pm son medibles se sigue de (e) y (f). ■

Nota 2.2.3 Observemos que en el apartado (d) anterior podemos cambiar la desigualdad $>$ en $\{f > c\}$ por cualquier otro tipo de desigualdad: $<$, \leq ó \geq ; pues cualquiera de los conjuntos correspondientes de intervalos generan los borelianos.

Veamos ahora algunas propiedades de las sucesiones de funciones medibles, en particular que el límite puntual de funciones medibles si existe es medible.

Teorema 2.2.4 Sean $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, para $n \in \mathbb{N}$ funciones medibles, entonces:

- (h) El $\sup f_n$ y el $\inf f_n$ son medibles.
 (i) El $\limsup f_n$ y el $\liminf f_n$ son medibles.
 (j) Si existe en todo $x \in \Omega$ el límite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, entonces f es medible.

Demostración. (h) Es consecuencia de (2.2.2), pues para cada $c \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \Omega : c < \sup f_n(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : c < f_n(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Que el $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ es medible se sigue de (e) y lo anterior.

(i) Se sigue de (h) y de que $\limsup f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{i \geq n} f_i$.

(j) Se sigue de (i), pues $\lim f_n = \limsup f_n (= \liminf f_n)$. ■

Definición. Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y un $A \in \mathcal{A}$ denotaremos con

$$\mathcal{F}(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}, \text{ funciones medibles reales}\}.$$

Observemos que les pedimos que tomen valores en \mathbb{R} , no en $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición. Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$, llamaremos *indicador de A* a la función medible

$$I_A: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in A^c. \end{cases}$$

Obviamente la estructura medible de Ω , es decir la σ -álgebra \mathcal{A} , podemos reconstruirla si conocemos sus funciones medibles reales $\mathcal{F}(\Omega)$, pues \mathcal{A} es el conjunto de todos los $f^{-1}(\{1\})$, con $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, ya que para todo $A \in \mathcal{A}$, $I_A \in \mathcal{F}(\Omega)$.

2.2.2. Funciones simples

Definición. Diremos que una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es *simple* si es medible y toma un número finito de valores. Denotaremos el conjunto de las funciones simples con

$$\mathcal{S} = \{s: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : s \text{ simple}\}.$$

Proposición 2.2.5 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es simple si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$ disjuntos y $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, n$, tales que

$$f = \sum a_i I_{A_i}, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Demostración. Si es simple $\text{Im } f = \{a_1, \dots, a_n\}$, como es medible $f^{-1}\{a_i\} = A_i$ son medibles y $f = \sum a_i I_{A_i}$. Recíprocamente si f es de esa forma toma un número finito de valores y es medible pues para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$f^{-1}(B) = \cup [f^{-1}(B) \cap A_i] = \cup f^{-1}[B \cap \{a_i\}] = \cup_{i: a_i \in B} A_i \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

Proposición 2.2.6 Si $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $f + g, fg \in \mathcal{S}$ y si g es no nula, también $f/g \in \mathcal{S}$.

Demostración. Por el resultado anterior existen $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, tales que $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$, con los A_i disjuntos y los B_j disjuntos y tales que $\cup A_i = \cup B_j = \Omega$. Por tanto $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$ son disjuntos y es una partición de Ω y se tiene

$$f + g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) I_{A_i \cap B_j}, \quad fg = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i b_j) I_{A_i \cap B_j}$$

$$\frac{f}{g} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i / b_j) I_{A_i \cap B_j}. \quad \blacksquare$$

Nota 2.2.7 Consideremos en $[0, \infty]$ la sucesión de funciones simples no negativas, $s_n : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty)$, que para $0 \leq r \leq \infty$ valen

$$s_n(r) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \text{si } r \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}) \quad (i = 1, \dots, n2^n) \\ n, & \text{si } n \leq r, \end{cases}$$

de las cuales representamos a continuación las dos primeras.

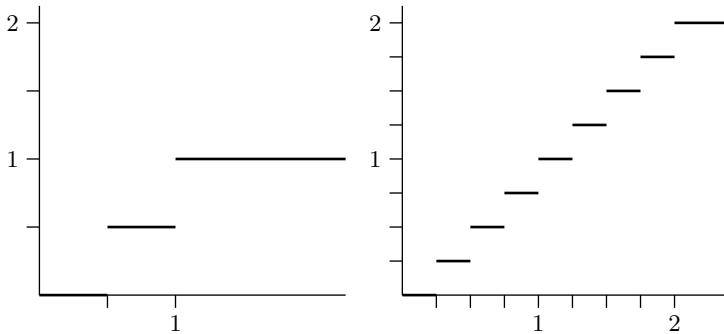


Figura 2.1. Gráficas de s_1 y s_2

y tienen las siguientes propiedades para todo $r \geq 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$

$$s_n(r) \leq r, \quad 0 \leq s_n \leq n, \quad s_n \leq s_{n+1}, \quad s_n(r) \uparrow r,$$

además para todo $r \leq n$, $0 \leq r - s_n(r) \leq 1/2^n$ y la convergencia $s_n(r) \rightarrow r$ es uniforme en todo acotado de \mathbb{R} . Veamos que $s_n(r) \leq s_{n+1}(r)$. Si

$r < n$ existe un $i = 1, \dots, n2^n$, tal que

$$r \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right) = \left[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}} \right),$$

en cuyo caso $s_{n+1}(r)$ vale $(2i-2)/2^{n+1} = s_n(r)$ ó $(2i-1)/2^{n+1} \geq s_n(r)$.

Si $n \leq r < n+1$, entonces $s_n(r) = n$ y existe un j entre $n2^{n+1}$ y $(n+1)2^{n+1} - 1$, tal que

$$r \in \left[\frac{j}{2^{n+1}}, \frac{j+1}{2^{n+1}} \right) \Rightarrow s_{n+1}(r) = \frac{j}{2^{n+1}} \geq n = s_n(r).$$

Y si $n+1 \leq r$, entonces $s_n(r) = n \leq n+1 = s_{n+1}(r) \leq r$. ■

Teorema 2.2.8 *Sea $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ una función medible, entonces existe una sucesión creciente $f_n \in \mathcal{S}$ de funciones simples, con $0 \leq f_n \leq n$, tales que $f_n \uparrow f$. Además la convergencia es uniforme en cada conjunto en el que f sea acotada.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las funciones simples $f_n = s_n \circ f$, para las s_n de la Nota (2.2.7), las cuales satisfacen el enunciado, pues

$$\begin{aligned} s_n(r) \leq r &\Rightarrow f_n \leq f, & 0 \leq s_n \leq n &\Rightarrow 0 \leq f_n \leq n \\ s_n \leq s_{n+1} &\Rightarrow f_n \leq f_{n+1}, & s_n(r) \uparrow r &\Rightarrow f_n \uparrow f, \end{aligned}$$

y como la convergencia $s_n(r) \rightarrow r$ es uniforme en todo acotado de $[0, \infty]$, la convergencia $f_n \rightarrow f$ es uniforme en cualquier conjunto en el que f sea acotada. ■

Corolario 2.2.9 *Sea $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible, entonces existe una sucesión $f_n \in \mathcal{S}$ de funciones simples, con $|f_n| \leq n$, tales que $f_n \rightarrow f$, $|f_n| \leq |f|$. Además la convergencia es uniforme en cada conjunto en el que f sea acotada.*

Demostración. Por (2.2.8) existen sendas sucesiones $g_n \uparrow f^+$ y $h_n \uparrow f^-$ de funciones simples, no negativas y basta considerar $f_n = g_n - h_n$. ■

2.2.3. Operaciones básicas de las funciones medibles.

A continuación demostramos que la suma, el producto y el cociente de funciones medibles, si están bien definidos son medibles.

Proposición 2.2.10 *Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$, entonces:*

(a) *Si $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles, también lo son, para $c \in \mathbb{R}$ $cf, f + g, fg, f/g$, si están bien definidas (es decir si en ningún punto $f + g$ es del tipo $\infty - \infty$, ni f/g ∞/∞ ó $a/0$).*

(b) *$\mathcal{F}(A)$ tiene estructura de \mathbb{R} -álgebra, es decir contiene a las constantes y es cerrada para la suma y el producto.*

Demostración. Basta demostrar (a). Que cf es medible es obvio. Por (2.2.9) existen funciones simples $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$, por tanto $f_n + g_n$ son simples y convergen a $f + g$, por tanto se sigue de (2.2.4) que $f + g$ es medible. Del mismo modo lo es fg , pues $f_n g_n \rightarrow fg$ (observemos que si $f(x) = 0$, todas las $f_n(x) = 0$, idem para g); y f/g pues

$$f_n(g_n + \frac{1}{n}I_{\{g_n=0\}})^{-1} \rightarrow f/g. \quad \blacksquare$$

2.2.4. Existencia de Lebesgue medibles no de Borel.

Como consecuencia de que la composición de funciones medibles es medible también tenemos que si f es Lebesgue medible y g es Borel medible, por ejemplo continua, entonces $g \circ f$ es Lebesgue medible. Sin embargo si f y g son Lebesgue medibles, entonces $g \circ f$ no es necesariamente Lebesgue medible. Veámoslo al mismo tiempo que contestamos a la pregunta del tema anterior acerca de la existencia de conjuntos Lebesgue medibles no Borel medibles.

En (1.2.3), pág.9, definimos el conjunto de Cantor $K = \cap K_n$, donde cada K_n es la unión de 2^n intervalos iguales y disjuntos de $[0, 1]$ y $K_n \subset K_{n-1}$. Consideremos $K^c = \cup K_n^c = \cup (K_{n-1} \cap K_n^c)$ donde cada $K_{n-1} \cap K_n^c = B_n$ es unión de $m = 2^{n-1}$ intervalos abiertos disjuntos que ordenamos en forma creciente I_{n1}, \dots, I_{nm} . Por tanto como los B_n son disjuntos tendremos que

$$\{I_{nk} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, 2^{n-1}\},$$

es una partición por abiertos disjuntos de K^c .

Definición. Llamamos *función de Cantor* a la función continua $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que sobre cada I_{nk} vale

$$h(x) = (2k - 1)/2^n,$$

que está bien definida por ser creciente y K^c denso en $[0, 1]$.

Consideremos ahora la función $g: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$,

$$g(x) = h(x) + x,$$

que es continua y estrictamente creciente. Por tanto tiene inversa g^{-1} que es continua por tanto Borel medible y Lebesgue medible. Por otra parte $m[g(K)] = 1$, pues

$$m[g(I_{nk})] = m[I_{nk}], \quad m[0, 1] = 1, \quad m[0, 2] = 2, \\ m[g(K^c)] = m[\cup g(I_{nk})] = m[K^c] = 1.$$

Ahora bien en (1.7.21), pág.65, vimos la existencia de un $A \subset \mathbb{R}$ tal que si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ y $B \subset A$ ó $B \subset A^c$, entonces $m(B) = 0$. Se sigue de esto que existe $C \subset g[K]$ no Lebesgue medible, por ejemplo $A \cap g[K]$ ó $A^c \cap g[K]$. Si ahora consideramos la función

$$f = I_C \circ g,$$

tendremos que $f = I_D$, para $D = \{x : f(x) = 1\}$, que es Lebesgue medible y $m[D] = 0$, pues $D \subset K$ y $m[K] = 0$, por tanto f es Lebesgue medible y hemos demostrado lo siguiente, aunque usando el Axioma de elección.

Teorema 2.2.11 *La función $I_C = I_D \circ g^{-1}$ no es Lebesgue medible aunque es composición de Lebesgue medibles. Además $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ y $D \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

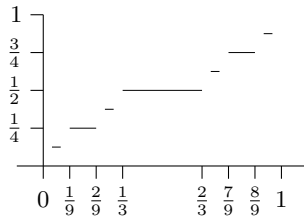


Figura 2.2. Algunos peldaños de la función de Cantor

Nota 2.2.12 Se puede dar una demostración alternativa de que hay Lebesgue medibles no Borelianos, en términos de cardinales y sin usar el Axioma de elección (ver el FOLLAND, pág.38). Observemos también que mientras los borelianos se conservan por homeomorfismos, los Lebesgue medibles no, pues $g(D) = C$.

Ejercicios

Ejercicio 2.2.1 Sea $f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ acotada. Demostrar que existe una sucesión de funciones simples s_n tales que $s_n \rightarrow f$ uniformemente.

Ejercicio 2.2.2 Sean f y g funciones medibles y A un conjunto medible. Demostrar que es medible la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

Ejercicio 2.2.3 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Probar que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$, $\{x : mf(x) < n\}$ es medible.

Ejercicio 2.2.4 Sean h y g funciones medibles. Demostrar que los conjuntos

$$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) \leq g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) = g(x)\},$$

son medibles. (Sol.)

Ejercicio 2.2.5 (a) Sea f medible y $f = g$ c.s. ¿es necesariamente g medible?, ¿y si el espacio es completo?. (b) Sean $f \leq g \leq h$, con f y h medibles tales que $f = h$ c.s. ¿es necesariamente g medible?, ¿y si el espacio es completo?.

Ejercicio 2.2.6 Sea f_n una sucesión de funciones medibles, demostrar que es medible el conjunto $\{x : \text{existe y es finito el } \lim f_n(x)\}$.

Ejercicio 2.2.7 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente, ¿es f borel medible?

Ejercicio 2.2.8 ¿Es cierto que f es medible si y sólo si $|f|$ es medible? En caso contrario dar un contraejemplo.

Ejercicio 2.2.9 Sea A_n una sucesión de subconjuntos de Ω . Demostrar que

$$\begin{aligned} \inf I_{A_n} &= I_{\cap A_n}, & \sup I_{A_n} &= I_{\cup A_n}, \\ \liminf I_{A_n} &= I_{\liminf A_n}, & \limsup I_{A_n} &= I_{\limsup A_n}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.10 Sean $A, B \subset \Omega$. Demostrar que $\{x \in \Omega : I_A \neq I_B\} = A \Delta B$.

Ejercicio 2.2.11 Demostrar que Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable, f y f' son Borel medibles. (Sol.)

Ejercicio 2.2.12 Demostrar que $f = (f_1, \dots, f_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si cada f_i lo es. (Sol.)

2.3. Integración

2.3.1. Integral de funciones medibles

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $h \in \mathcal{S}$ no negativa, es decir

$$h = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i} : \Omega \longrightarrow [0, \infty),$$

con los $0 \leq a_i < \infty$ y los $A_i \in \mathcal{A}$ disjuntos y $\cup A_i = \Omega$. Definimos la *integral de h respecto de μ* como el valor de $[0, \infty]$

$$\int_{\Omega} h d\mu = \sum a_i \mu(A_i).$$

Nota 2.3.1 Recordemos que convenimos en definir $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Hay que demostrar que la definición está bien dada, es decir que si existen dos representaciones

$$h = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j},$$

de una función simple $h \in \mathcal{S}$ no negativa, en las condiciones dichas, ambas llevan al mismo valor de la integral de h , lo cual se sigue de que $a_i = b_j$ si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si no hay confusión con el dominio Ω de nuestras funciones, escribiremos $\int f d\mu$ en lugar de $\int_{\Omega} f d\mu$. A continuación vemos que sobre las funciones simples y no negativas la integral es lineal y monótona, esto nos permitirá extender la noción de integración a funciones medibles no negativas.

Proposición 2.3.2 Sean $f, g \in \mathcal{S}$ no negativas y $c \in [0, \infty)$, entonces:

- (a) $\int cf d\mu = c \int f d\mu$.
- (b) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
- (c) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Demostración. (a) Es obvio.

(b) Si $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$, con los A_i disjuntos y los B_j disjuntos y tales que $\cup A_i = \cup B_j = \Omega$, tendremos que $f + g = \sum_{i,j} (a_i + b_j) I_{A_i \cap B_j}$ y

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

(c) Sean $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$, entonces $0 \leq a_i, b_j$ y si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ tendremos que $0 \leq a_i \leq b_j$, por tanto

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) &= \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora extendemos el concepto de integral.

Definición. Si $h \geq 0$ es medible definimos la *integral* de h respecto de μ en Ω , de la forma

$$\int_{\Omega} h d\mu = \sup\left\{\int_{\Omega} s d\mu : s \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq h\right\}.$$

Para $h: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, descomponemos $h = h^+ - h^-$ y si uno de los términos, $\int_{\Omega} h^+ d\mu$ ó $\int_{\Omega} h^- d\mu$ son finitos, definimos su integral respecto de μ como la diferencia

$$\int_{\Omega} h d\mu = \int_{\Omega} h^+ d\mu - \int_{\Omega} h^- d\mu,$$

en caso contrario diremos que la integral de h no existe. Diremos que h es *integrable* si ambos términos, son finitos.

Definición. Para $h = h_1 + ih_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible (entendiendo que en \mathbb{C} consideramos la σ -álgebra de Borel) —lo cual equivale a que h_1 y h_2 sean medibles—, diremos que es *integrable* si lo son su parte real h_1 y su parte imaginaria h_2 , en cuyo caso definimos

$$\int h d\mu = \int h_1 d\mu + i \int h_2 d\mu.$$

Definición. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , denotaremos con $\mathcal{L}_1[\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K}]$ ó $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbb{K})$ ó simplemente con \mathcal{L}_1 si no hay confusión, el espacio de las funciones integrables

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}.$$

Nota 2.3.3 Por varias razones no consideramos en el caso real de \mathcal{L}_1 , funciones que tomen valores $\pm\infty$. En primer lugar porque toda función integrable es finita c.s. como veremos en (2.4.3), pág.92; en segundo lugar porque para la integración son indistinguibles dos funciones que sean iguales c.s. (ver (2.4.1), pág.105); y por último porque las funciones integrables finitas forman un espacio vectorial.

Nota 2.3.4 Como para las funciones simples sobrentenderemos el espacio Ω si no hay confusión y escribiremos $\int f d\mu$ en vez de $\int_{\Omega} f d\mu$.

Por otro lado si $h: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible y $B \in \mathcal{A}$, la restricción de h a (B, \mathcal{A}_B, μ) también es medible y si en este espacio existe su integral la denotaremos con $\int_B h d\mu$. Para $B = \emptyset$ es necesario

matizar y volver a la definición pues nos encontramos que en el caso $h \geq 0$

$$\int_{\emptyset} h d\mu = \sup\left\{\int_{\emptyset} s d\mu : s \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq h|_{\emptyset}\right\}.$$

y el conjunto de la derecha es vacío. Convenimos en definir de nuevo su supremo como $\sup \emptyset = 0$, lo cual recordemos que es compatible con que si $A \subset B \subset [0, \infty]$, entonces $\sup A \leq \sup B$. Ahora definimos para h medible arbitraria $\int_{\emptyset} h d\mu = \int_{\emptyset} h^+ - \int_{\emptyset} h^- = 0$.

2.3.2. Propiedades básicas de la integral.

Veamos en primer lugar algunas propiedades de linealidad y orden de la integral.

Proposición 2.3.5 Sean $f, g: (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles, entonces:

(a) Si existe la integral de f y $c \in \mathbb{R}$, entonces existe la integral de cf y $\int cf d\mu = c \int f d\mu$.

(b) Si $f \leq g$ y existen sus integrales, entonces

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

(c) Si $f \leq g$, existe la $\int f d\mu$ y $-\infty < \int f d\mu$, entonces existe la $\int g d\mu$ y si existe la $\int g d\mu$ y $\int g d\mu < \infty$, entonces existe la $\int f d\mu$ y en ambos casos

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

(d) Si existe la integral de f , entonces $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

Demostración. (a) Si $f \in \mathcal{S}$ y $0 \leq f$, es obvio. Supongamos que $0 < c$ y que $0 \leq f$, entonces por linealidad en las simples no negativas

$$\begin{aligned} c \int f d\mu &= c \cdot \sup\left\{\int s d\mu : s \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq f\right\} \\ &= \sup\left\{\int cs d\mu : cs \in \mathcal{S}, 0 \leq cs \leq cf\right\} = \int cf d\mu. \end{aligned}$$

Si $0 < c$ y $f = f^+ - f^-$ tiene integral, entonces como $cf^+ = (cf)^+$ y $cf^- = (cf)^-$, tendremos por el caso anterior

$$c \int f d\mu = \int (cf)^+ d\mu - \int (cf)^- d\mu = \int cf d\mu.$$

Para $c = -1$ es obvio pues $f^- = (-f)^+$ y $f^+ = (-f)^-$, por tanto

$$-\int f \, d\mu = \int f^- \, d\mu - \int f^+ \, d\mu = \int -f \, d\mu.$$

y si $c < 0$ como $-c > 0$, tendremos

$$-c \int f \, d\mu = \int -cf \, d\mu = - \int cf \, d\mu.$$

(b) Si $0 \leq f \leq g$, $s \in \mathcal{S}$ y $0 \leq s \leq f$, entonces $0 \leq s \leq g$, por tanto $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. En general como $f^+ \leq g^+$ y $g^- \leq f^-$ tendremos por el caso anterior $\int f^+ \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu$ y $\int g^- \, d\mu \leq \int f^- \, d\mu$ y por 1.4 de la página 55, se tiene que

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

(c) Como $f^+ \leq g^+$ y $g^- \leq f^-$ tendremos por (b) que $\int f^+ \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu$ y $\int g^- \, d\mu \leq \int f^- \, d\mu$ y si $-\infty < \int f \, d\mu$, entonces

$$\int g^- \, d\mu \leq \int f^- \, d\mu < \infty,$$

y por tanto g tiene integral y se tiene el resultado. El otro caso es similar.

(d) Como $-|f| \leq f \leq |f|$, tendremos por (a) y (b) que

$$-\int |f| \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora propiedades de la restricción de la integral a un conjunto medible.

Proposición 2.3.6 (e) Si $f \geq 0$ es medible y $B \in \mathcal{A}$, entonces

$$\int_B f \, d\mu = \int I_B f \, d\mu.$$

(f) Si existe la integral de f , entonces existe la integral de f en cada $B \in \mathcal{A}$ y $\int_B f \, d\mu = \int I_B f \, d\mu$ y si f es integrable en Ω , también lo es en cada B .

Demostración. (e) Para $B = \emptyset$ ambos valores son 0 (ver nota 2.3.4). Por definición se tiene para $\mathcal{S}(B)$ las funciones simples definidas en B

$$\begin{aligned} \int_B f d\mu &= \sup \left\{ \int_B s d\mu : s \in \mathcal{S}(B), 0 \leq s \leq f|_B \right\} \\ &= \sup \left\{ \int s d\mu : s \in \mathcal{S}, 0 \leq s \leq I_B f \right\} = \int I_B f d\mu, \end{aligned}$$

pues los dos conjuntos de la derecha coinciden (obsérvese que si $s \in \mathcal{S}$, con $0 \leq s \leq I_B f$, entonces $s = I_B s$).

(f) Se sigue de (b) de (e) y de que $(fI_B)^+ = f^+ I_B \leq f^+$ y $(fI_B)^- = f^- I_B \leq f^-$. ■

2.4. Teoremas básicos de integración

2.4.1. Teorema de la carga

En esta lección consideraremos un espacio de medida fijo $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y veremos que toda función medible no negativa es la “densidad” de una medida, demostraremos que la integral es un “operador lineal”, así como los teoremas fundamentales de intercambio de límite e integral.

Teorema de la carga 2.4.1 *Sea h una función medible con integral, entonces*

$$\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \lambda(A) = \int_A h d\mu,$$

es una medida si $h \geq 0$ y en general una carga. Además si $\mu(A) = 0$ entonces² $\lambda(A) = 0$.

Demostración. Si $0 \leq h = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i} \in \mathcal{S}$, entonces por 2.3.6

$$\lambda(B) = \int_B h d\mu = \int I_B h d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(B \cap A_i),$$

²Diremos en este caso que λ es absolutamente continua respecto de μ y lo denotaremos $\lambda \ll \mu$ (ver pág.172)

y como μ es medida también lo es λ . Obviamente si $\mu(B) = 0$, entonces $\lambda(B) = 0$

Si h es medible y no negativa, $B_n \in \mathcal{A}$ son disjuntos, $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $s \in \mathcal{S}$, con $0 \leq s \leq hI_B$, entonces por lo anterior

$$\int_B s \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} s \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} h \, d\mu,$$

y tomando el supremo, $\lambda(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)$.

Veamos ahora que λ es aditiva. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjuntos, entonces $\lambda(A_i) \leq \lambda(A_1 \cup A_2)$, pues $hI_{A_i} \leq hI_{A_1 \cup A_2}$ y si algún $\lambda(A_i) = \infty$, también será $\lambda(A_1 \cup A_2) = \infty = \lambda(A_1) + \lambda(A_2)$; y si los dos son finitos, para todo $\epsilon > 0$, existen dos funciones simples $s_i \in \mathcal{S}$ tales que $0 \leq s_i \leq hI_{A_i}$ y

$$\lambda(A_i) = \int_{A_i} h \, d\mu \leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{A_i} s_i \, d\mu,$$

ahora $s = I_{A_1} s_1 + I_{A_2} s_2 = s_1 + s_2 \in \mathcal{S}$ es una función simple tal que $0 \leq s \leq hI_{A_1 \cup A_2}$, por tanto se sigue de (2.3.2) que $\int s = \int_{A_1} s_1 + \int_{A_2} s_2$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda(A_1) + \lambda(A_2) &\leq \epsilon + \int s \leq \epsilon + \int_{A_1 \cup A_2} h \\ &= \epsilon + \lambda(A_1 \cup A_2) \leq \epsilon + \lambda(A_1) + \lambda(A_2), \end{aligned}$$

y como el ϵ es arbitrario λ es aditiva. Para tener la numerable aditividad falta la desigualdad que se sigue del ejercicio (1.3.4), pues para $B_n \in \mathcal{A}$ disjuntos, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \leq \lambda(B)$. Además si $\mu(B) = 0$, entonces para toda función simple s , $\int_B s = 0$ y por tanto $\lambda(B) = 0$.

Por último sea $h = h^+ - h^-$, entonces como una de las dos integrales $\int_{\Omega} h^+ \, d\mu$, ó $\int_{\Omega} h^- \, d\mu$ es finita, tendremos que una de las dos medidas $\lambda^+(B) = \int_B h^+ \, d\mu$, ó $\lambda^-(B) = \int_B h^- \, d\mu$ es finita, en cualquier caso $\lambda(B) = \lambda^+(B) - \lambda^-(B)$ y basta demostrar que la diferencia de dos medidas, si una es finita, es numerablemente aditiva. ■

En la demostración de este resultado hemos visto cómo λ puede ponerse como diferencia de dos medidas

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-, \quad \lambda^+(A) = \int_A h^+ \, d\mu, \quad \lambda^-(A) = \int_A h^- \, d\mu,$$

y al menos una de ellas es finita. Volveremos sobre este resultado en el **Teorema de descomposición de Jordan** (4.2.9).

Nota 2.4.2 Denotaremos la carga λ del resultado anterior con $\lambda = h\mu$ y llamaremos a μ la *medida base* de λ . La caracterización de las cargas con base μ nos la dará el **Teorema de Radon–Nikodym** que veremos en (4.4.3) de la pág. 174.

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones integrables.

Nota 2.4.3 Se sigue del resultado anterior que si $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces para todo $A \in \mathcal{A}$

$$\int |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_{A^c} |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu,$$

donde la segunda igualdad se sigue tomando como $A = \{f \geq 0\}$, pues $I_A|f| = f^+$ y $I_{A^c}|f| = f^-$.

Se sigue de forma inmediata que f es integrable si y sólo si $|f|$ es integrable.

De esto se sigue que si f y g son medibles, $|f| \leq g$ y g es integrable, entonces f es integrable.

Además si f es integrable, entonces es finita c.s., pues para $A = \{|f| = \infty\}$, $\mu(A) = 0$, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$n \cdot \mu(A) \leq \int_A |f| d\mu \leq \int |f| d\mu = k < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq k/n.$$

Por último tenemos también que $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible es integrable sii $|h|$ es integrable, pues para $h = h_1 + ih_2$

$$|h_1|, |h_2| \leq |h| \leq |h_1| + |h_2|.$$

lo cual se sigue de (2.4.6), donde veremos que la suma de funciones no negativas integrables es integrable.

En definitiva tenemos que una función medible

$$h: \Omega \rightarrow \mathbb{K}, \quad \text{para } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}} \text{ ó } \mathbb{C},$$

es integrable sii lo es $|h|$. Esta propiedad es importante y distingue fundamentalmente esta teoría de otras teorías de integración como la de PERRON Y DENJOY. Remitimos al lector a los comentarios del final del Tema. ■

Ejemplo 2.4.4 Veamos como consecuencia de los resultados anteriores que la función $\text{sen } x/x$ no es Lebesgue integrable en $(0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \int_{(0, \infty)} \left| \frac{\text{sen } x}{x} \right| dm &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(n\pi, (n+1)\pi)} \left| \frac{\text{sen } x}{x} \right| dm \geq \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{(n\pi, (n+1)\pi)} |\text{sen } x| dm = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = \infty, \end{aligned}$$

sin embargo veremos en el ejemplo (3.4.4), pág.134, que es Riemann integrable (impropia), pues existe el límite

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2.4.2. Teorema convergencia monótona

Tomar límites bajo el signo integral es uno de los procesos fundamentales en Análisis. Y uno de los hechos mas notables de esta teoría es la facilidad con la que esto puede hacerse.

Teorema de la convergencia monótona 2.4.5 *Sea h_n una sucesión creciente de funciones medibles no negativas, entonces existe $h(x) = \lim h_n(x)$, es medible, tiene integral y*

$$\int h_n d\mu \uparrow \int h d\mu.$$

Demostración. Por ser h_n creciente existe el límite h , es medible pues es límite de medibles y es no negativa por tanto tiene integral y como $h_n \leq h_{n+1} \leq h$, $\int h_n d\mu \leq \int h_{n+1} d\mu \leq \int h d\mu$, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu \leq \int h d\mu,$$

para ver la otra desigualdad sea $s \in \mathcal{S}$ una función simple, tal que $0 \leq s \leq h$ y $0 < r < 1$, entonces como $h_n \uparrow h$, tendremos que

$$B_n = \{x \in \Omega : rs(x) \leq h_n(x)\} \Rightarrow B_n \uparrow \Omega,$$

pues $rs < h$ (ya que $rs < s$) y $h_n \rightarrow h$; por lo tanto $\int_{B_n} s \, d\mu \rightarrow \int_{\Omega} s \, d\mu$ y como

$$r \int_{B_n} s \, d\mu \leq \int_{B_n} h_n \, d\mu \leq \int h_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n \, d\mu,$$

tendremos, haciendo $n \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 1$, que

$$\int s \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n \, d\mu,$$

y tomando supremos tenemos la otra desigualdad. ■

2.4.3. Integral de una suma

Hemos visto que las constantes salen fuera de la integral, con el siguiente resultado completamos la linealidad de la integral.

Teorema de aditividad 2.4.6 *Sean f y g funciones medibles con integral tales que tanto $f+g$ como $\int f \, d\mu + \int g \, d\mu$, están bien definidas, entonces $f+g$ tiene integral y*

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

En particular si $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son integrables, $f+g$ es integrable y se tiene la igualdad.

Demostración. (a) En (2.3.2) lo hemos visto para f y g funciones simples no negativas. (b) Si $0 \leq f, g$, podemos tomar sendas sucesiones de funciones simples f_n y g_n , no negativas, tales que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow g$, por tanto $0 \leq s_n = f_n + g_n \rightarrow f+g$ y por (a), como s_n es simple, $\int s_n \, d\mu = \int f_n \, d\mu + \int g_n \, d\mu$ y por el Teorema de la convergencia monótona, pág.93,

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

(c) Si $f \geq 0$, $g \leq 0$ y $h = f+g \geq 0$ (por tanto g es finita), tendremos que $f = h + (-g)$ y por (b) $\int f \, d\mu = \int h \, d\mu - \int g \, d\mu$, y se concluye pues $\int g \, d\mu$ es finita, ya que si fuese $\int g \, d\mu = -\infty$, como $h \geq 0$

$$\int f \, d\mu = \int h \, d\mu - \int g \, d\mu \geq - \int g \, d\mu = \infty,$$

pero entonces $\int f d\mu = \infty$ y la suma de las integrales de f y g no estaría bien definida.

(d) Si $f \geq 0$, $g \leq 0$ y $h = f + g \leq 0$, se tiene también el resultado por (c) tomando $f' = -g$, $g' = -f$ y $h' = f' + g' = -h$.

(e) Por último consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\}, \\ E_2 &= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0, g(x) < 0, h(x) \geq 0\}, \\ E_3 &= \{x \in \Omega : f(x) \geq 0, g(x) < 0, h(x) < 0\}, \\ E_4 &= \{x \in \Omega : f(x) < 0, g(x) \geq 0, h(x) \geq 0\}, \\ E_5 &= \{x \in \Omega : f(x) < 0, g(x) \geq 0, h(x) < 0\}, \\ E_6 &= \{x \in \Omega : f(x) < 0, g(x) < 0\}, \end{aligned}$$

y como las integrales de f y g existen tenemos por (2.4.1) que

$$\sum_{i=1}^6 \int_{E_i} f d\mu = \int f d\mu, \quad \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} g d\mu = \int g d\mu,$$

y como su suma está bien definida, también lo está en cada E_i la suma de integrales de f y g y por supuesto $f + g$, por lo tanto por los casos anteriores tenemos que $\int_{E_i} (f + g) d\mu = \int_{E_i} f d\mu + \int_{E_i} g d\mu$, y basta demostrar, por (2.4.1), que existe la $\int (f + g) d\mu$, es decir que una de las integrales

$$\int h^+ d\mu = \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} h^+ d\mu, \quad \int h^- d\mu = \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} h^- d\mu,$$

es finita. En caso contrario existen $1 \leq i, j \leq 6$, tales que

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \int_{E_i} h^+ d\mu = \infty \\ \int_{E_j} h^- d\mu = \infty \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{E_i} h d\mu = \infty \\ \int_{E_j} h d\mu = -\infty \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{E_i} f d\mu = \infty \quad \text{ó} \quad \int_{E_i} g d\mu = \infty \\ \int_{E_j} f d\mu = -\infty \quad \text{ó} \quad \int_{E_j} g d\mu = -\infty, \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int f d\mu = \infty & \text{ó} & \int g d\mu = \infty \\ \int f d\mu = -\infty & \text{ó} & \int g d\mu = -\infty, \end{cases}$$

lo cual contradice que $\int f d\mu + \int g d\mu$ esté bien definida. ■

Veamos algunas consecuencias del teorema de aditividad:

Corolario 2.4.7 \mathcal{L}_1 es un \mathbb{K} -espacio vectorial y la aplicación

$$\Lambda: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

es \mathbb{K} -lineal. Además para cada $f \in \mathcal{L}_1$, $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

Demostración. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lo hemos visto en (2.3.5)(a), pág.88, y el Teorema de aditividad, pág.94. Ahora para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sea $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$ y $f = f_1 + if_2, g = g_1 + ig_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medibles e integrables, entonces las f_i, g_i son integrables y se prueba simultáneamente por una parte que también lo son zf y $f + g$, y por otra la linealidad de la integral, pues

$$\begin{aligned} z \int f &= z_1 \int f_1 - z_2 \int f_2 + i(z_1 \int f_2 + z_2 \int f_1) \\ &= \int (z_1 f_1 - z_2 f_2) + i \int (z_1 f_2 + z_2 f_1) \\ &= \int (z_1 f_1 - z_2 f_2 + i(z_1 f_2 + z_2 f_1)) = \int zf, \\ \int (f + g) &= \int (f_1 + g_1) + i \int (f_2 + g_2) = \int f + \int g. \end{aligned}$$

La desigualdad $|\int f| \leq \int |f|$ ya la vimos para el caso real en (2.3.5), pág.88, veámosla ahora para el caso complejo. Sea $\int f d\mu = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$, entonces para $e^{-i\theta} f = g_1 + ig_2$, con las g_i reales, tendremos $|g_1| \leq |g_1 + ig_2| = |f|$ y

$$|\int f| = r = e^{-i\theta} \int f = \int e^{-i\theta} f = \int g_1 \leq \int |g_1| \leq \int |f|. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de los teoremas anteriores tenemos una de las propiedades más importantes de la integración, la de poder integrar término a término la integral de una serie de funciones medibles no negativas.

Corolario 2.4.8 Si h_n son funciones medibles no negativas, entonces

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n d\mu.$$

Demostración. Consideremos $0 \leq \sum_{i=1}^n h_i \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} h_i$ y apliquemos el teorema de aditividad y el de la convergencia monótona, pág.93. ■

Nota 2.4.9 Como consecuencia tenemos que si $a_{nm} \geq 0$ para $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$(2.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm},$$

pues basta considerar μ la medida de contar en \mathbb{N} , $h_n(m) = a_{nm}$, es decir $h_n = \sum_m a_{nm} I_{\{m\}}$, $h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$, por tanto $h(m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$, y $h = \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}) I_{\{m\}}$ y se aplica 3 veces el resultado anterior.

2.4.4. Teorema de la convergencia dominada.

Como consecuencia de los resultados anteriores se tiene que las hipótesis del *Teorema de la convergencia monótona*, pág.93, se pueden debilitar.

Teorema de la convergencia monótona extendido 2.4.10 Sean h, f, f_n funciones medibles, tales que existe $\int h d\mu$, entonces:

(a) Si $-\infty < \int h d\mu$, $h \leq f_n$ y $f_n \uparrow f$, entonces

$$\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu.$$

(b) Si $\int h d\mu < \infty$, $f_n \leq h$ y $f_n \downarrow f$, entonces

$$\int f_n d\mu \downarrow \int f d\mu.$$

Demostración. Por (2.3.5) las f_n y f tienen integral. (a) Si la $\int h d\mu = \infty$, entonces

$$\int f_n d\mu = \int f d\mu = \infty.$$

En caso contrario, por la hipótesis, h es integrable y por (2.4.3), h es finita c.s., y para $A = \{|h| < \infty\}$, $\mu(A^c) = 0$ y por el Teorema de la carga (2.4.1), $\int_{A^c} f_n = \int_{A^c} h = 0$, por tanto tenemos la primera y última de las igualdades

$$\int f_n - \int h = \int_A f_n - \int_A h = \int_A f_n - h \uparrow \int_A f - h = \int_A f - \int_A h = \int f - \int h.$$

la segunda y penúltima son por el Teorema de aditividad (pág. 94) en A , pues h y su integral son finitas y el resto por el Teorema de la convergencia monótona (pág. 93), pues en A , $0 \leq f_n - h \uparrow f - h$. Ahora sumando el valor finito $\int h$, tendremos que $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

(b) Se sigue de (a) cambiando de signo. ■

Lema de Fatou 2.4.11 Sean h, f_n funciones medibles, tales que existe $\int h d\mu$, entonces:

(a) Si $h \leq f_n$ y $-\infty < \int h d\mu$, entonces

$$\liminf \int f_n d\mu \geq \int (\liminf f_n) d\mu.$$

(b) Si $f_n \leq h$ y $\int h d\mu < \infty$, entonces

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int (\limsup f_n) d\mu.$$

Demostración. (a) Sea $g_n = \inf_{k \geq n} f_k \uparrow g = \liminf f_n$, entonces como $h \leq g_n$, por el Teorema de la convergencia monótona extendido $\int g_n d\mu \uparrow \int g d\mu$ y como $g_n \leq f_n$

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \int g d\mu = \lim \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

(b) Se sigue de (a) cambiando de signo. ■

Ahora como consecuencia de este resultado se tiene el más importante que permite permutar límite e integral.

Teorema de la convergencia dominada 2.4.12 Sean $h, f, f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ (para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ó \mathbb{C}) medibles tales que $|f_n| \leq h$, h es integrable y $f_n \rightarrow f$, entonces f es integrable y

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

Demostración. Como $|f_n| \rightarrow |f|$, tendremos que $|f| \leq h$ y f es integrable por (2.4.3), pág.92. Ahora para $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$, como $-h \leq f_n \leq h$ se sigue del *Lema de Fatou* que

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \int (\liminf f_n) \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu \\ &\leq \limsup \int f_n \, d\mu \leq \int (\limsup f_n) \, d\mu = \int f \, d\mu, \end{aligned}$$

y para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se demuestra aplicando el caso real a $|f_n - f|$, que está acotada por la función integrable $2h$ y $|f_n - f| \rightarrow 0$, por tanto

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Debemos observar que el Teorema de la convergencia dominada también es válido si las condiciones se tienen casi seguro. Por otra parte podemos dar simples ejemplos en los que el resultado no es cierto si h no existe.

Ejemplo 2.4.13 Consideremos la medida de Lebesgue en $(0, 1)$, entonces $f_n = nI_{(0, 1/n)} \rightarrow 0 = f$ y $\int f_n \, d\mu = 1 \not\rightarrow \int f \, d\mu = 0$.

Ejemplo 2.4.14 Consideremos la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , entonces $f_n = (1/n)I_{[0, n]} \rightarrow 0 = f$ uniformemente y $\int f_n \, d\mu = 1 \not\rightarrow \int f \, d\mu = 0$.

A continuación damos algunas consecuencias importantes del *Teorema de la convergencia dominada*.

Corolario 2.4.15 Sean h, f, f_n medibles y $p > 0$, tales que $|f_n| \leq h$, h^p integrable y $f_n \rightarrow f$ c.s., entonces $|f|^p$ es integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

Demostración. Como $|f_n|^p \leq h^p$, tendremos $|f|^p \leq h^p$ y por tanto $|f|^p$ es integrable, por tanto las f_n y la f son finitas c.s. y en esos puntos $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2h)^p$ siendo la última integrable y el resultado se sigue del *Teorema de la convergencia dominada*. \blacksquare

Teorema 2.4.16 Sean h_n medibles tales que $\sum \int |h_n| d\mu < \infty$, entonces $\sum h_n$ converge c.s. a una función medible finita y

$$\int \sum h_n d\mu = \sum \int h_n d\mu.$$

Demostración. Por (2.4.8), $\int \sum |h_n| d\mu = \sum \int |h_n| d\mu < \infty$ y por (2.4.3), $g = \sum |h_n| < \infty$ c.s. Sea $A = \{g < \infty\}$ entonces las funciones medibles finitas $h'_n = h_n I_A$ definen una serie $f = \sum h'_n$ absolutamente convergente en todo punto y por tanto convergente, es decir las sumas parciales $f_n = \sum_{k=1}^n h'_k$ que son medibles convergen a la función medible f que coincide c.s. con $\sum h_n$. Ahora como $|f_n| \leq g = \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$, siendo g integrable, el resultado se sigue del *Teorema de la convergencia dominada* y de que funciones iguales c.s. tienen igual integral. ■

Nota 2.4.17 Como consecuencia tenemos algo similar a (2.1), pág.97, que si $a_{nm} \in \mathbb{R}$ son tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < \infty$, entonces para $h_n(m) = a_{nm}$ y μ la medida de contar

$$(2.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}.$$

2.4.5. Dependencia de un parámetro.

Frecuentemente necesitamos considerar integrales en las que el integrando depende de un parámetro real. Veamos en este contexto una aplicación del *Teorema de la convergencia dominada*, pág.98. En lo que resta de lección consideraremos una función

$$f: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

con I un intervalo finito o no de \mathbb{R} , tal que para cada $t \in I$ es medible la función

$$f_t: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_t(x) = f(t, x).$$

Lema 2.4.18 Sea $G: I \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in \bar{I}$ y $A \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall t_n \rightarrow t_0, \quad G(t_n) \rightarrow A.$$

Corolario 2.4.19 Sea h integrable en Ω tal que para todo $t \in I$, $|f(t, x)| \leq h(x)$, entonces:

(a) Si para un $t_0 \in \bar{I}$ y todo $x \in \Omega$, existe el $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int f(t, x) d\mu = \int \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) d\mu.$$

(b) Si para cada $x \in \Omega$ la función $t \in I \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$ es continua, entonces la función $F(t) = \int f(t, x) d\mu$ es continua en I .

Demostración. (a) Sea $g(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x)$ y consideremos una sucesión $t_n \rightarrow t_0$. Definamos $g_n(x) = f(t_n, x)$, las cuales son medibles y como $g_n \rightarrow g$, g es medible. Ahora el resultado se sigue aplicando el Teorema de la convergencia dominada, pág.98 y el Lema anterior.

(b) Es consecuencia de (a). ■

Corolario 2.4.20 Sea I abierto y supongamos que para un $s \in I$ la función $f_s(x) = f(s, x)$ es integrable, existe $\partial f / \partial t$ y existe una función medible e integrable h en Ω , tal que para todo $(t, x) \in I \times \Omega$, $|\partial f(t, x) / \partial t| \leq h(x)$, entonces para todo t , $f(t, x)$ y $\partial f / \partial t(t, x)$ son medibles e integrables en x , $F(t) = \int f(t, x) d\mu$ es diferenciable en I y

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int f(t, x) d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu.$$

Si además para cada x , las f_x son de clase 1, F es de clase 1.

Demostración. Veamos primero que $\partial f / \partial t(t, \cdot)$ es medible, para cada $t \in I$, para ello sea $t_n \rightarrow t$, con $t_n \neq t$, entonces como

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \lim_{t_n \rightarrow t} \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t},$$

se sigue que es medible. Ahora por el Teorema del valor medio existe t_s entre t y s tal que

$$\begin{aligned} f(t, x) - f(s, x) &= (t - s) \frac{\partial f}{\partial t}(t_s, x) \quad \Rightarrow \\ |f_t(x)| &\leq |f_s(x)| + |t - s| h(x), \end{aligned}$$

por tanto cada f_t es integrable y podemos aplicar el Teorema de aditividad (2.4.6), página 94, para poner

$$\frac{F(t + \epsilon) - F(t)}{\epsilon} = \int \frac{f(t + \epsilon, x) - f(t, x)}{\epsilon} d\mu,$$

ahora como el integrando está acotado en módulo por h y tiene límite el resultado se sigue del corolario anterior. ■

Corolario 2.4.21 Si las $f_x \in \mathcal{C}^m(I)$ (son de clase m en I) y para cada $0 \leq k \leq m$ existe h_k integrable tal que para todo $t \in I$ y todo $x \in \Omega$, $|\partial^k f(t, x)/\partial t^k| \leq h_k(x)$, entonces $F(t) = \int f(t, x) d\mu$ es de clase m y para $0 \leq k \leq m$

$$F^{(k)}(t) = \int \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t, x) d\mu.$$

Ejemplo 2.4.22 Vamos a demostrar como consecuencia del resultado anterior que la función factorial³

$$\Pi: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Pi(t) = \int_{(0, \infty)} e^{-x} x^t dm,$$

es de clase infinito y verifica: $\Pi(0) = 1$, $\Pi(-1/2) = \sqrt{\pi}$ y que $\Pi(t) = t \cdot \Pi(t-1)$ para $t > -1$; por tanto $\Pi(n) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como el comportamiento del integrando es distinto en $(0, 1)$ que en $(1, \infty)$ consideramos $f(t, x) = e^{-x} x^t$ y las funciones

$$\Pi_1(t) = \int_{(0, 1)} f(t, x) dm, \quad \Pi_2(t) = \int_{(1, \infty)} f(t, x) dm,$$

por tanto como $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, basta ver que las Π_i son de clase infinito en cada intervalo (a, b) con $-1 < a$, para lo cual tenemos que probar que para $k \geq 0$ las $\partial^k f / \partial t^k = e^{-x} x^t (\log x)^k$ están acotadas por una función integrable para todo $t \in (a, b)$.

Para $0 < x < 1$, $\log x < 0$ y $x^r = e^{r \log x}$ es decreciente en r y si $t \in (a, b)$, $x^b < x^t < x^a$, por tanto como $|\log x| = -\log x = \log x^{-1}$, tendremos que para todo $t \in (a, b)$

$$|e^{-x} x^t (\log x)^k| \leq x^a (\log x^{-1})^k,$$

y la función de la derecha es integrable por el ejercicio (2.4.38), pág.109, por lo tanto π_1 es de clase infinito.

³Parece ser (ver Ivorra, pág.283) que el descubridor de esta función fue Euler, siendo de Gauss la notación Π para ella y que es de Legendre la función *Gamma*, $\Gamma(t) = \Pi(t-1)$,

$$\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad \Gamma(t) = \int_{(0, \infty)} e^{-x} x^{t-1} dm,$$

que es más habitual.

Para $1 < x$, $\log x > 0$ y $x^r = e^{r \log x}$ es creciente, por tanto si $t \in (a, b)$, $x^a < x^t < x^b$. Además como $0 < \log x < x$,

$$e^{-x} x^t \log^n x \leq e^{-x} x^b \log^n x \leq e^{-x} x^{b+n}$$

siendo la última función integrable (ver el ejercicio (2.4.39), pág.109).

Por último derivando $e^{-x} x^t$, respecto de x (para $t > 0$), e integrando se tiene que

$$0 = e^{-x} x^t \Big|_0^\infty = - \int_{(0, \infty)} e^{-x} x^t + t \int_{(0, \infty)} e^{-x} x^{t-1} = -\Pi(t) + t\Pi(t-1),$$

ahora bien por (2.3), $\Pi(0) = 1$, por tanto $\Pi(n) = n!$ y haciendo el cambio $y^2 = x$ —por el ejercicio (2.4.29)—, se sigue del ejercicio (2.4.33) que $\Gamma(1/2) = \Pi(-1/2) = \sqrt{\pi}$. ■

2.4.6. Otras propiedades.

El siguiente es uno de los resultados mas simples y útiles en la Teoría de Probabilidades.

Desigualdad de Tchebycheff 2.4.23 Si $f \geq 0$ es medible y $0 < p, \epsilon < \infty$, entonces

$$\mu\{f \geq \epsilon\} \leq \epsilon^{-p} \int f^p d\mu.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \int f^p d\mu &= \int_{\{f \geq \epsilon\}} f^p d\mu + \int_{\{f < \epsilon\}} f^p d\mu \\ &\geq \int_{\{f \geq \epsilon\}} f^p d\mu \geq \epsilon^p \mu\{f \geq \epsilon\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 2.4.24 Si f medible es p -integrable (i.e. $\int |f|^p d\mu < \infty$), para un $p \in (0, \infty)$, entonces $\{f \neq 0\}$ es σ -finito.

Demostración. Por la desigualdad de Tchebycheff para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\{|f| \geq 1/n\} \leq n^p \int |f|^p d\mu < \infty,$$

y $\{f \neq 0\}$ es la unión de estos conjuntos. ■

Corolario 2.4.25 Si $f \geq 0$ c.s. es medible, entonces tiene integral y si $\int f d\mu = 0$, entonces $f = 0$ c.s.

Demostración. f tiene integral porque para $A = \{f \geq 0\}$, $\mu(A^c) = 0$, por tanto por el teorema de la carga $\int f^- = \int_A f^- = 0$, de donde $\int f = \int f^+ = \int_A f$ y si esta integral es nula, $\mu\{f > 0\} = 0$, pues $\{f > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{f \geq 1/n\}$, siendo $\mu\{f \geq 1/n\} = 0$ por la desigualdad de Tchebycheff en A , ya que

$$\mu\{f \geq 1/n\} \leq n \int_A f d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

Corolario 2.4.26 Si g es medible y para todo $A \in \mathcal{A}$ es $\int_A g d\mu = 0$, entonces $g = 0$ c.s.

Demostración. Para los medibles $A = \{g > 0\}$ y $B = \{g < 0\}$ se tiene por lo anterior (2.4.25)

$$\begin{aligned} \int g^+ = \int_A g = 0 &\Rightarrow g^+ = 0 \quad \text{c.s.}, \\ \int g^- = -\int_B g = 0 &\Rightarrow g^- = 0 \quad \text{c.s.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Veamos ahora un recíproco de (2.3.5)(b).

Proposición 2.4.27 Sean g y h funciones medibles con integral, entonces en cualquiera de los dos casos:

- (a) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio σ -finito,
 - (b) El espacio es arbitrario pero g y h son integrables,
- se verifica que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \int_A g d\mu \leq \int_A h d\mu \quad \Rightarrow \quad g \leq h \quad \text{c.s.}$$

Demostración. Veamos que tiene medida nula el medible

$$\{x : h(x) < g(x)\} = \cup_{r_1 < r_2 \in \mathbb{Q}} [\{h < r_1\} \cap \{r_2 < g\}],$$

para ello basta ver que para cada medible $A = \{h < r_1\} \cap \{r_2 < g\}$ de esa unión numerable, $\mu(A) = 0$.

Observemos que para cada medible $B \subset A$

$$r_2\mu(B) \leq \int_B g d\mu \leq \int_B h d\mu \leq r_1\mu(B),$$

por tanto como $r_1 < r_2$, $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = \infty$.

(a) Si el espacio es σ -finito, A es unión numerable de medibles B con $\mu(B) < \infty$, lo cual implica $\mu(B) = 0$ y $\mu(A) = 0$.

(b) Veamos que si $\mu(A) = \infty$ una de las funciones no es integrable. Si $r_2 \leq 0$, entonces $r_1 < 0$ y por tanto $\int_A h d\mu \leq r_1 \cdot \infty = -\infty$, lo cual implica que h no es integrable y si $r_2 > 0$, $\infty = r_2 \cdot \infty \leq \int_A g$, y g no es integrable. ■

Ejercicios

Ejercicio 2.4.1 Sean $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles tales que $f = g$ c.s. y existe $\int f d\mu$. Demostrar que entonces también existe $\int g d\mu$ y coinciden.

(Sol.)

Ejercicio 2.4.2 Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e integrable. Demostrar que $g(x) = \int_{(a,x)} f dm$ es diferenciable y que $g' = f$.

(Sol.)

Ejercicio 2.4.3 Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y $g: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase 1. Demostrar que para cualesquiera $c < d$, en (a, b) , $\int_{[c,d]} g' dm = g(d) - g(c)$.

(Sol.)

Ejercicio 2.4.4 Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable

$$\int_{(-\infty, \infty)} f dm = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f dm.$$

¿Es cierto si existe la integral pero no es finita? (Sol.)

Ejercicio 2.4.5 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{A_n}$, con $a_n \in (0, \infty)$ y $A_n \in \mathcal{A}$, calcular $\int f d\mu$. (Sol.)

Ejercicio 2.4.6 Sea $f \geq 0$ integrable. Demostrar que $\forall \epsilon > 0$ existe un medible A , con $\mu(A) < \infty$ tal que $\int f < \int_A f + \epsilon$. (Sol.)

Ejercicio 2.4.7 Sea f integrable y $\epsilon > 0$. Demostrar que existe una función simple s tal que $\int |f - s| < \epsilon$.

Ejercicio 2.4.8 Sean $\mu_1 \leq \mu_2$ medidas. Demostrar que si una función medible compleja f es μ_2 -integrable, entonces es μ_1 -integrable.

Ejercicio 2.4.9 Sean $f_n \geq 0$ medibles tales que $f_n \downarrow f$. Demostrar que si f_1 es integrable, $\int f_n \rightarrow \int f$. ¿Es cierto si f_1 no es integrable?

Ejercicio 2.4.10 Sean $f, f_n \geq 0$ integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$ sii $\int |f_n - f| \rightarrow 0$. (Sol.)

Ejercicio 2.4.11 Sea $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n integrables tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Demostrar que f es integrable y que $\int f_n \rightarrow \int f$.

Ejercicio 2.4.12 Sean f, f_n integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ sii $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$. (Sol.)

Ejercicio 2.4.13 Sea f integrable y g medible acotada, demostrar que fg es integrable.

Ejercicio 2.4.14 Demostrar que μ es σ -finita si y sólo si existe una función medible estrictamente positiva e integrable.

Ejercicio 2.4.15 Sea Ω un espacio topológico, μ una medida en $\mathcal{B}(\Omega)$ tal que $\mu(A) > 0$, para cada abierto $A \neq \emptyset$ y $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f = g$ c.s., demostrar que $f = g$.

Ejercicio 2.4.16 Demostrar que si $f \leq g$ c.s., existe la $\int f$ y $-\infty < \int f$, entonces existe la $\int g$ y si existe la $\int g$ y $\int g < \infty$, entonces existe la $\int f$ y en ambos casos $\int f \leq \int g$.

Ejercicio 2.4.17 Demostrar el teorema de la convergencia monótona cuando las condiciones son c.s.

Ejercicio 2.4.18 Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dm. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 2.4.19 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\int_{(-\infty, \infty)} f(x) dm = \int_{(-\infty, \infty)} f(x - a) dm,$$

en el sentido de que si una integral existe también la otra y coinciden.

Ejercicio 2.4.20 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $e^{tx} f(x)$ es integrable para todo $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $F(t) = \int e^{tx} f(x) dm$ es diferenciable y que $F'(t) = \int x e^{tx} f(x) dm$. (Sol.)

Ejercicio 2.4.21 Demostrar que para $t > 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, $(1 + (t/n)^\alpha)^n$ es creciente en $n \geq 1$. Para $1 \leq \alpha$, $(1 - (t/n)^\alpha)^n$ es creciente en $n \geq t$. (Sol.)

Ejercicio 2.4.22 Demostrar que

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(1, n)} (1 - (t/n))^n \log t dm = \int_{(1, \infty)} e^{-t} \log t dm.$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, 1)} (1 - (t/n))^n \log t dm = \int_{(0, 1)} e^{-t} \log t dm. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 2.4.23 Sea f no negativa e integrable, con $0 < \int f d\mu = c < \infty$ y sea $0 < \alpha < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \log \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{si } \alpha = 1, \\ 0, & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases} \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 2.4.24 Demostrar que si f es μ -integrable, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| d\mu < \epsilon. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 2.4.25 Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable $F(x) = \int_{(-\infty, x)} f dm$ es uniformemente continua. (Sol.)

Ejercicio 2.4.26 Demostrar que si $F: (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible, $\mu_F = F_*\mu$, para $\mu_F(B) = \mu[F^{-1}(B)]$, es una medida, llamada *medida imagen*, para la que se verifica que si g es medible en Ω' y $B \in \mathcal{A}'$, entonces

$$\int_B g d\mu_F = \int_{F^{-1}(B)} (g \circ F) d\mu.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales. (Sol.)

Ejercicio 2.4.27 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa. Si definimos la medida $\lambda(A) = \int_A f d\mu$, demostrar que para cada función medible g

$$\int g d\lambda = \int gf d\mu,$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales. (Sol.)

Ejercicio 2.4.28 (a) Demostrar que si $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces para $t > 0$

$$t \int_{[0, \infty)} f(tx) \, dm = \int_{[0, \infty)} f \, dm.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

(b) Demostrar que si $f: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces para $t > 0$

$$t \int_{[0, 1]} f(tx) \, dm = \int_{[0, t]} f \, dm.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales. (Sol.)

Ejercicio 2.4.29 Teorema de cambio de variable. Sea $F: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow (c, d) \subset \mathbb{R}$ un difeomorfismo creciente de clase 1, con inversa G . Demostrar que la medida imagen de la de Lebesgue por G es $m_G(A) = \int_A F' \, dm$ y que

$$\int_{(c, d)} g \, dm = \int_{(a, b)} g \circ F \cdot F' \, dm.$$

para toda función medible $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, en el sentido de que si existe una también la otra y son iguales. (Sol.)

Ejercicio 2.4.30 (a) Demostrar por inducción que $\int_{(0, \infty)} x^n e^{-x} \, dm = n!$.

(b) Demostrar que para $t > 0$, $\int_{(0, \infty)} e^{-tx} \, dm = 1/t$ y admitiendo que podemos derivar bajo el signo integral tantas veces como queramos, utilizar esta igualdad para demostrar (a). (Sol.)

Ejercicio 2.4.31 Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(0) = 0$ y existe $f'(0^+) \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x)x^{-3/2}$ es Lebesgue integrable. (Sol.)

Ejercicio 2.4.32 Calcular:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} (1 + (x/n))^{-n} \operatorname{sen}(x/n) \, dm.$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} n \operatorname{sen}(x/n) [x(1 + x^2)]^{-1} \, dm.$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(a, \infty)} n(1 + n^2 x^2)^{-1} \, dm$, en función de a . (Sol.)

Ejercicio 2.4.33 Dadas las funciones definidas en $(0, \infty)$

$$f(t) = \left(\int_{(0, t)} e^{-x^2} \, dm \right)^2, \quad g(t) = \int_{(0, 1)} \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} \, dm,$$

demostrar que:

$$(a) f(t) + g(t) = \pi/4. \quad (b) \int_{[0, \infty)} e^{-x^2} dm = \sqrt{\pi}/2. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 2.4.34 Demostrar que⁴:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dm = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dm = \sigma^2. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 2.4.35 Demostrar que para $b = (a + 1)/2$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2} r^a dm = \begin{cases} \Gamma(b), & \text{si } a \text{ es par;} \\ 0, & \text{si } a \text{ es impar.} \end{cases} \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 2.4.36 Dada $f(t) = \int_{(0, \infty)} e^{-x^2} \cos 2xt dm$, demostrar que satisface $f'(t) + 2tf(t) = 0$ y que $f(t) = (1/2)\sqrt{\pi}e^{-t^2}$. (Sol.)

Ejercicio 2.4.37 Demostrar:

- (1) $\int_{(-\infty, \infty)} x^{2n} e^{-x^2} dm = 2n!\sqrt{\pi}/4^n n!$.
- (2) Para $a \geq 0$, $\int_{(-\infty, \infty)} e^{-x^2} \cos ax dm = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$.
- (3) Para $p > 0$, $\int_{(0,1)} x^{p-1} (x-1)^{-1} \log x dm = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(p+n)^2$. (Sol.)

Ejercicio 2.4.38 Demostrar que la función $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^r \log^n x^{-1}$, para $-1 < r$ y $n \geq 0$ es Lebesgue integrable y que

$$\int_{(0,1)} x^r \log^n x^{-1} dm = \frac{n!}{(1+r)^{n+1}}. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 2.4.39 Demostrar que la función $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} x^k$, para $k \in \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable. (Sol.)

Ejercicio 2.4.40 Sea $k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Demostrar que

$$\int_{(0,r)} x^k dm < \infty \Leftrightarrow -1 < k$$

$$\int_{(r,\infty)} x^k dm < \infty \Leftrightarrow k < -1. \quad (\text{Sol.})$$

⁴A la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

se la llama *función de densidad de la Normal de media 0 y varianza σ^2* , $N(0, \sigma^2)$.

2.4.7. Integrales de Riemann y de Lebesgue

En esta lección veremos que la integral de Lebesgue, que denotaremos con $\int f \, dm$, es una generalización de la de Riemann, que denotaremos con $\int f \, dx$, y obtendremos un criterio en términos de la medida de Lebesgue, que nos diga qué funciones son las Riemann integrables.

Recordemos brevemente cómo está definida la integral de Riemann.

Definición. Sean $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada $|f| \leq M$. Por una *partición finita* de I entenderemos un subconjunto finito

$$P = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\} \subset I,$$

que tomaremos ordenado ($x_i < x_{i+1}$). La partición de I realmente la forman los intervalos disjuntos

$$E_1 = [x_0, x_1), \dots, E_{n-1} = [x_{n-2}, x_{n-1}), E_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Nota 2.4.28 Tomamos el intervalo I cerrado por comodidad, los resultados son igualmente válidos, con pequeñas modificaciones, para cualquier intervalo acotado.

Definición. Para cada partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de I consideremos los intervalos disjuntos correspondientes E_i , los valores $M_i = \sup\{f(x) : x \in E_i\}$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in E_i\}$ y las funciones simples

$$\beta_P = \sum m_i I_{E_i}, \quad \alpha_P = \sum M_i I_{E_i},$$

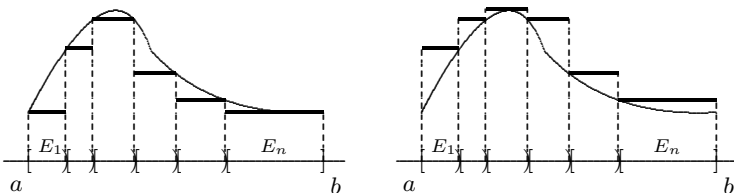


Figura 2.3. Gráficas de las funciones $\beta_P \leq f \leq \alpha_P$.

que llamaremos respectivamente *funciones simples inferior y superior* de f relativas a P y a cuyas integrales

$$\int_{[a,b]} \beta_P \, dm = \sum m_i (x_i - x_{i-1}), \quad \int_{[a,b]} \alpha_P \, dm = \sum M_i (x_i - x_{i-1}),$$

llamamos *suma inferior* y *superior* de f respecto de P .

Denotaremos con $|P| = \max\{|x_i - x_{i-1}| : i = 1, \dots, n\}$.

Es fácil demostrar que si $P_n \uparrow P$ es una sucesión creciente de particiones finitas de I y denotamos α_n y β_n las funciones simples superior e inferior de f relativas a P_n , tendremos que

$$-M \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq M,$$

y por tanto existen los *límites superior* e *inferior* respectivamente, relativos a P_n , $\alpha_n \downarrow \alpha$, $\beta_n \uparrow \beta$, son funciones (Borel) medibles y $\beta \leq f \leq \alpha$. Además como $|\alpha_n| \leq M$ y $|\beta_n| \leq M$, siendo esta función integrable pues I es acotado y $\int M dm = M(b-a) < \infty$, se sigue del *Teorema de la convergencia dominada*, pág.98 que α y β son integrables y

$$\lim \int_{[a,b]} \beta_n dm = \int_{[a,b]} \beta dm \leq \int_{[a,b]} \alpha dm = \lim \int_{[a,b]} \alpha_n dm.$$

Definición. Diremos que f es *Riemann integrable* si existe un $r \in \mathbb{R}$, tal que para toda sucesión creciente $P_n \uparrow P$ de particiones finitas de I , tales que $|P_n| \rightarrow 0$ las funciones Borel-medibles α y β correspondientes verifican

$$\int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} \beta dm = r,$$

independientemente de la sucesión P_n tomada, y llamaremos *integral de Riemann* a este valor común r , que denotaremos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} \beta dm.$$

Lema 2.4.29 Sea $P_n \uparrow P$ una sucesión creciente de particiones finitas y sean α y β los límites superior e inferior respectivamente.

- (a) Si $x \notin P$ y $\alpha(x) = \beta(x)$, f es continua en x .
- (b) Si f es continua en x y $|P_n| \rightarrow 0$, $\beta(x) = f(x) = \alpha(x)$.

Demostración. (a) Como $\alpha(x) = \beta(x)$, $0 \leq \alpha_n(x) - \beta_n(x) \rightarrow 0$, por tanto para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que para $n \geq N$, $0 \leq \alpha_n(x) - \beta_n(x) < \epsilon$. Para este n existen $a_i, a_{i+1} \in P_n$, tales que $x \in (a_i, a_{i+1}) = V$ y V es un abierto, entorno de x , en el que α_n y β_n son constantes y $\beta_n \leq f \leq \alpha_n$, por tanto si $y \in V$, $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

(b) Por ser f continua en x , para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $y \in V = (x - \delta, x + \delta)$, entonces $f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$. Tomemos n tal que $|P_n| < \delta$ y $a_{i-1}, a_i \in P_n$, tales que $x \in [a_{i-1}, a_i] = E_i$, entonces $E_i \subset V$ y por tanto

$$f(x) - \epsilon \leq \beta_n(x) \leq \beta(x) \leq f(x) \leq \alpha(x) \leq \alpha_n(x) \leq f(x) + \epsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema de caracterización 2.4.30 Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es Riemann integrable.

(b) Existe una sucesión creciente de particiones finitas P_n , cuyas funciones límite superior e inferior satisfacen

$$\int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} \beta dm.$$

(c) f es continua c.s. (m).

y si se satisfacen entonces f es Lebesgue medible, integrable y

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x) dx.$$

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Es obvio.

(b) \Rightarrow (c) Si existe una sucesión creciente $P_n \uparrow P$ de particiones, tal que $\int \alpha dm = \int \beta dm$, entonces como $\beta \leq f \leq \alpha$ se sigue de (2.4.25) que $\beta = \alpha$ salvo en un Borel medible B con $m(B) = 0$ y como $m(P) = 0$, pues $P = \cup P_n$ es numerable, por el Lema f es continua c.s. (fuera de $B \cup P$).

(c) \Rightarrow (a) Sea f continua fuera de un $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, con $m(B) = 0$. Sea $P_n \uparrow P$ una sucesión creciente de particiones de I tales que $|P_n| \rightarrow 0$, entonces por el Lema si x está fuera de B , tendremos que $\alpha(x) = f(x) = \beta(x)$. Por tanto f coincide con una función medible α c.s., y f es Lebesgue medible y acotada por tanto integrable y como $\alpha = f = \beta$ c.s. tendremos que

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} \alpha dm = \int_{[a,b]} \beta dm,$$

y como las integrales no dependen de P_n tendremos que f es Riemann integrable y que

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Si la función no es acotada en nuestro intervalo acotado o está definida en un intervalo no acotado tenemos la siguiente extensión de integrabilidad en el sentido de Riemann.

Definición. Si $f: (c, d) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para $-\infty \leq c < d \leq \infty$ es Riemann integrable en cada intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset (c, d)$, definimos la *integral impropia* de Riemann como,

$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{a \rightarrow c, b \rightarrow d} \int_a^b f(x)dx,$$

si existe el límite, es decir si existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ y no depende de las sucesiones $a_n \rightarrow c$ y $b_n \rightarrow d$.

Ejemplo 2.4.31 Por ejemplo la función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ es acotada pero está definida en un intervalo no acotado y tiene integral impropia de Riemann y es finita pues $e^{-x} \geq 0$ es continua y para cada $b > 0$, se sigue de (2.4.3) que

$$\int_0^b e^{-x} dx = \int_{[0,b]} e^{-x} dm = - \int_{[0,b]} (e^{-x})' dm = 1 - e^{-b},$$

por tanto existe el límite cuando $b \rightarrow \infty$, (la segunda integral por el teorema de la carga (2.4.1))

$$(2.3) \quad \int_0^\infty e^{-x} dx = \int_{[0,\infty)} e^{-x} dm = 1$$

Por ejemplo la función $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, no es acotada aunque el intervalo en el que está definida sí lo es y tiene integral impropia de Riemann pues es Riemann integrable en cada intervalo cerrado $[a, b] \subset (0, 1)$ y su integral vale

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_{[a,b]} \frac{1}{x} dm = \int_{[a,b]} (\log x)' dm = \log b - \log a,$$

cuyo límite cuando $b \rightarrow 1^-$ y $a \rightarrow 0^+$ existe y es infinito y se cumple que

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_{(0,1)} \frac{1}{x} dm = \infty.$$

No obstante debemos advertir que una función puede tener integral impropia de Riemann finita y sin embargo no ser Lebesgue integrable, pues por ejemplo para $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} I_{[n-1, n)},$$

existe la integral impropia de Riemann

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

y es finita, pero sin embargo f no es Lebesgue integrable, pues no lo es $|f|$, ya que $\int |f| dm = \sum (1/n) = \infty$.

Ejercicios

Ejercicio 2.4.41 Demostrar que si $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ son Riemann-integrables y $f_n \rightarrow f$ uniformemente, entonces f es Riemann-integrable. (Sol.)

Ejercicio 2.4.42 Sea $C = [a, b] \cap \mathbb{Q} = \{c_n\}$ y $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si x es irracional, $x \in C^c$; y $f(c_n) = 1/n$. Demostrar que f es Riemann-integrable y calcular su integral. (Sol.)

Ejercicio 2.4.43 (a) Demostrar que si f tiene integral impropia de Riemann, entonces es continua c.s. (m), pero no recíprocamente.

(b) Si $f \geq 0$ y es acotada en cada compacto, entonces se tiene la equivalencia. (Sol.)

Ejercicio 2.4.44 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, con integral impropia de Riemann finita, demostrar que f es Lebesgue medible e integrable y las dos integrales coinciden. Dar un contraejemplo si quitamos la no negatividad. (Sol.)

2.5. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

BARTLE, R.G.: “*The elements of integration*”. John Wiley, 1966.

COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.

IVORRA CASTILLO, CARLOS: “*Analisis*”. Libro en pdf que se encuentra en la dirección <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm>

En cuanto a una bibliografía complementaria, recomendamos los siguientes textos

BENEDETTO, J.J.: “*Real variable and integration*”, B.G.Teubner, 1976.

HALMOS, P.R.: “*Measure Theory*”. Springer-Verlag, 1974.

MUNROE, M.E.: “*Measure and integration*”, Addison Wesley, 1971.

RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”, Tata McGraw-Hill, 1974.

Por otra parte el trabajo de VOLTERRA que comentamos al comienzo del tema es

VOLTERRA, V.: “*Sui principii del calcolo integrale*”. G.Battaglini, 19, 333-372, 1881.

Una de las ventajas de la integral introducida por LEBESGUE, es su gran flexibilidad en el sentido siguiente: Hemos visto que una función es Riemann integrable sii es continua en casi todo punto. Sin embargo una función Lebesgue integrable puede ser discontinua en todo punto, incluso —y esta es una diferencia fundamental— no necesita de un contexto topológico para ser introducida, pues solo precisa de un conjunto, una estructura de σ -álgebra y una medida. De esto es probable que no fuera consciente LEBESGUE ni RADON quien en 1913 da una definición de integral en

RADON, J.: “*Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen*”. S.B. Akad. Wiss. Wien, 122, 1295-1438, 1913.

con los procedimientos de LEBESGUE, pero partiendo de una medida distinta a la de LEBESGUE, sobre los Lebesgue medibles. Sin embargo casi inmediatamente después de la aparición de esta memoria, FRECHET señalaba que casi todos los resultados de la misma podían extenderse al caso en que la medida estuviese definida en una σ -álgebra arbitraria. Y así nació la integración abstracta de Lebesgue. Pero hay en la literatura otros puntos de vista para introducir la integral, entre los que destacan el de DANIELL, del que hablaremos mas adelante y el de BOCHNER en

el que se integran funciones que toman valores en un espacio de Banach. Para los interesados en este último nos remitimos a los libros

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol. I*”. John Wiley Interscience Pub., 1958.

MIKUSINSKI, J.: “*The Bochner integral*”, Birkhauser, 1978.

del que el primero, a parte del desarrollo de esta integral, tiene en la página 232 numerosos datos históricos de los que han contribuido en el tema. Por su parte el segundo introduce una noción de integración para la que sólo se requieren algunas nociones sobre series absolutamente convergentes y cuya idea básica reside en elegir una vía de aproximación de la integral distinta de las de Riemann y Lebesgue, atendiendo a las “*abscisas*” y “*ordenadas*” a la vez —en forma de rectángulos—, y no a las abscisas sólo, como hacía Riemann ó a las ordenadas sólo, como hacía Lebesgue. De esta forma no sólo recupera la integral de Lebesgue, sino que su definición se extiende automáticamente a la integral de Bochner reemplazando simplemente, los coeficientes reales de las series, por elementos del espacio de Banach correspondiente.

Sabemos que existen funciones $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ver la página 80 del BENEDETTO), diferenciables en todo punto, pero con $\int |f'|$ no finita. Hay sin embargo teorías generales de integración como las debidas a PERRON Y DENJOY, que tienen la propiedad de que el *Teorema fundamental del cálculo* es válido para las funciones diferenciables. Tales teorías son importantes pero no tanto como la teoría de Lebesgue, y probablemente una de las razones para que esto sea así es que en ellas no se tiene la propiedad de que una función sea integrable si y sólo si lo es su módulo, propiedad que surge de la propia definición en la de Lebesgue. Remitimos al lector a la p. 79 del BENEDETTO para referencias bibliográficas sobre la cuestión.

Comentemos ahora la historia de los resultados fundamentales de este capítulo. La definición de integral de Riemann se encuentra en el epígrafe 4 del trabajo de

RIEMANN, BERNHARD: “*Ueber die darstellbarkeit einer function durch eine trigonometrische reihe (Sobre la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica)*”, Tesis de habilitación, 1854 (publicada en 1868).

Esta obra junto con otras de Riemann han sido traducidas al español en el volumen

FERREIRÓS, JOSÉ: “*Bernhard Riemann. Riemanniana Selecta*”, Consejo Superior de investigaciones científicas, 2000.

En su Tesis de 1902 LEBESGUE comenta que su teorema de la convergencia dominada, pág.98 es una generalización, con una simplificación en la prueba, de un resultado de W.F.OSGOOD de 1897. Este a su vez era un caso particular, para f continua del siguiente resultado:

Teorema 2.5.1 *Dadas $f, f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrables, tales que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para cada $x \in [a, b]$ y $\sup_n \sup_x |f_n(x)| < \infty$, entonces*

$$\lim \int f_n(x) dx = \int f(x) dx.$$

que aparece inicialmente en 1885, en el trabajo

ARZELÁ, C.: “*Sulla integrazione per serie*”. Atti. Ecc. Lincei, Roma 1, 532-537, 1885.

Partiendo de la definición de integral Riemann no es fácil probar (2.5.1), mientras que el teorema de la convergencia dominada, pág.98 que es mucho mas general, es mas sencillo. La razón estriba en que el resultado de ARZELÁ depende de la numerable aditividad de la medida y partiendo de la definición de Riemann probar tal propiedad requiere algún esfuerzo, mientras que en la teoría de Lebesgue esta se tiene esencialmente desde el principio.

En 1906 FATOU prueba el lema que lleva su nombre en

FATOU, P.: “*Series trigonometriques et series de Taylor*”, Acta Math. 30, 335-400, 1906.

porque lo necesitaba para probar el siguiente resultado sobre series de Fourier

Teorema 2.5.2 $f(x) = \lim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n t^n e^{inx}$, cuando $t \rightarrow 1^-$, para

$$c_n = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Es curioso observar que FATOU combinando su lema y (2.5.2) prueba la *Igualdad de Parseval* —de la que hablaremos en otro tema—, para funciones periódicas de cuadrado integrable, hecho que LEBESGUE inicialmente había probado sólo para funciones periódicas acotadas c.s.

Capítulo 3

Espacio de medida producto

3.1. Introducción

Nuestro principal objetivo en este tema consiste en construir una σ -álgebra \mathcal{A} y una medida μ en el producto $\Omega = \prod \Omega_i$, de una familia de espacios de medida $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, para $i \in I$, e investigar la relación entre la integración en el espacio producto y la integración en los espacios factores.

El ejemplo mas familiar consiste en considerar el plano \mathbb{R}^2 como el producto de dos rectas \mathbb{R} , donde el cálculo de áreas de figuras planas se obtiene a partir del cálculo de longitudes de segmentos

$$m_2([a, b] \times [c, d]) = m_1([a, b])m_1([c, d]),$$

de modo que m_2 , la medida de Lebesgue del plano, es en cierto sentido el producto de dos copias de m_1 , la medida de Lebesgue de la recta.

Nuestra intención es desarrollar esta idea en una forma general. Sin embargo estaremos interesados en dos construcciones de naturaleza distinta, de las que la primera responde al marco del comentario anterior

que es de índole geométrica y está basada en la idea de área de un rectángulo. En este caso consideraremos, para $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

La segunda construcción es de naturaleza probabilística y está basada en la idea de experimento compuesto: Supongamos un experimento en el que se realizan dos observaciones. La primera x_1 está en Ω_1 y la segunda x_2 en Ω_2 . La probabilidad de que la primera caiga en un conjunto $A \in \mathcal{A}_1$ es $\mu_1(A)$. Además, una vez hecha la observación x_1 , la probabilidad de que la segunda caiga en un conjunto $B \in \mathcal{A}_2$ es $\mu_{x_1}(B)$. Entonces es razonable que la probabilidad de que la observación (x_1, x_2) caiga en $A \times B$ sea

$$\mu(A \times B) = \int_A \mu_x(B) d\mu_1.$$

Veámoslo con un ejemplo: Consideremos que extraemos una carta de una baraja española y a continuación una segunda ¿cual es la probabilidad de que la primera sea un as (A) y la segunda sea una espada (B)?. Podemos contestar de la siguiente manera: Sea C el conjunto de cartas, como la primera carta no se devuelve y todas son igualmente probables tendremos en nuestro conjunto de pares de cartas posibles $(C \times C) \setminus \Delta$, con Δ la diagonal, que la probabilidad es:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{39}{39 \cdot 40} = \frac{1}{40}.$$

Pero podemos proceder de otro modo: condicionado por la primera extracción, tenemos que si la primera es el as de espadas (cuya probabilidad es $1/40$), la segunda tiene probabilidad $9/39$ de ser espada y si la primera es cualquiera de los otros ases la segunda tiene probabilidad $10/39$, en cuyo caso la integral de la derecha en la ecuación anterior nos da

$$\int_A \mu_x(B) d\mu_1 = \frac{1}{40} \cdot \frac{9}{39} + \frac{3}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{1}{40},$$

que es el mismo resultado. Ahora bien es fácil ver (lo demostraremos en general) que hay una única probabilidad μ en el espacio $C \times C$, que satisface la ecuación de arriba, pero ¿cual es esta probabilidad?, el cálculo anterior aplicado a una única carta $c \in C$, da $\mu(\{c\} \times \{c\}) = 0$ y por tanto $\mu(\Delta) = 0$, mientras que a dos cartas distintas $a, b \in C$, $\mu(\{a\} \times \{b\}) = 1/(39 \cdot 40)$, y por tanto es la probabilidad considerada en el primer cálculo, definida en el espacio producto.

3.2. Producto finito de espacios medibles

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Diremos que una σ -álgebra \mathcal{A} en el producto $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ es la σ -álgebra *producto* si se verifican las condiciones:

- (a) Las proyecciones $\pi_i: \Omega \rightarrow \Omega_i$ son medibles.
- (b) Dado otro espacio medible (Ω', \mathcal{A}') , una aplicación

$$F: \Omega' \longrightarrow \Omega,$$

es medible si y sólo si sus componentes $F_i = \pi_i \circ F$ son medibles.

Veremos que \mathcal{A} existe y es única y la denotaremos $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ y llamaremos *espacio medible producto* a la pareja

$$(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n).$$

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Llamaremos *producto de medibles* a todo subconjunto

$$A_1 \times \dots \times A_n \subset \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \quad \text{con los } A_i \in \mathcal{A}_i.$$

Nota 3.2.1 Denotaremos¹ con $\mathcal{R} = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ la clase de los productos de medibles, que es una clase elemental (ver el ejercicio (1.2.5)), pág.13), y con \mathcal{A}_0 las uniones finitas disjuntas de estos, que es álgebra (ver el ejercicio (1.2.6), pág.14).

Proposición 3.2.2 *La σ -álgebra producto existe, es única y es la generada por los productos de medibles.*

Demostración. Veamos que $\sigma(\mathcal{R})$ cumple las dos propiedades:

- (a) Si $A_i \in \mathcal{A}_i$, $\pi_i^{-1}(A_i) = \Omega_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times \Omega_n \in \mathcal{R}$.

¹Consideraremos la siguiente notación: Dadas las familias de subconjuntos $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{P}(\Omega_i)$, $i = 1, \dots, n$

$$\mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n = \{B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{C}_i\}.$$

(b) Si F es medible, $F_i = \pi_i \circ F$ son medibles. Recíprocamente si las F_i son medibles y $A_i \in \mathcal{A}_i$, entonces $F_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}'$ y

$$F^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \cap F_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}' \Rightarrow F \text{ es medible}$$

pues $F^{-1}[\sigma(\mathcal{R})] = \sigma[F^{-1}(\mathcal{R})]$, (ver el ejercicio (1.2.3), pág.13).

Veamos que es única, para ello supongamos que hay dos \mathcal{A} y \mathcal{A}' sobre Ω , basta tomar en (b) la id: $(\Omega, \mathcal{A}') \rightarrow (\Omega, \mathcal{A})$ y la id: $(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{A}')$, que son medibles y por tanto $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. ■

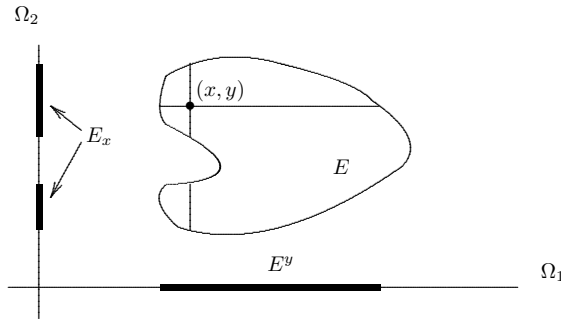


Figura 3.1. Las secciones E_x y E^y de E

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles, $E \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ y sean $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$. Definimos las *secciones de E por x e y* respectivamente como

$$E_x = \{q \in \Omega_2 : (x, q) \in E\}, \quad E^y = \{p \in \Omega_1 : (p, y) \in E\},$$

y para $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'$, definimos las *secciones de f por x e y* como

$$\begin{aligned} f_x: \Omega_2 &\rightarrow \Omega', & f_x(q) &= f(x, q), \\ f^y: \Omega_1 &\rightarrow \Omega', & f^y(p) &= f(p, y). \end{aligned}$$

Proposición 3.2.3 Sea $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, $E, E_n \subset \Omega$ y $(x, y) \in \Omega$, entonces

$$[E^c]_x = [E_x]^c, \quad [\cup E_n]_x = \cup [E_n]_x, \quad [\cap E_n]_x = \cap [E_n]_x,$$

(ídem para las secciones por y) y si $E \in \mathcal{A}$ y $f: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible, entonces $E_x \in \mathcal{A}_2$, $E^y \in \mathcal{A}_1$, y f_x, f^y son medibles.

Demostración. Hacemos uso del *principio de los buenos conjuntos*. Consideremos la clase de conjuntos

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{A} : E_x \in \mathcal{A}_2\},$$

la cual contiene a $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, pues para $E = A \times B$,

$$E_x = \{q \in \Omega_2 : (x, q) \in A \times B\} = \begin{cases} B, & \text{si } x \in A, \\ \emptyset, & \text{si } x \in A^c, \end{cases} \in \mathcal{A}_2,$$

y es σ -álgebra, pues dado $E \in \mathcal{C}$, $E^c \in \mathcal{C}$, ya que

$$(E^c)_x = \{q \in \Omega_2 : (x, q) \notin E\} = \{q : q \notin E_x\} = (E_x)^c \in \mathcal{A}_2,$$

y dados $E_n \in \mathcal{C}$, $\cup E_n \in \mathcal{C}$, pues $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)_x = \cup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \in \mathcal{A}_2$, por tanto $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ y para cada $E \in \mathcal{A}$, $E_x \in \mathcal{A}_2$ y del mismo modo se demuestra que $E^y \in \mathcal{A}_1$.

Si f es medible f_x es medible pues es la composición $f \circ i_x$, para $i_x(q) = (x, q)$ que es medible. ■

Ejercicios

Ejercicio 3.2.1 Sean Ω_1 y Ω_2 espacios topológicos. Demostrar que:

(a) $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \subset \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(b) Si sus topologías tienen bases numerables, $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(Sol.)

Ejercicio 3.2.2 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles y $f: \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $g: \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles, demostrar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ es $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -medible.

Ejercicio 3.2.3 Demostrar que $(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$.

Ejercicio 3.2.4 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f_x es Borel medible para cada x y f^y continua para cada y . Demostrar que f es Borel medible. (Sol.)

3.3. Medida producto de dos espacios

Teorema clásico de la medida producto 3.3.1

Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida. Existe una medida μ en \mathcal{A} tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

además es única si los espacios factores son σ -finitos, en cuyo caso ella también lo es y es una probabilidad si μ_1 y μ_2 lo son.

Demostración. La medida la tenemos definida en \mathcal{R} , los productos de medibles $A \times B$

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

para extenderla a \mathcal{A}_0 , veamos primero que si un producto de medibles $R = A \times B$ es unión disjunta, finita o numerable, de productos de medibles $R_n = A_n \times B_n$, $R = \cup R_n$, entonces $\mu(R) = \sum \mu(R_n)$, para ello observemos que $I_{A \times B} = \sum I_{A_n \times B_n}$ y por tanto

$$\begin{aligned} \mu(R) &= \mu_1(A)\mu_2(B) = \int \int I_A(x)I_B(y) d\mu_1 d\mu_2 \\ &= \int \int I_{A \times B}(x, y) d\mu_1 d\mu_2 = \int \int \sum I_{A_n \times B_n} d\mu_1 d\mu_2 \\ &= \sum \int \int I_{A_n \times B_n} d\mu_1 d\mu_2 = \sum \mu(R_n). \end{aligned}$$

Esto nos permite definir de modo único μ en el álgebra \mathcal{A}_0 de las uniones finitas disjuntas de productos de medibles de forma aditiva y además μ es una medida en \mathcal{A}_0 , pues si $E_n \in \mathcal{A}_0$ son disjuntos y $E = \cup E_n \in \mathcal{A}_0$, entonces $E = R_1 \cup \dots \cup R_m$, con los $R_i \in \mathcal{R}$ disjuntos y $E_n = \cup_{j=1}^{m_n} R_{nj}$, con los $R_{nj} \in \mathcal{R}$ disjuntos y como se tienen las particiones con elementos de \mathcal{R} , $R_i = \cup_{n,j} (R_i \cap R_{nj})$ y $R_{nj} = \cup_i (R_i \cap R_{nj})$, tendremos por la propiedad anterior que

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sum_{i=1}^m \mu(R_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(R_i \cap R_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{i=1}^m \mu(R_i \cap R_{nj}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(R_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

El resultado se sigue del Teorema de extensión de Caratheodory (1.4.7), pág.23. Si además los espacios factores son σ -finitos, μ también lo es, pues en tal caso existen sendas particiones $A_n \in \mathcal{A}_1$ de Ω_1 y $B_n \in \mathcal{A}_2$ de Ω_2 , con $\mu_1(A_n), \mu_2(B_n) < \infty$, por lo que $A_n \times B_m \in \mathcal{A}_0$ es una partición de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ con

$$\mu(A_n \times B_m) = \mu_1(A_n)\mu_2(B_m) < \infty.$$

y la unicidad se sigue del Teorema de Hahn (1.4.8), pág.25. ■

Observemos que por el Teorema de extensión de Caratheodory se verifica la fórmula

$$(3.1) \quad \mu(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)\mu_2(B_n) : A_n \in \mathcal{A}_1, B_n \in \mathcal{A}_2, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n \right\},$$

no obstante daremos otra fórmula más útil para calcular este valor en (3.3.6), pág.129.

Definición. A la medida $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ del teorema anterior la llamaremos la *medida producto* de las dos medidas σ -finitas μ_1 y μ_2 .

Ejemplo 3.3.2 En el caso particular de $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $\mu_1 = \mu_2 = m$, tenemos otra construcción de la medida de Lebesgue bidimensional: Se tiene

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

(ver el ejercicio (3.2.1)) y $m \times m$ es la medida de Lebesgue bidimensional, ya que por el *Teorema de la medida producto* $m \times m$ coincide con la medida de Lebesgue bidimensional sobre los semi-rectángulos y por tanto sobre sus uniones finitas disjuntas, es decir sobre el álgebra que generan. Por lo tanto coinciden en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ por el *Teorema de extensión de Hahn*, pág.25.

3.3.1. Medidas de transición

A continuación extenderemos el Teorema de la medida producto al caso en el que tenemos una medida en uno de los espacios y una familia de medidas $\{\mu_x\}_{x \in \Omega_1}$ en el otro, parametrizada por el primero. Pero además daremos una útil fórmula para el cálculo explícito de esta medida en cualquier medible E , cosa que en el caso de que la familia se reduzca

a una medida μ_2 sólo sabemos que verifica la fórmula general dada en (3.1), pág. 125, proporcionada por el Teorema de Caratheodory.

Definición. Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles. Llamaremos *medida de transición* en Ω_2 , relativa a Ω_1 , a toda colección de medidas $\{\mu_x\}_{x \in \Omega_1}$ en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, tales que para cada $B \in \mathcal{A}_2$, es medible la función

$$\mu_B: \Omega_1 \rightarrow [0, \infty], \quad \mu_B(x) = \mu_x(B).$$

Definición. Diremos que la *medida de transición* μ_x es *finita* si cada μ_x es finita. Diremos que es σ -finita si lo es cada μ_x . Diremos que es *uniformemente σ -finita* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $0 \leq k_n < \infty$ y $B_n \in \mathcal{A}_2$, tales que $\Omega_2 = \cup B_n$ y $\mu_x(B_n) \leq k_n$, para todo $x \in \Omega_1$. Diremos que μ_x es una *probabilidad de transición* si cada μ_x es una probabilidad, es decir

$$\mu_x(\Omega_2) = 1.$$

Nota 3.3.3 Estas probabilidades tienen un significado práctico de gran valor y forman el fundamento para el estudio de los *procesos de Markov* (ver PARTHASARATHY, p.166–7).

El siguiente resultado recoge el proceso de construcción de una medida en el espacio producto descrito al comienzo del tema.

Teorema de la medida producto 3.3.4 *Sea $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida σ -finita, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ un espacio medible y $\{\mu_x\}_{x \in \Omega_1}$ una medida de transición en \mathcal{A}_2 , uniformemente σ -finita. Entonces:*

- (a) *Para cada $E \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la función $x \rightarrow \mu_x(E_x)$ es medible.*
 (b) *Existe una única medida μ en \mathcal{A} , tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$*

$$\mu(A \times B) = \int_A \mu_B d\mu_1,$$

además μ es σ -finita y para cada $E \in \mathcal{A}$ verifica

$$\mu(E) = \int \mu_x(E_x) d\mu_1.$$

- (c) *Si μ_1 y μ_x son probabilidades, entonces μ es una probabilidad.*

Demostración. (a) Supongamos en primer lugar que para cada x , las medidas μ_x son finitas. Hagamos uso del *principio de los buenos conjuntos*. Consideremos la clase

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{A} : \mu_x(E_x) \text{ es medible}\},$$

la cual contiene al álgebra \mathcal{A}_0 de las uniones finitas disjuntas de productos de medibles, pues por una parte contiene a cada producto de medibles $E = A \times B$, ya que

$$\mu_x(E_x) = \mu_B \cdot I_A,$$

es medible y dada una unión finita disjunta de productos de medibles $E = \cup_{i=1}^n R_i$

$$\mu_x(E_x) = \mu_x([\cup_{i=1}^n R_i]_x) = \mu_x(\cup_{i=1}^n [R_i]_x) = \sum_{i=1}^n \mu_x([R_i]_x),$$

es medible por ser suma finita de medibles. Pero además \mathcal{C} es clase monótona, pues

$$E_n \uparrow E \Rightarrow (E_n)_x \uparrow E_x \Rightarrow \mu_x[(E_n)_x] \uparrow \mu_x(E_x),$$

y si las $E_n \in \mathcal{C}$ entonces $E \in \mathcal{C}$, pues $\mu_x(E_x)$ es medible por ser límite de medibles. Lo mismo si $E_n \downarrow E$, teniendo en cuenta que μ_x es finita, por tanto se sigue del *Teorema de la clase monótona*, pág. 12, que $\mathcal{C} = \mathcal{A}$.

Ahora supongamos que μ_x es uniformemente σ -finita y sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_n < \infty$ y $B_n \in \mathcal{A}_2$, disjuntos tales que $\Omega_2 = \cup B_n$ y $\mu_x(B_n) \leq k_n$, para todo $x \in \Omega_1$. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la medida de transición finita, que para cada $B \in \mathcal{A}_2$ y $x \in \Omega_1$ vale

$$(\mu_n)_x(B) = \mu_x(B \cap B_n),$$

ahora por lo anterior $(\mu_n)_x(E_x)$ es medible, por tanto también lo es

$$\mu_x(E_x) = \sum \mu_x(E_x \cap B_n) = \sum (\mu_n)_x(E_x).$$

(b) Como $0 \leq \mu_x(E_x)$ es medible, podemos considerar su integral

$$\mu(E) = \int \mu_x(E_x) d\mu_1,$$

para cada $E \in \mathcal{A}$, que es una medida, pues $\mu(\emptyset) = 0$ y para $E_n \in \mathcal{A}$ disjuntos

$$\begin{aligned} \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \int \mu_x((\cup_{n=1}^{\infty} E_n)_x) d\mu_1 \\ &= \int \mu_x(\cup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x) d\mu_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \mu_x((E_n)_x) d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \end{aligned}$$

para la que se tiene

$$\begin{aligned}\mu(A \times B) &= \int \mu_x([A \times B]_x) d\mu_1 \\ &= \int I_A \mu_x(B) d\mu_1 = \int_A \mu_B d\mu_1,\end{aligned}$$

y es σ -finita en \mathcal{A}_0 ya que μ_1 lo es y por tanto existe una partición $A_n \in \mathcal{A}_1$, de Ω_1 , con $\mu_1(A_n) < \infty$ y $A_n \times B_m \in \mathcal{R} \subset \mathcal{A}_0$ es una partición de Ω para la que

$$\mu(A_n \times B_m) = \int_{A_n} \mu_x(B_m) d\mu_1 \leq k_m \mu_1(A_n) < \infty,$$

por tanto es la única que satisface la propiedad, pues si λ es otra medida en el espacio producto, tal que para cada producto de medibles $A \times B$

$$\lambda(A \times B) = \int_A \mu_x(B) d\mu_1,$$

entonces μ y λ coinciden en el álgebra \mathcal{A}_0 y por el *Teorema de extensión de Hahn* (pág. 25), coinciden en \mathcal{A} , pues μ es σ -finita.

(c) Es obvio. ■

Si los papeles de los espacios están intercambiados y lo que tenemos es una medida μ_2 en Ω_2 y una medida de transición $\{\mu_y\}_{y \in \Omega_2}$ en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, tenemos un resultado análogo del que sólo damos el enunciado.

Teorema de la medida producto 3.3.5 *Sea $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ un espacio de medida σ -finita, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ un espacio medible y $\{\mu_y\}_{y \in \Omega_2}$ una medida de transición en \mathcal{A}_1 , uniformemente σ -finita. Entonces:*

- (a) *Para cada $E \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la función $y \rightarrow \mu_y(E^y)$ es medible.*
 (b) *Existe una única medida μ en \mathcal{A} , tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$*

$$\mu(A \times B) = \int_B \mu_A d\mu_2,$$

además μ es σ -finita y para cada $E \in \mathcal{A}$ verifica

$$\mu(E) = \int \mu_y(E^y) d\mu_2.$$

- (c) *Si μ_2 y las μ_y son probabilidades, entonces μ es una probabilidad.*

Teorema clásico de la medida producto 3.3.6

Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y sea $E \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Entonces:

(a) Las funciones $x \in \Omega_1 \rightarrow \mu_2(E_x)$, $y \in \Omega_2 \rightarrow \mu_1(E^y)$ son medibles.

(b) Existe una única medida μ en \mathcal{A} tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

la cual para cada $E \in \mathcal{A}$ viene dada por

$$\mu(E) = \int \mu_2(E_x) d\mu_1 = \int \mu_1(E^y) d\mu_2,$$

además es σ -finita y es una probabilidad si μ_1 y μ_2 lo son.

Demostración. Aplicando (3.3.4) a $\mu_x = \mu_2$, tendremos que $\mu_2(E_x)$ es medible y $\mu(E) = \int \mu_2(E_x) d\mu_1$, es la única medida que satisface

$$\mu(A \times B) = \int_A \mu_2(B) d\mu_1 = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

y aplicando (3.3.5) a $\mu_y(A) = \mu_1(A)$ tendremos que $\mu_1(E^y)$ es medible y $\mu(E) = \int \mu_1(E^y) d\mu_2$ es la única medida que satisface

$$\mu(A \times B) = \int_B \mu_1(A) d\mu_2 = \mu_1(A)\mu_2(B). \quad \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 3.3.1 Demostrar que: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ y que la medida de Lebesgue m_{n+k} es la medida producto de las medidas de Lebesgue m_n y m_k . (Sol.)

Ejercicio 3.3.2 Demostrar que para cada $r > 0$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es medible la función de \mathbb{R}^n , $f(x) = m[A \cap B[x, r]]$ y demostrar que $\int f dm = r^n \cdot m(A) \cdot m[B[0, 1]]$. (Sol.)

Ejercicio 3.3.3 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y completos, ¿es necesariamente completo el espacio producto?.

Ejercicio 3.3.4 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y $E, F \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, tales que para todo $x \in \Omega_1$ c.s. (μ_1) , $\mu_2(E_x) = \mu_2(F_x)$. Demostrar que $\mu(E) = \mu(F)$.

Ejercicio 3.3.5 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ espacios medibles y $\mu_x(B) = \mu_B(x)$, para $x \in \Omega_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$ una medida de transición. Demostrar que:

(a) Si ν es una medida en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, entonces

$$\lambda(B) = \int \mu_B d\nu,$$

es una medida en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

(b) Si $g \geq 0$ es medible en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$,

$$f(x) = \int g d\mu_x,$$

es medible en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y se tiene que

$$\int f d\nu = \int g d\lambda.$$

Ejercicio 3.3.6 Demostrar que: (a) Si $F: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible y μ es una medida en (Ω, \mathcal{A}) , $\nu = F_*\mu$, para

$$\nu(A) = \mu[F^{-1}(A)],$$

es una medida en (Ω', \mathcal{A}') (llamada medida imagen) y si ν es σ -finita, μ también lo es. ¿Es cierto que si μ lo es, lo es ν ?

(b) Si $F_1: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega'_1, \mathcal{A}'_1)$ y $F_2: (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (\Omega'_2, \mathcal{A}'_2)$ son medibles entonces también es medible

$$F_1 \otimes F_2: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'_1 \times \Omega'_2, \quad F_1 \otimes F_2(x, y) = (F_1(x), F_2(y)),$$

y dadas medidas μ_1 en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y μ_2 en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, tales que $\nu_i = F_{i*}\mu_i$ son σ -finitas, se verifica que

$$[F_1 \otimes F_2]_*(\mu_1 \times \mu_2) = \nu_1 \times \nu_2.$$

3.4. El Teorema de Fubini

La teoría de integración que hemos desarrollado hasta aquí incluye, como caso particular, la integral múltiple en \mathbb{R}^n , la cual no es otra cosa que la integral respecto de la medida de Lebesgue n -dimensional. Sin embargo, para realizar un cálculo explícito, las integrales de este tipo se pueden evaluar calculando integrales unidimensionales, en un proceso iterativo. El teorema general que justifica este útil método de cálculo es el *Teorema de Fubini*, el cual es una consecuencia directa del teorema de la medida producto.

3.4.1. Teorema de Fubini para dos espacios

Teorema de Fubini 3.4.1 *Sea $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida σ -finita, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ un espacio medible, $\{\mu_x\}_{x \in \Omega_1}$ una medida de transición en \mathcal{A}_2 , uniformemente σ -finita y sea $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, entonces:*

(a) *Si $f \geq 0$, existe $g(x) = \int f_x d\mu_x$, es medible en Ω_1 y*

$$\int f d\mu = \int g d\mu_1 = \int \left[\int f_x d\mu_x \right] d\mu_1.$$

(b) *Si la $\int f d\mu$ existe, entonces existe una función medible g en Ω_1 , tal que $g(x) = \int f_x d\mu_x$, c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) (si además f es integrable, g es finita) y se tiene*

$$\int f d\mu = \int g d\mu_1 = \int \left[\int f_x d\mu_x \right] d\mu_1.$$

(c) *Si $\int \int |f(x, y)| d\mu_x d\mu_1 < \infty$, entonces f es μ -integrable y como antes $\int f d\mu = \int \int f(x, y) d\mu_x d\mu_1$.*

Demostración. (a) Para $f = I_E$, $f_x = I_{E_x}$ y por (3.3.4-a), $g(x) = \mu_x(E_x)$ es medible y

$$\int f d\mu = \mu(E) = \int \mu_x(E_x) d\mu_1 = \int g d\mu_1.$$

Ahora si $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{E_i}$, con los E_i disjuntos y los $a_i \geq 0$, entonces para cada x

$$g(x) = \int f_x d\mu_x = \sum_{i=1}^n a_i \mu_x(E_{ix}),$$

es medible y

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \mu_x(E_{ix}) d\mu_1 = \int g d\mu_1.$$

Ahora si f es medible y $0 \leq f$, entonces existe una sucesión de funciones simples $f_n \uparrow f$ y para todo x $(f_n)_x \uparrow f_x$. Ahora bien por el caso anterior $g_n(x) = \int (f_n)_x d\mu_x$ son medibles y por el *Teorema de la convergencia monótona*, pág.93

$$g(x) = \int f_x d\mu_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n)_x d\mu_x = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x),$$

por lo que g es medible además $0 \leq g_n \uparrow g$ y aplicando de nuevo el *Teorema de la convergencia monótona*

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu_1 = \int g d\mu_1. \end{aligned}$$

(b) Por la parte anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \int f^+ d\mu &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x^+ d\mu_x d\mu_1, \\ \int f^- d\mu &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x^- d\mu_x d\mu_1, \end{aligned}$$

y si la $\int f d\mu$ existe, una de las dos integrales (digamos la de f^-) es finita, por tanto la función medible $\int_{\Omega_2} f_x^- d\mu_x$ es finita en un conjunto $A \in \mathcal{A}_1$, con $\mu_1(A^c) = 0$, por lo que podemos definir la función medible en A

$$\int_{\Omega_2} f_x d\mu_x = \int_{\Omega_2} f_x^+ d\mu_x - \int_{\Omega_2} f_x^- d\mu_x,$$

y si la $\int f d\mu$ es finita podemos encontrar un conjunto $A \in \mathcal{A}_1$, con $\mu_1(A^c) = 0$, en el cual las dos integrales de la derecha son finitas. En

cualquier caso por el *Teorema de aditividad* —(2.4.6), página 94— y definiendo en A^c como queramos la $\int_{\Omega_2} f_x d\mu_x$

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x^+ d\mu_x d\mu_1 - \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x^- d\mu_x d\mu_1 \\ &= \int_A \int_{\Omega_2} f_x^+ d\mu_x d\mu_1 - \int_A \int_{\Omega_2} f_x^- d\mu_x d\mu_1 \\ &= \int_A \int_{\Omega_2} f_x d\mu_x d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_x d\mu_x d\mu_1. \end{aligned}$$

(c) Por la parte (a) tenemos que

$$\int |f| d\mu = \int \left[\int |f_x| d\mu_x \right] d\mu_1 < \infty,$$

por tanto f es integrable y podemos aplicar la parte (b). ■

Como en el teorema de la medida producto tenemos otro teorema de Fubini si se intercambian los dos espacios.

Teorema de Fubini 3.4.2 *Sea $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ un espacio de medida σ -finita, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ un espacio medible, $\{\mu_y\}_{y \in \Omega_2}$ una medida de transición en \mathcal{A}_1 , uniformemente σ -finita y sea $f: \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, entonces:*

(a) *Si $0 \leq f$, entonces existe $h(y) = \int f^y d\mu_y$, es $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ -medible y*

$$\int f d\mu = \int h d\mu_2 = \int \left[\int f^y d\mu_y \right] d\mu_2.$$

(b) *Si la $\int f d\mu$ existe (resp. es finita), entonces existe una función \mathcal{A}_2 -medible (resp. finita) h , tal que $h(y) = \int f^y d\mu_y$, c.s. (\mathcal{A}_2, μ_2) y*

$$\int f d\mu = \int h d\mu_2 = \int \left[\int f^y d\mu_y \right] d\mu_2.$$

(c) *Si $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible y $\int \int |f(x, y)| d\mu_y d\mu_2 < \infty$, entonces f es μ -integrable y $\int f d\mu = \int \int f(x, y) d\mu_y d\mu_2$.*

Como un caso particular tenemos la forma clásica del teorema de Fubini.

Teorema de Fubini clásico 3.4.3 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ el espacio producto de los espacios de medida σ -finita $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ y sea $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible. Entonces:

(a) Si $0 \leq f$, entonces $\int f_x d\mu_2$ existe y es medible en x , $\int f^y d\mu_1$ existe, es medible en y y

$$\int f d\mu = \int \left[\int f_x d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int \left[\int f^y d\mu_1 \right] d\mu_2.$$

(b) Si $\int f d\mu$ existe, entonces existe una función \mathcal{A}_1 -medible g , tal que $g(x) = \int f_x d\mu_2$, c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) y otra función \mathcal{A}_2 -medible h , tal que $h(y) = \int f^y d\mu_1$, c.s. (\mathcal{A}_2, μ_2) (ambas finitas si f es integrable), tales que

$$\int f d\mu = \int \left[\int f_x d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int \left[\int f^y d\mu_1 \right] d\mu_2.$$

(c) Si $\int [f |f^y| d\mu_1] d\mu_2 < \infty$ ó $\int [f |f_x| d\mu_2] d\mu_1 < \infty$, entonces se tiene

$$\int f d\mu = \int \left[\int f_x d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int \left[\int f^y d\mu_1 \right] d\mu_2.$$

Demostración. Las primeras igualdades en (a) y (b) son consecuencia de (3.4.1) y las segundas de (3.4.2). (c) se sigue de los apartados (c) de esos teoremas. ■

Ejemplo 3.4.4 Hemos visto en (2.4.4), página 92, que la función $\text{sen } x/x$ no es Lebesgue integrable en $(0, \infty)$, sin embargo veamos que tiene integral impropia de Riemann y que vale

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En el ejercicio (2.4.30), página 108 vimos que para $x > 0$

$$\int_0^\infty x e^{-xt} dt = \int_{(0, \infty)} x e^{-xt} dm = 1,$$

entonces por Fubini, para m_x la medida de Lebesgue en la variable x , (idem m_t)

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\text{sen } x}{x} dx &= \int_{(0, a)} \frac{\text{sen } x}{x} dm = \int_{(0, a)} \int_{(0, \infty)} e^{-xt} \text{sen } x dm_t dm_x = \\ &= \int_{(0, \infty)} \int_{(0, a)} e^{-xt} \text{sen } x dm_x dm_t, \end{aligned}$$

pues $|\operatorname{sen} x| \leq x$, por tanto la integral del medio en módulo está acotada por a . Ahora bien como

$$\begin{aligned}(e^{-xt} \cos x)' &= -t e^{-xt} \cos x - e^{-xt} \operatorname{sen} x \\ (e^{-xt} \operatorname{sen} x)' &= -t e^{-xt} \operatorname{sen} x + e^{-xt} \cos x,\end{aligned}$$

tendremos integrando y despejando

$$f(a, t) = \int_{(0,a)} e^{-xt} \operatorname{sen} x \, dm_x = \frac{1 - e^{-at} \cos a - t e^{-at} \operatorname{sen} a}{t^2 + 1},$$

y el resultado se sigue, pues $|e^{-at} \cos a| \leq 1$, $|t e^{-at} \operatorname{sen} a| \leq t a e^{-at} \leq 1$ y por tanto

$$|f(a, t)| \leq \frac{3}{t^2 + 1},$$

que es integrable y por el Corolario del TCD, (2.4.19), pág.100, como $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a, t) = 1/(1+t^2) = (\arctan t)'$ (ver también (5.5.13), pág.219), se tiene que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{(0,\infty)} f(a, t) \, dm = \int_{(0,\infty)} (\arctan t)' \, dm = \pi/2.$$

Nota 3.4.5 Veamos en un par de ejemplos que las distintas hipótesis en el teorema de Fubini no pueden ser suprimidas.

Ejemplo 3.4.6 Sean $\Omega_1 = \Omega_2 = (0, 1)$, con $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(0, 1)$ y $\mu_1 = \mu_2 = m$, consideremos una sucesión $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \uparrow 1$ y $f_n: (0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ continuas, con soporte en (t_n, t_{n+1}) —es decir tales que $C_n = \operatorname{Adh}\{t : f_n(t) \neq 0\} \subset (t_n, t_{n+1})$ —, y tales que $\int_0^1 f_n(t) \, dt = 1$ y definamos

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(x) - f_{n+1}(x)] f_n(y),$$

entonces f es continua pues si tomamos $\delta_0 = d(0, C_0)$ y para $n \geq 1$, $\delta_n = \min\{d(t_n, C_n), d(t_n, C_{n-1})\}$, tendremos que para todo $n \geq 1$ y todo $j \geq 0$, $(t_n - \delta_n, t_n + \delta_n) \cap C_j = \emptyset$ y

$$f(x, y) = \begin{cases} f_n(x) f_n(y), & \text{si } x, y \in (t_n, t_{n+1}), \\ -f_{n+1}(x) f_n(y), & \text{si } y \in (t_n, t_{n+1}) \text{ y } x \in (t_{n+1}, t_{n+2}), \\ 0, & \text{si } (x, y) \in A, \end{cases}$$

donde A es el abierto formado por las uniones de $(t_n - \delta_n, t_n + \delta_n) \times (0, 1)$, de $(0, 1) \times (t_n - \delta_n, t_n + \delta_n)$, de $[t_n, t_{n+2}]^c \times (t_n, t_{n+1})$ y de $(t_n, t_{n+1}) \times [t_n, t_{n+2}]^c$ y se tiene que

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f^y dx \right] dy = 0 \neq 1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 f_x dy \right] dx,$$

pues si para algún $n \geq 1$, $y = t_n$, $f^y = 0$ y si $y \in (t_n, t_{n+1})$

$$f^y(x) = \begin{cases} f_n(x)f_n(y), & \text{si } x \in (t_n, t_{n+1}), \\ -f_{n+1}(x)f_n(y), & \text{si } x \in (t_{n+1}, t_{n+2}), \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

y por tanto

$$\int_0^1 f^y(x) dx = 0,$$

por otra parte si $x = t_n$, $f_x = 0$, si $x \in (0, t_1)$

$$f_x(y) = \begin{cases} f_0(x)f_0(y), & \text{si } y \in (0, t_1) \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

y si $x \in (t_n, t_{n+1})$, para $n \geq 1$

$$f_x(y) = \begin{cases} f_n(x)f_n(y), & \text{si } y \in (t_n, t_{n+1}), \\ -f_n(x)f_{n-1}(y), & \text{si } y \in (t_{n-1}, t_{n-2}), \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

y por tanto

$$\int_0^1 f_x(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{si } x = t_n, \\ f_0(x), & \text{si } x \in (0, t_1), \\ 0, & \text{si } x \in (t_n, t_{n+1}). \end{cases}$$

Ejemplo 3.4.7 Sean $\Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$, con $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}[0, 1]$, $\mu_1 = m$ y μ_2 la medida de contar. Consideremos $f = I_E$, para $E = \{x = y\}$, entonces para todo $x, y \in [0, 1]$

$$\int_0^1 f^y d\mu_1 = 0, \quad \int_0^1 f_x d\mu_2 = 1,$$

por tanto

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f^y d\mu_1 \right] d\mu_2 = 0 \neq 1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 f_x d\mu_2 \right] d\mu_1.$$

Ejercicios

Ejercicio 3.4.1 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y $f: \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $g: \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles e integrables, demostrar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ es $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ -integrable y

$$\int h d\mu = \left(\int f d\mu_1 \right) \left(\int g d\mu_2 \right).$$

Ejercicio 3.4.2 Sea $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrable. Demostrar que $g(x) = \int_{(x,1)} \frac{f(y)}{y} dm$ es medible, integrable y que $\int_{(0,1)} g dm = \int_{(0,1)} f dm$. (Sol.)

3.5. Completión de la medida producto

Es fácil ver que si $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ son espacios de medida completos, entonces su producto $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ no es necesariamente completo. Para ello observemos que si $A \in \mathcal{A}_1$, $A \neq \emptyset$, $\mu_1(A) = 0$ y existe $B \subset \Omega_2$, con $B \notin \mathcal{A}_2$, entonces

$$A \times B \subset A \times \Omega_2 \quad \text{y} \quad \mu(A \times \Omega_2) = 0,$$

pero $A \times B \notin \mathcal{A}$, pues para cada $x \in A$

$$(A \times B)_x = B \notin \mathcal{A}_2.$$

En particular tenemos que el espacio producto de $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ consigo mismo no es completo siendo su completión $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), m_2)$.

Teorema 3.5.1 (Ver Rudin, p.179). Sean $k, n \in \mathbb{N}$, entonces la compleción del producto

$$(\mathbb{R}^k, \mathcal{L}(\mathbb{R}^k), m_k) \times (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m_n),$$

es $(\mathbb{R}^{k+n}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+n}), m_{k+n})$.

Terminamos la lección con un resultado alternativo del *Teorema de Fubini* que es de interés especial en vista del resultado anterior. Para ello necesitamos dos resultados previos.

Lema 3.5.2 (Ver Rudin, p.154) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_* la compleción de \mathcal{A} relativa a μ . Si $f: (\Omega, \mathcal{A}_*) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ es medible, entonces existe $g: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ medible tal que $f = g$ c.s. (\mathcal{A}, μ) .

Lema 3.5.3 (Ver Rudin, p.154) Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita y completos y sea $\mathcal{A}_* = (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)_*$ la compleción de $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ relativa a $\mu_1 \times \mu_2$. Si

$$h: (\Omega, \mathcal{A}_*) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

es igual a 0 c.s., entonces $h_x = 0$ c.s. (\mathcal{A}_2, μ_2) y esto c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) , en particular h_x es medible c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) y h es medible c.s.

Teorema 3.5.4 (Ver Rudin, p.154) En las hipótesis del Lema anterior sea

$$f: (\Omega, \mathcal{A}_*) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})),$$

entonces:

(a) f_x y f_y son medibles c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) y (\mathcal{A}_2, μ_2) respectivamente. Si $f \geq 0$ y $F(x) = \int f_x d\mu_2$, $G(y) = \int f_y d\mu_1$ —extendiéndolas como queramos donde no están definidas—, entonces

$$\int f d\mu = \int F d\mu_1 = \int G d\mu_2.$$

(b) Si $\int f d\mu$ existe (es finita), entonces $F(x) = \int f_x d\mu_2$ existe (es finita) c.s. (\mathcal{A}_1, μ_1) y es medible —extendiéndola como queramos donde no está definida—, ídem para G y

$$\int f d\mu = \int F d\mu_1 = \int G d\mu_2.$$

3.6. Aplicaciones

Como una simple consecuencia del *Teorema de la medida producto* tenemos que la integral de una función no negativa es la medida del conjunto que hay “debajo de la gráfica de la función” y también se puede ver como una integral respecto de la medida de Lebesgue.

Corolario 3.6.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, no negativa. Si $E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$ y $g(y) = \mu\{x \in \Omega : y \leq f(x)\}$, entonces $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, g es medible y*

$$\mu \times m(E) = \int f \, d\mu = \int_{(0, \infty)} g \, dm.$$

Demostración. Consideremos las funciones medibles en el espacio producto $F(x, y) = f(x)$ y $\pi(x, y) = y$, entonces por el ejercicio (2.2.4)

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\} = \{0 \leq \pi \leq F\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

y como $E^y = \emptyset$ si $y < 0$, tendremos aplicando el *Teorema de la medida producto clásico* que

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \int m[0, f(x)] \, d\mu = \int m[E_x] \, d\mu = \mu \times m(E) \\ &= \int \mu[E^y] \, dm = \int_{(0, \infty)} g \, dm. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En particular si $\mu = m$ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} ,

$$m \times m(E) = \int f \, dm,$$

es decir que la integral de f es el área del conjunto bajo la gráfica de f .

Nota 3.6.2 Podemos obtener un resultado sobre series dobles —que ya vimos en (2.4.17), pág.100—, como aplicación del *Teorema de Fubini*:

Sea $\sum_{nm} a_{nm}$ una serie doble y consideremos el espacio de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ donde $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ es la medida de contar, es decir $\mu(A) = \text{card } A$, para cada $A \subset \mathbb{N}$. La serie es absolutamente convergente si y sólo

si la función $f(n, m) = a_{nm}$ definida en el espacio producto $(\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu) \times (\mathbb{N}, \mathcal{A}, \mu)$ tiene integral finita, en cuyo caso el *Teorema de Fubini* implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}.$$

Otra aplicación de estos Teoremas es la siguiente versión de la integración por partes.

Proposición 3.6.3 Sean $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de distribución acotadas, que se anulan en $-\infty$, μ_F, μ_G sus medidas de Lebesgue–Stieltjes asociadas y $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_I [F(x) + F(x^-)] d\mu_G + \int_I [G(x) + G(x^-)] d\mu_F &= \\ &= 2[F(b)G(b) - F(a)G(a)]. \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos $A = \{(x, y) \in [a, b]^2 : x \geq y\}$ y $B = A^c = \{(x, y) \in [a, b]^2 : x < y\}$, entonces por una parte

$$\begin{aligned} [\mu_F \times \mu_G]([a, b]^2) &= [\mu_F \times \mu_G](A) + [\mu_F \times \mu_G](B) \\ &= \int_{[a, b]} \mu_G(A_x) d\mu_F + \int_{[a, b]} \mu_F(B^y) d\mu_G \\ &= \int_{[a, b]} \mu_G[a, x] d\mu_F + \int_{[a, b]} \mu_F[a, y] d\mu_G \\ &= \int_{[a, b]} [G(x) - G(a^-)] d\mu_F + \\ &\quad + \int_{[a, b]} [F(y^-) - F(a^-)] d\mu_G \\ &= \int_{[a, b]} G(x) d\mu_F - G(a^-)\mu_F[a, b] + \\ &\quad + \int_{[a, b]} F(y^-) d\mu_G - F(a^-)\mu_G[a, b] \\ &= \int_{[a, b]} G(x) d\mu_F - G(a^-)[F(b) - F(a^-)] + \\ &\quad + \int_{[a, b]} F(y^-) d\mu_G - F(a^-)[G(b) - G(a^-)], \end{aligned}$$

y por otra parte eso es igual a

$$\mu_F[a, b] \cdot \mu_G[a, b] = (F(b) - F(a^-))(G(b) - G(a^-)),$$

por tanto

$$F(b)G(b) - F(a^-)G(a^-) = \int_{[a,b]} G(x) d\mu_F + \int_{[a,b]} F(y^-) d\mu_G,$$

y como la expresión de la izquierda es simétrica respecto de F y G , también la de la derecha, por lo tanto

$$F(b)G(b) - F(a^-)G(a^-) = \int_{[a,b]} G(x^-) d\mu_F + \int_{[a,b]} F(y) d\mu_G,$$

y el resultado se tiene sumando. ■

3.6.1. Cálculo de volúmenes especiales

Veamos ahora una aplicación al cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.

Ejemplo 3.6.4 *Calcular el volumen del toro (obtenido al girar un círculo de radio r alrededor de una recta de su plano, de la que su centro dista R).*

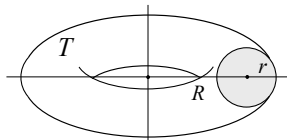


Figura 3.2. El volumen del Toro es $(2\pi R)(\pi r^2)$.

Demostración. Denotemos T el toro, considerando que el círculo está en el plano yz con centro en el eje y y que el eje z sea el eje de giro. Entonces $T_z = \emptyset$, salvo para z entre $-r$ y r , en cuyo caso T_z es una corona de área

$$\pi([R + \sqrt{r^2 - z^2}]^2 - [R - \sqrt{r^2 - z^2}]^2) = 4\pi R\sqrt{r^2 - z^2},$$

por tanto por el teorema de la medida producto

$$\begin{aligned} m_3[T] &= \int_{-r}^r m_2[T_z] dz = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - z^2} dz \\ &= 4\pi R r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = (2\pi R)(\pi r^2), \end{aligned}$$

pues para $I = [-\pi/2, \pi/2]$, $0 = \int_I (\sin t \cos t)' dm = \int_I \cos^2 t dm - \int_I \sin^2 t dm$ y haciendo el cambio $x = \sin t$

$$\pi = \int_I \cos^2 t dm + \int_I \sin^2 t dm = 2 \int_{[-1,1]} \sqrt{1 - x^2} dm. \quad \blacksquare$$

Nota 3.6.5 Observemos que el resultado dice que el volumen del toro es el producto del área del círculo, πr^2 , por la longitud de la circunferencia que describe su centro, $2\pi R$. Este resultado es un caso particular del llamado Teorema de Pappus, pero para enunciarlo debemos generalizar el concepto de centro de un círculo. (Ver también la pág. 226, para comentarios sobre Pappus y otros resultados suyos de la misma índole).

Definición. Dado un Boreliano B de \mathbb{R}^n , diremos que tiene *centroide* ó *centro de masa*, si para $p = \dim_H(B)$, se tiene que $0 < H_p(B) < \infty$ y las coordenadas x_i son integrables respecto de H_p en B , en cuyo caso definimos su *centroide* ó *centro de masa* como el punto $c(B) \in \mathbb{R}^n$, cuya coordenada i -sima es

$$x_i[c(B)] = \frac{1}{H_p(B)} \int_B x_i dH_p.$$

en particular si B es acotado, basta pedirle sólo la primera condición, $0 < H_p(B) < \infty$, pues en este caso las coordenadas son integrables, por estar acotadas. Además si $\dim_H(B) = n$

$$x_i[c(B)] = \frac{1}{m(B)} \int_B x_i dm.$$

Ejemplo 3.6.6 *Encontrar el centroide del trozo de cilindro horizontal de radio r , limitado por dos planos, uno vertical perpendicular al eje del cilindro y otro oblicuo tangente a la circunferencia del corte en su punto mas alto (ver Fig. 3.4).*

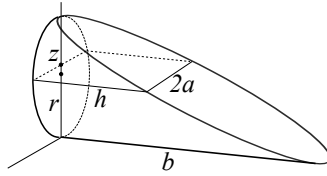


Figura 3.3. Cilindro cortado.

Denotemos con T el cilindro de radio r y longitud b con eje y y denotemos el trozo del enunciado con B , entonces por simetría $m_3(B) = m_3(T)/2 = \pi r^2 b/2$.

También por simetría $x[C(B)] = 0$ y para las otras dos coordenadas, por un lado tenemos que para cada $z \in [0, 2r]$, B_z es un rectángulo de lados $2a$ y h siendo $a^2 + (r - z)^2 = r^2$ y $h/(2r - z) = b/2r$, por tanto

$$m_2[B_z] = 2ah = \sqrt{r^2 - (r - z)^2}(2r - z)b/r = (b/r)(2r - z)\sqrt{2rz - z^2},$$

de donde haciendo el cambio $z = r(1 + \sin t)$ para $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ (ver el Tema 3 de los Apuntes reducidos para el cálculo de I_n).

$$\begin{aligned} z[C(B)] &= \frac{\int_B z dm_3}{m_3[B]} = \frac{\int_{[0, 2r]} z m_2[B_z] dm_1}{m_3(B)} = \frac{b \int_0^{2r} \sqrt{(2rz - z^2)^3} dz}{r m_3(B)} \\ &= \frac{2}{r^3 \pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \cos^4 t dt = \frac{2r}{\pi} I_4 = \frac{3}{4}r. \end{aligned}$$

Ahora para la coordenada y observemos que para cada $z \in [0, 2r]$, y está entre 0 y $h = b - bz/2r$ y x entre $-a$ y $a = \sqrt{r^2 - (r - z)^2}$, por tanto haciendo el cambio de antes $z = r(1 + \sin t)$

$$\begin{aligned} \int_B y dm_3 &= \int_0^{2r} \int_0^{h(z)} y 2a(z) dy dz = \int_0^{2r} h(z)^2 a(z) dz \\ &= \int_0^{2r} \left(b - \frac{bz}{2r}\right)^2 \sqrt{r^2 - (r - z)^2} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2}{4r^2} \int_0^{2r} (2r - z)^2 \sqrt{r^2 - (r - z)^2} dz \\
&= \frac{b^2}{4r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r - r \operatorname{sen} t)^2 \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t} r \cos t dt \\
&= \frac{b^2 r^2}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen} t)^2 \cos^2 t dt \\
&= \frac{b^2 r^2}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2 \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t) \cos^2 t dt \\
&= \frac{b^2 r^2}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \operatorname{sen}^2 t) \cos^2 t dt \\
&= \frac{b^2 r^2}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 - \cos^2 t) \cos^2 t dt = \frac{b^2 r^2}{4} (2I_2 - I_4) = b^2 r^2 \pi \frac{5}{32},
\end{aligned}$$

pues $\operatorname{sen} t$ es impar; y en definitiva tenemos que

$$y[C(B)] = \frac{\int_B y dm_3}{m_3[B]} = \frac{5}{16}b.$$

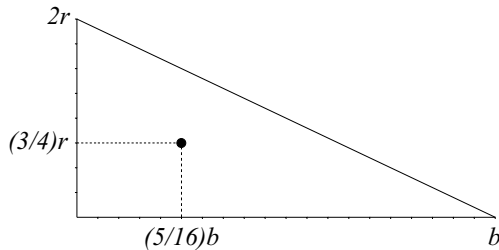


Figura 3.4. Proyección en yz del centro de masa.

Teorema 3.6.7 (Teorema de Pappus) *Dado un Boreliano E del plano, con $0 < m(E) < \infty$ y una recta del plano que lo deje a un lado, el volumen del cuerpo de revolución que genera en torno a la recta es el producto de su área por la longitud que recorre en el giro, su centro de masa.*

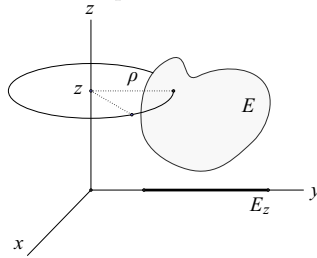


Figura 3.5.

Demostración. Consideremos que el plano es el yz , la recta el eje z y que $E \subset \{y > 0\}$. Entonces el cuerpo de revolución que genera E ,

$$\widehat{E} = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi), (\rho, z) \in E\},$$

es un Boreliano del espacio pues es la unión de $\{0\} \times E$ y $H[(0, 2\pi) \times E]$ para el homeomorfismo $H: (0, 2\pi) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0, y > 0\}$, $H(\theta, \rho, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$. Ahora para cada z tendremos que

$$\widehat{E}_z = \{\rho(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in [0, 2\pi), \rho \in E_z\} = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\|_2 \in E_z\},$$

siendo $E_z = \{y : (y, z) \in E\}$ un Boreliano de $(0, \infty)$. Veamos cuanto vale $m_2(\widehat{E}_z)$, para ello consideremos las medidas en los Borelianos $B \in \mathcal{B}((0, \infty))$,

$$\lambda_1(B) = m_2(\{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\|_2 \in B\}), \quad \lambda_2(B) = 2\pi \int_B y \, dm_1,$$

las cuales son iguales, pues coinciden en los semiintervalos $(a, b] \subset (0, \infty)$,

$$\lambda_1(a, b] = \pi b^2 - \pi a^2 = \lambda_2(a, b],$$

ahora aplicando el teorema de la medida producto y el de Fubini

$$\begin{aligned} m(\widehat{E}) &= \int m_2(\widehat{E}_z) \, dm = \int \lambda_1(E_z) \, dm \\ &= 2\pi \int \left(\int I_{E_z} y \, dm \right) dm = 2\pi \int y I_E \, dm_2 \\ &= 2\pi \int_E y \, dm_2 = m_2(E) \left(\frac{2\pi}{m_2(E)} \int_E y \, dm_2 \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.6.2. Medida en la esfera invariante por rotaciones

Consideremos en \mathbb{R}^n la esfera unidad $S^{n-1} = \{x : \|x\|^2 = \sum x_i^2 = 1\}$ y las aplicaciones inversas

$$(3.2) \quad \begin{aligned} H: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow (0, \infty) \times S^{n-1}, & G = H^{-1}: (0, \infty) \times S^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ H(x) &= (|x|, x/|x|), & G(\rho, y) &= \rho y, \end{aligned}$$

y llevemos la medida de Lebesgue al espacio producto $H_*m = \mu$, es decir $\mu(A) = m[H^{-1}(A)]$. Ahora consideremos en $(0, \infty)$ la medida de Borel (que depende de n)

$$\lambda(A) = \int_A x^{n-1} dm = \frac{1}{n} \int_A (x^n)' dm,$$

que es la restricción a $(0, \infty)$ de la medida de Lebesgue–Stieltjes definida por la función de distribución $F(x) = 0$, para $x \leq 0$ y $F(x) = x^n/n$, para $x > 0$. Pues

$$\lambda(a, b] = (b^n - a^n)/n = F(b) - F(a).$$

Proposición 3.6.8 *Existe una única medida σ en $\mathcal{B}(S^{n-1})$ tal que $\mu = H_*m = \lambda \times \sigma$ y además es invariante por rotaciones.*

Demostración. Si $\mu = \lambda \times \sigma$, σ está determinada de forma única, pues necesariamente para cada Boreliano $E \subset S^{n-1}$ y $E_1 = \{rz : r \in (0, 1], z \in E\}$.

$$\sigma(E) = n\lambda(0, 1]\sigma(E) = n \cdot \mu((0, 1] \times E) = n \cdot m(E_1).$$

y σ así definida es una medida, pues la aplicación $E \in \mathcal{B}(S^{n-1}) \rightarrow E_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ lleva uniones numerables disjuntas en uniones numerables disjuntas. Además es invariante por rotaciones R , pues la medida de Lebesgue lo es y si $A = R(E)$, $A_1 = R(E_1)$.

Por el Teorema de la medida producto (3.3.1), pág.124, basta ver que para A Boreliano de $(0, \infty)$ y E de la esfera

$$\mu(A \times E) = \lambda(A)\sigma(E).$$

Para cada $a > 0$ denotaremos $E_a = \{ry : y \in E, r \in (0, a]\} = aE_1$, entonces como $m(E_a) = m(aE_1) = a^n m(E_1)$, tendremos que para $0 <$

$a < b < \infty$

$$\begin{aligned}\mu[(a, b] \times E] &= m(E_b \setminus E_a) = m(E_b) - m(E_a) \\ &= \frac{b^n - a^n}{n} \sigma(E) = \lambda(a, b] \sigma(E),\end{aligned}$$

y tenemos dos medidas en los borelianos $A \subset (0, \infty)$,

$$\mu[A \times E] \quad \text{y} \quad \lambda(A) \sigma(E),$$

que coinciden en el anillo de las uniones finitas disjuntas de semiintervalos $(a, b]$ y se sigue del Teorema de Hahn (1.4.8), pág.25, que coinciden en $\mathcal{B}(0, \infty)$. ■

Teorema 3.6.9 *Si f es una función Borel medible de \mathbb{R}^n no negativa o integrable, entonces*

$$\int f \, dm_n = \int_{(0, \infty)} \int_{S^{n-1}} f(ry) r^{n-1} \, d\sigma \, dm_1.$$

En particular si f sólo depende de la distancia al origen $f(x) = g(\|x\|)$, entonces

$$(3.3) \quad \int f \, dm_n = \sigma(S^{n-1}) \int_{(0, \infty)} g(r) r^{n-1} \, dm_1,$$

Demostración. Por el resultado anterior (3.6.8), $\lambda \times \sigma = \mu = F_* m$ y por el ejercicio (2.4.26), pág.107 y el Teorema de Fubini (3.4.3)

$$\int f \, dm = \int f[G] \, d\mu = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(ry) \, d\sigma \right) d\lambda. \quad \blacksquare$$

El resultado anterior nos permite calcular —si encontramos una f adecuada—, la medida $n - 1$ -dimensional de la esfera S^{n-1} , $\sigma(S^{n-1})$ y por tanto la medida de Lebesgue n -dimensional de la bola unidad n -dimensional $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i^2 \leq 1\}$, pues

$$n \cdot m_n[B_n] = \sigma[S^{n-1}].$$

Ejemplo 3.6.10 Por ejemplo para $n = 2$, B_2 es el círculo unidad del plano y S^1 la circunferencia unidad, y como $m_2 = m_1 \times m_1$ tendremos que (haciendo el cambio $x = \text{sen } \theta = G(\theta)$, ver (2.4.29))

$$\begin{aligned} m_2[B_2] &= \int_{\mathbb{R}} m_1[B_x] dm_1 = \int_{(-1,1)} m\{y : x^2 + y^2 \leq 1\} dm \\ &= 2 \int_{(-1,1)} \sqrt{1-x^2} dm = 2 \int_{(-\pi/2, \pi/2)} \cos^2 \theta dm = \pi, \end{aligned}$$

pues $\int_{(-\pi/2, \pi/2)} \cos^2 \theta dm = \int_{(-\pi/2, \pi/2)} \text{sen}^2 \theta dm$, ya que $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\text{sen } \cos)' = 0$. Por tanto

$$V_2 = m_2[B_2] = \pi, \quad \sigma(S^1) = 2\pi,$$

y por ser σ invariante por giros en S^1 , se sigue de forma inmediata que es la medida de los ángulos, es decir para la identificación $S^1 \sim (0, 2\pi]$, $(\cos \theta, \text{sen } \theta) \rightarrow \theta$, es la de Lebesgue.

Ahora consideremos la función que sólo depende de la distancia al origen en \mathbb{R}^n

$$f(x) = e^{-|x|^2} = e^{-x_1^2} \dots e^{-x_n^2},$$

a la cual podemos aplicar (3.3) y por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} I^n &= \left(\int_{(-\infty, \infty)} e^{-x^2} dm \right)^n \\ &= \int_{(-\infty, \infty)} \dots \int_{(-\infty, \infty)} e^{-x_1^2} \dots e^{-x_n^2} dm_1 \dots dm_n \\ &= \int e^{-|x|^2} dm_n = \sigma(S^{n-1}) \int_{(0, \infty)} e^{-r^2} r^{n-1} dm = \sigma(S^{n-1}) \frac{\Pi\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del ejercicio 2.4.35, ó por el Teorema de cambio de variable, ejercicio 2.4.29, para $F(x) = \sqrt{x}$.

Ahora para $n = 2$, como $\Pi(0) = 1$ y $\sigma(S^1) = 2\pi$, tendremos que $I^2 = \sigma(S^1)\Pi(0)/2 = \pi$, y por tanto $I^n = \pi^{n/2}$ y en definitiva²

$$A_{n-1} = \sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Pi\left(\frac{n}{2} - 1\right)}, \quad V_n = m[B_n] = \frac{\sigma(S^{n-1})}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Pi(n/2)}.$$

²Obsérvese que para $V_0 = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} V_{2n} = \sum \frac{\pi^n}{n!} = e^\pi$ y $\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = 2\pi e^\pi$.

3.6.3. Convolución.

Nuestra última aplicación del *Teorema de Fubini* sirve para definir un nuevo producto entre funciones $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ (aunque tal función no estará determinada en todo punto, sólo casi seguro). Recordemos que en este espacio tenemos definida la seminorma

$$\|f\|_1 = \int |f| dm.$$

Teorema 3.6.11 Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$, entonces existe una función medible, finita e integrable, que denotaremos $f * g \in \mathcal{L}_1$ y a la que llamaremos producto de convolución de f y g , tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f * g(x) = \int f(x - y)g(y)dm_y,$$

y además verifica que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Demostración. En primer lugar la función de \mathbb{R}^{2n} , $h(x, y) = f(x - y)g(y)$ es Borel medible y por el apartado (c) del *Teorema de Fubini* integrable, pues (ver el ejercicio 2.4.19, pág.106)

$$\begin{aligned} \int \left(\int |f(x - y)g(y)|dm_x \right) dm_y &= \int |g(y)| \left(\int |f(x - y)|dm_x \right) dm_y \\ &= \int |g(y)| \left(\int |f(x)|dm_x \right) dm_y \\ &= \left(\int |g(y)|dm \right) \left(\int |f(x)|dm \right) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

y por el apartado (b) existe una función medible finita e integrable, que denotaremos $f * g(x)$, tal que c.s.

$$f * g(x) = \int h_x dm_y = \int f(x - y)g(y) dm_y,$$

y verifica

$$\int |f * g|dm \leq \left(\int |f|dm \right) \left(\int |g|dm \right). \quad \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 3.6.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la gráfica de f es medible

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times [0, \infty] : y = f(x)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),$$

y que $\mu \times m(E) = 0$. (Sol.)

Ejercicio 3.6.2 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la función $F(y) = \mu\{f^{-1}(y)\}$ es medible y $F = 0$ c.s. (Sol.)

Ejercicio 3.6.3 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f, g: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ medibles y tales que para cada $x > 0$, $\mu\{f > x\} \leq \mu\{g > x\}$. Demostrar que

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Ejercicio 3.6.4 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, $f: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ medible y $0 < p < \infty$. Demostrar que

$$\int f^p d\mu = \int_{[0, \infty)} pt^{p-1} \mu\{f > t\} dt,$$

y que si $\mu\{f > t\} \leq e^{-t}$, entonces $\int f^p d\mu \leq \Pi(p)$. (Sol.)

Ejercicio 3.6.5 Demostrar que para una rotación o una traslación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el centro de masas $C(B)$ de un boreliano B satisface $C[T(B)] = T[C(B)]$. (Sol.)

Ejercicio 3.6.6 Demostrar que si $B, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tienen dimensión Hausdorff p , con $0 < H_p(B), H_p(B_i) < \infty$ y B_i es una partición numerable disjunta de $B = \cup B_i$, entonces

$$C[B] = \sum \frac{H_p(B_i)}{H_p(B)} C(B_i).$$

Ejercicio 3.6.7 Dado el polinomio de \mathbb{R}^n , $p(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$, $0 \leq a_i \in \mathbb{N}$, demostrar que para $b_i = (a_i + 1)/2$ y σ la medida en la esfera unidad, definida en (3.6.8)

$$\int_{S_{n-1}} p(x) d\sigma = \begin{cases} \frac{2 \prod_{i=1}^n \Gamma(b_i)}{\Gamma(\sum b_i)}, & \text{si todo } a_i \text{ es par;} \\ 0, & \text{si } \exists i : a_i \text{ es impar.} \end{cases} \quad (\text{Sol.})$$

3.7. Producto de mas de dos espacios

3.7.1. Producto de n espacios medibles.

Consideremos n espacios de medida σ -finita,

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n),$$

entonces se demuestra fácilmente que (ver el ejercicio (3.2.3), pág.123)

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n,$$

y por inducción que existe una única medida $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n$ en el producto, para la que

$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n),$$

para $A_i \in \mathcal{A}_i$. La existencia se demuestra por inducción considerando $\mu = (\mu_1 \times \dots \times \mu_{n-1}) \times \mu_n$ y la unicidad por el Teorema de Hahn (pág.25), pues μ es σ -finita en \mathcal{A}_0 . Vemos así que el *Teorema de la medida producto* se extiende sin dificultad a más de dos espacios factores, pero para dar su enunciado general necesitamos extender el concepto de medida de transición.

Definición. Dada una colección finita de espacios medibles

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n),$$

denotaremos para cada $k = 1, \dots, n-1$

$$(\Omega^k, \mathcal{A}^k) = (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_k, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_k),$$

y diremos que para $i = 2, \dots, n$

$$\mu_i: \Omega^{i-1} \times \mathcal{A}_i \longrightarrow [0, \infty],$$

es una *familia de medidas de transición* (σ -finita, uniformemente σ -finita, de probabilidad) en los espacios medibles, si cada μ_i es una medida de transición en Ω_i relativa a Ω^{i-1} , es decir que $\mu_{ix}(B) = \mu_i(x, B)$, para $x \in \Omega^{i-1}$, es una familia de medidas (σ -finita, uniformemente σ -finita, de probabilidad) en \mathcal{A}_i y para cada $B \in \mathcal{A}_i$, $\mu_{iB}(x) = \mu_i(x, B)$, es medible en el espacio medible producto $(\Omega^{i-1}, \mathcal{A}^{i-1})$.

Teorema 3.7.1 Sea $\{\mu_2, \dots, \mu_n\}$ una familia de medidas de transición uniformemente σ -finita en los espacios medibles $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, μ_1 una medida σ -finita en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y (Ω, \mathcal{A}) el espacio producto de los $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Entonces:

(a) Hay una única medida μ en \mathcal{A} tal que para cada $A = A_1 \times \dots \times A_n$, con los $A_i \in \mathcal{A}_i$, verifica

$$\mu(A) = \int_{A_1} \left(\int_{A_2} \left(\dots \left(\int_{A_n} d\mu_{n(x_1, \dots, x_{n-1})} \right) \dots \right) d\mu_{2x_1} \right) d\mu_1,$$

donde cada $x_i \in \Omega_i$. Tal μ es σ -finita y si μ_1 y las μ_i son de probabilidad, entonces μ es una probabilidad.

(b) Sea $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible. Si $f \geq 0$, entonces

$$\int f d\mu = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{n(x_1, \dots, x_{n-1})} \dots d\mu_{2x_1} d\mu_1.$$

(c) Si $\int f d\mu$ existe (es finita), entonces la igualdad anterior se satisface en el sentido de que para $i = 1, \dots, n-1$, la integral con respecto a la medida $\mu_{i+1, (x_1, \dots, x_i)}$, existe (es finita), excepto para los (x_1, \dots, x_i) de un conjunto de \mathcal{A}^i de medida nula por la μ^i de $(\Omega^i, \mathcal{A}^i)$, definida en (a) y basta definirla como 0 ó cualquier función medible en ese conjunto.

Demostración. (a) Aplicando el Teorema de la medida producto (3.3.4) a μ_1 y la medida de transición uniformemente σ -finita μ_2 , existe una única medida μ^2 en $(\Omega^2, \mathcal{A}^2)$, tal que

$$\mu^2(A \times B) = \int_A \mu_{2B} d\mu_1 = \int_A \int_B d\mu_{2x_1} d\mu_1,$$

($x_1 \in \Omega^1$) y es σ -finita. Aplicando el mismo resultado a esta μ^2 y a la medida de transición μ_3 , existe una única medida μ^3 que para $A \in \mathcal{A}_1$, $B \in \mathcal{A}_2$, $C \in \mathcal{A}_3$ verifica

$$\mu^3(A \times B \times C) = \int_{A \times B} \int_C d\mu_{3(x,y)} d\mu^2 = \int_A \int_B \int_C d\mu_{3(x,y)} d\mu_{2x} d\mu_1,$$

($(x, y) \in \Omega^2$) y donde la segunda igualdad se obtiene aplicando Fubini; y es σ -finita.

El resultado se sigue por inducción construyendo, para $i \geq 2$, las medidas σ -finitas μ^i , en $(\Omega^i, \mathcal{A}^i)$, aplicando el Teorema de la medida producto (3.3.4) y el de Fubini a μ^{i-1} y la medida de transición uniformemente σ -finita μ_i . La medida del enunciado es $\mu = \mu^n$. (b) y (c) se siguen aplicando el teorema de Fubini en cada paso. ■

3.7.2. Producto de infinitos espacios medibles.

Definición. Dada una colección numerable de espacios medibles $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, denotaremos el espacio de medida producto de los n primeros con $(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)})$

$$\Omega^{(n)} = \prod_{i=1}^n \Omega_i = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \Omega_i\}, \quad \mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n,$$

del mismo modo denotaremos

$$\begin{aligned} \Omega^{(n, \infty)} &= \prod_{i=n}^{\infty} \Omega_i = \{(x_n, x_{n+1}, \dots) : x_i \in \Omega_i\}, \\ \Omega &= \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \Omega_i\} = \Omega^{(n)} \times \Omega^{(n+1, \infty)}. \end{aligned}$$

Llamaremos *cilindro de base* $C \subset \Omega^{(n)}$ a

$$|C| = C \times \Omega^{(n+1, \infty)}.$$

y diremos que el cilindro $|C|$ es *medible* si $C \in \mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ y diremos que es un *producto finito de medibles* si $C \in \mathcal{R}^{(n)} = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$, es decir es de la forma $C = A_1 \times \dots \times A_n$, para $A_i \in \mathcal{A}_i$. Denotaremos con \mathcal{C} la colección de todos los cilindros medibles y con $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ la de los cilindros productos finitos de medibles.

Nota 3.7.2 Todo cilindro medible $|C| = C \times \Omega^{(n+1, \infty)}$ con base en $\mathcal{A}^{(n)}$, es cilindro medible con base en $\mathcal{A}^{(m)}$, para $m \geq n$, $|C| = E \times \Omega^{(m+1, \infty)}$, para $E = C \times \Omega_{n+1} \times \dots \times \Omega_m$, por lo que es fácil ver que \mathcal{C} es un álgebra. Además se tiene por el principio de los buenos conjuntos (hágase como ejercicio) que $\sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{C})$.

Definición. Diremos que una σ -álgebra \mathcal{A} , en el conjunto producto $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, es la σ -álgebra *producto* de los espacios medibles $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, si verifica:

- (a) Las proyecciones $\pi_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ son medibles.
- (b) Una aplicación $F : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\Omega, \mathcal{A})$, es medible si y sólo si lo son sus componentes $F_i = \pi_i \circ F : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$.

Proposición 3.7.3 La σ -álgebra *producto* existe, es única y es $\sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{C})$, la denotaremos $\mathcal{A} = \otimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

Teorema 3.7.4 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ un espacio de probabilidad y sea $(\Omega, \mathcal{A}) = (\prod \Omega_n, \otimes \mathcal{A}_n)$. Entonces hay una única probabilidad P en \mathcal{A} , tal que para $A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$, se tiene*

$$P[A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots] = P_1[A_1] \cdots P_n[A_n].$$

Demostración. Denotemos $P^{(n)} = P_1 \times \cdots \times P_n$, la probabilidad producto en $(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)})$. Ahora si existe tal probabilidad P , entonces para cada n , la medida en $\mathcal{A}^{(n)}$,

$$\mu(A) = P(A \times \Omega^{(n+1, \infty)}),$$

satisface que $\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n)$, por lo tanto es $P^{(n)}$.

Esto nos induce a considerar en el álgebra \mathcal{C} de los cilindros medibles $|A| = A \times \Omega^{(n+1, \infty)}$, la función de conjunto $P(|A|) = P^{(n)}(A)$, la cual está bien definida pues si

$$B = A \times \Omega_{n+1} \times \cdots \times \Omega_m \quad \Rightarrow \quad P^{(n)}(A) = P^{(m)}(B),$$

y es una probabilidad aditiva, pues si $|A|, |B|$ son cilindros medibles disjuntos, podemos expresarlos de la forma $|A| = A \times \Omega^{(n+1, \infty)}$ y $|B| = B \times \Omega^{(n+1, \infty)}$, con $A, B \in \mathcal{A}^{(n)}$ disjuntos y

$$P(|A| \cup |B|) = P^{(n)}(A \cup B) = P^{(n)}(A) + P^{(n)}(B) = P(|A|) + P(|B|).$$

Para ver que es numerablemente aditiva basta ver, por (1.7.6), que si $|A_n| \downarrow \emptyset$, con $|A_n| \in \mathcal{C}$ cilindros medibles, entonces $P(|A_n|) \rightarrow 0$. Para ello supongamos que no, que $P(|A_n|) \downarrow s > 0$ y veamos que $\cap |A_n| \neq \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada $|A_n| = A_n \times \Omega^{(n+1, \infty)}$ es un cilindro medible de base³ $A_n \in \mathcal{A}^{(n)}$. Ahora por el Teorema de la medida producto, denotando $P^{(i, i+n)} = P_i \times \cdots \times P_{i+n}$

$$\begin{aligned} P(|A_1|) &= P^{(1)}(A_1) = P_1(A_1) = \int_{\Omega_1} I_{A_1} dP_1 = \int_{\Omega_1} f_1 dP_1, \\ P(|A_n|) &= P^{(n)}(A_n) = P_1 \times P^{(2, n)}(A_n) = \int_{\Omega_1} P^{(2, n)}(A_{nx_1}) dP_1 \\ &= \int_{\Omega_1} f_n dP_1, \end{aligned}$$

³Para ello basta observar que en general sería $|A_n| = |B_{k_n}| = B_{k_n} \times \Omega^{(k_n+1, \infty)}$, con la sucesión k_n que podemos considerar creciente y bastaría introducir entre cada dos $|A_n|$ seguidos otros cilindros (constantes)

$$\Omega = |B_1| = \cdots = |B_{k_1-1}| \supset |A_1| = |B_{k_1}| = |B_{k_1+1}| = \cdots = |B_{k_2-1}| \supset |A_2| = \cdots$$

para la sucesión de funciones medibles $f_n: \Omega_1 \rightarrow [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= I_{A_1}(x_1), \\ f_2(x_1) &= P_2[A_{2x_1}] \leq P_2[(A_1 \times \Omega_2)_{x_1}] = I_{A_1}(x_1) = f_1(x_1), \quad \dots, \\ f_n(x_1) &= P^{(2,n)}[A_{nx_1}] \leq P^{(2,n)}[(A_{n-1} \times \Omega_n)_{x_1}] \\ &= P^{(2,n)}[A_{n-1,x_1} \times \Omega_n] = f_{n-1}(x_1), \end{aligned}$$

pues $|A_n| \subset |A_{n-1}|$ y por tanto $A_n \subset A_{n-1} \times \Omega_n$. Ahora como $f_n \downarrow f$, $P(|A_n|) = \int f_n dP_1 \downarrow \int f dP_1 = s > 0$ (por el Teorema de la convergencia monótona, pues los espacios son de probabilidad y $0 \leq 1 - f_n \uparrow 1 - f$), por tanto existe $x_1 \in \Omega_1$, con $0 < f(x_1) \leq f_1(x_1) = I_{A_1}(x_1)$, y $x_1 \in A_1$. Ahora para $n \geq 2$ consideremos las funciones medibles $g_n: \Omega_2 \rightarrow [0, 1]$, obtenidas a partir del valor fijo x_1 en el desarrollo integral anterior de $f_n(x_1)$, es decir $f_2(x_1) = P_2[A_{2x_1}] = \int_{\Omega_2} g_2 dP_2$, y para $n \geq 3$

$$f_n(x_1) = P_2 \times P^{(3,n)}[A_{nx_1}] = \int_{\Omega_2} P^{(3,n)}[A_{n(x_1, x_2)}] dP_2 = \int_{\Omega_2} g_n dP_2,$$

para la sucesión de funciones medibles $g_n: \Omega_2 \rightarrow [0, 1]$, con $n \geq 2$

$$g_2(x_2) = I_{A_2}(x_1, x_2), \dots, \quad g_n(x_2) = P^{(3,n)}[A_{n(x_1, x_2)}] \leq g_{n-1}(x_2)$$

Como antes $g_n \downarrow g$ y $f_n(x_1) = \int g_n \downarrow \int g = f(x_1) > 0$, por lo que existe $x_2 \in \Omega_2$, tal que $0 < g(x_2) \leq g_2(x_2) = I_{A_2}(x_1, x_2)$ y $(x_1, x_2) \in A_2$. Repitiendo el razonamiento tendremos la existencia de $x = (x_i) \in \Omega$ tal que para todo n , $(x_1, \dots, x_n) \in A_n$ y por tanto $x \in \cap |A_n|$.

Ahora el resultado se concluye aplicando los teoremas de Caratheodory y Hahn. ■

A continuación generalizamos este resultado para medidas de transición.

Definición. Diremos que $\mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ es una familia infinita de medidas (probabilidades) de transición en los espacios $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, si para cada $n \geq 2$

$$\mu_n: \Omega^{n-1} \times \mathcal{A}_n = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{n-1} \times \mathcal{A}_n \longrightarrow [0, \infty],$$

es tal que para $\mu_{nx}(B) = \mu_{nB}(x) = \mu^n(x, B)$, μ_{nx} es una medida (probabilidad) en \mathcal{A}_n , fijado $x = (x_1, \dots, x_n)$ y μ_{nB} es una función medible, fijado $B \in \mathcal{A}_n$.

Nota 3.7.5 En los términos anteriores, para una colección numerable de espacios medibles $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ y su producto $(\Omega, \mathcal{A}) = (\prod \Omega_n, \otimes \mathcal{A}_n)$, si μ_1 es una probabilidad en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $\mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ es una familia infinita de probabilidades de transición en los $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, denotaremos con μ^n , para $n \geq 2$, la probabilidad producto en el espacio producto finito

$$\Omega^n = \prod_{i=1}^n \Omega_i, \quad \mathcal{A}^n = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n,$$

definida en el teorema (3.7.1), para μ_1 y $\{\mu_2, \dots, \mu_n\}$.

El resultado siguiente se demuestra prácticamente igual que (3.7.4), salvo que la notación es más engorrosa.

Teorema 3.7.6 *En los términos anteriores hay una única probabilidad μ en (Ω, \mathcal{A}) tal que para cada cilindro medible $|C| \in \mathcal{A}$ de base $C \in \mathcal{A}^n$, $\mu(|C|) = \mu^n(C)$.*

Demostración. Si $|C| = C \times \Omega^{(n,\infty)} = E \times \Omega^{(m,\infty)}$ es un cilindro medible, se tiene que $\mu^n(C) = \mu^m(E)$, lo cual permite definir $\mu(|C|) = \mu^n(C)$ y es una medida aditiva en el álgebra \mathcal{A}_0 de los cilindros medibles, pues μ^n es una medida en \mathcal{A}^n . Para ver que es numerablemente aditiva basta ver que si $|A_n| \downarrow \emptyset$, con $|A_n| \in \mathcal{A}_0$, entonces $\mu(|A_n|) \rightarrow 0$. Para ello supongamos que no, que $\mu(|A_n|) \downarrow s > 0$ y veamos que $\cap |A_n| \neq \emptyset$. Cada $|A_n|$ es un cilindro medible que, como en (3.7.4), podemos considerar de base $A_n \in \mathcal{A}_n$, y tendremos

$$\mu(|A_n|) = \mu^n(A_n) = \int f_n d\mu_1$$

para las funciones

$$f_n(x_1) = \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \mu^n(x_1, \dots, x_{n-1})(A_n(x_1, \dots, x_{n-1})) d\mu_{n-1, (x_1, \dots, x_{n-2})} \dots d\mu_{2, x_1},$$

y como $f_{n+1} \leq f_n$, pues las medidas son probabilidades y $|A_{n+1}| \subset |A_n|$, por tanto

$$A_{n+1} \subset A_n \times \Omega_{n+1}$$

se tiene que $f_n \downarrow f$ y por el Teorema de la convergencia monótona extendido, $\mu(A_n) = \int f_n \downarrow \int f = s > 0$, por lo que existe $x_1 \in \Omega_1$, con

$0 < f(x_1) \leq f_1(x_1)$, siendo $f_1 = I_{A_1}$, por tanto $x_1 \in A_1$. Ahora para $n \geq 2$

$$f_n(x_1) = \int_{\Omega_2} g_n d\mu_{2,x_1},$$

y como antes $g_n \downarrow g$ y $f_n(x_1) \downarrow \int g d\mu_{2,x_1} = f(x_1) > 0$, por lo que existe $x_2 \in \Omega_2$, tal que $0 < g(x_2) \leq g_2(x_2) = I_{A_2}(x_1, x_2)$ y $(x_1, x_2) \in A_2$. Repitiendo el razonamiento tendremos la existencia de $x = (x_i) \in \Omega$ tal que $(x_1, \dots, x_n) \in A_n$ y por tanto $x \in \bigcap |A_n|$. El resultado se concluye aplicando los Teoremas de Caratheodory (1.4.7) y Hahn (1.4.8). ■

Nota 3.7.7 El Teorema (3.7.4) se extiende sin complicaciones al caso de un producto arbitrario de espacios de probabilidad (ver DUNFORD–SCHWARTZ, p.200 ó HALMOS, p.158). Sin embargo el anterior necesita, para su extensión a un producto arbitrario de espacios, hipótesis topológicas sobre los espacios factores. Es por ello que posponemos su estudio hasta la lección 10.8, pág.354.

3.8. Bibliografía y comentarios

Para la confección del presente tema hemos hecho uso de los siguientes libros:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol,I*”. John Wiley–Interscience Pub., 1958.

HALMOS, P.R.: “*Measure Theory*”. Springer–Verlag, 1974.

HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: “*Real and abstract analysis*”. Springer–Verlag, 1965.

PARTHASARATHY, K.R.: “*Introduction to probability and measure*”, McMillan Press, 1980.

RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”. Tata McGraw-Hill, 1974.

Parece ser que la primera discusión sobre la relación entre una integral doble y sus integrales simples iteradas, aparece en 1827 cuando CAUCHY señala que las integrales

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$$

no son necesariamente iguales cuando f no es acotada.

En 1876 THOMAE extiende la teoría de integración de Riemann de una variable a varias variables y en 1878 dio un ejemplo simple de una función acotada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para la que la segunda integral del párrafo anterior existía, mientras que la primera no tenía significado pues f^y era Riemann integrable para un único valor de y .

En estos dos ejemplos, de CAUCHY y THOMAE, la integral doble de f no existe. En 1883 DU BOIS–REYMOND demuestra que aunque f sea integrable, como función de dos variables, las funciones f_x y f^y no tienen por qué ser integrables para todo valor de x e y respectivamente (ver HAWKINS, p.92). Pero no consideró la validez del *Teorema de Fubini* atendiendo a las particularidades del conjunto E sobre el que se integra. En este sentido HARNACK estudia, en 1884–85, el *Teorema de Fubini* imponiendo la condición a E , de que para cada punto y , la sección E^y fuese vacía, un punto o un intervalo. Mas tarde, en 1886, hace la observación de que el *Teorema de Fubini* sigue siendo válido cuando

E está limitado por una curva “suficientemente simple”, en un sentido que especifica de la siguiente manera:

- (i) Que la curva pueda encerrarse en un dominio plano de magnitud arbitrariamente pequeña y
- (ii) Que los conjuntos E_x y E^y se intersequen con la curva en a lo sumo una colección finita de puntos.

El tratamiento de las integrales dobles y en particular del *Teorema de Fubini* demostraron, en palabras de JORDAN, que “...aunque el papel que juega una función en la integral está claro, la influencia de la naturaleza del dominio E , sobre el que se integra, no parece haber sido estudiada con el mismo cuidado...”.

La situación fue finalmente rectificada por el mismo JORDAN en 1892, a partir de su desarrollo del concepto de conjunto medible. Con las definiciones que dio logró probar un *Teorema de Fubini*, para funciones Riemann integrables, de total generalidad.

También en 1892 DE LA VALLEE-POUSIN —que había extendido la definición de integral de Riemann, a funciones no acotadas—, indicó que una formulación satisfactoria del *Teorema de Fubini*, para funciones no acotadas era un problema difícil. En 1899 demostró una versión bastante complicada de enunciado.

El siguiente paso lo dio LEBESGUE en su Tesis de 1902. Encontró las mismas dificultades que sus predecesores:

Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ era Lebesgue integrable, las funciones f_x y f^y no tenían por qué ser ni Lebesgue medibles.

No obstante, introduciendo los conceptos de integral superior e integral inferior, demostró (ver HAWKINS, p.157) una versión del *Teorema de Fubini* que, como él mismo observó, tenía como consecuencia el *Teorema de Fubini* si f fuese Borel medible. Pues en ese caso f_x y f^y también lo son.

Esta observación sugirió a FUBINI la posibilidad de mejorar el *Teorema de Lebesgue* y en 1907 prueba esencialmente lo que hemos llamado el *Teorema de Fubini clásico*. No obstante B.LEVI, en 1906, había escrito en un pie de página de un trabajo sobre el *Principio de Dirichlet*, el enunciado de este mismo resultado.

Es curioso observar que una idea fundamental como es que f_x y f^y fuesen medibles c.s. había sido señalada en un caso particular por HOBSON en 1907, sin darse cuenta que era válido en general.

Remitimos al lector interesado en las anteriores referencias históricas al libro

HAWKINS, T.: “*Lebesgue’s Theory of integration*”. Chelsea Pub.Co., 1975.

El lector interesado en el comportamiento de la absoluta continuidad y de la singularidad en el producto de medidas, puede consultar el HEWITT–STROMBERG, p.394.

El producto de convolución definido en el teorema (3.6.11), pág.149, es simplemente el producto natural de polinomios en el siguiente sentido, si consideramos para cada polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ la función definida en \mathbb{Z} , $f_p(i) = a_i$ ($f_p = 0$ en el resto), entonces dados dos polinomios p y q tendremos que a su producto le corresponde $f_{pq}(j) = \sum f_p(j-i)f_q(i) = f_p * f_q(j)$. Además p es la *Transformada de Fourier* de f_p (estudiaremos este concepto en un capítulo posterior).

Por último es posible, en base a lo expuesto en este capítulo, dar una construcción no topológica de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , y por tanto en \mathbb{R}^n , partiendo de un simple espacio de medida —el de la moneda de cara y cruz—

$$\Omega = \{0, 1\}, \quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}, \quad \mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1/2.$$

Remitimos al lector interesado a P.R.HALMOS, p.159.

Fin del Capítulo 3

Capítulo 4

El Teorema de Radon–Nikodym

4.1. Introducción

En (2.4.1), pág.90, hemos visto que si f es una función con integral, entonces $\mu(E) = 0$ implica $\lambda(E) = \int_E f d\mu = 0$. El *Teorema de Radon–Nikodym* establece el resultado inverso, es decir que si λ es una medida que verifica la condición de anular a los conjuntos que son de medida nula para μ (propiedad que denotamos con $\lambda \ll \mu$), entonces $\lambda = f\mu$, para una cierta f con integral.

A esa función f se la llama *derivada de Radon–Nikodym* de λ respecto de μ y se denota $d\lambda/d\mu$, pues como veremos extiende en contextos particulares la noción de derivación de funciones en el sentido de que es un límite de cocientes incrementales. En particular en el tema siguiente veremos que en \mathbb{R}^n , si λ anula a los borel medibles de medida de Lebesgue nula, entonces la derivada de Radon–Nikodym $d\lambda/dm$, coincide c.s. en cada $x \in \mathbb{R}^n$, con el límite $\lambda(E)/m(E)$, cuando $m(E) \rightarrow 0$, para los E tales que $x \in E$.

4.2. Teorema de descomposición de carga

Definición. Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible y λ una carga en él. Diremos que un conjunto medible $P \in \mathcal{A}$ es *positivo* para λ , si $\lambda(A \cap P) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Diremos que $N \in \mathcal{A}$ es *negativo* si $\lambda(A \cap N) \leq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Diremos que un conjunto medible es *nulo* si es positivo y negativo. Llamaremos *descomposición de Hahn* de una carga λ a toda partición del espacio $P, N = P^c \in \mathcal{A}$, con P positivo y N negativo.

Nota 4.2.1 Observemos que si $P, N \in \mathcal{A}$ es una descomposición de Hahn de λ , $P' = N, N' = P$ lo es de $-\lambda$. Que además uno de los dos valores $\lambda(P)$ ó $\lambda(N)$ es finito, pues

$$\lambda(\Omega) = \lambda(P) + \lambda(N).$$

Por último observemos también que si $C \in \mathcal{A}$ es nulo, entonces $\lambda(C) = 0$ —de hecho $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$, con $E \subset C$ —, sin embargo no se tiene el recíproco en general, pues por ejemplo en $\Omega = [-1, 1]$, $\lambda(E) = \int_E x dm$, $\lambda(\Omega) = 0$ pero Ω no es nulo. Sin embargo si λ es una medida, sí.

Proposición 4.2.2 Si para $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathcal{A}$ son positivos, su unión $P = \cup_{n=1}^{\infty} P_n$ también es positivo.

Demostración. Basta considerar los conjuntos medibles disjuntos y positivos $Q_n = P_n \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} P_i)$, pues $E \cap P = \cup(E \cap Q_n)$ y $\lambda(E \cap P) = \sum \lambda(E \cap Q_n) \geq 0$. ■

Lema 4.2.3 Dada una carga λ y un $A \in \mathcal{A}$, con $\lambda(A) > -\infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe un medible $B \subset A$, con $\lambda(B) \geq \lambda(A)$ y tal que para todo medible $E \subset B$, $\lambda(E) \geq -\epsilon$.

Demostración. Supongamos que no es cierto, que existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo medible $B \subset A$, $\lambda(B) < \lambda(A)$ ó $\lambda(B) \geq \lambda(A)$ y existe un medible $E \subset B$ con $\lambda(E) < -\epsilon$.

Consideremos entonces la sucesión de medibles disjuntos $E_n \subset A$, construidos por inducción de la siguiente forma (ver fig.4.1): E_1 es el

E correspondiente a $B_1 = A$; E_2 el correspondiente a $B_2 = A \setminus E_1$ — pues $\lambda(B_2) + \lambda(E_1) = \lambda(A)$ — y así sucesivamente; E_n el correspondiente a $B_n = A \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} E_i)$. Ahora los $\lambda(E_n) < -\epsilon$, $E = \cup E_n \subset A$ y $\lambda(E) = \sum \lambda(E_i) = -\infty$, por lo que $\lambda(A) = \lambda(E) + \lambda(E^c \cap A) = -\infty$. Contradicción. ■

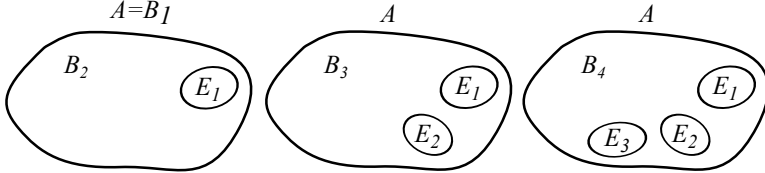


Figura 4.1.

Lema 4.2.4 Dada una carga λ , tal que $\lambda(\Omega) < \infty$ y $\lambda(A) > -\infty$, para un $A \in \mathcal{A}$, existe un conjunto positivo $P \subset A$, tal que $\lambda(P) \geq \lambda(A)$.

Demostración. Aplicando el Lema anterior consideremos la siguiente sucesión de medibles B_n correspondientes a $\epsilon = 1/n$:

Existe $B_1 \subset A$, con $\lambda(B_1) \geq \lambda(A) > -\infty$ y $\lambda(E) \geq -1$ para todo medible $E \subset B_1$, existe $B_2 \subset B_1$, con $\lambda(B_2) \geq \lambda(B_1) > -\infty$ y $\lambda(E) \geq -1/2$ para todo medible $E \subset B_2$. Por inducción, existe $B_n \subset B_{n-1}$, con $\lambda(B_n) \geq \lambda(B_{n-1}) > -\infty$ y $\lambda(E) \geq -1/n$ para todo medible $E \subset B_n$, etc.

Ahora como $|\lambda(B_1)| < \infty$ y $B_n \downarrow P = \cap B_n$, tenemos que $\lambda(A) \leq \lambda(B_n) \rightarrow \lambda(P)$, es decir $\lambda(A) \leq \lambda(P)$ y P es positivo, pues $E \cap P \subset B_n$ para todo n , por tanto $\lambda(E \cap P) \geq -1/n$ es decir $\lambda(E \cap P) \geq 0$. ■

Teorema de descomposición de Hahn 4.2.5 Toda carga λ tiene una descomposición de Hahn.

Demostración. Supondremos que $\lambda < \infty$, en caso contrario consideramos $-\lambda$. Consideremos el $\sup\{\lambda(A) : A \in \mathcal{A}\} = s$ y sea $\lambda(A_n) \rightarrow s$. Por el Lema anterior existen conjuntos positivos P_n , con $\lambda(A_n) \leq \lambda(P_n)$ y por (4.2.2), $P = \cup P_n$ es positivo y contiene a P_n , por tanto $\lambda(A_n) \leq \lambda(P_n) \leq \lambda(P_n) + \lambda(P \setminus P_n) = \lambda(P) \leq s$ y $\lambda(P) = s$. Ahora se tiene que $N = P^c$ es negativo, pues si E es medible $E \cap N$ y P son disjuntos y por ser $0 \leq \lambda(P) < \infty$

$$\lambda(P) \geq \lambda(P \cup (E \cap N)) = \lambda(P) + \lambda(E \cap N) \Rightarrow \lambda(E \cap N) \leq 0. \quad \blacksquare$$

En las siguientes propiedades vemos que la descomposición de Hahn esencialmente es única.

Proposición 4.2.6 *Sea P, N una descomposición de Hahn, entonces:*

(a) *Para $E, B \in \mathcal{A}$, $E \subset B$:*

$$\lambda(B \cap N) \leq \lambda(E \cap N) \leq \lambda(E) \leq \lambda(E \cap P) \leq \lambda(B \cap P).$$

(b) $\lambda(B \cap P) = \text{máx}\{\lambda(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}\},$

$$\lambda(B \cap N) = \text{mín}\{\lambda(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}\}.$$

(c) *Dada otra descomposición de Hahn P', N'*

$$\lambda(E \cap N) = \lambda(E \cap N') \quad \text{y} \quad \lambda(E \cap P) = \lambda(E \cap P').$$

Demostración. (a) Obvio pues $\lambda(E) = \lambda(E \cap N) + \lambda(E \cap P)$ y $E = E \cap B$, por tanto $\lambda(B \cap N) = \lambda(E \cap B \cap N) + \lambda(E^c \cap B \cap N) \leq \lambda(E \cap N)$ y $\lambda(B \cap P) = \lambda(E \cap B \cap P) + \lambda(E^c \cap B \cap P) \geq \lambda(E \cap P)$.

(b) Se sigue de (a) y (c) Se sigue de (b). ■

Nota 4.2.7 Si λ es una medida en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , entonces para todo $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(\emptyset) = 0 \leq \lambda(A) \leq \lambda(\Omega),$$

y por tanto el $\text{ínf } \lambda$ y el $\text{sup } \lambda$ se alcanzan. Este hecho también es obvio para una carga $\lambda = f\mu$, donde μ es una medida y f una función medible, para la que existe la $\int f d\mu$, pues para $A = \{f \geq 0\}$ y todo $E \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} I_{A^c} f \leq I_E f \leq I_A f &\Rightarrow \int_{A^c} f d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \int_A f d\mu \\ &\Rightarrow \lambda(A^c) \leq \lambda(E) \leq \lambda(A), \end{aligned}$$

El resultado anterior (4.2.6), asegura que esta propiedad, característica de las funciones continuas sobre los compactos, la tienen todas las cargas, pues para todo medible E

$$\lambda(N) \leq \lambda(E) \leq \lambda(P).$$

En el tema I vimos que si λ era aditiva y no negativa sobre un álgebra, entonces λ era acotada si y sólo si era finita en cada elemento del álgebra y dijimos que esto no era cierto en general si quitábamos la no negatividad. Sin embargo si en lugar de un álgebra tenemos una σ -álgebra y λ es numerablemente aditiva sí es cierto y es una simple consecuencia de la desigualdad anterior.

Corolario 4.2.8 *Si $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida real (carga finita), entonces es acotada.*

Veremos a continuación que las cargas son diferencia de medidas, una de las cuales es finita.

Definición. Diremos que λ_1 y λ_2 medidas arbitrarias en (Ω, \mathcal{A}) son *mutuamente singulares* y lo denotaremos $\lambda_1 \perp \lambda_2$, si existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\lambda_1(E) = \lambda_1(E \cap A)$ y $\lambda_2(E) = \lambda_2(E \cap A^c)$ para todo medible E .

Teorema de descomposición de Jordan 4.2.9 *Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , entonces para cada $B \in \mathcal{A}$*

$$\begin{aligned}\lambda^+(B) &= \sup\{\lambda(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}\}, \\ \lambda^-(B) &= -\inf\{\lambda(E) : E \subset B, E \in \mathcal{A}\},\end{aligned}$$

son medidas, al menos una es finita y $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. Además son mutuamente singulares $\lambda^+ \perp \lambda^-$ y esta descomposición de λ es la única como diferencia de medidas mutuamente singulares.

Demostración. Sea P, N una descomposición de Hahn, entonces por el resultado anterior $\lambda^+(B) = \lambda(B \cap P)$ y $\lambda^-(B) = -\lambda(B \cap N)$, de donde se sigue que son medidas, que una de ellas es finita, pues $\lambda^+(\Omega) = \lambda(P)$ y $\lambda^-(\Omega) = -\lambda(N)$ y que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

Para ver la unicidad, por definición de singularidad existe A medible tal que $\mu_1(E) = \mu_1(E \cap A)$ y $\mu_2(E) = \mu_2(E \cap A^c)$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda^+(E) &= \lambda(E \cap P) = \mu_1(E \cap P) - \mu_2(E \cap P) \leq \mu_1(E \cap P) \\ &\leq \mu_1(E) = \mu_1(E \cap A) = \mu_1(E \cap A) - \mu_2(E \cap A) \\ &= \lambda(E \cap A) \leq \lambda^+(E \cap A) \leq \lambda^+(E) \\ \lambda^-(E) &= -\lambda(E \cap N) = \mu_2(E \cap N) - \mu_1(E \cap N) \leq \mu_2(E \cap N) \\ &\leq \mu_2(E) = \mu_2(E \cap A^c) = \mu_2(E \cap A^c) - \mu_1(E \cap A^c) \\ &= -\lambda(E \cap A^c) \leq \lambda^-(E \cap A^c) \leq \lambda^-(E). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Definición. A las medidas λ^+ y λ^- las llamaremos *parte positiva* y *parte negativa* de λ . Llamaremos *variación* de λ a la medida

$$|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-,$$

y a $|\lambda|(\Omega)$ la *variación total* de λ .

Proposición 4.2.10 (a) Para cada $A \in \mathcal{A}$, $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$ y además $|\lambda|$ es la medida más pequeña $\tilde{\lambda} \pm a$ que lo satisface.

(b) Si $\lambda_1, \lambda_2: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ son cargas, entonces

$$|\lambda_1 + \lambda_2| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2|.$$

(c) Si λ es una carga

$$|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| : E_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup E_i = A \right\}.$$

Demostración. (a) $|\lambda(A)| = |\lambda^+(A) - \lambda^-(A)| \leq |\lambda|(A)$, y si μ es una medida para la que $|\lambda(A)| \leq \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} |\lambda|(A) &= \lambda^+(A) + \lambda^-(A) = |\lambda(A \cap P)| + |\lambda(A \cap N)| \\ &\leq \mu(A \cap P) + \mu(A \cap N) = \mu(A), \end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

(b) y (c) se dejan como ejercicio. ■

Nota 4.2.11 Por otro lado λ es una carga finita si y sólo si lo son λ^+ y λ^- si y sólo si lo es $|\lambda|$, en cuyo caso es acotada y escribiremos $\|\lambda\| = |\lambda|(\Omega)$. Veremos en la próxima lección que sobre el espacio vectorial de las cargas finitas (que llamaremos medidas reales) esto es una norma, con la que dicho espacio es de Banach.

La descomposición de una carga nos permite extender la noción de integral.

Definición. Dada una carga λ en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , diremos que una función f medible es *integrable respecto λ* ó que es *λ -integrable* si lo es respecto de las medidas λ^+ y λ^- , en cuyo caso definimos su integral como

$$\int f d\lambda = \int f d\lambda^+ - \int f d\lambda^-.$$

Ejercicios

Ejercicio 4.2.1 Sean $\lambda, \mu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ cargas y $a \in \mathbb{R}$, demostrar que

$$|a\lambda| = |a||\lambda|, \quad |\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|.$$

Ejercicio 4.2.2 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio medible con una carga. Demostrar:

(a) $E \in \mathcal{A}$ es nulo si y sólo si $|\lambda|(E) = 0$.

(b) Si P, N y P', N' son descomposiciones de Hahn, $|\lambda|(P \Delta P') = 0$.

Ejercicio 4.2.3 Sean μ_1, μ_2 medidas, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ y f una función medible. Demostrar que existe $\int f d\mu$ si existen $\int f d\mu_1$ y $\int f d\mu_2$ y su suma está definida. Y en tal caso

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2.$$

Ejercicio 4.2.4 Sea λ una carga. Demostrar:

(a) g es λ -integrable si y sólo si es $|\lambda|$ -integrable.

(b) Si g es λ -integrable,

$$\left| \int g d\lambda \right| \leq \int |g| d|\lambda|.$$

(c) Existe una medida μ y una función medible f , con integral respecto de μ , tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 4.2.5 Encontrar en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la descomposición de Jordan para la carga $\lambda = P - \delta_{\{0\}}$, siendo P una probabilidad.

Ejercicio 4.2.6 Sea f una función con integral en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y consideremos la carga $\lambda = f\mu$. Demostrar que

$$\lambda^+(A) = \int_A f^+ d\mu, \quad \lambda^-(A) = \int_A f^- d\mu, \quad |\lambda|(A) = \int_A |f| d\mu.$$

Ejercicio 4.2.7 Demostrar que si una carga $\lambda = \mu_1 - \mu_2$ es diferencia de dos medidas μ_i , entonces $\lambda^+ \leq \mu_1$ y $\lambda^- \leq \mu_2$.

Ejercicio 4.2.8 Sean μ_1 y μ_2 medidas positivas y finitas y $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Demostrar que si f es μ_1 y μ_2 integrable entonces es μ integrable y

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2.$$

Ejercicio 4.2.9 Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que

$$|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| : E_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup E_i = A \right\},$$

¿Es cierto el resultado si ponemos $\sum_{i=1}^{\infty}$ en lugar de sumas finitas?. (Sol.)

4.3. Medidas reales y medidas complejas

Definición. Llamaremos *medida real* en (Ω, \mathcal{A}) a toda carga finita, es decir a una función de conjunto numerablemente aditiva $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Llamaremos *medida compleja* a toda función de conjunto numerablemente aditiva

$$\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C},$$

tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

Nota 4.3.1 Observemos que las medidas reales son un subconjunto de las medidas complejas. Por otra parte es fácil ver que cada medida compleja μ puede escribirse de forma única como

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2$$

donde μ_1 y μ_2 son medidas reales. Y por el *Teorema de Jordan*

$$\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^-$$

donde μ_1^+ , μ_1^- , μ_2^+ y μ_2^- son medidas finitas. Por último observemos que si μ es una medida compleja, entonces es numerablemente aditiva, por tanto dada cualquier colección numerable $E_n \in \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos,

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

y como la serie converge a un número de \mathbb{C} —no como en el caso de las medidas en las que la serie podía divergir—, y converge al mismo valor para cualquier reordenación de la serie, puesto que la unión no cambia, la serie converge absolutamente.

Si dada una medida compleja μ , quisiéramos encontrar una medida positiva $|\mu|$ análoga a la variación de una carga, es decir que sea mínima entre las que satisfacen $|\mu(A)| \leq \lambda(A)$, en \mathcal{A} , tendríamos que tal medida debe verificar

$$|\mu|(A) = \sum |\mu|(A_i) \geq \sum |\mu(A_i)|,$$

para cada partición A_i de A en \mathcal{A} . Esto sugiere la siguiente definición que extiende la propiedad vista para cargas en (4.2.10), pág.166.

Definición. Dada una medida compleja μ , llamaremos *variación* de μ a la medida (a continuación demostramos que lo es)

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : A_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup A_i = A \right\}.$$

Teorema 4.3.2 *Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible y μ una medida compleja. Entonces su variación $|\mu|$ es una medida finita que verifica $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y es la mínima entre las que satisfacen esta propiedad, además si λ es otra medida compleja $|\mu + \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$.*

Demostración. Veamos primero la propiedad: Sea ν una medida tal que $|\mu(A)| \leq \nu(A)$, en \mathcal{A} , entonces dada una partición finita $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ de un $A \in \mathcal{A}$

$$\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \leq \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \nu(A),$$

por tanto $|\mu|(A) \leq \nu(A)$. La desigualdad $|\mu + \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$ se sigue de esta propiedad aplicada a $\mu + \lambda$.

Veamos ahora que $|\mu|$ es medida. Por (4.2.10) sabemos que lo es para μ real. Ahora para $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, es obvio que $|\mu|(\emptyset) = 0$. Veamos que $|\mu|$ es aditiva. Sean $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos y consideremos una partición finita $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ de $A \cup B$, entonces

$$\sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\mu(E_i \cap A)| + \sum_{i=1}^n |\mu(E_i \cap B)| \leq |\mu|(A) + |\mu|(B),$$

por tanto $|\mu|(A \cup B) \leq |\mu|(A) + |\mu|(B)$. Para la otra desigualdad consideremos sendas particiones finitas $A_i, B_j \in \mathcal{A}$ de A y B respectivamente, entonces como todos ellos son una partición de $A \cup B$,

$$\sum |\mu(A_i)| + \sum |\mu(B_j)| \leq |\mu|(A \cup B),$$

y $|\mu|(A) + |\mu|(B) \leq |\mu|(A \cup B)$, por tanto $|\mu|$ es aditiva. Ahora como $|\mu(A)| \leq |\mu_1(A)| + |\mu_2(A)| \leq |\mu_1|(A) + |\mu_2|(A)$ se sigue de la primera propiedad que $|\mu| \leq |\mu_1| + |\mu_2|$ y es finita. Ahora sea $A_n \in \mathcal{A}$, con $A_n \downarrow \emptyset$, entonces $|\mu|(A_n) \rightarrow 0$, pues $|\mu_i|(A_n) \rightarrow 0$ por ser medidas finitas, por tanto $|\mu|$ es numerablemente aditiva por (1.7.6), pág.56. ■

Definición. Dada una medida compleja μ , llamaremos *variación total* de μ al valor finito

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Nota 4.3.3 Como consecuencia tenemos que si μ es compleja, entonces para todo $E \in \mathcal{A}$

$$(4.1) \quad |\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(\Omega) = \|\mu\|,$$

por lo que su rango está en un disco de radio finito $\|\mu\|$. Esta propiedad se expresa diciendo que μ es de *variación acotada*. Denotaremos con $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ el \mathbb{R} -espacio vectorial de todas las medidas reales

$$\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R},$$

y con $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ el \mathbb{C} -espacio vectorial de las medidas complejas

$$\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Lema 4.3.4 $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ si y sólo si $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ es aditiva y tal que $\mu(A_n) \rightarrow 0$, para cada $A_n \downarrow \emptyset$.

Demostración. En primer lugar $\mu(\emptyset) = 0$, pues $\mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset) \in \mathbb{K}$. Ahora el resultado lo vimos en (1.7.6), pág.56, para el caso real (para cargas) y de este se sigue el caso complejo considerando $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, con μ_1 y μ_2 reales. ■

Teorema 4.3.5 Los espacios $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , son de Banach con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Demostración. Que es una norma se sigue fácilmente (la desigualdad triangular es consecuencia de que $|\mu + \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$). Veamos que es completo. Sea $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ una sucesión de Cauchy, entonces por (4.1) se tiene para cada $A \in \mathcal{A}$

$$|\mu_n(A) - \mu_m(A)| \leq \|\mu_n - \mu_m\|,$$

por tanto $\mu_n(A) \in \mathbb{K}$ es de Cauchy, además uniformemente, y tiene límite que llamamos $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$ y la convergencia es uniforme en A . Demostremos que $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ y que $\|\mu_n - \mu\| \rightarrow 0$. En primer lugar $\mu(\emptyset) = \lim \mu_n(\emptyset) = 0$ y es aditiva pues si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos, entonces

$$\mu(A \cup B) = \lim \mu_n(A \cup B) = \lim \mu_n(A) + \lim \mu_n(B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Para demostrar que es numerablemente aditiva veamos —por el Lema anterior (4.3.4)— que $\mu(A_n) \rightarrow 0$, para cada sucesión $A_n \in \mathcal{A}$ con $A_n \downarrow \emptyset$. Sea $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \epsilon/2$, para todo $n \geq N$ y todo A medible. Ahora como $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_N(A_m) = 0$, existe un $k \in \mathbb{N}$, tal que para $m \geq k$, $|\mu_N(A_m)| \leq \epsilon/2$, por tanto,

$$|\mu(A_m)| \leq |\mu(A_m) - \mu_N(A_m)| + |\mu_N(A_m)| \leq \epsilon,$$

y $\mu(A_m) \rightarrow 0$, por tanto μ es numerablemente aditiva.

Por último veamos que $\mu_n \rightarrow \mu$, es decir que $\|\mu - \mu_n\| \rightarrow 0$. Sea A_1, \dots, A_k una partición de Ω y sea $\epsilon > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^k |\mu_m(A_i) - \mu_n(A_i)| \leq \|\mu_m - \mu_n\| \leq \epsilon,$$

para todo $m, n \geq N$ y haciendo $m \rightarrow \infty$, tendremos que

$$\sum_{i=1}^k |\mu(A_i) - \mu_n(A_i)| \leq \epsilon,$$

por tanto $\|\mu - \mu_n\| \leq \epsilon$, para $n \geq N$ y el resultado se sigue. ■

Ejercicios

Ejercicio 4.3.1 Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible con una medida compleja

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^-,$$

demostrar que

$$\lambda_i^\pm \leq |\lambda_i| \leq |\lambda| \leq \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-. \quad (\text{Sol.})$$

4.4. El Teorema de Radon–Nikodym

Definición. Sea λ una carga ó una medida compleja (en particular una medida ó una medida real), en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, diremos que λ es *absolutamente continua respecto de μ* , y lo denotaremos $\lambda \ll \mu$, si para $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(A) = 0.$$

Sea f medible en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, tal que existe la $\int f d\mu$, entonces hemos visto en el Tema anterior que $\lambda = f\mu$ es una carga para la que $\lambda \ll \mu$, pues si $\mu(A) = 0$,

$$-\infty I_A \leq f I_A \leq \infty I_A \quad \Rightarrow \quad 0 = -\infty \mu(A) \leq \lambda(A) \leq \infty \mu(A) = 0.$$

Del mismo modo si $f = f_1 + if_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es medible e integrable, entonces

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu = \int_A f_1 d\mu + i \int_A f_2 d\mu = \lambda_1(A) + i\lambda_2(A),$$

es una medida compleja, para la que por lo anterior $\lambda_i \ll \mu$ y por tanto $\lambda \ll \mu$. En esta lección veremos que esta propiedad es esencial para la representación de una carga ó de una medida compleja λ en la forma $f\mu$.

El siguiente resultado nos explica por qué la palabra continuidad se utiliza en esta definición.

Proposición 4.4.1 *Sea λ una medida compleja en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces son equivalentes:*

(a) $\lambda \ll \mu$.

(b) $|\lambda| \ll \mu$.

(c) *Para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces $|\lambda(E)| < \epsilon$.*

Si λ es una carga entonces (a) \Leftrightarrow (b) \Leftarrow (c).

Demostración. (a) \Rightarrow (b) En cualquier caso como

$$|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda(A_i)| : A_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup A_i = A \right\}.$$

tendremos que si $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mu(A) = 0 &\Rightarrow \mu(B) = 0, \quad \text{para todo } B \subset A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\lambda(B)| = 0, \quad \text{para todo } B \subset A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\lambda|(A) = 0, \end{aligned}$$

por tanto $|\lambda| \ll \mu$.

(b) \Rightarrow (a) En cualquier caso se sigue de que $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$.

(c) \Rightarrow (a) Es obvia en cualquier caso.

(a) \Rightarrow (c) Para λ medida compleja. Supongamos que (c) no es cierto, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo n , existen $E_n \in \mathcal{A}$, tales que $\mu(E_n) < 2^{-n}$, pero $|\lambda(E_n)| \geq \epsilon$. Ahora por el Lema de Borel–Cantelli $\mu(\limsup E_n) = 0$, pues $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, y por (b) $|\lambda|(\limsup E_n) = 0$, pero

$$\epsilon \leq |\lambda(E_n)| \leq |\lambda|(E_n) \leq |\lambda|(\cup_{k=n}^{\infty} E_n) < \infty$$

y llegamos a un absurdo pues $|\lambda|(\cup_{k=n}^{\infty} E_n) \rightarrow |\lambda|(\limsup E_n)$. ■

Nota 4.4.2 Para una carga en general (a) no implica (c), ni siquiera si λ es una medida (no acotada, pues las acotadas al ser un caso particular de medidas complejas sí lo satisfacen). Por ejemplo para $\mu = m$ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y

$$\lambda(E) = \int_E \frac{1}{x} dm,$$

se tiene para todo $t \in (0, 1)$, $m(0, t) = t$ y

$$\lambda(0, t) = \int_0^t \frac{1}{x} dx = \infty.$$

A continuación vemos uno de los resultados fundamentales de la Teoría de la medida.

Teorema de Radon–Nikodym I 4.4.3 Sean λ y μ medidas σ -finitas en (Ω, \mathcal{A}) , tales que $\lambda \ll \mu$. Entonces existe una única c.s. (\mathcal{A}, μ) función finita medible con integral $g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \int_A g \, d\mu.$$

Demostración. La unicidad es consecuencia de (2.4.27), página 104: si μ es σ -finita y $\int_A g \, d\mu \leq \int_A g' \, d\mu$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $g \leq g'$ c.s.

La existencia la vamos a dividir en una serie de pasos:

(a) Supongamos que λ y μ son medidas finitas y consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow [0, \infty], \text{ medibles} : \int_A f \, d\mu \leq \lambda(A), \forall A \in \mathcal{A}\},$$

el cual es no vacío — $0 \in \mathcal{F}$ — y si $f, g \in \mathcal{F}$ entonces $\text{máx}(f, g) \in \mathcal{F}$, pues $0 \leq h = \text{máx}(f, g)$ es medible, por tanto tiene integral y si consideramos un $A \in \mathcal{A}$, $B = \{x \in A : f(x) > g(x)\}$ y $C = \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_A h \, d\mu &= \int_B h \, d\mu + \int_C h \, d\mu \\ &= \int_B f \, d\mu + \int_C g \, d\mu \leq \lambda(B) + \lambda(C) = \lambda(A), \end{aligned}$$

consideremos ahora una sucesión $f_n \in \mathcal{F}$, tal que

$$\int f_n \, d\mu \uparrow \sup\{\int f \, d\mu : f \in \mathcal{F}\} = s,$$

y veamos que el supremo se alcanza. Sea $g_n = \text{máx}(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}$, entonces $g_n \uparrow g$ converge a una función medible g , además $f_n \leq g_n$ y por tanto $\int f_n \, d\mu \leq \int g_n \, d\mu \leq s$, por tanto aplicando el Teorema de la convergencia monótona, pág.93, $s = \int g \, d\mu$ y para todo $A \in \mathcal{A}$, $\int_A g_n \, d\mu \rightarrow \int_A g \, d\mu$, por tanto $\int_A g \, d\mu \leq \lambda(A)$ y $g \in \mathcal{F}$ y como es integrable podemos considerarla finita haciéndola cero donde valga ∞ .

Como $\lambda(A) \geq \int_A g d\mu$ podemos considerar la medida finita

$$\nu(A) = \lambda(A) - \int_A g d\mu,$$

para la que $\nu \ll \mu$. Ahora si $\nu(\Omega) = 0$, entonces hemos terminado pues para cada A medible $\nu(A) = 0$, es decir

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

En caso contrario $0 < \nu(\Omega) < \infty$, vamos a llegar a una contradicción, encontrando una función medible f , tal que $f \in \mathcal{F}$ y $\int f > s$.

Veamos que existe una tal función y es de la forma $f = g + kI_E$.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}, \quad \int_A g d\mu + k\mu(A \cap E) \leq \lambda(A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}, \quad k\mu(A \cap E) \leq \nu(A) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}, \quad k\mu(A \cap E) \leq \nu(A \cap E) \\ &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{A}, \quad B \subset E \quad 0 \leq (\nu - k\mu)(B) \end{aligned}$$

$$\int f > \int g \Leftrightarrow \mu(E) > 0.$$

Lo primero nos induce a considerar un $k > 0$ cualquiera y como E un conjunto positivo P de una descomposición de Hahn $P, N = P^c$, para la carga finita $\lambda' = \nu - k\mu$. Ahora si fuese $\mu(P) = 0$, entonces tendríamos $\nu(P) = 0$ y $\lambda'(P) = 0$, por tanto $\lambda'(\Omega) = \lambda'(N) \leq 0$. Esto nos lleva a considerar un $k > 0$ tal que $k\mu(\Omega) < \nu(\Omega)$, que existe pues μ es finita, en cuyo caso tendremos $\lambda'(\Omega) > 0$ y por tanto $\mu(P) > 0$.

(b) Supongamos ahora que μ y λ son medidas σ -finitas, entonces existen $A_n \in \mathcal{A}$, que podemos tomar disjuntos, tales que $\cup A_n = \Omega$, $\lambda(A_n) < \infty$ y $\mu(A_n) < \infty$. Si consideramos las medidas finitas λ y μ en cada espacio medible $(A_n, \mathcal{A}|_{A_n})$, tendremos que $\lambda \ll \mu$ y por (a) existen $f_n: A_n \rightarrow [0, \infty)$ medibles e integrables, que podemos extender a Ω , $f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ haciéndolas nulas fuera de A_n de tal forma que para cada $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda(E \cap A_n) = \int_{E \cap A_n} f_n d\mu = \int_E f_n d\mu,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \sum \lambda(E \cap A_n) \\ &= \sum \int_E f_n d\mu = \int_E (\sum f_n) d\mu,\end{aligned}$$

y el resultado se sigue para $f = \sum f_n$. ■

Teorema de Radon–Nikodym II 4.4.4 *Sea λ una carga y μ una medida σ -finita en (Ω, \mathcal{A}) , tales que $\lambda \ll \mu$. Entonces existe una única c.s. (\mathcal{A}, μ) función medible con integral $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}$*

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

Demostración. Como μ es σ -finita, la unicidad se sigue como en el teorema anterior.

(a) Supongamos primero que λ es una medida y que μ es finita. Consideremos la clase de conjuntos

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{A} : (C, \mathcal{A}|_C, \lambda|_C) \text{ es } \sigma\text{-finito}\},$$

la cual es no vacía pues $\emptyset \in \mathcal{C}$, contiene a todo medible E , con $\lambda(E) < \infty$ y es cerrada para uniones numerables. Sea $s = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}\} \leq \mu(\Omega) < \infty$ y $C_n \in \mathcal{C}$ tales que $\mu(C_n) \uparrow s$, entonces como $C = \cup C_n \in \mathcal{C}$, $\mu(C_n) \leq \mu(C) \leq s$ y tomando límites, $\mu(C) = s < \infty$. Ahora aplicando el resultado anterior existe una función medible $g : C \rightarrow [0, \infty)$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A \cap C) = \int_{A \cap C} g d\mu,$$

ahora bien si $\mu(A \cap C^c) > 0$ tendrá que ser $\lambda(A \cap C^c) = \infty$, pues en caso contrario $C \cup (A \cap C^c) \in \mathcal{C}$ y $\mu(C \cup (A \cap C^c)) > \mu(C) = s$, pues $s < \infty$, lo cual es absurdo. Y si $\mu(A \cap C^c) = 0$ entonces $\lambda(A \cap C^c) = 0$, así que en cualquier caso

$$\lambda(A \cap C^c) = \int_{A \cap C^c} \infty d\mu,$$

y por tanto si extendemos $g(x) = \infty$ para los $x \in C^c$, tendremos que

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

(b) Si μ es σ -finita y λ es una medida, podemos considerar $A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos, tales que $\cup A_n = \Omega$ y $\mu(A_n) < \infty$ y por el caso anterior existen $g_n: A_n \rightarrow [0, \infty]$ medibles, que extendemos a Ω con $g_n = 0$ en A_n^c , tales que para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A \cap A_n) = \int_{A \cap A_n} g_n d\mu = \int_A g_n d\mu,$$

por tanto el resultado se sigue para $g = \sum g_n$, pues

$$\lambda(A) = \sum \lambda(A \cap A_n) = \sum \int_A g_n d\mu = \int_A g d\mu.$$

(c) Por último consideremos que μ es σ -finita y λ es una carga, por tanto $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ donde una de ellas, digamos λ^- , es finita, entonces como $\lambda \ll \mu$, tendremos que $\lambda^+ \ll \mu$ y $\lambda^- \ll \mu$, por lo que aplicando los casos anteriores existen g_1 medible y no negativa y g_2 medible, no negativa y finita, tales que

$$\lambda^+(A) = \int_A g_1 d\mu, \quad \lambda^-(A) = \int_A g_2 d\mu,$$

y por tanto para $g = g_1 - g_2$, $\lambda(A) = \int_A g d\mu$. ■

Teorema de Radon–Nikodym III 4.4.5 *Sea λ una medida compleja y μ una medida σ -finita en (Ω, \mathcal{A}) , tales que $\lambda \ll \mu$. Entonces existe una única c.s. (\mathcal{A}, μ) función medible integrable $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}$*

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

Demostración. La unicidad es simple como en los resultados anteriores.

Para λ real $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ siendo las dos medidas finitas y ambas $\lambda^\pm \ll \mu$ (hágase como ejercicio), por lo que aplicando el *Teorema de Radon–Nikodym I*, existen funciones medibles finitas no negativas g_1, g_2 y $g = g_1 - g_2$, tales que para cada A medible

$$\lambda(A) = \lambda^+(A) - \lambda^-(A) = \int_A g d\mu.$$

Para λ compleja $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, tenemos $\lambda_i \ll \mu$ (hágase como ejercicio), por lo que aplicando el caso real se tiene el resultado. ■

Nota 4.4.6 En estos resultados parece que no puede haber una función g determinada, pues en un conjunto de medida nula podemos modificarla y sigue siendo una función válida, sin embargo por una parte en la demostración del caso mas sencillo en el que λ y μ son positivas y finitas se construye una con procedimientos “naturales” y no es de extrañar que en situaciones suficientemente regulares haya una más “canónica” que las demás. En (5.2.9), pág.197, veremos que esto es así en \mathbb{R}^n .

Definición. Una función g como en los teoremas anteriores tal que para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu.$$

se llama *derivada de Radon–Nikodym de λ respecto de μ* y se denota $d\lambda/d\mu$, aunque $d\lambda/d\mu$ no es una función sino cualquiera que lo satisfaga, la cual es única c.s. (\mathcal{A}, μ) en dos casos: si μ es σ -finita ó si λ es finita (es decir g es integrable). Si μ es la medida de Lebesgue, g se llama *función de densidad* de λ .

Con ayuda del siguiente resultado, veremos cómo están relacionadas una medida compleja y su variación en términos de la derivada de Radon–Nikodym.

Lema 4.4.7 *Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, medible e integrable en un espacio de medida finita $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si $E \in \mathcal{A}$ es tal que $f(E) \subset B[z, r]$ y $\mu(E) > 0$, entonces $\int_E f d\mu / \mu(E) \in B[z, r]$. Si para todo $E \in \mathcal{A}$, con $\mu(E) > 0$, $|\int_E f d\mu| / \mu(E) \leq 1$, entonces $|f| \leq 1$ c.s.*

Demostración. Lo primero es obvio. Lo segundo se sigue de que $E = \{|f| > 1\} = f^{-1}(B[0, 1]^c) = \cup E_n$, pues todo abierto del plano, en nuestro caso $B[0, 1]^c$, es unión numerable de bolas cerradas B_n y tomamos $E_n = f^{-1}(B_n)$. Ahora bien si algún $\mu(E_n) > 0$, tendríamos por la primera parte que $\int_{E_n} f d\mu / \mu(E_n) \in B_n$ y como B_n está fuera de la bola unidad, $|\int_{E_n} f d\mu / \mu(E_n)| > 1$, lo cual es absurdo, por lo tanto $\mu(E_n) = 0 = \mu(E)$. ■

Teorema de representación polar de una medida 4.4.8 *Sea λ una medida compleja en el espacio medible (Ω, \mathcal{A}) . Entonces existe una función $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda|$ -integrable, tal que $|h| = 1$ en Ω y $h = d\lambda/d|\lambda|$.*

Demostración. En primer lugar $|\lambda|$ es finita y $\lambda \ll |\lambda|$, pues $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$, por tanto se sigue de (4.4.5) que existe $h = d\lambda/d|\lambda|$ y como

$|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$, por el resultado anterior tendremos que $|h| \leq 1$ c.s., ahora bien

$$\lambda(A) = \int_A h d|\lambda| \Rightarrow |\lambda(A)| \leq \int_A |h| d|\lambda| = \nu(A),$$

y ν es una medida, pero $|\lambda|$ es la menor que verifica esa desigualdad, por tanto para todo medible A ,

$$\int_A 1 d|\lambda| = |\lambda|(A) \leq \nu(A) = \int_A |h| d|\lambda|,$$

lo cual implica, por (2.4.27), pág.104, que $1 \leq |h|$ c.s. ($|\lambda|$). ■

Proposición 4.4.9 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, medible e integrable, entonces*

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu \Rightarrow |\lambda|(A) = \int_A |f| d\mu.$$

Demostración. Por los resultados anteriores

$$\lambda(A) = \int_A h d|\lambda| = \int_A f d\mu,$$

y por el ejercicio (4.4.9)

$$|\lambda|(A) = \int_A h\bar{h} d|\lambda| = \int_A f\bar{f} d\mu,$$

siendo $0 \leq f\bar{f} = |f|$ c.s., pues $|\lambda|$ y μ son positivas. ■

Otra forma de probar este resultado es la siguiente.

Proposición 4.4.10 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, medible e integrable, entonces*

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu \Rightarrow |\lambda|(A) = \int_A |f| d\mu.$$

Demostración. Consideremos la medida $\nu(A) = \int_A |f| d\mu$, para $A \in \mathcal{A}$, entonces como

$$|\lambda(A)| = \left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu = \nu(A),$$

tendremos que $|\lambda|(A) \leq \nu(A)$. Veamos la otra desigualdad.

Sea $f = f_1 + if_2$ y consideremos sendas sucesiones de funciones simples $g_{1n} \rightarrow f_1$ y $g_{2n} \rightarrow f_2$, tales que $|g_{1n}| \leq |f_1|$ y $|g_{2n}| \leq |f_2|$. Consideremos ahora las funciones simples complejas

$$g_n = \frac{|g_{1n} + ig_{2n}| + I_{\{g_{1n} + ig_{2n} = 0\}}}{g_{1n} + ig_{2n} + I_{\{g_{1n} + ig_{2n} = 0\}}} \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{si } f = 0, \\ \frac{|f|}{f}, & \text{si } f \neq 0, \end{cases}$$

por tanto $|g_n| = 1$, $f_n = f g_n \rightarrow |f|$, $|f_n| = |f|$ y $|f|$ integrable. Se sigue del *Teorema de la convergencia dominada*, (2.4.12) (ver página 98) que para cualquier A medible

$$\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A |f| d\mu,$$

y si $g_n = \sum_{j=1}^k a_{nj} I_{A_{nj}}$ entonces $|a_{nj}| = 1$ y

$$\begin{aligned} \left| \int_A f_n d\mu \right| &= \left| \int_A g_n f d\mu \right| = \left| \sum_{j=1}^k a_{nj} \int_{A \cap A_{nj}} f d\mu \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^k a_{nj} \lambda(A \cap A_{nj}) \right| \leq \sum_{j=1}^k |\lambda(A \cap A_{nj})| \leq |\lambda|(A). \end{aligned}$$

y tomando límites tendremos $\int_A |f| d\mu \leq |\lambda|(A)$. ■

Y como consecuencia de él podemos probar el de la representación polar de una medida.

Teorema de representación polar de una medida 4.4.11 *Sea λ una medida compleja en el espacio medible (Ω, \mathcal{A}) . Entonces existe una función $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrable, tal que $|h| = 1$ en Ω y $h = d\lambda/d|\lambda|$.*

Demostración. En primer lugar $|\lambda|$ es finita y $\lambda \ll |\lambda|$, pues $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$, por tanto se sigue de (4.4.5) que existe $f = d\lambda/d|\lambda|$ y por el resultado anterior, $|d\lambda/d|\lambda|| = d|\lambda|/d|\lambda| = 1$, es decir $|f| = 1$ c.s. $(\mathcal{A}, |\lambda|)$ y si consideramos el medible $A = \{|f| = 1\}$, tendremos que $|\lambda|(A^c) = 0$ y para $h = I_A f + I_{A^c} = d\lambda/d|\lambda|$, $|h| = 1$. ■

Definición. Diremos que una función medible $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es *integrable respecto de una medida compleja*

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^-,$$

si es integrable respecto de las medidas reales λ_i , es decir si lo es respecto de las medidas λ_i^\pm en cuyo caso definimos su integral como

$$\begin{aligned}\int f d\lambda &= \int f d\lambda_1 + i \int f d\lambda_2 \\ &= \int f d\lambda_1^+ - \int f d\lambda_1^- + i \int f d\lambda_2^+ - i \int f d\lambda_2^-.\end{aligned}$$

Si $f = f_1 + if_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es medible, diremos que es λ -integrable si lo son f_1 y f_2 , en cuyo caso definimos

$$\int f d\lambda = \int f_1 d\lambda + i \int f_2 d\lambda.$$

Proposición 4.4.12 *Sea $\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$, entonces $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible es λ -integrable si y sólo si es $|\lambda|$ -integrable y si consideramos la función $h = d\lambda/d|\lambda|$ del resultado anterior con $|h| = 1$, se tiene que*

$$\int f d\lambda = \int fh d|\lambda|.$$

Demostración. La equivalencia entre integrabilidades se sigue fácilmente de

$$\lambda_i^\pm \leq \lambda_i^+ + \lambda_i^- = |\lambda_i| \leq |\lambda| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-,$$

y del ejercicio (2.4.8), página 106.

La igualdad de integrales se demuestra para funciones indicador, simples y en general para funciones integrables utilizando la linealidad y el teorema de la convergencia dominada, pág.98. ■

Ejercicios

Ejercicio 4.4.1 Sean λ_1, λ_2 y λ_3 medidas, λ_2 y λ_3 σ -finitas, en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que si $\lambda_1 \ll \lambda_2$ y $\lambda_2 \ll \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \ll \lambda_3$ y además se tiene que

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_3} = \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_3}.$$

Ejercicio 4.4.2 Sean μ y ν medidas σ -finitas, con $\nu \ll \mu$ y sea $\lambda = \mu + \nu$. Demostrar que $\nu \ll \lambda$ y si $f = d\nu/d\lambda$, entonces $0 \leq f < 1$ c.s. (μ) y que $d\nu/d\mu = f/(1-f)$. (Sol.)

Ejercicio 4.4.3 Sean λ y μ medidas σ -finitas en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que son equivalentes las condiciones:

(a) $\mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$.

(b) $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\} = \{A \in \mathcal{A} : \lambda(A) = 0\}$.

(c) Existe una función medible $g : \Omega \rightarrow (0, \infty)$, tal que $\lambda(A) = \int_A g d\mu$.

(Sol.)

Ejercicio 4.4.4 Demostrar que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita, existe una medida finita λ , que tiene los mismos conjuntos nulos que μ . (Sol.)

Ejercicio 4.4.5 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrable. Demostrar que si S es un cerrado de \mathbb{C} , tal que para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$$

entonces $f(x) \in S$ c.s. (Sol.)

Ejercicio 4.4.6 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que

$$\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\},$$

es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$. (Sol.)

Ejercicio 4.4.7 Sean $\nu_1 \ll \mu_1$ en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $\nu_2 \ll \mu_2$ en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, medidas σ -finitas. Demostrar que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y que

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y). \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 4.4.8 Sea f medible compleja integrable respecto de una medida compleja λ , demostrar que

$$\left| \int f d\lambda \right| \leq \int |f| d|\lambda|.$$

Ejercicio 4.4.9 Sean μ y ν medidas y f μ -integrable y g ν -integrable, tales que para todo $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = \int_A g d\nu$, entonces para toda h medible acotada $\int_A f h d\mu = \int_A g h d\nu$

4.5. Singularidad

En esta lección consideraremos otra propiedad de las medidas, de la que hemos hablado en el Teorema de descomposición de Jordan, pág.165, y que en cierto modo es opuesta a la de la absoluta continuidad.

Definición. Sea λ una medida arbitraria (medida positiva, carga ó medida compleja) en (Ω, \mathcal{A}) y $A \in \mathcal{A}$. Diremos que λ *está concentrada en* A si $\lambda(E) = 0$ para cualquier $E \in \mathcal{A}$ tal que $E \subset A^c$.

Nota 4.5.1 Que λ esté concentrada en A equivale a que para cada $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$. Observemos que en el caso de que sea una medida

$$\lambda \text{ está concentrada en } A \Leftrightarrow \lambda(A^c) = 0.$$

Definición. Diremos que λ_1 y λ_2 medidas arbitrarias en (Ω, \mathcal{A}) son *singulares* y lo denotaremos $\lambda_1 \perp \lambda_2$, si existen $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos tales que λ_1 está concentrada en A y λ_2 en B .

Ejemplo 4.5.2 Si $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ es la descomposición de Jordan de una carga λ , entonces $\lambda^+ \perp \lambda^-$, pues si P, N es una descomposición de Hahn, $\lambda^+(A) = \lambda(A \cap P)$ y $\lambda^-(A) = -\lambda(A \cap N)$, por tanto λ^+ está concentrada en P y λ^- en N .

Veamos unas cuantas propiedades elementales de la singularidad y su relación con la absoluta continuidad.

Proposición 4.5.3 Sean λ, λ_1 y λ_2 cargas ó medidas complejas en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces:

(a) λ está concentrada en $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si $|\lambda|$ está concentrada en $A \in \mathcal{A}$.

(b) $\lambda_1 \perp \lambda_2$ si y sólo si $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(c) Si $\lambda_1 \perp \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

(d) Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$, entonces $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(e) $\lambda \perp \lambda$ si y sólo si $\lambda = 0$.

(f) Si $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$, entonces $\lambda = 0$.

Demostración. (a) \Rightarrow Si $\lambda(B) = 0$ para todo $B \subset A^c$

$$|\lambda|(A^c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda(A_i)| : A_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup A_i = A^c \right\} = 0.$$

\Leftarrow se sigue de que $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$.

(b) Es consecuencia de (a).

(c) Existen conjuntos disjuntos $A_1, B_1 \in \mathcal{A}$ tales que λ_1 está concentrada en A_1 y μ en B_1 y conjuntos disjuntos $A_2, B_2 \in \mathcal{A}$ tales que λ_2 está concentrada en A_2 y μ en B_2 , por tanto $\lambda_1 + \lambda_2$ está concentrada en $A = A_1 \cup A_2$ y μ en $B = B_1 \cap B_2$ siendo $A \cap B = \emptyset$.

(d) Como $\lambda_2 \perp \mu$ existen A y B medibles disjuntos tales que λ_2 está concentrada en A y μ en B , pero entonces para todo E medible $\mu(E \cap A) = 0$, por tanto $\lambda_1(E \cap A) = 0$ y λ_1 está concentrada en A^c y $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(e) λ está concentrada en A y en B medibles disjuntos, por tanto para todo E medible

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) = \lambda(E \cap A \cap B) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

(f) Es una simple consecuencia de (d) y (e). ■

En el *Teorema de descomposición de Jordan* hemos visto cómo toda carga puede ponerse como diferencia de dos medidas positivas. Ahora veremos cómo la absoluta continuidad y la singularidad son propiedades en base a las cuales podemos realizar otro tipo de descomposición de una medida dada.

Teorema de descomposición de Lebesgue 4.5.4 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y λ una medida σ -finita ó compleja, entonces existen únicas medidas λ_a y λ_s , tales que*

$$\lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu \quad \text{y} \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_s.$$

Demostración. Veamos en primer lugar la unicidad: supongamos que existen dos descomposiciones

$$\lambda_a + \lambda_s = \lambda = \nu_a + \nu_s,$$

con λ_s y μ concentradas en A y A^c respectivamente y ν_s y μ en B y B^c , de este modo μ está concentrada en $A^c \cap B^c$ y λ_s y ν_s en $A \cup B$, por lo

tanto

$$\begin{aligned} E \subset A \cup B &\Rightarrow \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda_a(E) = \nu_a(E) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_s(E) = \nu_s(E) \\ E \subset A^c \cap B^c &\Rightarrow \lambda_s(E) = \nu_s(E) = 0 \Rightarrow \lambda_a(E) = \nu_a(E), \end{aligned}$$

y por aditividad se sigue la unicidad. Para la existencia consideremos primero el caso en que λ es una medida finita y sea $\mathcal{N}_\mu = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$, ahora consideremos una sucesión $A_n \in \mathcal{N}_\mu$ tal que

$$\lambda(A_n) \uparrow s = \sup\{\lambda(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\},$$

por tanto para $N = \cup A_n \in \mathcal{N}_\mu$, pues $\mu(N) = 0$, y como $\lambda(A_n) \leq \lambda(N) \leq s$, tendremos que $\lambda(N) = s$ y para las medidas finitas

$$\lambda_a(A) = \lambda(A \cap N^c), \quad \lambda_s(A) = \lambda(A \cap N),$$

es $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_s \perp \mu$ y $\lambda_a \ll \mu$, pues si $B \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mu(B) = 0 &\Rightarrow \mu(N \cup (B \cap N^c)) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda(N) \leq \lambda(N \cup (B \cap N^c)) \leq \lambda(N) \\ &\Rightarrow \lambda_a(B) = \lambda(B \cap N^c) = 0, \end{aligned}$$

pues λ es finita.

Si λ es una medida σ -finita consideramos una partición $A_n \in \mathcal{A}$ de Ω , con $\lambda(A_n) < \infty$ y aplicamos el resultado anterior a cada espacio de medida $(A_n, \mathcal{A}|_{A_n}, \lambda|_{A_n})$ y sean $N_n \subset A_n$ los conjuntos con $\mu(N_n) = 0$ correspondientes. Ahora para $N = \cup N_n$, tendremos que $\mu(N) = 0$ y las medidas correspondientes

$$\lambda_a(A) = \lambda(A \cap N^c), \quad \lambda_s(A) = \lambda(A \cap N),$$

forman una descomposición de Lebesgue de λ , pues $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_s \perp \mu$ y $\lambda_a \ll \mu$, pues si para un B fuese $\mu(B) = 0$, tendríamos $\mu(A_n \cap B) = 0$ y por tanto $\lambda(A_n \cap B \cap N_n^c) = 0$, de donde $\lambda(A_n \cap B \cap N^c) = 0$ y para la unión $\lambda_a(B) = \lambda(B \cap N^c) = 0$.

Para λ compleja consideramos la medida finita $|\lambda|$ y el conjunto N correspondiente, entonces

$$\lambda_a(A) = \lambda(A \cap N^c), \quad \lambda_s(A) = \lambda(A \cap N),$$

forman una descomposición de Lebesgue de λ , pues $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_s \perp \mu$ pues $\mu(N) = 0$ y $\lambda_a \ll \mu$, pues si para un B medible fuese $\mu(B) = 0$, tendríamos $|\lambda|(B \cap N^c) = 0$, pues $|\lambda|_a \ll \mu$ y

$$|\lambda_a(B)| = |\lambda(B \cap N^c)| \leq |\lambda|(B \cap N^c) = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 4.5.1 Demostrar que si λ_1 y λ_2 son complejas y $\lambda_1 \perp \lambda_2$, entonces $|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$. (Sol.)

4.6. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

- ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.
 COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.
 DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol,I*”. John Wiley–Interscience Pub., 1958.
 FOLLAND, G.B.: “*Real Analysis. Modern Techniques and their applications*”, John Wiley, 1984.
 MUKHERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.
 MUNROE, M.E.: “*Measure and integration*”. Addison Wesley, 1971.
 RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”. Tata McGraw-Hill, 1974.
 YOSIDA, K.: “*Functional Analysis*”. Springer-Verlag, 1974.

Como bibliografía complementaria podemos considerar los siguientes libros:

- HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: “*Real and abstract analysis*”. Springer–Verlag, 1965.
 WHEEDEN, R.L. AND ZYGMUND, A.: “*Measure and integral. An introduction to Real Analysis*”. Marcel Dekker, Inc. 1977.
 ZAAANEN, A.C.: “*Integration*”. North–Holland, 1967.

La descomposición de JORDAN de una medida está íntimamente relacionada con la descomposición de una función de variación acotada, como diferencia de funciones crecientes, que veremos en el siguiente capítulo.

En cuanto al *Teorema de Radon–Nikodym*, nace con el análisis que hace LEBESGUE del *Teorema fundamental del cálculo* (al que dedicaremos el siguiente capítulo), en cuyo libro

- LEBESGUE, H.: “*Leçons sur l'integration*” (1a.edición 1903, 2a.edición 1928). Reimp. de 2a. ed. por Chelsea Pub. Comp., 1973.

da una condición necesaria y suficiente, para que una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se exprese como una integral indefinida. Al año siguiente VITALI

- VITALI, G.: “*Sulle funzioni integrali*”. Atti. Acc. Sci. Torino, 40, pp.1021–1034. Año 1904–1905.

caracteriza tales funciones como las absolutamente continuas (ver pág.198). Los resultados de estos dos autores fueron extendidos en 1913 por

RADON, J.: “*Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen*”. S.B. Akad. Wiss. Wien, 122, 1295–1438, 1913.

para una medida de Borel en un espacio euclídeo. Y en 1929–30 por

NIKODYM, O.M.: “*Sur les fonctions d’ensembles*”. Comp. Rend. I Cong. Math. Pays Slaves, Warsaw, 303-313, 1929.

NIKODYM, O.M.: “*Sur une generalisation des integrales de M.J.Radon*”. Fund. Math. 15, 131-179, 1930.

Por otra parte en 1939

BOCHNER, S.: “*Additive set functions on groups*”. Ann. Math., 2, 40, 769–799, 1939. prueba una versión del teorema para el caso en que λ y μ son aditivas. Su prueba original utiliza la versión numerablemente aditiva, así como el *Teorema de Lebesgue* sobre diferenciación de funciones monótonas. Su enunciado es el siguiente:

Teorema 4.6.1 *Sea \mathcal{A} un álgebra en Ω y λ y μ medidas complejas aditivas tales que:*

(a) $\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\} < \infty$.

(b) *Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|\mu(A)| < \delta$, entonces $|\lambda(A)| < \epsilon$.*

Entonces existe una sucesión de funciones simples s_n , tal que para $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \lim \int_A s_n d\mu.$$

En 1940 VON NEUMANN demuestra el *Teorema de Radon–Nikodym*

NEUMANN, J. VON.: “*On rings of operators III*”. Ann.Math.2, 41, 94-161, 1940.

para $\lambda \ll \mu$ donde λ y μ son medidas acotadas, utilizando exclusivamente el hecho de que $L^2(\Omega, \lambda + \mu) = L^2(\Omega, \lambda + \mu)^*$.

Remitimos al lector interesado en una versión distinta del *Teorema de Radon–Nikodym*, a la p.318 del HEWITT–STROMBERG.

Por último, el *Teorema de Radon–Nikodym* es una de las herramientas fundamentales en la teoría de las medidas vectoriales y con él se introduce un punto de vista para el estudio y clasificación de los espacios de Banach. A este respecto recomendamos el DUNFORD–SCHWARTZ y el más reciente

DIESTEL–UHL: “*Vector measures*”, AMS, 15, 1977.

Por último queremos destacar la profunda relación existente entre la derivada de Radon–Nikodym y dos conceptos en principio sin conexión aparente: El de *esperanza condicionada* (estadística) y el de *proyección* (espacios de Hilbert). De esto hablaremos en capítulos posteriores.

Fin del Capítulo 4

Capítulo 5

Diferenciación

5.1. Introducción

El *Teorema fundamental del cálculo* de la teoría clásica de Riemann asegura que:

- (a) Si f es Riemann integrable en $[a, b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

entonces F es continua en $[a, b]$. Si f es continua en un $x \in [a, b]$, entonces F es diferenciable en x y $F'(x) = f(x)$.

- (b) Si F es diferenciable en $[a, b]$ y F' es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt.$$

En este tema estudiaremos los resultados correspondientes a la teoría de Lebesgue, para la que se tiene:

- (c) Si f es Lebesgue integrable en $[a, b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t)dm$$

entonces F es absolutamente continua en $[a, b]$ y por tanto continua (esto ya lo sabíamos, ver el ejercicio (2.4.25), página 107). Si f es continua en un $x \in [a, b]$, entonces F es diferenciable en x y $F'(x) = f(x)$, pues dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|t - x| \leq \delta$ entonces $|f(t) - f(x)| \leq \epsilon$, pero entonces para $0 \leq r \leq \delta$

$$\left| \frac{F(x+r) - F(x)}{r} - f(x) \right| \leq \frac{1}{r} \int_x^{x+r} |f - f(x)| dm \leq \epsilon.$$

Pero veremos más, aunque f no sea continua tendremos que $F' = f$ c.s. Recíprocamente veremos que si F es absolutamente continua en $[a, b]$, entonces es de la forma

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dm,$$

donde f es Lebesgue integrable y $f = F'$ c.s..

5.2. Diferenciación de medidas

En esta lección consideramos el espacio $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$, con m la medida de Lebesgue.

Lema 5.2.1 *Sea \mathcal{C} una colección de bolas abiertas de \mathbb{R}^n y sea U su unión, entonces*

$$m(U) \leq \sup \left\{ 3^n \sum_{i=1}^m m(B_i) : B_1, \dots, B_m \in \mathcal{C} \text{ disjuntas} \right\}.$$

Demostración. Por ser regular la medida de Lebesgue (ver (1.7.19), página 64), dado $r < \mu(U)$, existe un compacto $K \subset U$, con $r < m(K)$ y como las bolas de \mathcal{C} lo recubren podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{A_i\}_{i=1}^k$. Ahora elegimos B_1 como la bola A_i de radio mayor, B_2 la de radio mayor entre las que no cortan a B_1 y así sucesivamente hasta la última B_m . De este modo para cualquier A_i hay una B_j a la que corta y tiene radio mayor o igual que el de A_i , por lo tanto si denotamos

con B'_j la bola con igual centro que B_j y radio triple, tendremos que $K \subset \cup A_i \subset \cup B'_i$ y por tanto

$$r < m(K) \leq \sum_{i=1}^m m(B'_i) = 3^n \sum_{i=1}^m m(B_i). \quad \blacksquare$$

Definición. Denotaremos con \mathcal{L}_{1loc} el espacio de las funciones medibles $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ integrables en cada compacto, a las que llamaremos *localmente integrables* y si $f \in \mathcal{L}_{1loc}$ definimos el *valor promedio de f en cada bola $B(x, r)$* como

$$P_f(x, r) = \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f \, dm.$$

Nota 5.2.2 Debemos observar que las integrales podemos hacerlas en bolas abiertas o cerradas indistintamente, pues las esferas tienen medida nula ya que $m(B(x, r)) = r^n m(B)$, para B la bola unidad abierta, y

$$S(x, r) \subset B(x, r+\epsilon) \setminus B(x, r-\epsilon) \Rightarrow m[S(x, r)] \leq m[B]((r+\epsilon)^n - (r-\epsilon)^n),$$

y basta hacer $\epsilon \rightarrow 0$.

Lema 5.2.3 Para cada $f \in \mathcal{L}_{1loc}$, la función $P_f(x, r)$ es continua en r para cada x y medible en x para cada r .

Demostración. Para la continuidad en r , como $m(B(x, r)) = r^n m(B)$, basta demostrar que $g(r) = \int_{B(x, r)} f \, dm$ es continua. Para ello sea $\epsilon > 0$, entonces (ver la Nota (5.2.2)), para las coronas $C_\epsilon = B[x, r+\epsilon] \setminus B[x, r]$

$$C_\epsilon \downarrow \emptyset \Rightarrow |g(r+\epsilon) - g(r)| \leq \int_{C_\epsilon} |f| \, dm \rightarrow 0, \quad (\epsilon \rightarrow 0),$$

pues $\int_A |f|$ es una medida en A . Por otro lado para ver la medibilidad en x basta demostrar que fijado r lo es

$$\int_{B(x, r)} f \, dm,$$

ahora por el argumento estándar (indicadores, simples, TCM, etc.) basta verlo para $f = I_A$, y esto es consecuencia de (3.3.6), pág.129, pues

$$m[A \cap B[x, r]] = m[(\mathbb{R}^n \times A \cap \{(z, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \|z - y\| \leq r\})_x]. \quad \blacksquare$$

Definición. Para cada $f \in \mathcal{L}_{1loc}$ definimos su *función maximal de Hardy-Littlewood*

$$Hf(x) = \sup_{r>0} P_{|f|}(x, r) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f| dm.$$

Proposición 5.2.4 Hf es medible.

Demostración. Por el Lema para cada x $P_{|f|}(x, r)$ es continua en r , por tanto $\sup_{r>0} P_{|f|}(x, r) = \sup_{r>0, r \in \mathbb{Q}} P_{|f|}(x, r)$, y como ahora la familia es numerable y las funciones son medibles, Hf es medible. ■

Teorema maximal 5.2.5 Para toda $f \in \mathcal{L}_1$ y todo $\alpha > 0$

$$m\{Hf > \alpha\} \leq \frac{3^n}{\alpha} \int |f| dm.$$

Demostración. Para cada $x \in E_\alpha = \{Hf > \alpha\}$, existe $r_x > 0$ tal que $P_{|f|}(x, r_x) > \alpha$, entonces como $B = \cup B(x, r_x)$ contiene a E_α , si $c < m(E_\alpha)$ entonces $c < m(B)$ y tendremos por (5.2.1) que existe una colección finita de estas bolas que son disjuntas, B_1, \dots, B_n , para las que

$$c < 3^n \sum_{i=1}^n m(B_i) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f| dm \leq \frac{3^n}{\alpha} \int |f| dm,$$

ahora basta hacer $c \uparrow m(E_\alpha)$. ■

Estos resultados nos permiten estudiar teoremas fundamentales de diferenciación en el sentido de que nos dan información sobre el comportamiento límite de cocientes incrementales.

Teorema 5.2.6 Sea $f \in \mathcal{L}_{1loc}$, entonces $\lim_{r \rightarrow 0} P_f(x, r) = f(x)$ c.s.

Demostración. Basta demostrar el resultado en cada conjunto acotado $\{\|x\| \leq N\}$ y como para cada x de este conjunto vamos a integrar f en $B(x, r)$ con r pequeño, por tanto para $r < 1$ sólo evaluaremos f en puntos de $\{\|y\| \leq N + 1\}$, podemos considerar que f se anula fuera de esa bola y por tanto que es integrable. Ahora bien, veremos en (10.2.7), página 334, que las funciones $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, continuas de soporte compacto (por tanto integrables) son densas en las integrables por lo que dado

$\epsilon > 0$ existe una función continua e integrable g tal que $\int |f - g| \leq \epsilon$ y como por continuidad

$$\begin{aligned} |P_g(x, r) - g(x)| &= \frac{1}{m(B(x, r))} \left| \int_{m(B(x, r))} g(y) - g(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{m(B(x, r))} |g(y) - g(x)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 0} |P_f(x, r) - f(x)| &= \\ &= \limsup_{r \rightarrow 0} |P_{f-g}(x, r) + P_g(x, r) - g(x) + (g - f)(x)| \\ &\leq H(f - g)(x) + |f - g|(x). \end{aligned}$$

y si llamamos

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{x : \limsup_{r \rightarrow 0} |P_f(x, r) - f(x)| > \alpha\}, \\ B_\alpha &= \{|f - g| > \alpha\}, \quad C_\alpha = \{Hf - g > \alpha\} \end{aligned}$$

entonces $A_\alpha \subset B_{\alpha/2} \cup C_{\alpha/2}$, y como $\alpha m(B_\alpha) \leq \int_{B_\alpha} |f - g| \leq \epsilon$, tendremos por el Teorema de maximalidad que

$$m(A_\alpha) \leq \frac{2\epsilon}{\alpha} + \frac{2\epsilon 3^n}{\alpha},$$

por tanto $m(A_\alpha) = 0$. ■

Lo que acabamos de demostrar equivale a decir que

$$\frac{1}{m[C]} \int_C [f - f(x)] dm \rightarrow 0, \quad \text{si } C = B(x, r) \text{ y } r \rightarrow 0,$$

lo cual implica que el promedio de $f - f(x)$ en cada bola C es pequeño cuando r se hace pequeño. Cabría pensar que esto es debido a un efecto de cancelación de signos, pero no es así pues se tiene el siguiente resultado más fuerte.

Teorema 5.2.7 *Sea $f \in \mathcal{L}_{1loc}$, entonces para $x \in \mathbb{R}^n$ c.s. se tiene*

$$\frac{1}{m[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} |f - f(x)| dm \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0,$$

Demostración. Sea $D \subset \mathbb{C}$ denso y numerable y para cada $z \in D$ apliquemos el teorema anterior a $|f - z|$, entonces existe un Lebesgue medible nulo E_z fuera del cual

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} |f(y) - z| dm = |f(x) - z|,$$

y para cada x fuera de $E = \cup E_z$ y $\epsilon > 0$ existe un $z \in D$, tal que $|f(x) - z| < \epsilon$, por tanto $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - z| + \epsilon$ y como $x \notin E_z$

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dm = |f(x) - z| + \epsilon < 2\epsilon,$$

y el resultado se sigue. ■

Finalmente daremos el resultado más general, en el que en lugar de bolas centradas en x en las que integramos nuestra función, consideramos otro tipo de conjuntos que ni siquiera tienen que contener al punto x .

Definición. Diremos que una familia de medibles $E_r \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (para $r > 0$) *encoge suavemente hacia x* si existe una constante $\alpha > 0$ tal que: (i) Cada $E_r \subset B(x, r)$, (ii) $\alpha m(B(x, r)) \leq m(E_r)$.

Teorema de diferenciación de Lebesgue 5.2.8 *Sea $f \in \mathcal{L}_{1loc}$, entonces para $x \in \mathbb{R}^n$ c.s. y $E_r \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ una familia que encoge suavemente hacia x , se tiene*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m[E_r]} \int_{E_r} |f - f(x)| dm = 0.$$

En particular si f es real y tiene integral (ó es compleja y es integrable) y definimos la carga finita en los compactos (ó medida compleja) $\lambda(E) = \int_E f dm$, entonces $\lim \lambda(E_r)/m[E_r] = f(x)$.

Demostración. Por definición existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m[E_r]} \int_{E_r} |f - f(x)| dm &\leq \frac{1}{m[E_r]} \int_{B(x, r)} |f - f(x)| dm \\ &\leq \frac{1}{\alpha m[B(x, r)]} \int_{B(x, r)} |f - f(x)| dm, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue del teorema anterior. ■

Teorema 5.2.9 *Sea μ una carga, finita en los compactos, ó una medida real o compleja. Entonces c.s. existe*

$$D\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(E_r)}{m(E_r)},$$

(para E_r encogiéndose suavemente a x) y $D\mu = d\mu_a/dm$, para $\mu = \mu_a + \mu_s$ la descomposición de Lebesgue.

Demostración. Para μ_a se sigue del resultado anterior, por tanto basta demostrar que $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_s(E_r)}{m(E_r)} = 0$ c.s., para lo cual basta considerar $E_r = B(x, r)$ y que $\mu_s = \lambda$ es positiva, finita en los acotados y singular $\lambda \perp m$, pues

$$\left| \frac{\mu_s(E_r)}{m(E_r)} \right| \leq \frac{|\mu_s|(E_r)}{m(E_r)} \leq \frac{|\mu_s|(B(x, r))}{\alpha m(B(x, r))}.$$

Sea A un boreliano tal que $\lambda(A) = m(A^c) = 0$, definamos para $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \left\{ x \in A : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(B(x, r))}{m(B(x, r))} > \frac{1}{k} \right\},$$

y veamos que $m(A_k) = 0$. Por ser λ finita en los acotados es regular (ver (1.7.19), página 64), por tanto como $\lambda(A) = 0$, para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto $U_\epsilon \supset A$, tal que $\lambda(U_\epsilon) < \epsilon$. Por definición de A_k , para cada $x \in A_k$ existe una bola abierta B_x , centrada en x tal que $B_x \subset U_\epsilon$ y $\lambda(B_x) > m(B_x)/k$. Sea $V_\epsilon = \cup B_x$ y $c < m(V_\epsilon)$, entonces por el Lema 5.2.1, hay una colección finita y disjunta de estas bolas B_1, \dots, B_m , tales que

$$c < 3^n \sum_{i=1}^m m(B_i) \leq 3^n k \sum_{i=1}^m \lambda(B_i) \leq 3^n k \lambda(V_\epsilon) \leq 3^n k \lambda(U_\epsilon) \leq 3^n k \epsilon,$$

por tanto $m(V_\epsilon) \leq 3^n k \epsilon$ y como $A_k \subset V_\epsilon$, $m(A_k) = 0$. ■

5.3. Derivación e integración

En esta lección estudiaremos el *Teorema fundamental del cálculo* en el contexto de la integración de Lebesgue. Para ello utilizaremos dos propiedades fundamentales de las funciones reales, directamente relacionadas con este problema, la variación acotada y la absoluta continuidad.

5.3.1. Funciones de variación acotada.

Definición. Dada una función $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}), llamamos *variación de F en un intervalo $J \subset I$* a

$$v_F\{J\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(t_{i-1})| : t_0 \leq \dots \leq t_n \in J\right\},$$

y diremos que F es de *variación acotada en J* si $v_F\{J\} < \infty$ y de *variación acotada* si $v_F\{I\} < \infty$.

Para $I = \mathbb{R}$, llamamos *variación de F* a la función creciente $v_F(x) = v_F\{(-\infty, x]\}$ (y para $I = [a, b]$, $v_F(x) = v_F\{[a, x]\}$). Diremos que F *se anula en $-\infty$* si $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ y denotaremos con $\mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ el \mathbb{K} -espacio vectorial de las funciones $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ de variación acotada que se anulan en $-\infty$ y son continuas a la derecha.

Nota 5.3.1 Observemos que si F es de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, entonces se puede extender con $F(x) = F(a)$ para $x < a$ y $F(x) = F(b)$ para $x > b$ a una F de variación acotada en todo \mathbb{R} ; y recíprocamente si F es de variación acotada en \mathbb{R} , su restricción a cada intervalo $[a, b]$ es de variación acotada en $[a, b]$.

Definición. Diremos que $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ es *absolutamente continua* (para $I = \mathbb{R}$ ó $I = [a, b]$) si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n),$$

son intervalos disjuntos de I para los que $\sum(b_i - a_i) \leq \delta$, entonces

$$\sum |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon.$$

Nota 5.3.2 Se demuestra fácilmente que si $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces es uniformemente continua, sin embargo hay funciones uniformemente continuas, incluso de variación acotada, que no son absolutamente continuas. Por otra parte si F es diferenciable y su derivada es acotada, entonces como una simple consecuencia del teorema del valor medio, F es absolutamente continua.

Veremos en 5.3.11 que una función absolutamente continua es de variación acotada en cada intervalo compacto, sin embargo no lo es necesariamente en \mathbb{R} , como por ejemplo para $F(x) = x$.

Nota 5.3.3 Es inmediato probar que si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son de variación acotada también $f + g$ y $f - g$, pues $v_{f \pm g} \leq v_f + v_g$. También es fácil ver que si f es monótona y acotada, entonces es de variación acotada, de hecho $v_f(x) = f(x) - f(-\infty)$ y por lo anterior también es de variación acotada la diferencia de dos de este tipo. El siguiente resultado prueba el recíproco de esto.

Lema 5.3.4 Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada $v_F + F$ y $v_F - F$ son acotadas y crecientes y por tanto existen funciones f y g acotadas y crecientes, por ejemplo $f = (v_F + F)/2$ y $g = (v_F - F)/2$, tales que $F = f - g$.

Demostración. En primer lugar F es acotada, pues para $x < y$

$$|F(y) - F(x)| \leq |F(y) - F(x)| + v_F(x) \leq v_F(y) \leq v_F(\infty) < \infty,$$

por tanto $v_F + F$ es acotada. Ahora como $-F$ también es de variación acotada, basta ver que $v_F + F$ es creciente. Sea $x < y$ y $\epsilon > 0$, entonces existen $x_0 < \dots < x_n = x$, tales que

$$v_F(x) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|,$$

y como $|F(y) - F(x)| + F(y) - F(x) \geq 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} v_F(y) + F(y) &\geq \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| + |F(y) - F(x)| + F(y) \\ &\geq v_F(x) + F(x) - \epsilon, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ■

Proposición 5.3.5 Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ de variación acotada, entonces:

- (a) v_F es creciente y se anula en $-\infty$.
 (b) Si F es continua a la derecha, entonces v_F también, por tanto es una función de distribución y $v_F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$.

Demostración. (a) De la definición se sigue que si $J_1 \subset J_2$, entonces $v_F\{J_1\} \leq v_F\{J_2\}$, en particular si $x < y$

$$0 \leq v_F(x) = v_F\{(-\infty, x]\} \leq v_F\{(-\infty, y]\} = v_F(y).$$

Ahora dado $\epsilon > 0$ y un $x \in \mathbb{R}$, existen $x_0 < \dots < x_n = x$, tales que

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| > v_F(x) - \epsilon,$$

como por otra parte para $t < x_0$,

$$v_F(t) + \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq v_F(x),$$

tendremos que para $t < x_0$, $v_F(t) < \epsilon$, por tanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} v_F(x) = 0$.

(b) Sea $x_n \downarrow x$ y $\epsilon > 0$. Por la continuidad existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < t - x < \delta$, $|F(t) - F(x)| \leq \epsilon$, por otra parte como antes, dado $y > x$ existen $t_0 < \dots < t_m = y$, tales que

$$v_F(y) - \epsilon < \sum_{i=1}^m |F(t_i) - F(t_{i-1})|,$$

y sin pérdida de generalidad podemos suponer que uno de los puntos de la partición es $t_k = x$ y que $t_{k+1} - x < \delta$ (para ello si es necesario metemos dos puntos más, con lo que la expresión de la derecha aumenta), por tanto

$$\begin{aligned} v_F(y) &< \sum_{i=1}^k |F(t_i) - F(t_{i-1})| + 2\epsilon + \sum_{i=k+2}^m |F(t_i) - F(t_{i-1})| \\ &\leq v_F(x) + 2\epsilon + v_F(y) - v_F(t_{k+1}) \quad \Rightarrow \\ v_F(t_{k+1}) &\leq v_F(x) + 2\epsilon, \end{aligned}$$

y para los $x_n < t_{k+1}$, tendremos por ser v_F monótona creciente que

$$v_F(x) \leq v_F(x_n) \leq v_F(t_{k+1}) \leq v_F(x) + 2\epsilon,$$

y el resultado se sigue. ■

Proposición 5.3.6 (a) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ es de variación acotada si y sólo si lo son $\operatorname{Re}(F)$ e $\operatorname{Im}(F)$.

(b) $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ si y sólo si $F_1 = \operatorname{Re}(F), F_2 = \operatorname{Im}(F) \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ si y sólo si existen f_1, g_1, f_2, g_2 funciones de distribución acotadas que se anulan en $-\infty$ y tales que $F_1 = f_1 - g_1, F_2 = f_2 - g_2$.

Demostración. (a) es obvia. (b) se sigue de (a) y de que F se anula en $-\infty$ si y sólo si lo hacen F_1 y F_2 y F es continua a la derecha si y sólo si lo son F_1 y F_2 y lo último se sigue del Lema (5.3.4) y (5.3.5). ■

5.3.2. Medidas y funciones de variación acotada.

Veamos ahora que hay una biyección entre $\mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{K})$ y $\mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, similar a la que vimos en la página 27 del tema I, entre las medidas (positivas) de Lebesgue–Stieltjes y las funciones de distribución.

Teorema 5.3.7 La igualdad $F(x) = \mu(-\infty, x]$ define una biyección

$$\phi: \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{K}) \rightarrow F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R}),$$

en el sentido de que dada la $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, existe una única $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{K})$, tal que $F(x) = \mu(-\infty, x]$. Además es un isomorfismo de espacios vectoriales y si $F = \phi(\mu), v_F = \phi(|\mu|)$, por tanto para la norma $\|F\| = v_F(\mathbb{R})$, el isomorfismo es entre espacios normados.

Demostración. Si μ es compleja y $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^-$, es su descomposición de Jordán, con las μ_i^\pm medidas finitas, que definen las funciones de distribución acotadas $F_i^\pm(x) = \mu_i^\pm(-\infty, x]$, entonces

$$F = F_1^+ - F_1^- + iF_2^+ - iF_2^-,$$

y por el Lema (5.3.6), $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$. Recíprocamente sea $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ y $F = F_1 + iF_2$, entonces por (5.3.6), $F_1, F_2 \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ y por 5.3.5, $v_{F_i} \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, por tanto $f_i = (v_{F_i} + F_i)/2$ y $g_i = (v_{F_i} - F_i)/2$ son funciones de distribución que se anulan en $-\infty$ y definen medidas únicas tales que

$$\begin{aligned} \mu_1(-\infty, x] &= f_1(x), & \mu_2(-\infty, x] &= f_2(x), \\ \mu_3(-\infty, x] &= g_1(x), & \mu_4(-\infty, x] &= g_2(x), \end{aligned}$$

para las que

$$\mu = \mu_1 - \mu_3 + i\mu_2 - i\mu_4,$$

es una medida compleja que verifica el enunciado. Que es isomorfismo es obvio y si μ y F se corresponden, entonces por (5.3.5) $v_F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$ y para la medida μ_{v_F} que le corresponde por ϕ , como $|F(y) - F(x)| + v_F(x) \leq v_F(y)$, tendremos que

$$|\mu(x, y)| = |F(y) - F(x)| \leq v_F(y) - v_F(x) = \mu_{v_F}(x, y),$$

y tomando límites $x \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow \infty$), también

$$|\mu(-\infty, y)| \leq \mu_{v_F}(-\infty, y), \quad |\mu(x, \infty)| \leq \mu_{v_F}(x, \infty),$$

y tenemos la desigualdad $|\mu(A)| \leq \mu_{v_F}(A)$, para $A \in \mathcal{A}_0$ el álgebra de las uniones finitas y disjuntas de semiintervalos. Ahora bien si consideramos la clase de los borelianos que tienen esa propiedad, vemos que es una clase monótona que contiene a \mathcal{A}_0 y por el teorema de la clase monótona, pág.12 es todo $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por tanto se sigue de (4.3.2)

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), |\mu(A)| \leq \mu_{v_F}(A) \quad \Rightarrow \quad |\mu| \leq \mu_{v_F},$$

pero por otra parte como $F(b) - F(a) = \mu(a, b]$ se sigue de (4.3.2) que

$$\begin{aligned} v_F(x) &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| : x_0 < \cdots < x_n = x \right\} \\ &\leq |\mu|(-\infty, x] \leq \mu_{v_F}(-\infty, x] = v_F(x), \end{aligned}$$

y las medidas finitas $|\mu|, \mu_{v_F}$ coinciden en los semiintervalos $(-\infty, x]$, por tanto en \mathcal{A}_0 y por el teorema de Hahn en los borelianos y son iguales. Por último

$$\|\phi(\mu)\| = v_F(\mathbb{R}) = |\mu|(\mathbb{R}) = \|\mu\|. \quad \blacksquare$$

5.3.3. Teorema fundamental del cálculo.

Veamos ahora qué relación existe entre la absoluta continuidad de funciones y la de medidas.

Proposición 5.3.8 Sean μ y $F = \phi(\mu)$, correspondientes por el isomorfismo (5.3.7), entonces F es absolutamente continua sii $\mu \ll m$.

Demostración. “ \Leftarrow ” Sabemos por (4.4.1) que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $m(E) < \delta$, entonces $|\mu|(E) < \epsilon$, por tanto si $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$, entonces para $E = \cup(a_i, b_i]$, se tiene $m(E) < \delta$ y por tanto

$$\sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^k |\mu(a_i, b_i]| \leq |\mu|(E) \leq \epsilon.$$

“ \Rightarrow ” Sea $m(A) = 0$ y veamos que $\mu(A) = 0$, para ello observemos en primer lugar que $\mu(\{b\}) = F(b) - F(b^-) = 0$ por ser F continua y por tanto $\mu(a, b) = \mu(a, b]$. Por otro lado sabemos por (1.7.19) que m y las μ_i^\pm son regulares, por tanto

$$m(A) = \inf\{m(V) : V \text{abierto}, A \subset V\},$$

$$\mu_i^\pm(A) = \inf\{\mu_i^\pm(V) : V \text{abierto}, A \subset V\},$$

y como la intersección finita de abiertos es abierto podemos encontrar una sucesión decreciente de abiertos V_n , tales que $m(V_n) \rightarrow m(A) = 0$ y $\mu_i^\pm(V_n) \rightarrow \mu_i^\pm(A)$, por tanto $\mu(V_n) \rightarrow \mu(A)$. Ahora dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$, entonces $\sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon$, y como $m(A) = 0$ existe un n a partir del cual $m(V_n) < \delta$, pero todo abierto de \mathbb{R} es unión numerable disjunta de intervalos abiertos, por lo tanto $V_n = \cup(a_i, b_i)$ y para todo k , $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) \leq m(V_n) \leq \delta$, por tanto $\sum_{i=1}^k |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon$, por lo que

$$|\mu(V_n)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(a_i, b_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(a_i, b_i]| = \sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon,$$

por tanto $|\mu(A)| \leq \epsilon$ y como el ϵ es arbitrario, $\mu(A) = 0$. ■

Proposición 5.3.9 Sea $F \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R})$, entonces existe c.s. F' , por tanto es lebesgue medible, y es integrable $F' \in \mathcal{L}_1$. Además para $F = \phi(\mu)$,

$$\mu \perp m \quad \Leftrightarrow \quad F' = 0 \quad \text{c.s.}$$

$$\mu \ll m \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^x F'(x) dm.$$

Demostración. Se sigue de (5.2.9) que c.s.

$$\frac{F(x+r) - F(x)}{r} = \frac{\mu(E_r)}{m(E_r)} \rightarrow f(x), \quad (r \rightarrow 0)$$

para $E_r = (x, x + r]$ si $r > 0$ y $E_r = (x + r, x]$ si $r < 0$, $\mu = \mu_a + \mu_s$ la descomposición de Lebesgue y $d\mu_a = f dm$, por tanto $F' = f$ c.s. Además

$$\mu \perp m \Leftrightarrow \mu_a = 0 \Leftrightarrow F' = 0 \text{ c.s.}$$

$$\mu \ll m \Leftrightarrow \mu = \mu_a \Leftrightarrow F(x) = \mu(-\infty, x] = \int_{-\infty}^x F'(x) dm.$$

donde la implicación “ \Leftarrow ” de la cuarta equivalencia se sigue de que dos medidas finitas que coinciden en los semiintervalos $(-\infty, x]$ son iguales.

■

En el *Teorema de Radon-Nikodym* (4.4.3) hemos puesto de manifiesto la íntima relación entre la absoluta continuidad de medidas y las integrales indefinidas. Esta relación subsiste para funciones de \mathcal{V}_0 como vemos en el siguiente resultado que es una consecuencia del anterior.

Teorema de Lebesgue 5.3.10 *Sea $f \in \mathcal{L}_1[\mathcal{L}(\mathbb{R}), m]$ y $F(x) = \int_{-\infty}^x f dm$, entonces F es diferenciable c.s. y $F' = f$ c.s. (m), además $F \in \mathcal{V}_0$ y es absolutamente continua. Recíprocamente si $F \in \mathcal{V}_0$ es absolutamente continua, entonces F' existe c.s., es integrable y $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dm$.*

Demostración. Consideremos la medida real ó compleja $\mu(A) = \int_A f dm$, y sea $F = \phi(\mu)$, entonces la primera parte se sigue de (5.3.9). El recíproco se sigue de ese mismo resultado y de (5.3.8). ■

Consideremos ahora que nuestra función F está definida en un intervalo compacto $[a, b]$, en cuyo caso las condiciones se simplifican pues se tiene el siguiente:

Lema 5.3.11 *Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es absolutamente continua, es de variación acotada.*

Demostración. Queremos ver que existe un $k < \infty$, tal que dados $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$,

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq k,$$

para ello sabemos que existe un $\delta > 0$, tal que si (a_i, b_i) son una colección finita de intervalos disjuntos tales que $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \leq \delta$, entonces $\sum |F(b_i) - F(a_i)| \leq 1$. Consideremos los intervalos

$$[a, \delta], [\delta, 2\delta], \dots, [(k-1)\delta, b],$$

para k tal que $b \leq k\delta$. Entonces incluyendo más puntos entre los x_i , si es necesario, para que estén los extremos de estos intervalos (en cuyo caso la suma que perseguimos aumenta), podremos agrupar los x_i por intervalos y para los de cada intervalo como $\sum(x_i - x_{i-1}) = \delta$, tendremos que $\sum |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq 1$, por tanto para todos los x_i , $\sum |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq k$. ■

Teorema Fundamental del Cálculo Integral de Lebesgue 5.3.12

Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si F es absolutamente continua, entonces es diferenciable c.s., F' es Lebesgue integrable y $F(x) = F(a) + \int_a^x F' dm$. Recíprocamente si $F(x) = F(a) + \int_a^x f dm$, para una $f \in \mathcal{L}_1$, entonces F es absolutamente continua y $f = F'$ c.s.

Demostración. “ \Rightarrow ” Definamos $G(x) = F(x) - F(a)$ en $[a, b]$, $G(x) = F(b) - F(a)$ en $x > b$ y $G(x) = 0$ en $x < a$, entonces $G \in \mathcal{V}_0$ por el Lema (5.3.11) y es absolutamente continua, por tanto se sigue del Teorema de Lebesgue (5.3.10) que $F' = G' \in \mathcal{L}_1$ y en $[a, b]$

$$F(x) - F(a) = G(x) = \int_{-\infty}^x G' dm = \int_a^x F' dm.$$

“ \Leftarrow ” Definamos $f(x) = 0$ en $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, por tanto $f \in \mathcal{L}_1[\mathcal{L}(\mathbb{R}), m]$ y para G como antes es $G(x) = \int_{-\infty}^x f dm$, entonces por el Teorema de Lebesgue G es diferenciable c.s. y $G' = f$ c.s., ahora bien en $[a, b]$ $G(x) = F(x) - F(a)$ y $G' = F'$. ■

Ante estos resultados nos planteamos la siguiente cuestión:

Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, ¿qué condiciones debe verificar F para que se verifique $F(x) - F(a) = \int_a^x F' dm$?

Para $F(x) = x^2 \sin x^{-2}$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$, se tiene que F es diferenciable en todo punto, sin embargo

$$\int_0^1 |F'(x)| dx = \infty,$$

por tanto F' no es integrable en $[0, 1]$, ni F es de variación acotada ni por tanto absolutamente continua en $[0, 1]$.

Podríamos pensar entonces que la cuestión anterior es afirmativa si F es diferenciable en casi todo punto (m) y $F' \in \mathcal{L}_1$, pero tampoco esto es cierto (ver Rudin, p.179). Lo mas lejos que podemos ir en la contestación afirmativa de esta cuestión está en el siguiente resultado (ver COHN, p.191; BENEDETTO, p.150).

Teorema 5.3.13 (a) Si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, diferenciable salvo en una colección numerable de puntos y $F' \in \mathcal{L}_1$, entonces

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F' dm.$$

(b) Si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, diferenciable en casi todo $[a, b]$, $F' \in \mathcal{L}_1$ y se satisface

$$m(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad m[F(A)] = 0.$$

entonces

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F' dm.$$

5.4. Transformaciones diferenciables

5.4.1. Transformaciones lineales.

Una aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n)$, entre \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión k y n respectivamente,

$$T: \mathcal{E}_k \rightarrow \mathcal{E}_n,$$

define por dualidad otra $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_n^*, \mathcal{E}_k^*)$, que llamamos su *traspuesta*

$$T^*: \mathcal{E}_n^* \longrightarrow \mathcal{E}_k^*, \quad [T^*(w)](x) = w[T(x)],$$

pues si consideramos bases u_j de \mathcal{E}_k y v_i de \mathcal{E}_n , la matriz correspondiente a T^* en las bases duales, v^i y u^j , es la traspuesta $A^t = (a_{ji})$, de la matriz $A = (a_{ij})$ correspondiente a T , ya que si

$$T(u_j) = \sum a_{ij} v_i \quad y \quad T^*(v^i) = \sum b_{ji} u^j,$$

entonces $a_{ij} = v^i[T(u_j)] = [T^*(v^i)](u_j) = b_{ji}$.

Por otro lado cada *espacio Euclídeo* \mathcal{E} (\mathbb{R} -espacio vectorial con un producto interior), finito dimensional, se identifica canónicamente con su dual mediante el isomorfismo

$$\phi: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^*, \quad x \rightarrow \langle x, \cdot \rangle,$$

cuya matriz correspondiente a una base u_j y su dual u^j es $(u_i \cdot u_j)$, pues $\phi(u_j) = \sum (u_i \cdot u_j) u^i$. Por lo tanto si la base es ortonormal la matriz es la identidad y si los espacios \mathcal{E}_k y \mathcal{E}_n son euclídeos tendremos un endomorfismo lineal canónico

$$T_k = \phi_k^{-1} \circ T^* \circ \phi_n \circ T: \mathcal{E}_k \longrightarrow \mathcal{E}_k,$$

que en términos de las bases u_j y v_i ¡si son ortonormales! le corresponde la matriz $B = A^t A$, la cual es semidefinida positiva y sus autovalores λ son reales y no negativos¹ por lo que el determinante de nuestra aplicación es no negativo, lo cual nos permite dar la siguiente definición.

Definición. Para cada aplicación lineal $T: \mathcal{E}_k \rightarrow \mathcal{E}_n$, entre espacios euclídeos, en las condiciones anteriores, definimos

$$J(T) = \sqrt{\det T_k} = \sqrt{\det(A^t A)} \geq 0.$$

A partir de ahora por comodidad tomaremos nuestros espacios euclídeos como \mathbb{R}^n con el producto escalar estándar, $\langle x, y \rangle = x^t \cdot y = \sum x_i y_i$.

Proposición 5.4.1 $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal es inyectiva sii lo es T_k sii $J(T) > 0$; y en tal caso $k \leq n$.

Demostración. En términos matriciales, A es inyectiva sii $A^t A$ lo es sii $A^t A$ es isomorfismo sii $\det T_k > 0$, donde lo primero se sigue de las equivalencias

$$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad A^t Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x^t A^t Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = 0,$$

y $k = \dim \text{Im } T + \dim \ker T = \dim \text{Im } T \leq n$. ■

¹Pues $A = \bar{A}$ por ser real, por tanto para todo autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ de B , con autovector no nulo $x \in \mathbb{C}^k$

$$0 \leq \bar{x}^t \bar{A}^t Ax = \bar{x}^t Bx = \lambda \bar{x}^t x = \lambda \left(\sum |x_i|^2 \right),$$

por lo tanto λ es real y no negativo.

Lema 5.4.2 *Todo isomorfismo $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es composición finita de isomorfismos de uno de los tres siguientes tipos, para $r \neq 0$ y e_i la base estándar de \mathbb{R}^n*

$$\begin{aligned} T_1(e_1) &= re_1, & T_1(e_i) &= e_i, & \text{para } i &= 2, \dots, n, \\ T_2(e_i) &= e_i, & T_2(e_j) &= e_k, & T_2(e_k) &= e_j, & \text{para } i \neq j, i \neq k, \\ T_3(e_1) &= e_1, & T_3(e_2) &= e_1 + e_2 & T_3(e_i) &= e_i & \text{para } i = 3, \dots, n, \end{aligned}$$

Demostración. Se deja como ejercicio. Observemos por ejemplo

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Lema 5.4.3 *Dado un subespacio k -dimensional, $S \subset \mathbb{R}^n$, con $k < n$, $m[S] = 0$ y existe una rotación R del espacio tal que $R(S) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$.*

Demostración. Veamos lo último. Sea v_1, \dots, v_k una base ortonormal de S que extendemos a una base ortonormal $\{v_i\}$ de \mathbb{R}^n . Consideremos la matriz A formada por sus columnas, entonces $A^t A = Id$, por tanto es una rotación, como también su inversa $R = A^t = A^{-1}$, pues $R^t R = Id$ y como A lleva la base estándar e_i en v_i , R lleva v_i en e_i , que es lo que queremos. Ahora $m[S] = 0$ pues la medida de Lebesgue es invariante por rotaciones y para $E = R(S) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ y $z \in \mathbb{R}^m$,

$$m[S] = m[R(S)] = \int m_{n-k}[E_z] dm_k = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.4.4 *Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal. Entonces T lleva lebesgue medibles en lebesgue medibles y para todo lebesgue medible E ,*

$$m[T(E)] = |\det(T)|m(E).$$

Además si T es isomorfismo lleva Borelianos en Borelianos.

Demostración. (a) Si el $\det T = 0$, entonces $\text{Im } T = \mathcal{S}_k = \{h_1 = 0, \dots, h_{n-k} = 0\}$ es un subespacio k -dimensional y por el Lema $m(\mathcal{S}_k) = 0$, por tanto $T(E) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ y $m[T(E)] = 0$.

(b) Si el $\det T \neq 0$, T es un isomorfismo lineal, por tanto homeomorfismo y por (2.2.1) T y T^{-1} son medibles, por tanto lleva Borelianos en Borelianos. Podemos entonces definir la medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu(E) = m[T(E)]$, la cual es no nula, invariante por traslaciones y finita en los compactos y por (1.5.19) de Lebesgue, $\mu = c(T) \cdot m$, con

$c(T) = m[T(Q)] > 0$ para $Q = [0, 1]^n$ el cubo unidad. Se sigue que $m[T(E)] = c(T) \cdot m(E)$ y T conserva los Lebesgue medibles, pues lleva Borelianos de medida nula en Borelianos de medida nula. Veamos que $c(T) = |\det(T)|$.

Si T_1 y T_2 son isomorfismos lineales, también lo es $T_1 \circ T_2$ y $c[T_1 \circ T_2] = c[T_1]c[T_2]$, por otra parte T es composición finita de isomorfismos lineales de los tres tipos dados en el Lema anterior y basta demostrar que para ellos $c(T) = |\det T|$, es decir $m[T(Q)] = |\det T|$, lo cual es obvio pues (si $r > 0$)

$$T_1(Q) = [0, r] \times [0, 1]^{n-1} \Rightarrow m[T_1(Q)] = r = |\det T_1|,$$

$$T_2(Q) = Q \Rightarrow m[T_2(Q)] = 1 = |\det T_2|,$$

$$T_3(Q) = A \times [0, 1]^{n-2} \Rightarrow m[T_3(Q)] = m_2(A) = 1 = |\det T_3|.$$

para el paralelogramo $A = \{(x + y, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$, (ver Fig.5.1), para el que $A_y = [y, y + 1]$ si $y \in [0, 1]$ y tiene área $m_2[A] = \int_{[0,1]} m_1[A_y], dm_1 = 1$. ■

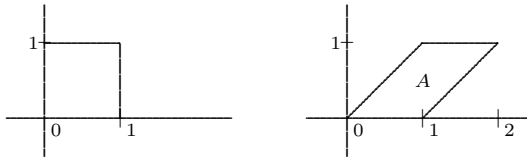


Figura 5.1.

Interpretación geométrica del determinante 5.4.5 Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal, entonces para $Q = [0, 1]^n$, el cubo unidad

$$|\det(T)| = m[T(Q)].$$

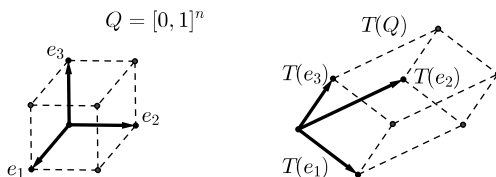


Figura 5.2. Interpretación geométrica del determinante

5.4.2. Transformaciones y medidas de Hausdorff.

Consideremos ahora el espacio euclídeo \mathbb{R}^n y en él las medidas de Hausdorff H_k .

Lema 5.4.6 *Sea $V \subset \mathbb{R}^k$ abierto y $F: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva, entonces $E \in \mathcal{B}(V)$ sii $F(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.*

Demostración. \Leftarrow Por ser F inyectiva $E = F^{-1}[F(E)]$; y F es continua, por tanto medible.

\Rightarrow Todo abierto U es unión numerable de compactos²

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq n, d(x, U^c) \geq 1/n\},$$

y si $U \subset V$ es abierto $F(U)$ es boreliano por ser unión numerable de los compactos (por tanto cerrados) $F(K_n)$. Se sigue que los abiertos de V están en la clase

$$\mathcal{C} = \{E \subset V : F(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\},$$

que es una σ -álgebra, pues es cerrada para uniones numerables y si $E \in \mathcal{C}$, $E^c \in \mathcal{C}$, ya que $F(E)$ y $F(V) = F(E^c) \cup F(E)$ son borelianos y la unión es disjunta, por ser F inyectiva. Por tanto \mathcal{C} contiene los abiertos de V y $\mathcal{B}(V) \subset \mathcal{C}$. ■

Proposición 5.4.7 *Sea $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal e inyectiva, entonces $k \leq n$, $J(T) > 0$, $T(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sii $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ y*

$$H_k[T(E)] = J(T)H_k[E].$$

Demostración. Por (5.4.1) $J(T) > 0$ y $k \leq n$. Por el Lema anterior (5.4.6) lleva borelianos en borelianos.

Si $k = n$, $J(T) = |\det T|$ y el resultado se sigue de (5.4.4) y de (1.6.9) (página 45), por ser $\gamma_n H_n$ la medida de Lebesgue n -dimensional. Si $k < n$, consideremos por (5.4.3), una rotación $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que lleve $T(\mathbb{R}^k)$ en el subespacio $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ y sea $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ la composición

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n \xrightarrow{R} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{R}^k$$

tal que $R[T(x)] = (F(x), 0)$, por tanto en términos matriciales

$$RT = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^t T = T^t R^t R T = F^t F \Rightarrow J(T) = J(F).$$

²También considerando las bolas cerradas $B \subset U$, de centro en \mathbb{Q}^n y radio racional.

Ahora por el ejercicio (1.6.2) (página 49), por ser H_k invariante por rotaciones y por lo visto en el primer caso ($k = n$)

$$\begin{aligned} H_k[T(E)] &= H_k[R(T(E))] = H_k[F(E) \times \{0\}^{n-k}] \\ &= H_k[F(E)] = J(F)H_k(E) = J(T)H_k(E). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Interpretación geométrica de $J(T)$ 5.4.8 Sea $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal, entonces para $Q = [0, 1]^k$,

$$J(T) = \gamma_k H_k[T(Q)].$$

5.5. El teorema de cambio de variable

Nuestro interés es dar una fórmula que nos permita calcular la medida de Hausdorff k -dimensional de los Borelianos de una subvariedad diferenciable k -dimensional de \mathbb{R}^n . Para ello necesitamos una serie de resultados previos y recordar algunas definiciones.

Definición. Sea $U \subset \mathbb{R}^k$ un abierto. Decimos que una aplicación $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *diferenciable en $x \in U$* si existe una aplicación lineal $DF_x: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ (en cuyo caso es única³) y a la que llamamos *aplicación lineal tangente*, tal que

$$\lim_{\|z\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x+z) - F(x) - DF_x(z)\|}{\|z\|} = 0.$$

Diremos que F es *diferenciable* si lo es en cada punto de U . Diremos que es de *clase 1* si es diferenciable y la aplicación $DF: x \in U \rightarrow DF_x \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ es continua⁴. Por inducción diremos que F es de clase m si DF es de clase $m-1$ y de clase ∞ si es de clase m para toda m .

³De existir T_1 y T_2 coincidirían en todo p de la esfera unidad, pues para $z = \|z\|p$

$$\|T_1(p) - T_2(p)\| \leq \frac{\|F(x+z) - F(x) - T_1(z)\| + \|F(x+z) - F(x) - T_2(z)\|}{\|z\|} \rightarrow 0.$$

⁴Con cualquier norma en el espacio $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, pues al ser de dimensión finita todas definen la misma topología, sin embargo habitualmente consideraremos $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$

Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, y dos aplicaciones $F: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ diferenciable en x y $G: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $F(x)$, se tiene que $G \circ F$ es diferenciable en x y se verifica la *Regla de la cadena*

$$D(G \circ F)_x = D(G_{F(x)}) \cdot D(F_x),$$

pues para $y(z) = F(x+z) - F(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{\|G[F(x+z)] - G[F(x)] - D(G_{F(x)})(D(F_x)(z))\|}{\|z\|} \leq \\ & \leq \frac{\|G[F(x) + y(z)] - G[F(x)] - D(G_{F(x)})(y(z))\|}{\|z\|} + \\ & + \frac{\|D(G_{F(x)})(y(z) - D(F_x)(z))\|}{\|z\|}, \end{aligned}$$

y el segundo sumando tiende a 0 por ser F diferenciable en x y el primero es nulo si $y(z) = 0$ y en caso contrario tiende a 0 por ser G diferenciable en $F(x)$, pues es

$$\frac{\|G[F(x) + y(z)] - G[F(x)] - D(G_{F(x)})(y(z))\|}{\|y(z)\|} \frac{\|y(z)\|}{\|z\|},$$

siendo acotado el término

$$\frac{\|y(z)\|}{\|z\|} \leq \frac{\|F(x+z) - F(x) - D(F_x)(z)\|}{\|z\|} + \frac{\|D(F_x)(z)\|}{\|z\|}.$$

Dado un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, diremos que $F: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ es un *difeomorfismo* si tiene inversa y también es diferenciable, en cuyo caso se tiene como consecuencia de la regla de la cadena que $k = n$.

Nota 5.5.1 En términos de coordenadas, la matriz asociada a la aplicación lineal $DF_x \equiv A = (a_{ij})$ es la *matriz Jacobiana*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right), \quad \text{para } F = (f_1, \dots, f_n)$$

pues tomando la componente i -ésima en la definición, la norma del máximo y $z = te_j$, tendremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} - a_{ij} \right| &= \frac{|f_i(x+z) - f_i(x) - \sum_{j=1}^k a_{ij}z_j|}{\|z\|} \\ &\leq \frac{\|F(x+z) - F(x) - DF_x(z)\|}{\|z\|}, \end{aligned}$$

y haciendo $t \rightarrow 0$, se sigue que $a_{ij} = \partial f_i(x)/\partial x_j$.

La existencia de estas derivadas parciales no implica que F sea diferenciable en x , ni siquiera que sea continua, por ejemplo para la función

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

(para la que $F(x, 0) = F(0, y) = 0$ y $F(x, x) = 1/2$). Sin embargo es cierto que F es de clase 1 sii existen las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ y son continuas y de clase m sii existen las derivadas parciales de las f_i hasta el orden m y son continuas. Además si $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal, entonces $DF_x = F$ para todo x .

Definición. Diremos que $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ es una *subvariedad diferenciable k -dimensional* si para cada $x \in \mathcal{S}$, existe un difeomorfismo

$$\phi = (u_1, \dots, u_n): V_x \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n,$$

con V_x entorno abierto de x y W abierto tales que

$$\mathcal{S} \cap V_x = \{y \in V_x : u_{k+1}(y) = \dots = u_n(y) = 0\}.$$

Nota 5.5.2 Normalmente esto no es la definición sino una caracterización, por otra parte no hemos hecho alusión a la clase de la subvariedad, que se corresponde con la clase del difeomorfismo. En los resultados que desarrollemos supondremos que es de clase 1.

Como una simple consecuencia toda subvariedad \mathcal{S} es localmente parametrizable, es decir que para todo $x \in \mathcal{S}$ existe un abierto $V_x \subset \mathbb{R}^n$, un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ y una aplicación diferenciable,

$$F: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

inyectiva ella y su aplicación lineal tangente DF_z en todo $z \in U$ (a estas aplicaciones se las llama *inmersiones*) y tal que $F(U) = V_x \cap \mathcal{S}$. A una tal F la llamaremos una *parametrización* del abierto $V_x \cap \mathcal{S}$ de la subvariedad.

Toda subvariedad se puede expresar como unión numerable de subvariedades parametrizables, pues \mathbb{R}^n tiene una base numerable de abiertos B_m (las bolas $B(x, r)$, con $x \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}$), por tanto para todo $x \in \mathcal{S}$ existe un abierto básico B_m , con $x \in B_m$ y $B_m \subset V_x$ (para el abierto V_x de la definición) y para $A_m = F^{-1}(B_m)$, $F(A_m) = B_m \cap \mathcal{S}$ y con estos rellenamos la subvariedad. Para nuestros propósitos es suficiente considerar que nuestra subvariedad es parametrizable globalmente.

Lema 5.5.3 Sea $F: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase 1 y $x \in U$. Para cada $\epsilon > 0$ existe un entorno abierto de x , $U_x \subset U$, tal que si $y, z \in U_x$

$$\|F(y) - F(z) - DF_x(y - z)\| \leq \epsilon \|y - z\|.$$

Demostración. El resultado basta verlo para una elección de normas, pues todas son equivalentes.

Sea $G(y) = F(y) - DF_x(y)$, entonces $DG_x = 0$, por tanto para $G = (g_i)$, $\partial g_i(x)/\partial x_j = 0$ y existe un entorno convexo de x , U_x , tal que para cada $v \in U_x$ y cualesquiera i, j , $|\partial g_i(v)/\partial x_j| \leq \epsilon$ y para $y, z \in U_x$ si consideramos la función $g(t) = g_i[z + t(y - z)]$, tendremos que

$$\begin{aligned} g_i(y) - g_i(z) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}[z + t(y - z)](y_j - z_j) dt \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|G(y) - G(z)\|_\infty \leq \epsilon \|y - z\|_1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 5.5.4 Sea $F: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase 1 y $x \in U$ tal que $T = DF_x$ sea inyectiva. Para todo $\alpha > 1$ existe un entorno abierto de x , $U_x \subset U$, tal que para $y, z \in U_x$ y $q \in \mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} \|T(y) - T(z)\| &\leq \|F(y) - F(z)\| \leq \alpha \|T(y) - T(z)\|, \\ \alpha^{-1} \|T(q)\| &\leq \|DF_y(q)\| \leq \alpha \|T(q)\|. \end{aligned}$$

Demostración. El $\min\{\|T(z)\| : \|z\| = 1\} = k$ se alcanza pues $T = DF_x$ es continua y además $k > 0$ por ser T inyectiva. Por tanto si $q \neq 0$, $k \leq \|T(q)\|/\|q\|$, es decir $\|q\|/\|T(q)\| \leq 1/k$. Ahora por la desigualdad del Lema anterior (5.5.3), los mismos ϵ y U_x y esto último

$$\begin{aligned} \|T(y - z)\| - \epsilon \|y - z\| &\leq \|F(y) - F(z)\| \leq \|T(y - z)\| + \epsilon \|y - z\| \\ \Rightarrow 1 - \epsilon/k &\leq \frac{\|F(y) - F(z)\|}{\|T(y - z)\|} \leq 1 + \epsilon/k \quad (\text{para } y \neq z) \end{aligned}$$

y la primera línea de la tesis se sigue tomando un $\epsilon > 0$, tal que

$$\alpha^{-1} \leq 1 - \epsilon/k < 1 + \epsilon/k \leq \alpha.$$

Ahora para la segunda línea, dado el $\alpha > 1$, elijamos un $\epsilon > 0$ que satisfaga las desigualdades del párrafo anterior. Como DF es continua

en x , existe U_x , tal que para todo $y \in U_x$ y todo z con $\|z\| = 1$,

$$\begin{aligned} & \|DF_y(z) - DF_x(z)\| \leq \|DF_y - DF_x\| \leq \epsilon \\ \Rightarrow & \|DF_x(z)\| - \epsilon \leq \|DF_y(z)\| \leq \|DF_x(z)\| + \epsilon \\ \Rightarrow & 1 - \epsilon/k \leq \frac{\|DF_y(z)\|}{\|DF_x(z)\|} \leq 1 + \epsilon/k \\ \Rightarrow & \alpha^{-1} \|DF_x(z)\| \leq \|DF_y(z)\| \leq \alpha \|DF_x(z)\|, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ■

En el resultado anterior hemos encontrado 4 desigualdades del tipo

$$d[F(x), F(y)] \leq c \cdot d[G(x), G(y)], \quad \text{para } x, y \in \Omega$$

con F y G aplicaciones que valoran en el espacio métrico \mathbb{R}^n . Veamos qué consecuencias tienen respecto de las medidas de Hausdorff.

Lema 5.5.5 Sean $F, G: \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ aplicaciones de un conjunto Ω en un espacio métrico (\mathcal{X}, d) y $c > 0$, tales que

$$d[F(x), F(y)] \leq c \cdot d[G(x), G(y)], \quad \text{para } x, y \in \Omega$$

entonces para todo $B \subset \Omega$ y todo $p > 0$,

$$H_p[F(B)] \leq c^p \cdot H_p[G(B)].$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ y sean $A_i \subset \mathcal{X}$, tales que $G(B) \subset \cup A_i$ y $d(A_i) \leq \delta$, entonces para $B_i = G^{-1}(A_i)$

$$\begin{aligned} B \subset G^{-1}[G(B)] &\subset G^{-1}[\cup A_i] \subset \cup B_i \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow F(B) &\subset F(\cup B_i) \subset \cup F(B_i), \end{aligned}$$

siendo por hipótesis $d[F(B_i)] \leq c \cdot d[G(B_i)] \leq c \cdot d[A_i] \leq c\delta$, por tanto

$$H_{p, c\delta}[F(B)] \leq \sum d[F(B_i)]^p \leq c^p \cdot \sum d[A_i]^p,$$

de donde

$$H_{p, c\delta}[F(B)] \leq c^p \cdot H_{p, \delta}[G(B)] \quad \Rightarrow \quad H_p[F(B)] \leq c^p \cdot H_p[G(B)]. \quad \blacksquare$$

Corolario 5.5.6 Sea $F: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión (i.e. F y las DF_x inyectivas, para todo $x \in U$) de clase 1, entonces F y las DF_x llevan Borelianos en Borelianos y para todo $\alpha > 1$ y todo x , existe un abierto $U_x \subset U$, entorno de x tal que para todo $A \in \mathcal{B}(U_x)$

$$\alpha^{-2k} H_k[F(A)] \leq \int_A J[DF_y] dH_k \leq \alpha^{2k} H_k[F(A)],$$

Demostración. Como consecuencia de (5.4.6), (5.4.7), (5.5.4), y (5.5.5), para todo $\alpha > 1$ y todo x , existe un abierto $U_x \subset U$, entorno de x tal que para $T = DF_x$, $A \in \mathcal{B}(U_x)$ e $y \in U_x$

$$\begin{aligned}\alpha^{-k} J[T] H_k(A) &\leq H_k[F(A)] \leq \alpha^k J[T] H_k(A), \\ \alpha^{-k} J[T] &\leq J[DF_y] \leq \alpha^k J[T].\end{aligned}$$

donde en la segunda hemos simplificado pues para $E = [0, 1]^k$, $0 < H_k(E) < \infty$, por (1.6.8), pág.44. Ahora el resultado se tiene integrando en la segunda la función continua $J[DF_y] > 0$, en A . ■

Lema 5.5.7 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y λ, μ dos medidas en $\mathcal{B}(U)$ tales que para cada $x \in U$ existe un entorno abierto de x , $U_x \subset U$, tal que para todo Boreliano $B \subset U_x$, $\lambda(B) \leq \mu(B)$, entonces $\lambda \leq \mu$ en todo Boreliano.*

Demostración. Podemos elegir una colección numerable U_n , de entre estos U_x , que recubra a U , pues U es abierto, por tanto unión numerable de compactos K_m (ver la pág.210), y cada uno de estos compactos puede ponerse como unión finita de los U_x . Ahora podemos construir la sucesión de Borelianos disjuntos de U , $B_i = U_i \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{i-1})$, cuya unión es U ; y para todo Boreliano B

$$\lambda(B) = \sum \lambda(B \cap B_n) \leq \sum \mu(B \cap B_n) = \mu(B). \quad \blacksquare$$

Teorema 5.5.8 *Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión inyectiva de clase 1 y $\mathcal{S} = F(U)$, entonces $A \in \mathcal{B}(U)$ sii $F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y para la función continua positiva $x \rightarrow J(DF_x)$,*

$$H_k[F(A)] = \int_A J(DF_x) dH_k,$$

y para cada función Borel medible g en \mathcal{S} no negativa ó H_k -integrable,

$$\int_{\mathcal{S}} g dH_k = \int_U g[F(x)] \cdot J(DF_x) dH_k.$$

Demostración. Como F es continua e inyectiva, por (5.4.6), $A \in \mathcal{B}(U)$ sii $F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ahora, aplicando (5.5.6), dado $\alpha > 1$, para cada $x \in U$ existe un abierto $U_x \subset U$, entorno de x tal que para todo $A \in \mathcal{B}(U_x)$,

$$\alpha^{-2k} H_k[F(A)] \leq \int_A J[DF_y] dH_k \leq \alpha^{2k} H_k[F(A)],$$

y por ser F inyectiva $H_k[F(A)]$ es medida, por tanto aplicando el Lema (5.5.7), se tienen las desigualdades anteriores para todo $A \in \mathcal{B}(U)$, y haciendo $\alpha \downarrow 1$, tendremos que para cada Boreliano $A \subset U$

$$(5.1) \quad H_k[F(A)] = \int_A J[DF_y] dH_k.$$

La segunda parte se demuestra como habitualmente, teniendo en cuenta que para funciones indicador es la primera parte, para funciones simples no negativas por la linealidad de la integral, para funciones no negativas por el teorema de la convergencia monótona, pág.93 y para funciones integrables por su definición aplicándolo a g^+ y g^- . ■

A continuación vemos que el resultado también es cierto aunque en algún punto DF_y no sea inyectiva, es decir $J[DF_y] = 0$, para ello necesitamos el siguiente resultado “*tipo Sard*”.

Teorema 5.5.9 *Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación inyectiva de clase 1, entonces si $E = \{y \in U : J[DF_y] = 0\}$, $F(E) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $H_k[F(E)] = 0$.*

Demostración. E es un cerrado de U por ser DF continua y $F(E)$ es Boreliano por (5.4.6). Ahora bien U es unión numerable de compactos, por tanto E y basta demostrar que en cualquier compacto $K \subset U$ en el que $DF_y = 0$ se tiene que $H_k[F(K)] = 0$. Para verlo consideramos $\delta > 0$ y las aplicaciones auxiliares

$$G, \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \quad G(x) = (F(x), \delta x), \quad \varphi(x) = (F(x), 0)$$

para las que $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|G(x) - G(y)\|$, por lo que se sigue de (5.5.5), la desigualdad en

$$H_k[F(K)] = H_k(\varphi(K)) \leq H_k[G(K)] = \int_K J[DG_y] dH_k,$$

y la última igualdad por que G satisface las hipótesis del teorema (5.5.8), pues es de clase 1 y son inyectivas G y $DG_x = (T, \delta I)$, para $T = DF_x$ y siendo $J(DG_x) = \sqrt{|\det(T^t T + \delta^2 I)|}$. Ahora bien $T^t T$ es una matriz con determinante nulo (si $x \in K$), por tanto su polinomio característico $p_x(\lambda) = \det(T^t T - \lambda I) = \lambda q_x(\lambda)$, pues p_x se anula en $\lambda = 0$ y como $T = (\partial f_i(x)/\partial x_j)$ es continua en x , también es continua en x y $\lambda q_x(\lambda)$, por lo que estará acotada en $x \in K$ y $|\lambda| \leq 1$. Por tanto existe una

constante $c > 0$, tal que $|p_x(\lambda)| \leq |\lambda|c$, por lo que, para $0 < \delta \leq 1$ y $x \in K$, $J(DG_x) \leq \delta\sqrt{c}$, de donde

$$H_k[F(K)] \leq \int_K J[DG_y] dH_k \leq \delta\sqrt{c} H_k[K],$$

y tomando límite cuando $\delta \rightarrow 0$, se tiene el resultado, pues $H_k(K) < \infty$, ya que $K \subset \mathbb{R}^k$ es acotado. ■

Teorema 5.5.10 *Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación inyectiva de clase 1 y $\mathcal{S} = F(U)$, entonces $A \in \mathcal{B}(U)$ sii $F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y para la función continua y no negativa $x \rightarrow J(DF_x)$,*

$$H_k[F(A)] = \int_A J(DF_x) dH_k,$$

y para cada función Borel medible g en \mathcal{S} no negativa ó H_k -integrable,

$$\int_{\mathcal{S}} g dH_k = \int_U g[F(x)] \cdot J(DF_x) dH_k.$$

Demostración. El complementario V de E en U , es un abierto de \mathbb{R}^k en el que, por (5.5.8), es cierto el resultado, por tanto aplicando esto y el resultado anterior tendremos que para todo Boreliano $B \subset U$,

$$\begin{aligned} H_k[F(B \cap V)] &= \int_{B \cap V} J[DF_y] dH_k, \\ H_k[F(B \cap E)] &= 0 = \int_{B \cap E} J[DF_y] dH_k \end{aligned}$$

y sumando se tiene que $H_k[F(B)] = \int_B J[DF_y] dH_k$. ■

Corolario (Teorema del cambio de variable) 5.5.11 *Sean U, V abiertos de \mathbb{R}^n y $F: U \rightarrow V$ un difeomorfismo de clase 1. Entonces para toda función medible, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa ó integrable*

$$\int_V f dm = \int_U f[F(x)] \cdot |\det(DF_x)| dm.$$

Demostración. Es obvio considerando que $\gamma_n H_n = m$. ■

Ejemplo 5.5.12 Sea $a > 0$, $f(x) = 1/\sqrt{a^2 - x^2}$ y $F(x) = a \operatorname{sen} x$, para $F: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-a, a)$, entonces $F'(x) = a \cos x > 0$ y $f[F(x)] = 1/a \cos x$, por tanto

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \pi.$$

Ejemplo 5.5.13 Sea $F(t) = \operatorname{sen} t / \cos t$, para $F: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-\infty, \infty)$ y $f(x) = 1/1 + x^2$, entonces $F'(t) = 1 + F^2(t) > 0$ y $f[F(t)]F'(t) = 1$, por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \pi.$$

5.5.1. Coordenadas polares

Por el *Teorema de cambio de variable* (5.5.11) (pág.218) tenemos que para toda función medible, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa o integrable

$$\int_V f \, dm = \int_U f[F] \cdot |\det(DF_x)| \, dm.$$

y para $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ y el difeomorfismo definido por las *coordenadas polares* $F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$, $V = F(U) = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x > 0\}$, tenemos por el *Teorema de Fubini* (3.4.3), pág.134

$$(5.2) \quad \int_V f \, dm_2 = \int_{(0, \infty)} \int_{(0, 2\pi)} f(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) \rho \, dm_\rho \, dm_\theta.$$

(Observemos que $m_2\{(x, 0) : x > 0\} = 0$, por tanto podemos extender f como queramos en ese conjunto y considerar la integral de la izquierda en todo \mathbb{R}^2 .)

Ejemplo 5.5.14 Calculemos la $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$ (ver el ejercicio (2.4.33), de la pág. 108 y el ejemplo (3.6.10), pág.147)). Por Fubini y la fórmula (5.2), pág.219,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \pi,$$

por tanto $I = \sqrt{\pi}$.

Ejemplo 5.5.15 Calcular el área $V_2 = m_2[B(0,1)]$ de la bola unidad de \mathbb{R}^2 (para otro cálculo ver (3.6.10), pág.147): Por la fórmula (5.2), pág.219, (con los cambios adecuados) para $U_0 = (0,1) \times (0,2\pi)$ y $V_0 = F(U_0) = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x,0) : x > 0\}$, tenemos

$$V_2 = \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta = \pi.$$

5.5.2. Coordenadas esféricas

Para $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ y el difeomorfismo definido por las *coordenadas esféricas* $F(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \cos \varphi \sen \theta, \rho \sen \varphi \sen \theta, \rho \cos \theta)$ $V = F(U) = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) : x > 0\}$, tenemos que

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right| = \rho^2 \sen \theta,$$

y por el *Teorema de Fubini* (3.4.3), pág.134

$$\int_V f dm_3 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\rho \cos \varphi \sen \theta, \rho \sen \varphi \sen \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sen \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

5.5.3. Forma de volumen. Variedad Riemanniana

Si multiplicamos por γ_k ambos miembros de la igualdad (5.1), pág.217, tendremos que

$$(5.3) \quad \gamma_k H_k[F(A)] = \int_A J[DF_y] dm,$$

para m la medida de Lebesgue k -dimensional en \mathbb{R}^k .

Esta fórmula se da en los cursos de geometría diferencial, pero con una apariencia distinta. Los que hayan seguido estos cursos recordarán que nuestra subvariedad \mathcal{S} hereda la estructura Riemanniana de \mathbb{R}^n , con la que es una variedad Riemanniana y que si en \mathbb{R}^k consideramos un sistema de coordenadas x_i —correspondientes a una base ortonormal— y en \mathbb{R}^n otro y_j —también correspondiente a otra base ortonormal—, entonces en \mathcal{S} podemos considerar el sistema de coordenadas u_i , para el

que $x_i = u_i \circ F$, respecto del que la métrica Riemanniana de \mathcal{S} se expresa en las coordenadas (u_i) por

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_j} = F_* \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot F_* \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \left(\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \left(\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \frac{\partial}{\partial y_k} \right) = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x), \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij})} &= \sqrt{\det \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)^t \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) \right]} \\ &= \sqrt{\det[(DF_x)^t(DF_x)]} = J[DF_x], \end{aligned}$$

es decir que

$$\gamma_k H_k[F(A)] = \int_A \sqrt{\det(g_{ij})} \, dm = \int_{F(A)} \omega_k,$$

para $\omega_k = \sqrt{\det(g_{ij})} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$ la forma de volumen de la variedad Riemanniana k -dimensional S , es decir la única k -forma que en una base ortonormal bien orientada vale 1 (si la variedad no está orientada no hay una k -forma sino una *densidad*, es decir que en cada punto habría dos k -formas que son $\pm \omega_k$, pero que no podemos definir por separado globalmente (pues eso implicaría que la variedad fuese orientada. No obstante la medida si está definida en S).

En el caso particular de estar con una esfera en \mathbb{R}^{n+1} , pongamos centrada en el origen y de radio r , $S[0, r]$, tenemos que es n dimensional y orientable y para ella la n -forma de volumen es $i_N \omega_{n+1}$, para $\omega_{n+1} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ la $n+1$ -forma de volumen del espacio y $N = \sum (x_i / \sqrt{\sum x_i^2}) \partial_{x_i}$ el vector unitario normal exterior a las esferas (la elección de este vector –que es arbitraria– nos permite definir la orientación en la esfera), pues para una base ortonormal bien orientada tangente a la esfera, D_1, \dots, D_n , tendremos que

$$i_N \omega_{n+1}(D_1, \dots, D_n) = \omega_{n+1}(N, D_1, \dots, D_n) = 1,$$

pues N, D_1, \dots, D_n es una base orientada ortonormal del espacio. En tal caso tenemos una medida natural σ_n en la esfera n -dimensional que

para cada Boreliano A de la esfera vale

$$(5.4) \quad \sigma_n(A) = \gamma_n H_n(A) = \int_A i_N \omega_{n+1}.$$

que veremos en (5.5.17), pág.223, es la medida que definimos en la esfera unidad en el Teorema (3.6.8), pág.146.

5.5.4. Coordenadas hiperesféricas

Los casos bidimensional (coordenadas polares) (5.5.1) y tridimensional (coordenadas esféricas) (5.5.2), se pueden extender a dimensión n y esconden la existencia de una medida en $(0, \infty)$ —que es $\int_A \rho^{n-1} d\rho$ — y una medida σ de la que hablamos en el párrafo anterior, en la esfera unidad S^{n-1} , que en los casos anteriores es respectivamente $\int_B d\theta$ e $\int_E \sin \theta d\theta d\varphi$ y que, como dijimos, hemos estudiado en (3.6.8), pág.146, aunque allí no dimos su expresión en términos de coordenadas.

Para el lector que conoce análisis tensorial e integración en variedades, veamos esta medida en el marco de las formas diferenciales: Si consideramos en \mathbb{R}^n el campo tangente de las homotecias $H = \sum x_i \partial_{x_i}$ y en el abierto denso A_n complementario del cerrado $C = \{x_n = 0, x_{n-1} \geq 0\}$, las *coordenadas hiperesféricas*, $\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, para

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \theta_1, \\ x_2 &= \rho \cos \theta_2 \sin \theta_1, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \rho \cos \theta_{n-1} \sin \theta_{n-2} \cdots \sin \theta_1, \\ x_n &= \rho \sin \theta_{n-1} \cdots \sin \theta_1, \end{aligned}$$

que valoran en $(0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$, siendo $\rho = \sqrt{\sum x_i^2}$. En estos términos se tiene que $H\rho = \rho$ y $H\theta_i = 0$, por tanto en coordenadas esféricas $H = \rho \partial_\rho$ y el campo unitario ortogonal exterior a las esferas centradas en el origen es $N = \partial_\rho = H/\rho$.

Proposición 5.5.16 *En los términos anteriores existe una $n-1$ -forma,*

$$\Theta_{n-1} = f(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_{n-1},$$

que sólo depende de las variables angulares θ_i , tal que para $\omega_n = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$,

$$i_N \omega_n = \rho^{n-1} \Theta_{n-1}, \quad \omega_n = \rho^{n-1} d\rho \wedge \Theta_{n-1}.$$

Demostración. Basta demostrar que

$$i_N \Theta_{n-1} = 0, \quad N^L \Theta_{n-1} = 0,$$

lo primero es obvio pues $\Theta_{n-1} = \rho^{1-n} i_N \omega_n$ y lo segundo para $D = \rho^{1-n} N$, pues $\operatorname{div} D = \sum (x_i / \rho^n)_{x_i} = 0$ y

$$\begin{aligned} N^L \Theta_{n-1} &= N^L (i_D \omega_n) = i_N d(i_D \omega_n) + d(i_N (i_D \omega_n)) \\ &= i_N d(i_D \omega_n) = i_N (D^L \omega_n) = (\operatorname{div} D) i_N \omega_n = 0. \end{aligned}$$

Lo último se sigue de que $d\rho \wedge \omega_n = 0$, por tanto

$$0 = i_N (d\rho \wedge \omega_n) = \omega_n - d\rho \wedge i_N \omega_n. \quad \blacksquare$$

Corolario 5.5.17 Para toda función g diferenciable e integrable en \mathbb{R}^n ,

$$\int g(x) dx_1 \cdots dx_n = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} g(\rho y) \rho^{n-1} d\sigma d\rho.$$

Demostración. Para $C = \{x_n = 0, x_{n-1} \geq 0\}$, $C' = S^{n-1} \cap C$ y los difeomorfismos inversos (3.6.2), pág.146

$$F(x) = (|x|, x/|x|), \quad G(\rho, y) = F^{-1}(\rho, y) = \rho y,$$

se tiene que $F(C) = (0, \infty) \times C'$ y para el abierto denso de la esfera $S' = S^{n-1} \setminus C'$ tenemos los difeomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n \setminus C & \xrightarrow{F} & (0, \infty) \times S' & \xrightarrow{\varphi} & (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi) \\ x = \rho y & \rightarrow & (\rho, y) & \rightarrow & (\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \end{array}$$

La medida en la esfera unitaria S^{n-1} , en la que $\rho = 1$, es

$$\begin{aligned} (5.5) \quad \sigma(A) &= \int_A i_N \omega_n = \int_A \rho^{n-1} \Theta_{n-1} = \int_A \Theta_{n-1} \\ &= \int_{\varphi(\{1\} \times A)} f(\theta) d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}, \end{aligned}$$

(ver 5.4, pág.222), y por el resultado anterior (5.5.16)

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int_{A_n} g \omega_n = \int_{A_n} g \rho^{n-1} d\rho \wedge \Theta_{n-1} \\ &= \int_{(0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)} g \rho^{n-1} f(\theta) d\rho d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^\infty \int_{S'} g(\rho y) \rho^{n-1} d\sigma d\rho. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.18 Calculemos ahora el hipervolumen $V_n = m_n(B[0, 1])$ de la bola unidad B de \mathbb{R}^n —para otro cálculo ver (3.6.10), pág.147—: Para $n = 1$, $V_1 = 2$; para $n = 2$, $V_2 = \pi$ (ver el ejemplo (5.5.15)); y para $n \geq 3$, por el teorema de la medida producto para $m_n = m_{n-2} \times m_2$, como $m_n[B(0, r)] = r^n V_n$,

$$\begin{aligned} V_n &= m_n[B] = \int m_{n-2}[B_{(x_1, x_2)}] dm_2 \\ &= \int_{\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}} m_{n-2}(B[0, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}]) dm_2 \\ &= \int_{\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-2}{2}} V_{n-2} dm_2 \\ &= V_{n-2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\frac{n}{2}-1} \rho d\rho d\theta = \pi V_{n-2} \int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}. \end{aligned}$$

haciendo el cambio $t = 1 - \rho^2$. Con esta regla de recurrencia y los dos valores iniciales, tenemos todos los valores buscados

$$V_{2n+1} = \frac{(2\pi)^n 2}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}, \quad V_{2n} = \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = \frac{\pi^n}{n!},$$

que en términos de la función Π (ver el ejemplo (2.4.22), página 102) se expresan —como ya hemos visto en (3.6.10), pág.147—, simultáneamente con el valor

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Ejemplo 5.5.19 Dada una función $f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, calcular el área n -dimensional de su gráfica $\mathcal{S} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in V\}$.

Para ello consideremos $F: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = (x, f(x))$, que es inmersión inyectiva por tanto

$$\sigma_n(\mathcal{S}) = \gamma_n H_n[\mathcal{S}] = \int_V J[DF_x] dm_n = \int_V \sqrt{1 + \sum f_{x_i}^2} dm_n,$$

pues para $v_i = f_{x_i}$ y $v^t = (v_1, \dots, v_n)$,

$$J[DF_x]^2 = \det[I + vv^t] = 1 + \sum v_i^2 = 1 + \sum f_{x_i}^2,$$

ya que las columnas de la matriz $C = vv^t$ son múltiplos de v , por tanto dependientes y el rango de C es 0 si $v = 0$ ó 1 en caso contrario,

en cualquier caso tiene $n - 1$ autovalores nulos y el correspondiente al autovector v , pues $Cv = (vv^t)v = (v^tv)v$, que es $\sum v_i^2$; y todos los ortogonales a v , $v^tb = 0$, son autovectores de autovalor nulo pues $Cb = (vv^t)b = v(v^tb) = 0 = 0b$. En definitiva C tiene autovalores

$$\lambda_1 = v^tv = \sum v_i^2, \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

por tanto los autovalores de $I + C$ son $\mu_i = 1 + \lambda_i$, es decir $\mu_1 = 1 + \sum v_i^2$ y los demás $\mu_i = 1$; y el determinante de $I + C$ es su producto $1 + \sum v_i^2$.

Ejemplo 5.5.20 Calcular el área n -dimensional $A_n = \gamma_n H_n(\mathcal{S}_n)$ de la esfera unidad S_n de \mathbb{R}^{n+1} . (Veremos que el resultado es el mismo que obtuvimos para las medidas σ de las esferas unidad que vimos en (3.6.10), pág.147):

Consideremos la partición de $\mathcal{S}_n = \{\sum x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathcal{S}_n = S_n^+ \cup S_n^- \cup E_n,$$

donde S_n^+ es el casquete superior, S_n^- el casquete inferior de la esfera, para los que $H_n(S_n^-) = H_n(S_n^+)$ pues ambos casquetes son isométricos por la reflexión respecto de $x_{n+1} = 0$; y $E_n = \{x \in S_n : x_{n+1} = 0\} = S_{n-1} \times \{0\}$ es el ecuador.

Ahora por el ejercicio anterior, para V la bola unidad abierta de \mathbb{R}^n y $f(x) = \sqrt{1 - \sum x_i^2}$, $F(V) = S_n^+$, $a_i = f_{x_i} = -x_i/\sqrt{1 - \sum x_i^2}$, tenemos aplicando Fubini y el ejemplo (5.5.12) que para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \sigma_n[S_n^+] &= \int_V \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}} dm_n \\ &= \int_{\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 1} \int_{-\sqrt{1 - \sum_{i=2}^n x_i^2}}^{\sqrt{1 - \sum_{i=2}^n x_i^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \sum_{i=2}^n x_i^2) - x_1^2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \pi m_{n-1}(B[0, 1]) = \pi V_{n-1}, \end{aligned}$$

un cálculo similar da para $n = 1$, $\sigma_1[S_1^+] = \pi$.

Ahora por inducción se tiene que $H_n(E_n) = 0$, pues para $n = 1$, $H_1(E_1) = H_1(\{-1, 1\}) = 0$ y si $H_n(E_n) = 0$, entonces $H_n(S_n) = 2H_n(S_n^+) < \infty$ y como $E_{n+1} = S_n \times \{0\}$, se sigue de (1.6.4), pág.43, que $H_{n+1}(E_{n+1}) = H_{n+1}(S_n) = 0$. Por lo tanto

$$A_1 = 2\pi, \quad A_n = \sigma_n(S_n) = 2\sigma_n(S_n^+) = 2\pi V_{n-1} = 2 \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Ejemplo 5.5.21 Vamos a calcular el área de una superficie de revolución generada por una curva plana.

Solución. Si la curva es $\sigma(t) = (x(t), z(t))$, para $\sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, la superficie \mathcal{S} es la imagen de

$$F: U = I \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)),$$

para la que $J[DF_{(t,\theta)}] = x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}$, por tanto el área es

$$\begin{aligned} \gamma_2 H_2(\mathcal{S}) &= \int_{I \times [0, 2\pi]} x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} \, dm_2 \\ &= 2\pi \int_I x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} \, dm_t. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 5.5.22 A PAPPUS DE ALEJANDRÍA, del que poco se sabe y se cree vivió alrededor del 300 después de Cristo, se le atribuyen los dos siguientes ejemplos (para un arco de circunferencia) en los que de nuevo usamos el concepto de centro de masa de un Boreliano B del espacio \mathbb{R}^n . En la pág. 144, vimos este concepto y el Teorema de Pappus sobre el volumen de un cuerpo de revolución. Ahora, como aplicación de los resultados anteriores, volvemos a dar este resultado y otro similar para el área de una superficie de revolución.

Recordemos que del Boreliano lo primero que necesitamos es conocer su dimensión de Hausdorff, $\dim_H(B) = p$, y que su medida sea no nula y finita $0 < H_p(B) < \infty$, en cuyo caso definimos su *centro de masa* $C(B)$ como el punto del espacio de coordenada i -ésima

$$\frac{\int_B x_i \, dH_p}{H_p(B)}.$$

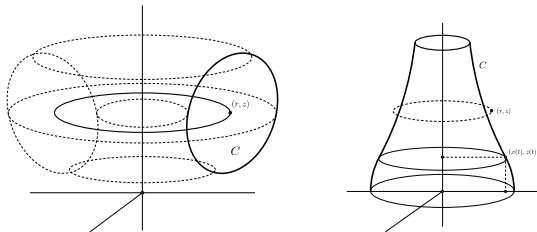


Figura 5.3. Volumen y Area de un cuerpo de revolución.

Ejemplo 5.5.23 (Pappus) Dado un Boreliano C del plano, con $0 < m(C) < \infty$ y una recta del plano que lo deje a un lado, el volumen del cuerpo de revolución que genera en torno a la recta es el producto de su área por la longitud que recorre en el giro, su centroide. (ver fig. 5.3 izqda.).

Solución. Para otra demostración ver (3.6.7). Consideremos que C está en el plano xz y que z es el eje de giro, entonces nuestro volumen es $B = F(C \times [0, 2\pi])$, para

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, z, \theta) = (x \cos \theta, x \sin \theta, z),$$

entonces como $J[DF_{(x,z,\theta)}] = x$, tendremos

$$\begin{aligned} m(B) &= \int_{C \times [0, 2\pi]} x \, dm = \int_{[0, 2\pi]} \left(\int_C x \, dm_2 \right) dm_1 \\ &= 2\pi \int_C x \, dm_2 = 2\pi r \cdot m_2[C], \end{aligned}$$

siendo $r = \int_C x \, dm_2 / m_2(C)$ la abscisa del centro de masa de C , es decir la distancia al eje de giro. ■

Ejemplo 5.5.24 (Pappus) Si una curva plana, de longitud finita gira alrededor de un eje del plano que no la corta, el área de la superficie que genera es igual a la longitud de la curva multiplicada por la distancia que recorre el centro de masa de la curva (ver fig. 5.3 dcha.)

Solución. En los términos de (5.5.21) tenemos que el área es, para $C = \sigma[I]$

$$\gamma_2 H_2(\mathcal{S}) = 2\pi \int_I x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} \, dm_t = 2\pi \int_C x \, dH_1 = 2\pi r H_1(C),$$

pues la longitud en la curva es $H_1(\sigma[A]) = \int_A \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} \, dm_1$ y el centroide de la curva en el plano x, z , es

$$(r, z) = \left(\frac{\int_C x \, dH_1}{H_1(C)}, \frac{\int_C z \, dH_1}{H_1(C)} \right),$$

y por tanto r es la distancia al eje z . ■

Ejercicios

Ejercicio 5.5.1 Calcular el área y el volumen de la elipse y elipsoide respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 5.5.2 Una bicicleta de longitud L hace un recorrido en el que nunca gira a la derecha. Si el ángulo total girado es φ , demostrar que el área que barre es⁵ $\varphi L^2/2$. (Sol.)

Ejercicio 5.5.3 Curva de Agnesi⁶: Dada una circunferencia de radio $a/2$ tangente al eje x y centro en el eje y y dada la tangente paralela al eje x en el punto $(0, a)$, se considera el lugar geométrico de los puntos del plano (x, y) , obtenidos de la siguiente forma: Se traza la recta que une el origen con el punto de la tangente de abscisa x , es decir (x, a) y se considera la ordenada y del punto de corte de esta recta con la circunferencia.

Demostrar que el área subyacente a la curva es 4 veces el área del círculo de la construcción. Que la curva tiene dos puntos simétricos en los que pasa de ser convexa a cóncava. Que las verticales en esos puntos dividen el área subyacente en tres regiones de igual área y que los pies de esas verticales en el eje x definen con el punto máximo $(0, a)$ de la curva un triángulo equilátero. Encontrar el centroide de la región entre la curva y el eje x .

Demostrar que la longitud de la curva es infinito. Que el área de la superficie de revolución que genera al girarla respecto del eje x es finita y que su volumen es 2 veces el del toro que genera el círculo. (Sol.)

Ejercicio 5.5.4 Sea $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase 1, demostrar que para todo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si $\sigma(t) = (x_i(t))$

$$H_1(\sigma[a, b]) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'(t)^2} dt.$$

Ejercicio 5.5.5 Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y consideremos su gráfica $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$, demostrar que para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$,

$$\gamma_2 H_2[F(A)] = \int_A \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

⁵En particular si la bicicleta vuelve al punto de partida, el área que barre es constante e igual a la del círculo de radio L .

⁶Ver comentarios en la pág. 236

Ejercicio 5.5.6 (1) Demostrar que el área de la esfera de radio r es $4\pi r^2$.

(2) Demostrar que el área del casquete esférico de radio r y altura h es $2\pi r h$.

(Sol.)

Ejercicio 5.5.7 Demostrar que si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, el centro de masas $C(B)$ de un boreliano B , con $0 < m(B) < \infty$, satisface $C[T(B)] = T[C(B)]$. (Sol.)

Ejercicio 5.5.8 Dado en el plano un triángulo T_2 de vértices ABC , consideremos los tres conjuntos: T_2 (la envolvente convexa de los vértices), $T_1 = \partial T_2$ formado por los tres lados y $T_0 = \{A, B, C\}$ formado por los tres vértices. Calcular el centro de masas de cada uno. ¿coinciden? (Sol.)

Ejercicio 5.5.9 Demostrar que para $t, s > -1$

$$\Pi(t)\Pi(s) = \Pi(t + s + 1) \int_{(0,1)} x^t(1-x)^s dm. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 5.5.10 Dado $\alpha > 0$, llamaremos α -integral fraccional de una función continua $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, a la función

$$I_\alpha f(x) = \frac{\int_{[0,x]} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dm}{\Gamma[\alpha]}. \quad (\text{Sol.})$$

Demostrar que para $\alpha, \beta > 0$, $I_\alpha \circ I_\beta = I_{\alpha+\beta}$.

5.6. Cálculo de la constante γ_n .

En el teorema (1.6.9) de la página 45, demostramos la existencia de una constante γ_n , tal que $\gamma_n H_n = m$, la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . En esta lección calcularemos el valor de esta constante, utilizando algunos de los resultados de este Tema. Para ello necesitamos una serie de Lemas previos.

Lema 5.6.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, entonces dado $\epsilon > 0$, existen bolas cerradas y disjuntas $B_m \subset A$, con $0 < d(B_m) < \epsilon$, tales que

$$m(A) = \sum m(B_m).$$

Demostración. Sea B_1 cualquier bola de A de diámetro $d(B_1) < \epsilon$, ahora elegidas $B_i = B[x_i, r_i]$, para $i = 1, \dots, m$, elegimos B_{m+1} del siguiente modo: consideramos la familia \mathcal{C}_m de las bolas cerradas de A con diámetro menor que ϵ y disjuntas de las B_i anteriores, la cual es no vacía porque $A - (\cup_{i=1}^m B_i)$ es abierto no vacío. Ahora consideramos $s_m = \sup\{r : B[x, r] \in \mathcal{C}_m\}$ y elegimos B_{m+1} como cualquier bola de \mathcal{C}_m , con radio $r_{m+1} > s_m/2$.

Veamos que el Boreliano $C = A - (\cup B_n)$ tiene medida nula.

En primer lugar si $B_0 = B[0, 1]$ es la bola unitaria, como $m[B[x, t]] = t^n m[B_0]$, tendremos que

$$m[B_0] \sum_{m=1}^{\infty} r_m^n = \sum_{m=1}^{\infty} m[B_m] = m[\cup B_m] \leq m[A] < \infty,$$

por lo que $r_m \rightarrow 0$.

Supongamos que $m(C) > 0$, entonces para $B'_m = B[x_m, 4r_m]$,

$$\sum m[B'_m] = 4^n \sum m[B_m] \leq 4^n m[A] < \infty,$$

por lo que existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$m[\cup_{m=N+1}^{\infty} B'_m] \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} m[B'_m] < m[C],$$

y por tanto existe un $p \in C$ tal que $p \notin \cup_{m=N+1}^{\infty} B'_m$. Como p está en C no está en el cerrado $\cup_{i=1}^N B_i$ y podemos encontrar una bola $B[p, r] \subset A$ disjunta de B_1, \dots, B_N y $0 < r < \epsilon$, ahora bien si $B[p, r]$ es disjunta de B_1, \dots, B_m , entonces $B[p, r] \in \mathcal{C}_m$ y $r \leq s_m < 2r_{m+1}$, pero $r_m \rightarrow 0$ por tanto existe un primer $m > N$ tal que $B[p, r] \cap B_m \neq \emptyset$ y $B[p, r] \in \mathcal{C}_{m-1}$. Sea $z \in B[p, r] \cap B_m$, como $p \notin B'_m$ tendremos

$$s_{m-1} \geq r \geq \|p - z\| \geq \|p - x_m\| - \|z - x_m\| \geq 4r_m - r_m = 3r_m > \frac{3}{2}s_{m-1},$$

lo cual es absurdo. ■

Definición. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos su *simetrización de Steiner* respecto del hiperplano $\{x_1 = 0\}$ como

$$S(A) = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : m[A^y] > 0, |t| \leq \frac{m[A^y]}{2} \right\},$$

de modo análogo se definen las simetrías respecto del resto de hiperplanos coordenados $\{x_i = 0\}$.

Lema 5.6.2 Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $S(A)$ es su simetrización de Steiner respecto del hiperplano $\{x_i = 0\}$, entonces

- $S(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- $d[S(A)] \leq d[A]$.
- $m[S(A)] = m[A]$.
- $x = (x_1, \dots, x_n) \in S(A)$ sii $(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n) \in S(A)$.
- Si A es simétrico respecto de un hiperplano $\{x_j = 0\}$, $S(A)$ también.

Demostración. Haremos la demostración para $i = 1$. Denotaremos para cada $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\beta(y) = \sup A^y$, $\alpha(y) = \inf A^y$.

(a) Que $S(A) = \{0 < g, f \leq g\}$ es Boreliano se sigue del ejercicio (2.2.4) de la página 84 y del Teorema de Fubini, para las funciones medibles $g(t, y) = m[A^y]$ y $f(t, y) = 2|t|$.

(b) Sean $(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in S(A)$, entonces

$$\begin{aligned} d[(t_1, y_1), (t_2, y_2)] &= \sqrt{|t_1 - t_2|^2 + d(y_1, y_2)^2} \\ &\leq \lim d[(s_n, y_1), (r_n, y_2)] \leq d(A), \end{aligned}$$

para ciertas $s_n \in A^{y_1}$ y $r_n \in A^{y_2}$, pues

$$\begin{aligned} |t_1 - t_2| &\leq \frac{m[A^{y_1}] + m[A^{y_2}]}{2} \leq \frac{\beta(y_1) - \alpha(y_1) + \beta(y_2) - \alpha(y_2)}{2} \\ &\leq \max\{\beta(y_1) - \alpha(y_2), \beta(y_2) - \alpha(y_1)\} = \lim |s_n - r_n|, \end{aligned}$$

por tanto $d[S(A)] \leq d(A)$.

(c) Se sigue del teorema de Fubini que

$$m_n[S(A)] = \int m_1[S(A)^y] dm_{n-1} = \int m_1[A^y] dm_{n-1} = m_n(A).$$

(d) Es obvio y (e) porque (por ejemplo para $j = 2$)

$$\begin{aligned} x = (x_i) \in S(A) &\Leftrightarrow |x_1| \leq \frac{m\{t : (t, x_2, \dots, x_n) \in A\}}{2} \\ &\Leftrightarrow |x_1| \leq \frac{m\{t : (t, -x_2, \dots, x_n) \in A\}}{2} \\ &\Leftrightarrow (x_1, -x_2, \dots, x_n) \in S(A). \blacksquare \end{aligned}$$

En el siguiente resultado veremos que entre los conjuntos de un diámetro fijo d , la bola de ese diámetro, es decir de radio $d/2$, es el de máximo volumen.

Teorema 5.6.3 Dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$m[A] \leq m[B[0, d(A)/2]].$$

Demostración. Consideremos la composición de simetrizaciones de Steiner $S(A) = S_n \circ \dots \circ S_1(A)$, respecto de los hiperplanos coordinados. Entonces por (d) y (e) del resultado anterior $S(A)$ es simétrico, $x \in S(A)$ sii $-x \in S(A)$ y por (b)

$$\begin{aligned} x = (x_i) \in S(A) &\Rightarrow x, -x \in S(A) \\ &\Rightarrow 2\|x\| = \|x - (-x)\| \leq d[S(A)] \leq d(A) \end{aligned}$$

por tanto $S(A) \subset B[0, d(A)/2]$ y se sigue de (c) que

$$m[A] = m[S(A)] \leq m[B[0, d(A)/2]]. \blacksquare$$

Teorema 5.6.4 $\gamma_n H_n = m$ para las constantes

$$\gamma_n = m[B[0, 1/2]] = V_n/2^n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Demostración. La última igualdad se vio en el ejercicio (5.5.18), de la página 224, veamos pues la primera, lo cual equivale a que $H_n(B) = 1$, para $B = B[0, 1/2]$, la bola de radio $1/2$. Por una parte para $C = [0, 1]^n$ y B_i , tales que $d(B_i) < \delta$ y $C \subset \cup B_i$, tenemos por la desigualdad (5.6.3), por ser $d(B_i) = d(\overline{B_i})$ y $\overline{B_i} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$1 = m[C] \leq \sum_i m[\overline{B_i}] \leq \sum_i m[B[0, d(B_i)/2]] = m[B] \sum_i d(B_i)^n,$$

por tanto $\gamma_n H_n(C) \leq m[B]H_{n,\delta}(C) \leq m[B]H_n(C)$ y $\gamma_n \leq m[B]$, veamos la otra desigualdad.

Consideremos el cubo unidad abierto $(0, 1)^n = A$ un $\epsilon > 0$ y por el Lema (5.6.1) una sucesión de bolas $B_i \subset A$ disjuntas, con $0 < d(B_i) < \delta$ y $m[A - \cup B_i] = 0$, entonces

$$0 \leq H_{n,\delta}[A - \cup B_i] \leq H_n[A - \cup B_i] = 0,$$

lo cual implica, por ser B_i una bola de radio $d(B_i)/2$ y $1 = m[A] = \sum m[B_i]$,

$$\begin{aligned} H_{n,\delta}[A] &\leq H_{n,\delta}[\cup B_i] \leq \sum d(B_i)^n \\ &= \sum \frac{m[B[0, d(B_i)/2]]}{m[B[0, 1/2]]} = \sum \frac{m[B_i]}{m[B]} = \frac{1}{m[B]}, \end{aligned}$$

de donde $m[B]H_n(A) \leq 1 = m(A) = \gamma_n H_n(A)$ y $m[B] \leq \gamma_n$. ■

5.7. Bibliografía y comentarios

Los libros consultados en la elaboración de este tema han sido:

- ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.
 BENEDETTO, J.J.: “*Real variable and integration*”. B.G.Teubner, 1976.
 BILLINGSLEY, P.: “*Probability and measure*”. John Wiley, 1986.
 COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.
 DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol,I*”. John Wiley–Interscience Pub., 1958.
 FOLLAND, G.B.: “*Real Analysis. Modern Techniques and their applications*”, John Wiley, 1984.
 MUKHERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.
 MUNROE, M.E.: “*Measure and integration*”. Addison Wesley, 1971.
 RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”. Tata McGraw-Hill, 1974.
 YOSIDA, K.: “*Functional Analysis*”. Springer-Verlag, 1974.

Para el cálculo de la constante γ_n hemos seguido el BILLINGSLEY. Como bibliografía complementaria consideramos los siguientes:

- HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: “*Real and abstract analysis*”. Springer–Verlag, 1965.
 WHEEDEN, R.L. AND ZYGMUND, A.: “*Measure and integral. An introduction to Real Analysis*”. Marcel Dekker, Inc. 1977.
 ZAAANEN, A.C.: “*Integration*”. North–Holland, 1967.

Como comentamos en el capítulo anterior, la descomposición de JORDAN de una medida está íntimamente relacionada con la descomposición de una función de variación acotada como diferencia de funciones crecientes. De hecho es de JORDAN el concepto de función de variación acotada, que acuña en 1881, y suya es la demostración de (5.3.4).

- JORDAN, C.: “*Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*”. Gauthier-Villars, Paris, 3a.Ed., Vol.I,II y III, 1909-1915.

Como también comentamos anteriormente, LEBESGUE da en su libro

- LEBESGUE, H.: “*Leçons sur l'integration*” (1a.edición 1903, 2a.edición 1928). Reimp. de 2a. ed. por Chelsea Pub. Comp., 1973.

una condición necesaria y suficiente para que una función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se exprese como una integral indefinida, enunciado esencialmente el *Teorema fundamental del cálculo* (5.3.12) —aunque sin demostración y a

pie de la página 129—; en este libro también está el teorema de diferenciación: *Toda función continua de variación acotada tiene derivada c.s.*, del que en 1939 F. RIESZ señala la posibilidad de quitar la hipótesis de la continuidad, (ver (5.3.9)). En cuanto a VITALI acuña en su artículo de 1904

VITALI, G.: “*Sulle funzioni integrali*”. Atti. Acc. Sci. Torino, 40, pp.1021–1034. Año 1904–1905.

el concepto de función *absolutamente continua*, aunque ya HARNACK en 1890 había usado un concepto similar en un contexto distinto. En ese trabajo VITALI caracteriza, con la absoluta continuidad, la relación entre diferenciación e integración en el contexto de la teoría de Lebesgue, demostrando el *Teorema fundamental del cálculo* (5.3.12). Mas tarde, en 1907, LEBESGUE daría una prueba mas corta que la de VITALI, el cual publica ese mismo año el artículo

VITALI, G.: “*Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*”. Atti. Acc. Sci., Torino, 43, 1907.

en el que tratando de extender el *Teorema fundamental del cálculo* a \mathbb{R}^2 , prueba el *Teorema de recubrimiento de Vitali*. Este resultado fue la base de demostración de teoremas generales de diferenciación. De hecho las pruebas clásicas de (5.2.9) —ver COHN, WHEEDEN–ZYGmund, etc.—, lo utilizan. Nosotros sin embargo hemos seguido a FOLLAND, RUDIN, ASH,... que se basan en el Lema mas simple (5.2.1).

Por otra parte hay procesos de integración, como los desarrollados por DENJOY y PERRON en 1912–14, que están orientados a fin de que el *Teorema fundamental del cálculo*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt,$$

sea válido cuando f sea diferenciable en todo punto. Sin embargo, como ya comentamos, en ellos falla la propiedad de que f sea integrable sii $|f|$ lo es. Remitimos al lector al libro de

McSHANE, E.J.: “*Integration*”. Princeton Univ. Press, 1944.

Analicemos ahora el teorema (5.2.9), que nos asegura la existencia del límite

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(E_r)}{m(E_r)},$$

y que además es la derivada de Radón–Nykodim, $f = d\mu_a/dm$, para $\mu = \mu_a + \mu_s$ la descomposición de Lebesgue. Cuando consideramos la

densidad de masa f de un objeto en un punto, la definimos como una relación infinitesimal, en el punto, entre la masa μ y el volumen m , esa es la idea que subyace en el resultado anterior. Sin embargo este resultado no dice que esa cantidad infinitesimal de masa sea realmente una medida $d_x\mu$ en el espacio tangente $T_x(\mathbb{R}^n)$ (idem para el volumen, que sigue siendo el volumen en el espacio tangente) y que la relación entre ambas medidas $d_x\mu/d_xm$, que en este caso son proporcionales es un número $f(x)$, que es la densidad en el punto considerado.

Pero este nuevo concepto existe y tiene la ventaja de que no son necesarias dos medidas —como la de masa y volumen— para analizar su comportamiento infinitesimal, sino que cada medida define canónicamente una medida infinitesimal en los puntos en que es diferenciable —que además son casi todos en términos de la de Lebesgue—. Remitimos al lector interesado al trabajo

FARO, R.; NAVARRO, J.A.; SANCHO, J.: “On the concept of differential of a measure”. Arch. Math., Vol 64, 58–68, 1995.

el cual surge como contestación a la pregunta siguiente: ¿Es mera notación la $d\mu$ que aparece en la teoría de integración abstracta o por el contrario tras ella se esconde un concepto matemático como el de la diferencial de una función?

En ese trabajo se define el concepto de diferencial de una medida $d_x\mu$, en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, como una medida homogénea en el espacio tangente a \mathbb{R}^n en el punto x . Se demuestra que toda medida es diferenciable (c.s. $[m]$), que $d_x\mu$ es proporcional a d_xm (c.s. $[m]$), siendo m una medida de Lebesgue y se prueba una versión diferencial de la fórmula del cambio de variable de la teoría de integración que nos dice que el concepto de diferencial de una medida es invariante por difeomorfismos (por lo que la definición de diferencial de una medida es válida en una variedad diferenciable \mathcal{X} , en la que no hay medida de Lebesgue con la que comparar). Como consecuencia se tiene una versión mas refinada de la derivada de RADON–NIKODYM $d\lambda/d\mu$, en el contexto de las variedades diferenciables, donde no es una mera clase de funciones coincidiendo casi seguro, sino una verdadera función $f(x) = \frac{d_x\lambda}{d_x\mu}$, bien definida en toda la variedad, salvo en un conjunto de medida nula por μ .

Por último un breve comentario histórico sobre la *curva de Agnesi*, (ver el ejercicio 5.5.3, pág.228):

MARIA CAYETANA AGNESI (1718–1799) fue una matemática italiana célebre por su talento y otras virtudes. La curva de Agnesi, la estudió en su libro de cálculo diferencial e integral

AGNESI, M.C.: “*Institutioni Analitiche ad uso della gioventu italiana*”. Milan, 1748. que la Academia de las Ciencias de Paris consideró como superior a cuantos se habían escrito sobre esa materia. La curva había sido estudiada anteriormente por Fermat en 1666 y por Guido Grandi en 1701, que la llamó *curva versoria*, que es un término náutico latino que significa *pie de la vela, cuerda con que se ata su cabo, o con que se lleva de un borde a otro*. En italiano Agnesi la llamó *la versiera* y según parece, John Colson, profesor de la Universidad de Cambridge, con poco conocimiento del italiano confundió *versiera* con *aversiera*, que tradujo como *witch, bruja*, dando lugar al desafortunado nombre por el que también es conocida esta curva.

Fin del Capítulo 5

Capítulo 6

Espacios de funciones medibles

6.1. Los espacios \mathcal{L}_p

A lo largo de todo el tema consideraremos un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Definición. Para cada $0 < p < \infty$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , definimos el espacio $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, de las funciones medibles $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tales que

$$\int |f|^p d\mu < \infty,$$

y para cada $f \in \mathcal{L}_p$, y $p \geq 1$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Si no hay confusión denotaremos tal espacio por $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$ ó \mathcal{L}_p .

Veremos en la siguiente lección que para $p \geq 1$ las $\|\cdot\|_p$ son seminormas. No hemos incluido los valores correspondientes a $0 < p < 1$ pues para ellos las $\|\cdot\|_p$ en general no satisfacen la desigualdad triangular, sin embargo hablaremos de estos espacios más adelante.

Proposición 6.1.1 Para $0 < p < \infty$, $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial.

Demostración. Es obvio que si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces $\alpha f \in \mathcal{L}_p$ y $f + g \in \mathcal{L}_p$ ya que (para lo segundo)

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &\leq 2^p |f(x)|^p + 2^p |g(x)|^p. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos que aunque $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$ es un \mathbb{R} -subespacio vectorial de $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{C})$ no es un \mathbb{C} -subespacio vectorial suyo.

6.1.1. El espacio \mathcal{L}_∞ .

Para el caso $p = \infty$ no hay un criterio único para definir $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathbb{K})$. Para unos autores, como ASH, RUDIN y WHEEDEN-ZYGMUND, el *supremo esencial* de una función medible $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ es el

$$\inf\{c \leq \infty : \mu\{|f| > c\} = 0\}.$$

es decir el menor valor c para el que $|f| \leq c$ c.s. Y $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathbb{K})$ es el espacio de las funciones medibles f tales que $|f|$ tiene supremo esencial finito, es decir las funciones medibles acotadas salvo en un conjunto de medida nula.

Nosotros seguimos la dada por COHN.

Definición. Diremos que $A \in \mathcal{A}$ es *localmente nulo* si para cada $B \in \mathcal{A}$ con $\mu(B) < \infty$ se tiene que $\mu(A \cap B) = 0$. Del mismo modo diremos que una propiedad se satisface *localmente casi seguro* (l.c.s.) si el conjunto de puntos en los que no se verifica es localmente nulo. Denotamos con \mathcal{N} el conjunto de todos los medibles nulos y con \mathcal{N}^* los localmente nulos.

Se tienen las siguientes propiedades elementales.

Proposición 6.1.2 (a) $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^*$.

(b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ y $B \in \mathcal{N}^*$, entonces $A \in \mathcal{N}^*$.

(c) Si $A \in \mathcal{N}^*$ es σ -finito, $A \in \mathcal{N}$.

(d) Si $A_n \in \mathcal{N}^*$, $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{N}^*$.

Definición. Denotaremos con $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathbb{K})$ ó \mathcal{L}_∞ si no hay confusión, el espacio de las funciones medibles $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ que llamaremos *esencialmente acotadas*, para las que existe un $0 \leq c < \infty$ tal que $\{|f| > c\}$ es localmente nulo, y para ellas definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \{|f| > c\} \in \mathcal{N}^*\}.$$

Proposición 6.1.3 \mathcal{L}_∞ es un \mathbb{K} -espacio vectorial y $\|f\|_\infty$ es una seminorma.

Demostración. Si $f, g \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $f + g \in \mathcal{L}_\infty$, pues dados $0 \leq a, b < \infty$, tales que $A = \{|f| > a\}$ y $B = \{|g| > b\}$ son localmente nulos, $A \cup B$ es localmente nulo y fuera de él

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq a + b,$$

por lo que $\{|f + g| > a + b\} \subset A \cup B$ y es localmente nulo, por tanto $f + g \in \mathcal{L}_\infty$ y además $\|f + g\|_\infty \leq a + b$. Ahora tomando ínfimos en a, b tendremos que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ■

El motivo de elegir esta definición y no la anterior es que con ella podremos englobar distintos resultados en uno y además obtener otros en los que los autores que siguen la primera definición, imponen condiciones que no son necesarias, como que el espacio sea σ -finito, siendo así que con esta condición ambas definiciones coinciden.

Por \mathcal{L}_p entenderemos indistintamente $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$ ó $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{C})$ y utilizaremos esta notación en aquellos resultados que sean igualmente válidos para ambos espacios. El cuerpo correspondiente lo denotaremos con \mathbb{K} .

Ejercicios

Ejercicio 6.1.1 Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es localmente nulo.

Ejercicio 6.1.2 Demostrar que si $f \in \mathcal{L}_\infty$ y es integrable, entonces $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es nulo.

6.2. Los espacios de Banach L_p

6.2.1. Desigualdades fundamentales.

Dijimos en la lección anterior que las $\|\cdot\|_p$, para $1 \leq p$, son seminormas. Para demostrarlo necesitamos algunos resultados previos y un nuevo concepto.

Definición. Diremos que $1 < p, q < \infty$ son *exponentes conjugados* si se verifica que $p + q = pq$ ó equivalentemente

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Observemos que para $p = 2, q = 2$, el cual es un caso especialmente importante. Por otro lado si hacemos $p \rightarrow 1$, entonces $q \rightarrow \infty$, por lo que consideraremos que 1 e ∞ son también exponentes conjugados.

El primero de los resultados es una simple consecuencia de la concavidad de la función log.

Lema 6.2.1 (i) Sean $c, d \in (0, \infty)$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$c^t d^{1-t} \leq tc + (1-t)d.$$

(ii) Sean $1 < p, q < \infty$ conjugados y $a, b \in [0, \infty)$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(iii) Sean $a, b \in (0, \infty)$ y $r > 0$, entonces

$$\begin{aligned} (a+b)^r &< a^r + b^r && \text{para } 0 < r < 1, \\ (a+b)^r &> a^r + b^r && \text{para } 1 < r < \infty, \end{aligned}$$

Demostración. (i) Por la convexidad de la exponencial, $f(x) = e^x$, pues $f'' > 0$

$$e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b,$$

y el resultado se sigue para $c = e^a$ y $d = e^b$.

(ii) Para $a = 0$ ó $b = 0$ es obvio; en caso contrario por (i) para $t = 1/p$, $c = a^p$ y $d = b^q$, tendremos

$$ab = c^{1/p}d^{1/q} = c^t d^{1-t} \leq tc + (1-t)d = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(iii) Considérese la función $f(x) = (x + b)^r - x^r - b^r$, para la cual $f(0) = 0$ y $f' > 0$ si $r > 1$, por tanto f es creciente y $f' < 0$ si $0 < r < 1$, por tanto f es decreciente. ■

En la siguiente figura se puede observar la propiedad anterior (ii), $ab \leq A + B$, de forma geométrica, teniendo en cuenta que la primitiva de x^{p-1} es x^p/p y que su inversa es y^{q-1} , para q el conjugado de p , con $p \geq 2$ y $q \leq 2$.

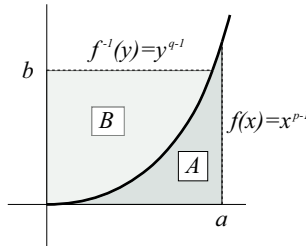


Figura 6.1.

Como consecuencia tenemos algunas de las desigualdades más importantes del Análisis Funcional.

Desigualdad de Hölder 6.2.2 Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados. Si $f \in \mathcal{L}_p$ y $g \in \mathcal{L}_q$, $fg \in \mathcal{L}_1$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. Si $p = 1$ y $q = \infty$ consideramos el conjunto $A = \{x : f(x) \neq 0\}$, el cual es σ -finito —pues por la *desigualdad de Tchebycheff*, $\mu\{|f| \geq 1/n\} < \infty$ — y el conjunto $B = \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$, el cual es localmente nulo, por tanto $A \cap B$ es nulo y en los x de su complementario se satisface

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty,$$

por tanto $\int |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$. Si $p = \infty$ y $q = 1$ es similar.

Si $1 < p < \infty$ y $\|f\|_p = 0$ (ó $\|g\|_q = 0$) es obvio, pues $f = 0$ c.s. y por tanto $fg = 0$ c.s., por lo que $\|fg\|_1 = 0$. Si $\|f\|_p \neq 0$ y $\|g\|_q \neq 0$, se tiene por el Lema (6.2.1) que para todo x

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q},$$

y por tanto

$$\frac{\int |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \blacksquare$$

Desigualdad de Cauchy–Schwarz 6.2.3 Si $f, g \in \mathcal{L}_2$, $f\bar{g} \in \mathcal{L}_1$ y

$$\left| \int f\bar{g} d\mu \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Demostración. Se sigue del resultado anterior, pues

$$\left| \int f\bar{g} d\mu \right| \leq \int |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad \blacksquare$$

Nota 6.2.4 Observemos que

$$\langle f, g \rangle = \int f\bar{g} d\mu,$$

es casi¹ un producto interior en \mathcal{L}_2 , del que deriva la seminorma $\| \cdot \|_2$, pues

$$\|f\|_2 = \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} = \left(\int f\bar{f} d\mu \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Desigualdad de Minkowsky 6.2.5 Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces $f + g \in \mathcal{L}_p$ y

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. Que $f + g \in \mathcal{L}_p$ lo vimos en (6.1.1) y (6.1.3). Veamos la desigualdad.

Para $p = \infty$ lo hemos visto. Para $p = 1$ es obvio, pues

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Para $1 < p < \infty$, si $\int |f + g|^p d\mu = 0$ el resultado es obvio, en caso contrario sea q el exponente conjugado de p , entonces

$$\int (|f + g|^{p-1})^q d\mu = \int |f + g|^{qp-q} d\mu = \int |f + g|^p d\mu < \infty,$$

¹La única propiedad que no se tiene es que $\langle f, f \rangle = 0$ implique $f = 0$, aunque se tiene que $f = 0$ c.s. (por (2.4.25), pág.104, y por tanto en el espacio en el que identifiquemos funciones que coincidan casi seguro será un producto interior.

de donde se sigue que $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}_q$ y que $\| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f + g\|_p^{p/q}$. Ahora por la *desigualdad de Holder*

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu \leq \int (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int |g||f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q}, \end{aligned}$$

y dividiendo tenemos el resultado pues $p - p/q = 1$. ■

Corolario 6.2.6 *Para cada $1 \leq p \leq \infty$, \mathcal{L}_p es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y $\| \cdot \|_p$ es una seminorma en él.*

6.2.2. El espacio \mathcal{L}_p para $0 < p < 1$.

Hemos dicho que para $0 < p < 1$, $\| \cdot \|_p$ no es una seminorma en \mathcal{L}_p en general, pues no satisface la desigualdad triangular. Para verlo consideremos conjuntos medibles disjuntos A y B , con $\mu(A) = a$ y $\mu(B) = b$ finitos y no nulos. Ahora sea $f = I_A$ y $g = I_B$, entonces $f + g = I_{A \cup B}$ y

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p &= \left(\int I_{A \cup B} d\mu \right)^{1/p} = (a + b)^{1/p} \\ &> a^{1/p} + b^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de (6.2.1)(c).

No obstante podemos definir para todo $p \in (0, 1)$ la pseudométrica en \mathcal{L}_p

$$d_p(f, g) = \int |f - g|^p d\mu,$$

pues se tienen las propiedades:

- i) $d_p(f, g) \geq 0$,
- ii) $d_p(f, g) = 0$ si y sólo si $f = g$ c.s.,
- iii) $d_p(f, g) = d_p(g, f)$ y
- iv) la desigualdad triangular

$$d_p(f, g) \leq d_p(f, h) + d_p(h, g),$$

siendo esta consecuencia de (6.2.1(c)), pues

$$|f - g|^p \leq (|f - h| + |h - g|)^p \leq |f - g|^p + |g - h|^p.$$

6.2.3. Los espacios L_p .

En general ni las seudométricas d_p para $0 < p < 1$, son métricas, ni las seminormas $\| \cdot \|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$, son normas, pues

$$\begin{aligned} \text{para } 0 < p < 1, & \quad d_p(f, g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = g \text{ c.s.}, \\ \text{para } 1 \leq p < \infty, & \quad \|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ c.s.}, \\ \text{para } p = \infty, & \quad \|f\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ l.c.s.}, \end{aligned}$$

sin embargo identificando convenientemente funciones conseguimos que lo sean y podemos dar una identificación que no depende de p .

Definición. Diremos que dos funciones medibles $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, son *equivalentes*, $f \approx g$, si $f = g$ l.c.s., es decir si $\{f \neq g\}$ es localmente nulo. Es fácil demostrar que $f \approx g$ es una relación de equivalencia. Mediante ella definimos los espacios cocientes para $0 < p \leq \infty$

$$L_p = \mathcal{L}_p / \approx.$$

Lema 6.2.7 Si $0 < p < \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}_p$, entonces

$$f = g \text{ c.s.} \quad \Leftrightarrow \quad f = g \text{ l.c.s.}$$

Demostración. Siempre se tiene “ \Rightarrow ” y la otra implicación se sigue de que el conjunto $\{f \neq g\}$ es σ -finito, pues es unión numerable de los conjuntos $A_n = \{|f - g| > 1/n\}$ y

$$(1/n)^p \mu(A_n) \leq \int_{A_n} |f - g|^p d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A_n) < \infty,$$

por tanto si es localmente nulo es nulo. ■

Proposición 6.2.8 (a) Para $0 < p \leq \infty$, L_p es un \mathbb{K} -espacio vectorial con las operaciones

$$\alpha[f] = [\alpha f], \quad [f] + [g] = [f + g].$$

(b) Para $0 < p < 1$, (L_p, d_p) es un espacio métrico con la distancia $d_p([f], [g]) = d_p(f, g)$.

Para $1 \leq p \leq \infty$ $(L_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado con la norma $\|[f]\|_p = \|f\|_p$.

Demostración. (a) Sean $f \approx f'$ y $g \approx g'$ de \mathcal{L}_p y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha f \approx \alpha f'$. Que la suma no depende de los representantes, es decir que $f + g \approx f' + g'$, se sigue de que

$$\{f + g \neq f' + g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{g \neq g'\} \in \mathcal{N}^*.$$

(b) Para $0 < p < 1$ la distancia está bien definida pues para $f \approx f'$ y $g \approx g'$ de \mathcal{L}_p , se sigue del Lema que $d_p(f, f') = d_p(g, g') = 0$, por tanto

$$d_p(f, g) \leq d_p(f, f') + d_p(f', g') + d_p(g', g) = d_p(f', g'),$$

y la otra desigualdad por simetría, por tanto $d_p(f, g) = d_p(f', g')$. Ahora para ver que es métrica basta demostrar que si $f, g \in \mathcal{L}_p$, $d_p(f, g) = 0$ si y sólo si $f \approx g$, y esto se sigue del Lema.

Para $1 \leq p < \infty$ la norma está bien definida pues $\|f\|_p = \|f'\|_p$ ya que por el lema $f = f'$ c.s., por tanto $\|f\|_p = \|f'\|_p$. Ahora para ver que es norma falta ver que para $f \in \mathcal{L}_p$, $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $[f] = [0]$, y esto se sigue del Lema pues

$$\begin{aligned} \|[f]\|_p = 0 &\Leftrightarrow \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ c.s.} \\ &\Leftrightarrow f = 0 \text{ l.c.s.} \Leftrightarrow [f] = [0], \end{aligned}$$

Para $p = \infty$ la norma está bien definida pues si $f, f' \in \mathcal{L}_\infty$ y $f \approx f'$, $\|f\|_\infty = \|f'\|_\infty$, ya que $\|f - f'\|_\infty = 0$, pues por definición es localmente nulo el conjunto $\{f \neq f'\} = \{|f - f'| > 0\}$ y por la desigualdad triangular

$$\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|f - f'\|_\infty = \|f'\|_\infty$$

y la otra desigualdad por simetría. Que es norma es obvio. ■

Nota 6.2.9 Por comodidad hablaremos de L_p como de un espacio de funciones, más que de un espacio cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones, relegando esta distinción como dice RUDIN “...al status de un entendimiento tácito”.

Ejemplo 6.2.10 Los espacios de Banach $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$.

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es finito y μ es la medida de contar, entonces cada función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, se identifica con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, mediante $f(\omega_i) = x_i$, en cuyo caso para $p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p, \quad \text{y} \quad (L_p, \|\cdot\|_p) = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p),$$

y para $p = \infty$, $\|f\|_\infty = \max\{|x_i|\} = \|x\|_\infty$.

Ejemplo 6.2.11 Los espacios l_p de sucesiones.

Por último en el caso particular

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu),$$

para μ la medida de contar, es habitual escribir l_p en vez de L_p y considerar sus elementos f más que como funciones, como sucesiones $f(n) = x_n \in \mathbb{K}$, en cuyos términos para $p < \infty$ l_p es el espacio de las sucesiones $f = (x_n)$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

y para $p = \infty$, l_∞ es el espacio de las sucesiones acotadas.

6.2.4. Completión de los espacios L_p .

Vamos a demostrar que toda sucesión de Cauchy en L_p es convergente, por ello conviene recordar que una cosa es la convergencia puntual $f_n(x) \rightarrow f(x)$, que a menudo hemos denotado $f_n \rightarrow f$, y otra distinta es la convergencia $f_n \rightarrow f$ en L_p , que significa

$$\text{para } 0 < p < 1, \quad d_p(f, f_n) \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0,$$

$$\text{para } 1 \leq p < \infty, \quad \|f - f_n\|_p \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0,$$

$$\text{para } p = \infty, \quad \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0.$$

Lema 6.2.12 Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$ una sucesión de Cauchy, entonces existe f medible y una subsucesión g_n de f_n tal que $g_n \rightarrow f$ c.s.

Demostración. Consideremos una subsucesión g_n de f_n tal que para $n \geq 1$ $\|g_{n+1} - g_n\|_p \leq 2^{-n}$ (para $0 < p < 1$, $d_p(g_{n+1}, g_n) = \|g_{n+1} - g_n\|_p^p \leq 2^{-n}$) y sea $h_n = g_{n+1} - g_n$, entonces como $g_n = g_1 + \sum_{i=1}^{n-1} h_i$ basta demostrar que la serie $\sum h_i$ es absolutamente convergente c.s., es decir que $h = \sum |h_i|$, es finita c.s., para lo cual basta ver, por 2.4.3, pág.92, que h es p -integrable. Ahora por el Lema de Fatou

$$\int |h|^p d\mu \leq \liminf \int \left(\sum_{i=1}^n |h_i| \right)^p d\mu \leq 1 < \infty,$$

pues por la desigualdad de Minkowsky para $p \geq 1$ y por (6.2.1(c)) para $0 < p < 1$

$$(6.1) \quad (p \geq 1) \quad \left\| \sum_{i=1}^n |h_i| \right\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|h_i\|_p \leq 1,$$

$$(6.2) \quad (0 < p < 1) \quad \left\| \sum_{i=1}^n |h_i| \right\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n \|h_i\|_p^p \leq 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 6.2.13 Para $1 \leq p \leq \infty$, $(L_p, \|\cdot\|_p)$ son espacios de Banach y para $0 < p < 1$ los espacios métricos (L_p, d_p) son completos.

Demostración. Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$ una sucesión de Cauchy, entonces tanto si $0 < p < 1$ como si $1 \leq p < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, para el que si $m, n \geq N$

$$\int |f_n - f_m|^p d\mu \leq \epsilon,$$

ahora por el Lema anterior existe una subsucesión g_n de f_n y una función medible f tal que $g_n \rightarrow f$ c.s. Veamos que $f \in \mathcal{L}_p$ y que $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p . Por el Lema de Fatou tenemos para $n \geq N$ y $g_k = f_{n_k}$

$$\int |f_n - f|^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \leq \epsilon$$

por tanto $f_n - f \in \mathcal{L}_p$, $f = f - f_n + f_n \in \mathcal{L}_p$ y por la desigualdad anterior $f_n \rightarrow f$.

Sea ahora $p = \infty$, y $f_n \in \mathcal{L}_\infty$ una sucesión de Cauchy. Consideremos el conjunto $A \in \mathcal{N}^*$, unión de los conjuntos

$$A_{nm} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\} \in \mathcal{N}^*,$$

entonces $f_n(x)$ es de Cauchy uniformemente en los $x \in A^c$, pues f_n es de Cauchy y por tanto para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, para el que si $m, n \geq N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon,$$

por tanto existe una función medible f , tal que $f = 0$ en A y para $x \in A^c$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, además haciendo $m \rightarrow \infty$ tendremos que en A^c

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

por tanto $f_n - f \in \mathcal{L}_\infty$, de donde se sigue que $f \in \mathcal{L}_\infty$ y $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$, por tanto $f_n \rightarrow f$ (en \mathcal{L}_∞). ■

En la prueba anterior hemos demostrado también el siguiente resultado.

Teorema 6.2.14 *Si $f_n \in \mathcal{L}_p$ es una sucesión de Cauchy, con límite f , entonces: Para $p = \infty$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ l.c.s. y para $0 < p < \infty$, existe una subsucesión de f_n que converge c.s. a f .*

Nota 6.2.15 Denotemos con $\mathcal{S}(\Omega, \mathbb{K})$ ó con \mathcal{S} si no hay confusión, el conjunto de las funciones simples finitas

$$s: \Omega \rightarrow \mathbb{K}, \quad s = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$$

las cuales son acotadas, $\{|s| > \max\{|a_i|\}\} = \emptyset$, por tanto están en L_∞ y

$$\|s\|_\infty \leq \max\{|a_i|\} < \infty.$$

A continuación demostraremos que \mathcal{S} es denso en L_∞ y que

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{s \in \mathcal{S} : \mu\{s \neq 0\} < \infty\},$$

es denso en L_p para $0 < p < \infty$, pero antes veamos que $\tilde{\mathcal{S}} \subset L_p$ para todo p ,

$$\begin{aligned} s \in \mathcal{S} \cap L_p &\Leftrightarrow s = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}, \quad \int |s|^p d\mu = \sum |a_i|^p \mu(A_i) < \infty \\ &\Leftrightarrow s = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}, \quad \mu(A_i) < \infty \text{ para } a_i \neq 0, \\ &\Leftrightarrow s \in \mathcal{S}, \quad \mu\{s \neq 0\} < \infty \Leftrightarrow s \in \tilde{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Proposición 6.2.16 $\tilde{\mathcal{S}}$ es denso en L_p para $0 < p < \infty$ y \mathcal{S} en L_∞ .

Demostración. Sea $0 < p \leq \infty$ y $f \in \mathcal{L}_p$, basta demostrar que existe una sucesión de funciones simples $s_n \in \mathcal{L}_p$ con $|s_n| \leq |f|$, tal que para $0 < p < 1$, $d_p(s_n, f) \rightarrow 0$ y para $1 \leq p \leq \infty$, $\|s_n - f\|_p \rightarrow 0$. Esencialmente ya lo hemos visto en (2.2.9), para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pues existe una sucesión de funciones simples $|s_n| \leq |f|$, tal que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ y la convergencia es uniforme en cada conjunto en el que f es acotada, por tanto si $p = \infty$, como el conjunto $A^c = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es localmente nulo y f está acotada en A por $\|f\|_\infty < \infty$, tendremos que para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que para $n \geq N$ y todo $x \in A$

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|s_n - f\|_\infty \leq \epsilon,$$

y si $0 < p < \infty$, como $|s_n - f| \leq 2|f|$ que es p -integrable, tendremos por el *Teorema de la convergencia dominada*, pág. 98 que $\int |s_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$.

Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se aplica a la parte real y a la imaginaria de f y se concluye por la desigualdad triangular. ■

Nota 6.2.17 Recordemos que la *compleción* de un espacio normado (métrico) \mathcal{X} , es un espacio normado (métrico) completo $\bar{\mathcal{X}}$, tal que \mathcal{X} es un subespacio denso de $\bar{\mathcal{X}}$ (el cual existe y es único, ver HEWITT-STROMBERG, p.77). En estos términos el resultado anterior nos dice que cada espacio de Banach L_p es la compleción de un mismo espacio $\tilde{\mathcal{S}}$, con la norma $\|\cdot\|_p$; y L_∞ la de \mathcal{S} , con $\|\cdot\|_\infty$.

Por último veremos, como consecuencia del *Teorema de aproximación* (1.7.8) de la página 58, un caso particular en el que L_p es *separable*, es decir contiene un subconjunto denso y numerable.

Proposición 6.2.18 Sea $0 < p < \infty$ y μ σ -finita en $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, con \mathcal{C} numerable, entonces L_p es separable.

Demostración. Sea $A_n \in \mathcal{A}$ una partición de Ω , con $\mu(A_n) < \infty$ y consideremos las siguientes extensiones de \mathcal{C}

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \mathcal{C} \cup \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\} \\ \mathcal{C}_1 &= \{A \in \mathcal{A} : A \in \mathcal{C}_0, \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}_0\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{B_1 \cap \dots \cap B_n : n \in \mathbb{N}, B_i \in \mathcal{C}_1\} \\ \mathcal{C}_3 &= \{C_1 \cup \dots \cup C_m : m \in \mathbb{N}, C_i \in \mathcal{C}_2\} \end{aligned}$$

las cuales son numerables y \mathcal{C}_3 es un álgebra que genera \mathcal{A} . Consideremos ahora el conjunto numerable de funciones simples de L_p

$$\mathcal{S}' = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i I_{E_i} : r_i \in \mathbb{Q}, E_i \in \mathcal{C}_3, \text{ disjuntos y } \mu(E_i) < \infty \right\},$$

(en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ consideramos los $r_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) y veamos que es denso en L_p , para lo cual aplicamos el resultado anterior y basta demostrar que dada una función simple $s = \sum_{i=1}^n a_i I_{B_i} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{L}_p$ (por tanto tal que $\mu(B_i) < \infty$), para todo $\epsilon > 0$ hay una función $f = \sum_{i=1}^n r_i I_{E_i} \in \mathcal{S}'$, tal que $\|s - f\|_p \leq \epsilon$. Haremos el caso $1 \leq p < \infty$, el caso $0 < p < 1$ es similar. Primero elegimos $r_i \in \mathbb{Q}$, próximos a a_i , tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i I_{B_i} - \sum_{i=1}^n r_i I_{B_i} \right\|_p \leq \sum_{i=1}^n |a_i - r_i| \|I_{B_i}\|_p \leq \epsilon/2,$$

y ahora aplicando el *Teorema de aproximación* (1.7.8), pág.58 elegimos los E_i , tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^n r_i I_{B_i} - \sum_{i=1}^n r_i I_{E_i} \right\|_p \leq \sum_{i=1}^n |r_i| \|I_{B_i \Delta E_i}\|_p \leq \epsilon/2. \quad \blacksquare$$

Ejercicios

Ejercicio 6.2.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita. Demostrar que

$$\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\},$$

es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, que es isomorfo a $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Dar un isomorfismo.

Ejercicio 6.2.2 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Demostrar que $\mu_f(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ es una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, y que si $f \in L_\infty$, entonces

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \mu_f[B(z, \epsilon)] > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

es un compacto, donde $B(z, \epsilon) = \{z' : |z' - z| < \epsilon\}$ y que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|z| : z \in K\}. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 6.2.3 Demostrar que si $0 < r < p < s < \infty$, entonces $L_r \cap L_s \subset L_p \subset L_r + L_s$. (Sol.)

Ejercicio 6.2.4 Demostrar que si $0 < r < s < \infty$ y $f \in L_r \cap L_s$, entonces $f \in L_p$, para todo $p \in [r, s]$; que la función

$$\phi(p) = \log \int |f|^p d\mu,$$

es convexa en $[r, s]$ y que $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$. (Sol.)

Ejercicio 6.2.5 Demostrar que un espacio normado \mathcal{E} es completo sii para cada sucesión $x_n \in \mathcal{E}$

$$\sum \|x_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum x_n \quad \text{es convergente. (Sol.)}$$

Ejercicio 6.2.6 Demostrar la desigualdad de Holder generalizada:

Si $1 \leq p_1, \dots, p_n \leq \infty$ son tales que $\sum (1/p_i) = 1/r \leq 1$ y $f_i \in L_{p_i}$, entonces

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L_r, \quad \text{y} \quad \left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Ejercicio 6.2.7 Demostrar que si $f, g \in \mathcal{L}_p$ para $0 < p < 1$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_p + \|g\|_p). \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 6.2.8 Demostrar que si $f \in L_p$ para algún $0 < p < \infty$, entonces $\|f\|_r \rightarrow \|f\|_\infty$, cuando $r \rightarrow \infty$. (Sol.)

Ejercicio 6.2.9 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $0 < r < s < \infty$, entonces $L_s \subset L_r$ y que para $f \in L_s$

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \mu(\Omega)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 6.2.10 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n, f son medibles, entonces:

(a) Si $f_n \rightarrow f$ c.s., entonces $f_n \rightarrow f$ en medida (es decir que para todo $\epsilon > 0$, $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \rightarrow 0$).

(b) Si $f_n \rightarrow f$ en L_p (con $1 \leq p \leq \infty$), entonces $f_n \rightarrow f$ en medida. (Sol.)

Ejercicio 6.2.11 Demostrar la **Desigualdad de Jensen**, es decir que si $\mu(\Omega) = 1$, $f: \Omega \rightarrow (a, b)$ es medible e integrable y $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu. \quad (\text{Sol.})$$

Ejercicio 6.2.12 Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y f, g son medibles y positivas y tales que $fg \geq 1$, entonces

$$\int f d\mu \cdot \int g d\mu \geq 1. \text{ (Sol.)}$$

Ejercicio 6.2.13 Demostrar que si $0 < r < s \leq \infty$, entonces $l_r \subset l_s$. (Sol.)

6.3. Espacio dual

A lo largo de la lección entenderemos que \mathcal{E} , \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son espacios normados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} .

Definición. Dada una aplicación lineal $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$, definimos su *norma* como

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|/\|x\| : 0 \neq x \in \mathcal{E}_1\},$$

y diremos que T es acotada si $\|T\| < \infty$.

Nota 6.3.1 Entendemos que sobre cada elemento opera la norma que le corresponde, aunque las denotemos igual por comodidad. Por otra parte en la definición anterior podemos restringirnos a los x con $\|x\| = 1$, sin que el supremo cambie, pues para $r \in \mathbb{K}$ y $x \in \mathcal{E}_1$, $\|T(rx)\| = |r|\|T(x)\|$. Por último observemos que T es *acotada* si y sólo si existe $k \in [0, \infty)$, tal que para cualquier $x \in \mathcal{E}_1$

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|,$$

y que $\|T\|$ es el ínfimo de estas constantes k .

No toda aplicación lineal entre espacios normados es continua, como tampoco tiene por qué ser acotada. A continuación vemos que sin embargo estas dos cosas son equivalentes.

Teorema 6.3.2 *Para una aplicación lineal $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ son equivalentes:*

- (a) T es uniformemente continua.
- (b) T es continua en un punto.
- (c) T es acotada.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Obvio.

(b) \Rightarrow (c) Supongamos que T es continua en y , entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\| \leq \delta$, entonces $\|T(x - y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq \epsilon$, es decir que si $\|z\| \leq \delta$, entonces $\|T(z)\| \leq \epsilon$. Se sigue que para todo $x \neq 0$, si llamamos $z = \delta x / \|x\|$, $\|z\| = \delta y$

$$\|T(x)\| = \|x\| \|T(z)\| / \delta \leq (\epsilon / \delta) \|x\|.$$

(c) \Rightarrow (a) Es obvio pues

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\| \|x - y\|. \quad \blacksquare$$

Teorema 6.3.3 Sean \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 \mathbb{K} -espacios normados, entonces el conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ de las aplicaciones lineales continuas $T: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$, con la suma $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ y el producto por escalares $(aT)(x) = aT(x)$ y el operador norma definido al principio de la lección, es un espacio normado. Además es de Banach si \mathcal{E}_2 es de Banach.

Demostración. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ entonces se tiene que $T_1 + T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, pues es lineal y acotada

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|,$$

y como consecuencia $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$, el resto de propiedades son también elementales. Veamos que es completo si lo es \mathcal{E}_2 , para ello sea T_n una sucesión de Cauchy, entonces

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|,$$

y por tanto $T_n(x) \in \mathcal{E}_2$ es de Cauchy y por tanto tiene límite $T(x)$, veamos que T es lineal, continua y que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Es lineal pues si $x, y \in \mathcal{E}_1$, entonces

$$\begin{aligned} \|T(x + y) - T(x) - T(y)\| &\leq \|T(x + y) - T_n(x + y)\| + \\ &+ \|T_n(x) - T(x)\| + \|T_n(y) - T(y)\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

y para $a \in \mathbb{K}$, $\|T(ax) - aT(x)\| \leq \|T(ax) - T_n(ax)\| + \|aT_n(x) - aT(x)\| \rightarrow 0$. Ahora como T_n es de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$, $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$, por tanto

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \epsilon \|x\|,$$

para todo x y tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que para todo x y $m \geq N$, $\|T(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon \|x\|$, por tanto $T - T_m \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, por tanto $T \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ y $\|T - T_m\| \leq \epsilon$, para todo $m \geq N$. ■

Definición. Dado un espacio normado \mathcal{E} , denotaremos con \mathcal{E}' el espacio vectorial dual algebraico de las funciones lineales $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$, y con $\mathcal{E}^* = \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ el espacio de las funciones lineales continuas, al que llamaremos *dual topológico* o simplemente dual.

Teorema 6.3.4 *El dual \mathcal{E}^* de un espacio normado \mathcal{E} es un espacio de Banach con la norma definida en él*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Demostración. Es una simple consecuencia de (6.3.3), pues \mathbb{K} es completo. ■

Definición. Diremos que una aplicación $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ es una *isometría* si es lineal y para cualquier $x \in \mathcal{E}_1$

$$\|T(x)\| = \|x\|.$$

Diremos que es un *isomorfismo* si además es sobre.

Nota 6.3.5 Observemos que una isometría siempre es inyectiva, pues al ser lineal

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\|,$$

de donde también se sigue que conserva las distancias.

Nota 6.3.6 Hay una aplicación lineal y continua natural entre un espacio normado \mathcal{E} y su bidual \mathcal{E}^{**} , dada por

$$\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{**}, \quad \pi(x) = \hat{x}, \quad \hat{x}(f) = f(x),$$

que está bien definida, es decir que $\hat{x} \in \mathcal{E}^{**}$, es obvio pues \hat{x} es lineal y acotada, ya que

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \cdot \|f\| \quad \Rightarrow \quad \|\hat{x}\| \leq \|x\|,$$

y π es lineal y continua, pues $\|\pi(x)\| = \|\hat{x}\| \leq \|x\|$, por tanto $\|\pi\| \leq 1$. Además como consecuencia del

Teorema de Hahn–Banach 6.3.7 *Sea \mathcal{E} un espacio normado, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un subespacio y $f_0 \in \mathcal{F}^*$, entonces existe $f \in \mathcal{E}^*$, tal que $f|_{\mathcal{F}} = f_0$ y $\|f\| = \|f_0\|$.*

se tiene que π es una isometría, pues basta considerar para cada $x \neq 0$, la recta $\mathcal{F} = \{\lambda x\}$ y $f_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$, para la que $\|f_0\| = 1$; y por el teorema existe f , extensión de f_0 con $\|f\| = 1$, por tanto

$$\|x\| = |f(x)| = |\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|.$$

Por tanto π es inyectiva, de donde se sigue que \mathcal{E} es isomorfo a $\pi(\mathcal{E})$. En general π no es sobre, pero en caso de serlo — $\pi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{**}$ —, diremos que \mathcal{E} es *reflexivo*, en cuyo caso es de Banach, pues lo es \mathcal{E}^{**} y son isomorfos. Observemos que no hemos dicho que \mathcal{E} sea reflexivo si es isomorfo a su bidual \mathcal{E}^{**} , sino “que lo sea con la aplicación natural π ”. De hecho hay un ejemplo de R.C. JAMES (ver comentarios al final del tema), de un espacio de Banach isomorfo a su bidual, pero no reflexivo. En la siguiente lección veremos que los espacios L_p , para $1 < p < \infty$ son reflexivos.

Finalizamos la lección analizando el dual topológico de un simple espacio normado como es el espacio de las funciones continuas en el intervalo $I = [a, b]$

$$\mathcal{C}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{continuas}\},$$

con la norma del supremo. Con lo que veremos la profunda relación existente entre las medidas finitas en los borelianos de I y las funciones lineales y continuas en $\mathcal{C}(I)$. Estos hechos y sus generalizaciones forman la base para muchas de las aplicaciones de la Teoría de la medida.

Sea μ una medida finita en $\mathcal{B}(I)$. Entonces el funcional

$$\Lambda : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Lambda(f) = \int f \, d\mu,$$

es lineal y positivo, es decir que si $f \geq 0$, entonces $\Lambda(f) \geq 0$. Veremos en el primer *Teorema de Representación de Riesz* (10.3.1), pág.337, que estos son los únicos funcionales lineales y positivos de $\mathcal{C}(I)$.

Además en este caso particular si consideramos en $\mathcal{C}(I)$ la norma del supremo, entonces Λ es continuo, pues

$$\|\Lambda(f)\| = \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu \leq \mu(I) \|f\|_{\infty},$$

y $\|\Lambda\| \leq \|\mu\|$. Y si tenemos una medida real μ , podemos definir el funcional lineal y continuo

$$\Lambda(f) = \int f d\mu,$$

pues es diferencia de dos funcionales lineales y continuos

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^- = \lambda^+(f) - \lambda^-(f).$$

Veremos que el segundo *Teorema de representación de Riesz* (10.3.7), pág.343, asegura que todo funcional lineal y continuo en $\mathcal{C}(I)$, es decir de $\mathcal{C}(I)^*$, es de esta forma.

6.4. El espacio dual de L_p

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $1 \leq p, q \leq \infty$, conjugados. Entonces para cada $g \in \mathcal{L}_q$ podemos definir el funcional

$$T_g : \mathcal{L}_p \rightarrow \mathbb{K}, \quad T_g(f) = \int fg d\mu,$$

y puesto que si $f_1 \approx f_2$, se tiene $T_g(f_1) = T_g(f_2)$ (pues $f_1g = f_2g$ c.s), entonces podemos extender T_g del modo obvio a L_p

$$T_g : L_p \longrightarrow \mathbb{K},$$

la cual es lineal y continua, es decir $T_g \in L_p^*$, puesto que la *desigualdad de Hölder* nos dice que para cualquier $f \in \mathcal{L}_p$

$$|T_g(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|T_g\| \leq \|g\|_q,$$

podemos entonces definir la siguiente aplicación

$$T : \mathcal{L}_q \longrightarrow L_p^*, \quad g \rightarrow T(g) = T_g,$$

pero además si $g_1, g_2 \in \mathcal{L}_q$ y $g_1 \approx g_2$, entonces $T(g_1) = T(g_2)$, pues para todo $f \in \mathcal{L}_p$, $f g_1 = f g_2$ c.s. y

$$T_{g_1}(f) = \int f g_1 d\mu = \int f g_2 d\mu = T_{g_2}(f),$$

y por tanto T induce una aplicación lineal, que llamamos igual

$$T: L_q \longrightarrow L_p^*, \quad g \rightarrow T(g) = T_g,$$

y se tiene el siguiente resultado —que es uno de aquellos a los que hacíamos referencia cuando definimos \mathcal{L}_∞ —.

Teorema 6.4.1 *Para $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados, la aplicación anterior $T: L_q \longrightarrow L_p^*$ es una isometría.*

Demostración. Tenemos que demostrar que para todo $g \in \mathcal{L}_q$, $\|T(g)\| = \|g\|_q$, pero ya hemos visto que $\|T(g)\| = \|T_g\| \leq \|g\|_q$, por tanto basta demostrar la otra desigualdad. Además si $\|g\|_q = 0$ el resultado es obvio, por tanto podemos suponer que $\|g\|_q > 0$

Para $p = 1$, $q = \infty$, tomemos $g \in \mathcal{L}_\infty$ y un $0 < \epsilon < \|g\|_\infty$, entonces el conjunto $C = \{|g(x)| > \|g\|_\infty - \epsilon\}$ no es localmente nulo, por tanto existe un medible $B \subset C$, con $0 < \mu(B) < \infty$. Consideremos la función de \mathcal{L}_1 ,

$$f = \begin{cases} \frac{\bar{g}}{|g|}, & \text{en } B, \\ 0, & \text{en } B^c, \end{cases}$$

para la que $|f| = I_B$, $\|f\|_1 = \mu(B)$ y $f g = I_B |g|$, por tanto

$$\begin{aligned} (\|g\|_\infty - \epsilon)\mu(B) &\leq \int_B |g| d\mu = \int f g d\mu \\ &= |T_g(f)| \leq \|T_g\| \|f\|_1 = \|T_g\| \mu(B), \end{aligned}$$

por tanto $\|g\|_\infty - \epsilon \leq \|T_g\|$ y como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, se tiene $\|g\|_\infty \leq \|T_g\|$ y por tanto la igualdad.

Para $p > 1$, $q < \infty$, tomemos $g \in \mathcal{L}_q$, con $\|g\|_q > 0$, por tanto $B = \{g \neq 0\}$ es σ -finito y $\mu(B) > 0$, por tanto B no es localmente nulo y $\|I_B\|_\infty = 1$. Ahora si definimos

$$f = \begin{cases} \frac{\bar{g}}{|g|^{2-q}}, & \text{si } g \neq 0, \\ 0, & \text{si } g = 0, \end{cases}$$

tendremos que $f \in \mathcal{L}_p$, pues para $q = 1$ y $p = \infty$, $|f| = I_B$, por tanto $\|f\|_\infty = 1$ y $fg = |g|$ y para $1 < p, q < \infty$, $|f| = |g|^{q-1}$, por tanto $|f|^p = |g|^q = fg$, de donde $f \in \mathcal{L}_p$ y en cualquiera de los dos casos

$$\int |g|^q d\mu = \int fg d\mu = T_g(f) = |T_g(f)| \leq \|T_g\| \|f\|_p,$$

por tanto $\|g\|_q \leq \|T_g\|$. ■

La cuestión que nos planteamos ahora es si la isometría

$$T: L_q \hookrightarrow L_p^*$$

del resultado anterior, es sobre y por tanto T es un isomorfismo entre L_q y L_p^* . Demostraremos que:

Para $1 < p, q < \infty$ $L_q \approx L_p^*$ es cierto siempre.

Para $p = 1$ $L_\infty \approx L_1^*$ es cierto si μ es σ -finita, (también en ciertas condiciones topológicas y nuestro espacio es Hausdorff y localmente compacto, como veremos en la lección 10.5, página 346, del tema de medida y topología).

Y para $p = \infty$ la contestación es negativa, T no establece en general un isomorfismo entre L_1 y L_∞^* . De hecho si μ es finita la isometría T es sobre si y sólo si L_1 es finito dimensional y si y sólo si L_∞ es finito dimensional (ver COHN, p.153, ej.3).

Pero antes de establecer estos resultados necesitamos otros previos.

Lema 6.4.2 Sean p y q conjugados con $1 \leq p < \infty$, $\phi \in L_p^*$, $g \in \mathcal{L}_q$ y $E \in \mathcal{A}$ tales que para todo $B \in \mathcal{A}$, con $\mu(B) < \infty$

$$\phi(I_{B \cap E}) = \int I_{B \cap E} g d\mu,$$

entonces $\|g\|_q \leq \|\phi\|$.

Demostración. Consideremos $\varpi, T_g: L_p \rightarrow \mathbb{K}$, definidos por

$$\varpi(f) = \phi(fI_E), \quad T_g(f) = \int fg d\mu,$$

$$|\varpi(f)| = |\phi(fI_E)| \leq \|\phi\| \|fI_E\|_p \leq \|\phi\| \|f\|_p,$$

por tanto $\|\varpi\| \leq \|\phi\|$ es acotada, de donde $\varpi, T_g \in L_p^*$ y por hipótesis coinciden en las funciones indicador $I_B \in \tilde{\mathcal{S}}$ y por linealidad en todo $\tilde{\mathcal{S}}$ y como este es denso en L_p , $\varpi = T_g$, por tanto $\|g\|_q = \|T_g\| = \|\varpi\| \leq \|\phi\|$.
■

Lema 6.4.3 *Sea $1 \leq q \leq \infty$ y sea $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ medible para la que existen $g_n \in L_q$, tales que $|g_n| \uparrow |g|$ y $\sup \|g_n\|_q < \infty$, entonces $g \in L_q$ y $\|g_n\|_q \rightarrow \|g\|_q$.*

Demostración. Para $q < \infty$ $\|g_n\|_q \leq \|g_{n+1}\|_q \uparrow \sup \|g_n\|_q$ y se sigue del Teorema de la convergencia monótona, pág.93 que

$$\int |g|^q d\mu = \lim \int |g_n|^q d\mu = \sup \|g_n\|_q^q < \infty,$$

y para $q = \infty$ como $\|g_n\|_\infty \leq \sup_m \|g_m\|_\infty = k < \infty$, $\{|g_n(x)| > k\}$ es localmente nulo, como también lo es

$$\{|g| > k\} \subset \cup \{|g_n(x)| > k\},$$

por tanto $g \in L_\infty$ y $\|g\|_\infty \leq k$. Además como $\|g_n\|_\infty \leq \|g_{n+1}\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, pues

$$\{|g_n| > c\} \subset \{|g_{n+1}| > c\} \subset \{|g| > c\},$$

(y si uno es localmente nulo también el de su izquierda), tenemos que $\|g_n\|_\infty \uparrow k = \|g\|_\infty$. ■

Lema 6.4.4 *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y para $A \in \mathcal{A}$ consideremos el espacio de medida $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$. Entonces la aplicación*

$$s : L_p(A) \longrightarrow L_p(\Omega), \quad g \longrightarrow s(g) = g_A,$$

para $g_A(x) = g(x)$ si $x \in A$ y $g_A(x) = 0$ si $x \in A^c$, es una sección de la aplicación restricción

$$r : L_p(\Omega) \longrightarrow L_p(A), \quad f \longrightarrow r(f) = f|_A,$$

($r \circ s = id$) que es una isometría, $\|g\|_p = \|g_A\|_p$. Además si $\phi \in L_p^*(\Omega)$, entonces $s^*(\phi) = \phi \circ s = \phi_A \in L_p^*(A)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} L_p(A) & \xrightarrow{s} & L_p(\Omega) \\ \phi_A \searrow & & \swarrow \phi \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

verifica $\phi_A(f) = \phi(f_A)$ y $\|\phi_A\| \leq \|\phi\|$.

Demostración. Es trivial. ■

Lema 6.4.5 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ -finito, entonces existe $h \in \mathcal{L}_1(\mu)$ positiva y una probabilidad $\lambda(A) = \int_A h d\mu$, tal que para cada $p \in [1, \infty)$

$$\Phi_p: L_p(\lambda) \longrightarrow L_p(\mu), \quad \Phi_p(f) = h^{1/p} f,$$

son isomorfismos isométricos (para $p = \infty$, $L_\infty(\lambda) = L_\infty(\mu)$ y $\Phi_\infty = Id$).

Demostración. Sea $A_n \in \mathcal{A}$ una partición de Ω , con $0 < \mu(A_n) < \infty$, (que podemos pedir que sean positivos es simple, basta unir los de medida nula con cualquier A_n de medida positiva) y consideremos la función $h \in L_1$ estrictamente positiva y la probabilidad λ

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} I_{A_n},$$

$$\lambda(A) = \int_A h d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap A_n)}{2^n \mu(A_n)},$$

para la que $\mathcal{N}^*(\mu) = \mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}^*(\lambda)$, pues μ es σ -finita, λ finita y $\lambda \ll \mu \ll \lambda$, por tanto $L_\infty(\mu) = L_\infty(\lambda)$. Ahora para $1 \leq p < \infty$, la biyección lineal Φ_p es isometría pues

$$\int |f|^p d\lambda = \int |f|^p h d\mu = \int |\Phi_p(f)|^p d\mu \Rightarrow \|f\|_p = \|\Phi_p(f)\|_p. \quad \blacksquare$$

Lema 6.4.6 Toda aplicación lineal y continua $F: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ entre espacios normados, define otra entre los duales, a la que llamamos dual o traspuesta

$$F^*: \mathcal{E}_2^* \rightarrow \mathcal{E}_1^*, \quad F^*(f) = f \circ F,$$

además si F es un isomorfismo isométrico F^* también lo es.

Demostración. Es un simple ejercicio. \blacksquare

Teorema 6.4.7 (a) Para $1 < p, q < \infty$ conjugados, la isometría $T: L_q \rightarrow L_p^*$ es sobre, por tanto ambos espacios son isomorfos.

(b) Si el espacio es σ -finito, $T: L_\infty \rightarrow L_1^*$ es sobre, por tanto son isomorfos.

Demostración. Queremos demostrar que T es sobre, es decir que dada $\phi \in L_p^*$, existe $g \in L_q$ tal que

$$\forall f \in L_p, \quad \phi(f) = \int fg \, d\mu.$$

Caso I.- Para μ finita y $1 \leq p < \infty$.

En tal caso $I_A \in L_p$ para cada $A \in \mathcal{A}$ y podemos definir

$$\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda(A) = \phi(I_A),$$

la cual es aditiva, pues para $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos,

$$\lambda(A \cup B) = \phi(I_{A \cup B}) = \phi(I_A + I_B) = \lambda(A) + \lambda(B),$$

y es numerablemente aditiva por (4.3.4) de la página 170, pues dados $A_n \downarrow \emptyset$, $\lambda(A_n) \rightarrow 0$, pues

$$|\lambda(A_n)| = |\phi(I_{A_n})| \leq \|\phi\| \|I_{A_n}\|_p = \|\phi\| \mu(A_n)^{1/p} \rightarrow 0,$$

(observemos que esto es cierto para $p < \infty$), por tanto $\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ y $\lambda \ll \mu$, pues si

$$\begin{aligned} \mu(A) = 0 &\Rightarrow I_A = 0 \text{ c.s.} \Rightarrow I_A \approx 0 \\ &\Rightarrow \lambda(A) = \phi(I_A) = 0, \end{aligned}$$

se sigue del *Teorema de Radon-Nikodym* que existe $g \in L_1$, tal que

$$\phi(I_A) = \lambda(A) = \int I_A g \, d\mu,$$

para todo A medible. Ahora si demostramos que $g \in L_q$ hemos terminado, pues en tal caso $T(g) = T_g \in L_p^*$ y $\phi(f) = T_g(f)$, para $f = I_A$, por tanto por linealidad para $f \in \tilde{\mathcal{S}}$ y por densidad para toda $f \in L_p$.

Veamos entonces que $g \in L_q$, lo cual es obvio si es acotada, pues μ es finita y por lo mismo $g_n = gI_{E_n} \in L_q$, para $E_n = \{|g| \leq n\}$. Ahora bien para cada $B \in \mathcal{A}$

$$\phi(I_{B \cap E_n}) = \int I_{B \cap E_n} g \, d\mu = \int I_B g_n \, d\mu,$$

y por el Lema (6.4.2), $\|g_n\|_q \leq \|\phi\|$, por tanto $\sup \|g_n\|_q < \infty$ y como $|g_n| \uparrow |g|$, se sigue del Lema (6.4.3) que $g \in L_q$.

Caso II.- μ es σ -finita y $1 \leq p < \infty$.

Es una simple consecuencia del caso anterior, de (6.4.5), (6.4.6) y del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L_q(\lambda) & \xrightarrow{T} & L_p(\lambda)^* & & g & \longrightarrow & Tg \\ \Phi_q \downarrow & & \uparrow \Phi_p^* & & \downarrow & & \uparrow \\ L_q(\mu) & \xrightarrow{T} & L_p(\mu)^* & & gh^{1/q} & \longrightarrow & Tgh^{1/q} \end{array}$$

pues para cada $f \in L_p(\lambda)$ y $1 < p, q < \infty$

$$\begin{aligned} \Phi_p^*[T_{gh^{1/q}}](f) &= T_{gh^{1/q}}(fh^{1/p}) = \int fh^{1/p}gh^{1/q} d\mu \\ &= \int fgh d\mu = \int fgh d\lambda = T_g(f), \end{aligned}$$

(para $q = \infty$, $p = 1$ y se sigue del mismo modo) y hemos demostrado (b) y parte de (a).

Caso III.- Veamos ahora el caso general de (a), para ello consideremos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{A} : (B, \mathcal{A}_B, \mu_B), \text{ es } \sigma\text{-finito}\},$$

entonces por el caso anterior y el Lema (6.4.4), para cada $A \in \mathcal{C}$, existe $g_A \in L_q$, que se anula fuera de A , tal que para toda $f \in L_p$ (para $p < \infty$)

$$\phi(fI_A) = \int fg_A d\mu, \quad \|g_A\|_q \leq \|\phi\|,$$

y si consideramos una sucesión $C_n \in \mathcal{C}$, tal que

$$\|g_{C_n}\|_q \uparrow \sup\{\|g_A\|_q : A \in \mathcal{C}\} = k \leq \|\phi\| < \infty,$$

entonces $C = \cup C_n \in \mathcal{C}$. Demostremos que las funciones g_A se solapan bien, que $\|g_C\|_q$ alcanza el supremo k y que $g_C \in L_q$ satisface el resultado.

Si $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subset B$, entonces para cada $f \in L_p$

$$\int fg_A d\mu = \phi(fI_A) = \phi(fI_A I_B) = \int fI_A g_B d\mu,$$

por lo que $T(g_A) = T(I_A g_B)$ y como T es inyectiva, $g_A = g_B I_A$ c.s. De esto se sigue por un lado que $\|g_A\|_q \leq \|g_B\|_q$ y por tanto como $C_n \subset C$

$$\|g_{C_n}\|_q \leq \|g_C\|_q \leq k \quad \Rightarrow \quad \|g_C\|_q = k \quad \Rightarrow \quad \|g_B\|_q \leq \|g_C\|_q \quad \forall B \in \mathcal{C},$$

y por otro que para $A, D \in \mathcal{C}$ disjuntos, $g_{A \cup D} I_A = g_A$ c.s. y $g_{A \cup D} I_D = g_D$ c.s. y por tanto $g_{A \cup D} = g_A + g_D$ c.s., pero además para $q < \infty$

$$|g_{A \cup D}|^q = |g_A|^q + |g_D|^q \text{ c.s.} \quad \Rightarrow \quad \|g_{A \cup D}\|_q^q = \|g_A\|_q^q + \|g_D\|_q^q,$$

de donde se sigue que para todo $D \in \mathcal{C}$ disjunto con C , $g_D = 0$ c.s., pues

$$\|g_C\|_q^q \leq \|g_C\|_q^q + \|g_D\|_q^q = \|g_{C \cup D}\|_q^q \leq \|g_C\|_q^q,$$

por tanto $g_C \in L_q$ satisface el resultado, pues si $f \in L_p$ entonces

$$\phi(f) = \phi(f I_C) + \phi(f I_{C^c}) = \int f g_C d\mu,$$

pues si llamamos $h = f I_{C^c} \in L_p$, $\phi(h) = 0$, ya que $D = \{h \neq 0\}$ es σ -finito, por tanto $C, D \in \mathcal{C}$ y son disjuntos, por tanto $g_D = 0$ c.s. y

$$\phi(h) = \phi(h I_D) = \int h g_D d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

Corolario 6.4.8 Para $1 < p < \infty$, los espacios L_p son reflexivos.

Demostración. Para q el conjugado de p , tenemos los isomorfismos $T_p: L_p \rightarrow L_q^*$ y $T_q: L_q \rightarrow L_p^*$ y para la isometría natural $\pi: L_p \rightarrow L_p^{**}$, $\pi = (T_q^*)^{-1} \circ T_p$, es decir $T_q^* \circ \pi = T_p$, pues si $f \in L_p$ y $g \in L_q$,

$$\begin{aligned} T_p(f)(g) &= \int f g d\mu = T_q(g)(f) = \hat{f}(T_q(g)) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow T_p(f) &= \hat{f} \circ T_q = T_q^*(\hat{f}) = T_q^*[\pi(f)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Veamos algunos contraejemplos relacionados con la isometría de (6.4.1).

Ejemplo 6.4.9 Veamos que para $p = 1$ la isometría entre L_∞ y L_1^* no es necesariamente sobre si el espacio no es σ -finito. Sea $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ con μ la medida de contar y

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ó } A^c \text{ es numerable}\},$$

en cuyo caso si $f \in L_1$, el medible $\{f \neq 0\}$ es σ -finito por (2.4.24), pág.103, por tanto finito ó numerable y para $P = (0, \infty)$ y $N_f = \{f \neq 0\}$, $P \cap N_f \in \mathcal{A}$ y podemos definir

$$\phi: L_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_{P \cap N_f} f d\mu,$$

(donde observemos que el conjunto en el que integramos debe ser medible). Veamos que ϕ es lineal

$$\begin{aligned}\phi(f+g) &= \int_{P \cap N_{f+g}} f+g = \int_{P \cap (N_f \cup N_g)} f+g \\ &= \int_{P \cap (N_f \cup N_g)} f + \int_{P \cap (N_f \cup N_g)} g = \int_{P \cap N_f} f + \int_{P \cap N_g} g,\end{aligned}$$

y continua, pues es acotada

$$|\phi(f)| \leq \int_{P \cap N_f} |f| d\mu \leq \|f\|_1,$$

por tanto $\|\phi\| \leq 1$. Sin embargo no existe ninguna $g \in L_\infty$, tal que

$$\phi(f) = \int fg d\mu,$$

pues en caso contrario tomando $f = I_{\{a\}} \in L_1$,

$$g(a) = \int fg d\mu = \phi(f) = \int_{P \cap \{a\}} f,$$

que vale 0 si $a \leq 0$ y 1 si $a > 0$, es decir $g = I_{(0, \infty)}$, pero $(0, \infty)$ no es medible.

Veamos ahora que para $p = \infty$ el resultado no es válido aunque el espacio sea σ -finito como lo es $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], m)$. En este caso se tiene que $\mathcal{C}[0, 1] \subset L_\infty$ y dada $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}[0, 1]^*$, $\tilde{\phi}(f) = f(0)$, existe por el Teorema de Hahn–Banach (6.3.7), pág.257, $\phi \in L_\infty^*$, tal que $\phi(f) = f(0)$ para toda $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ y para esta ϕ no puede existir $g \in L_1$, tal que $\phi(f) = \int fg dm$, pues tomando una sucesión $f_n \in \mathcal{C}[0, 1]$, con $f_n(0) = 1$, $f_n = 0$ en $[1/n, 1]$ y lineal en $[0, 1/n]$, tendríamos que $f_n \downarrow 0$ c.s. y por el TCD $\int f_n g \rightarrow 0$, mientras que $\phi(f_n) = 1$.

Ejercicios

Ejercicio 6.4.1 Sea $g \in L_\infty$, demostrar que para $1 \leq p < \infty$, si $f \in L_p$, $gf \in L_p$, que la aplicación $G: L_p \rightarrow L_p$, $G(f) = gf$, es lineal y continua y que $\|G\| = \|g\|_\infty$. (Sol.)

6.5. Tipos de convergencias

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ funciones medibles. En esta lección consideraremos distintas nociones de convergencia de f_n a f y estudiaremos sus relaciones.

Definición. Diremos que $f_n \rightarrow f$ *casi seguro* (c.s) si

$$\mu\{x \in \Omega : f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\} = 0.$$

Diremos que $f_n \rightarrow f$ *casi uniformemente* si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f_n converge uniformemente a f en A y $\mu(A^c) < \epsilon$.

Diremos que $f_n \rightarrow f$ en *medida* si para todo $\epsilon > 0$

$$\mu\{|f_n - f| \geq \epsilon\} \rightarrow 0.$$

Para $0 < p \leq \infty$ diremos que $f_n \rightarrow f$ (en \mathcal{L}_p) si las $f_n, f \in \mathcal{L}_p$ y $d_p(f_n, f) \rightarrow 0$.

Definición. Diremos que f_n es *de Cauchy casi seguro* si

$$\mu\{x \in \Omega : f_n(x) \text{ no es de Cauchy}\} = 0.$$

Diremos que f_n es *de Cauchy casi uniformemente* si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que f_n es de Cauchy uniformemente en A y $\mu(A^c) < \epsilon$.

Diremos que f_n es *de Cauchy en medida* si para todo $\epsilon > 0$

$$\mu\{|f_n - f_m| \geq \epsilon\} \rightarrow 0,$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$.

Veamos algunas propiedades de la convergencia en medida.

Proposición 6.5.1 (Ver Munroe, p.201). (a) Si f_n converge en medida a f y a g , entonces $f = g$ c.s.

(b) Si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en medida, entonces $f_n + g_n \rightarrow f + g$ en medida.

(c) Si $f_n \rightarrow 0$ y $g_n \rightarrow 0$ en medida, entonces $f_n g_n \rightarrow 0$ en medida.

(d) Si $f_n \rightarrow 0$ en medida, g es medible y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f_n g \rightarrow 0$ en medida.

(e) Si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en medida, y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f_n g_n \rightarrow f g$ en medida.

Veamos ahora algunas de la convergencia en \mathcal{L}_p .

Proposición 6.5.2 (Ver Munroe, p.218).

(a) Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces para cualesquiera $1 \leq p \leq q \leq \infty$,

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{L}_q \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ en } \mathcal{L}_p.$$

(b) Si $1 \leq p, q \leq \infty$ son conjugados, $f_n \rightarrow f$ (\mathcal{L}_p) y $g \in \mathcal{L}_q$, entonces $f_n g \rightarrow f g$ (\mathcal{L}_1).

El siguiente resultado es una simple consecuencia de la *desigualdad de Tchebycheff* (2.4.23), pág.103.

Proposición 6.5.3 Si $f_n \rightarrow f$ (\mathcal{L}_p), para un $0 < p < \infty$, entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Ejemplo 6.5.4 Pueden existir sucesiones $f_n \in \mathcal{L}_p$ que converjan uniformemente a una $f \in \mathcal{L}_p$ y sin embargo no converjan en \mathcal{L}_p , como

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m), \quad f_n = (1/n)I_{[0,n]},$$

sin embargo si $\mu(\Omega) < \infty$, esto no ocurre.

Proposición 6.5.5 (Ver Bartle, p.67). Sea $\mu(\Omega) < \infty$, $f_n \in \mathcal{L}_p$, para un $0 < p < \infty$. Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente entonces $f \in \mathcal{L}_p$ y $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .

Ejemplo 6.5.6 Por otra parte es posible que $f_n, f \in \mathcal{L}_p$, $f_n \rightarrow f$ puntualmente, y por tanto c.s. y sin embargo no se de la convergencia en \mathcal{L}_p —aunque $\mu(\Omega) < \infty$ —, como en

$$([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], m), \quad f_n = nI_{(0,1/n)},$$

sin embargo si la sucesión está dominada por una función de \mathcal{L}_p , esto no ocurre.

Proposición 6.5.7 Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$ tal que $f_n \rightarrow f$ c.s. Si existe $g \in \mathcal{L}_p$ tal que $|f_n| \leq g$, entonces $f \in \mathcal{L}_p$ y $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .

Ejemplo 6.5.8 Cabe pensar si la convergencia en \mathcal{L}_p implica la c.s., pero no es así:

$$E_1 = [0, 1], \quad E_2 = [0, 1/2], \quad E_3 = [1/2, 1], \quad E_4 = [0, 1/3], \\ E_5 = [1/3, 2/3], \quad E_6 = [2/3, 1], \dots$$

y consideremos la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y las funciones

$$f = 0, \quad f_n = I_{E_n},$$

entonces aunque f_n no converge puntualmente en ningún punto, podemos tomar subsucesiones de f_n que si convergen.

Proposición 6.5.9 *Si $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente, entonces $f_n \rightarrow f$ en medida y $f_n \rightarrow f$ c.s.*

Ejemplo 6.5.10 El recíproco es falso como prueba el siguiente ejemplo (ver ASH, p.95): Consideremos en $[0, \infty)$ la medida de Lebesgue y las funciones

$$f = 0, \quad f_n = I_{[n, n+1/n]}.$$

Sin embargo si es cierto el siguiente resultado, del que la parte correspondiente a la convergencia c.s. se debe a RIESZ.

Proposición 6.5.11 *Si $f_n \rightarrow f$ en medida, entonces existe una subsucesión $f_{n_k} \rightarrow f$ casi uniformemente y por tanto $f_{n_k} \rightarrow f$ en medida y $f_{n_k} \rightarrow f$ c.s.*

Como consecuencia de esto se tiene el apartado (c) del siguiente resultado, en el que se prueba que la “completitud” vista para \mathcal{L}_p , es válida para todas las convergencias.

Teorema 6.5.12 (a) *Para $0 < p \leq \infty$, sean $f_n \in \mathcal{L}_p$, entonces f_n es de Cauchy en \mathcal{L}_p si y sólo si existe $f \in \mathcal{L}_p$ tal que $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .*

(b) *f_n es una sucesión de Cauchy c.s. si y sólo si existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ c.s.*

(c) *f_n es una sucesión de Cauchy en medida si y sólo si existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ en medida.*

(d) *f_n es una sucesión de Cauchy casi uniformemente si y sólo si existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.*

En (6.5.3) hemos visto que la convergencia \mathcal{L}_p implica la convergencia en medida. En general el recíproco es falso, sin embargo sí es cierto cuando la convergencia es dominada.

Esto puede probarse utilizando (6.5.7) y (6.5.11).

Teorema 6.5.13 *Sea $0 < p < \infty$ y $f_n \in \mathcal{L}_p$. Si $f_n \rightarrow f$ en medida y existe $g \in \mathcal{L}_p$ tal que $|f_n| \leq g$, entonces $f \in \mathcal{L}_p$ y $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .*

Como consecuencia de esto a su vez tenemos una versión del teorema de la convergencia dominada, pág.98.

Teorema 6.5.14 *Sea $|f_n| \leq g$ con $g \in \mathcal{L}_1$. Si $f_n \rightarrow f$ en medida, entonces $f \in \mathcal{L}_1$ y*

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

En cuanto a la convergencia \mathcal{L}_∞ tenemos lo siguiente.

Teorema 6.5.15 *Sea $\mu(\Omega) < \infty$. Si $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_∞ , entonces $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p para todo $0 < p \leq \infty$.*

A continuación vemos unas propiedades que caracterizan la convergencia en \mathcal{L}_p . Podemos observar que las dos últimas se satisfacen cuando la sucesión f_n está dominada por una función de \mathcal{L}_p . Denotaremos para cada $f_n \in \mathcal{L}_p$

$$\lambda_n(A) = \int_A |f_n|^p d\mu.$$

Teorema De convergencia de Vitali 6.5.16 *(Ver Bartle, p.76). Sea $1 \leq p < \infty$ y $f_n, f \in \mathcal{L}_p$. Entonces $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p si y sólo si se verifican las condiciones:*

- (a) $f_n \rightarrow f$ en medida.
- (b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) < \infty$ y $\lambda_n(B) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < \delta$ entonces $\lambda_n(A) < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente es una útil caracterización de la convergencia c.s. que nos permitirá dar un recíproco parcial de (6.5.9) para μ finita.

Lema 6.5.17 Sea $\mu(\Omega) < \infty$. Entonces $f_n \rightarrow f$ c.s. si y sólo si para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left[\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \epsilon\} \right] = 0.$$

Teorema 6.5.18 (a) **De Egoroff.** Sea $\mu(\Omega) < \infty$. Si $f_n \rightarrow f$ c.s. entonces $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.

(b) Sea $|f_n| \leq g$ y $g \in \mathcal{L}_1$. Si $f_n \rightarrow f$ c.s. entonces $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.

(c) **De Lebesgue.** Si $\mu(\Omega) < \infty$ ó existe $g \in \mathcal{L}_1$ tal que $|f_n| \leq g$, entonces $f_n \rightarrow f$ c.s. implica $f_n \rightarrow f$ en medida.

Por último damos una caracterización análoga a (6.5.17) para sucesiones de Cauchy c.s., que nos será muy útil cuando estudiemos las leyes de los grandes números.

Teorema 6.5.19 Sea $\mu(\Omega) < \infty$. Entonces f_n es de Cauchy c.s. si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left[\bigcup_{j,k=n}^{\infty} \{|f_k - f_j| \geq \epsilon\} \right] = 0.$$

6.6. Aplicaciones que conservan la medida

Definición. Sea $T : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ medible, entonces llamamos *medida imagen* por T de una medida μ en \mathcal{A} , a la medida $T_*\mu = \mu_T$ en \mathcal{A}' , tal que para cada $B \in \mathcal{A}'$

$$\mu_T(B) = \mu(T^{-1}(B)).$$

Proposición 6.6.1 Sea $T : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ medible y μ una medida en \mathcal{A} . Entonces para cada función $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ medible y cada $B \in \mathcal{A}'$ se tiene

$$\int_B f d\mu_T = \int_{T^{-1}(B)} (f \circ T) d\mu.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Demostración. Para indicadores se sigue de la definición, para funciones simples por aditividad, para funciones no negativas por el teorema de la convergencia monótona, pág.93 y para funciones con integral del caso anterior. ■

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Diremos que una aplicación medible $T : \Omega \rightarrow \Omega$ es una *transformación conservando la medida* si es biyectiva, su inversa es medible y $\mu = \mu_T$, es decir que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\mu(A) = \mu[T(A)].$$

Ejemplo 6.6.2 Ejemplos de tales transformaciones en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$ son las traslaciones, las rotaciones, las reflexiones,...

Antes de enunciar el resultado fundamental de esta lección daremos un lema que es un paso importante hacia él.

Teorema Ergódico maximal 6.6.3 Sea T una transformación conservando la medida en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible e integrable y $f_{n+1} = T^*(f_n)$, para $f_1 = f$ y $T^*(f) = f \circ T$. Entonces

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : \sum_{i=1}^n f_i(x) \geq 0\}} f d\mu \geq 0.$$

Teorema Ergódico puntual 6.6.4 Sea T una transformación conservando la medida en el espacio σ -finito $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y sea $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible e integrable y $f_{n+1} = T^*(f_n)$, para $f_1 = f$ y $T^*(f) = f \circ T$. Entonces existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible e integrable tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \rightarrow g(x) \quad \text{c.s.}, \quad T^*(g) = g \quad \text{c.s.},$$

y además si $\mu(\Omega) < \infty$ entonces $\int g d\mu = \int f d\mu$.

Veremos mas adelante que esta función g está íntimamente relacionada con el concepto de esperanza condicionada (ver PARTHASARATHY, p.254).

Definición. Diremos que una transformación T conservando la medida es *ergódica* si para cada $E \in \mathcal{A}$ tal que $T(E) = E$, se tiene que $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E^c) = 0$.

Proposición 6.6.5 T es ergódica si y sólo si cada $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que $T^*(f) = f$ c.s. es constante c.s.

Como consecuencia tenemos que si T es ergódica y $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible con integral finita entonces para $f_{n+1} = T^*(f_n)$ y $f_1 = f$ se tiene, si $\mu(\Omega) = \infty$ que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \rightarrow 0 \quad \text{c.s.}$$

pues $g = 0$ es la única constante integrable, y si $\mu(\Omega) < \infty$ que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \rightarrow \frac{\int f d\mu}{\mu(\Omega)} \quad \text{c.s.}$$

expresión que se conoce con el nombre de *Hipótesis ergódica de Boltzman* (ver YOSIDA, p.380).

Observemos que en el segundo caso el límite es el valor medio de f respecto de la probabilidad que μ induce en Ω , es decir en términos probabilísticos la esperanza de f . Esta es una de las formas de las leyes de los grandes números que estudiaremos mas adelante. Volveremos a

hablar de la *Teoría Ergódica* en el siguiente tema, para funciones de cuadrado integrable finito.

Por último consideraremos un resultado de muy curiosas consecuencias, aunque muy sencillo de demostrar.

Definición. Dada una transformación conservando la medida T y un $A \in \mathcal{A}$ diremos que $x \in A$ es *recurrente* a A si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in A$.

Teorema de Recurrencia de Poincare 6.6.6 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y T una transformación conservando la medida. Entonces para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que casi seguro todo punto de A es recurrente.*

Demostración. Sean $B_n = \{x \in A : T^n(x) \notin A\} \in \mathcal{A}$ y $B = \bigcap B_n$ los puntos no recurrentes de A . Entonces los conjuntos $T^n(B)$ son disjuntos pues si $n, m \in \mathbb{N}$ y $x, y \in B$ son tales que

$$T^n(y) = T^{n+m}(x) \Rightarrow y = T^m(x) \Rightarrow y \in A^c \subset B^c,$$

y como $\mu[T^n(B)] = \mu(B)$ y $\mu(\Omega) < \infty$, $\mu(B) = 0$. ■

6.7. Bibliografía y comentarios

Para la confección del presente tema hemos hecho uso de los siguientes libros:

- ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.
 BARTLE, R.G.: “*The elements of integration*”. John Wiley, 1966.
 COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.
 MUNROE, M.E.: “*Measure and integration*”, Addison Wesley, 1971.
 TAYLOR, S.J.: “*Introduction to measure and integration*”. Cambridge Univ. Press, 1973.
 CORNFELD, I.P.; FOMIN, S.V.; SINAY, Y.G.: “*Ergodic Theory*”. Springer-Verlag, 1982.

El primer espacio L_p que se estudió fue, en el contexto de la recién creada Teoría de integración de Lebesgue, $L_2[a, b]$ para $[a, b] \subset \mathbb{R}$, del que F. RIESZ y E. FISCHER demostraron en 1907 que era completo e isomorfo a l_2 . Las propiedades fundamentales de todos los espacios

$L_p[a, b]$ (incluido el teorema del isomorfismo $L_q \sim L_p^*$), para $1 < p < \infty$, lo estudió en 1910

RIESZ, F.: “*Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*”. Math. Annalen, **69**, 449–497, 1910.

El primero en demostrar el teorema de isomorfismo $L_\infty[a, b] \sim L_1[a, b]^*$, fue en 1919

STEINHAUS, H.: “*Additive und stetige Funktionaloperationen*”, Math. Zeit., **5**, 186–221, 1919.

En 1773 el francés LAGRANGE (1736–1813) dio una primera versión de la desigualdad de Hölder, en el caso $p = q = 2$ y para sumas finitas ($n=3$), el caso finito para n arbitrario la probó en 1821 el francés A. CAUCHY (1789–1857). La versión para integrales de este mismo caso $p = q = 2$ fue probada en 1859 por BUNIAKOWSKY y en 1885 por el alemán K.H.A. SCHWARZ (1843–1921) (en particular este caso $p = q = 2$ se conoce como *desigualdad de Cauchy-Schwarz* y expresa la propiedad geométrica de que la esfera unidad de una norma que deriva de un producto interior es, en cada plano pasando por el origen, una elipse). El caso general, para p, q conjugados, lo obtuvieron de forma independiente HÖLDER y ROGERS para sumas

HÖLDER, O.: “*Über einen Mittelwertsatz*”. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 38–47, 1889.

y para integrales F.RIESZ en 1910. (Para los datos anteriores y otros remitimos al lector a las páginas 372 y 387 del

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol,I*”. John Wiley-Interscience Pub., 1958.

En (6.5.3) hemos visto que la convergencia en \mathcal{L}_p implica la convergencia en medida. Un resultado inverso lo hemos visto en (6.5.13) y como consecuencia en (6.5.14) hemos probado una generalización del teorema de la convergencia dominada, pág.98. Respecto de esto vamos a hacer un par de comentarios.

Por una parte dijimos que el teorema de la convergencia dominada era uno de esos resultados que distinguían el uso de las medidas aditivas frente a las σ -aditivas, pues en las primeras no es cierto en general. Sin embargo sí es cierto el siguiente teorema de la convergencia dominada que puede verse en la página 125 del

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol,I*”. John Wiley-Interscience Pub., 1958.

para medidas aditivas y funciones medibles que valoran en un espacio de Banach.

Teorema 6.7.1 *Para $1 \leq p < \infty$ y $g \in \mathcal{L}_p$ se tiene que si $f_n \in \mathcal{L}_p$ y $|f_n| \leq g$, entonces $f_n \rightarrow f$ en medida si y sólo si $f \in \mathcal{L}_p$ y $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_p .*

Por otra parte fue VITALI el primero en investigar el resultado mas general que tuviera como consecuencia la permutación de límite e integral de una sucesión de funciones medibles. En 1907 publica el trabajo

VITALI, G.: “Sull’integrazione per serie”. Rend. Circ. Mat. de Palermo, 23, 137–155, 1907.

en el que se encuentra (6.5.16) y el siguiente resultado cuya demostración puede encontrarse en la p.212 del MUNROE ó en la p.178 del TAYLOR.

Teorema 6.7.2 *Sean $f, f_n \in \mathcal{L}_1$. Entonces $f_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_1 si y sólo si*

- (a) $f_n \rightarrow f$ en medida.
- (b) *Dada $A_n \in \mathcal{A}$, con $A_n \downarrow \emptyset$, se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$*

$$\int_{A_n} |f_m| d\mu < \epsilon.$$

En cuanto a la convergencia en medida, llamada en *probabilidad estocástica* en Teoría de Probabilidades, es una noción clásica en Matemáticas, apareciendo implícitamente en los primeros resultados sobre probabilidades. Esta convergencia es la correspondiente a una topología que vamos a analizar.

Denotemos con \mathcal{L} el espacio de las funciones medibles y con L el de las clases de equivalencia de funciones que coinciden casi seguro. Consideremos en L las siguientes topologías:

Un conjunto $C \subset L$ es *cerrado* si dados $f_n \rightarrow f$ c.s., tales que $f_n \in C$, entonces $f \in C$. A esta la llamaremos de la *convergencia puntual*.

En el resultado siguiente definimos otra topología que llamaremos de la convergencia en medida.

Teorema 6.7.3 *Dado un espacio $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y L existe una base de entornos para una topología en L definidos para cada $f \in L$, $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \infty$, y $\epsilon, \delta > 0$, de la forma*

$$V(f, E, \epsilon, \delta) = \{g \in L : \mu\{x \in E : |f - g| \geq \epsilon\} \leq \delta\}.$$

Además si μ es σ -finita se obtiene la misma topología si cambiamos μ por otra medida σ -finita con los mismos conjuntos nulos que μ .

El siguiente resultado nos da la relación entre ambas topologías —no de las convergencias c.s. y en medida— y complementa a (6.2.13).

Teorema 6.7.4 *Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es σ -finito, entonces las dos topologías anteriores definidas en L coinciden, y pueden definirse por una métrica respecto de la que L es completo.*

De la demostración de este se sigue fácilmente el siguiente, que nos explica por qué lleva el nombre que lleva la segunda topología definida en L .

Corolario 6.7.5 *Si $\mu(\Omega) < \infty$ y d es la métrica que se construye en el resultado anterior, que en este caso es*

$$d(f, g) = \int \left[\frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \right] d\mu,$$

entonces $d(f_n, f) \rightarrow 0$ si y sólo si $f_n \rightarrow f$ en medida.

Para estos tres resultados remitimos al lector a las páginas 98–100 del libro

SEGAL, I.E. AND KUNZE, R.A.: “*Integrals and operators*”. Springer–Verlag, 1978.

El teorema de Egoroff aparece en el trabajo de

EGOROFF, P.TH.: “*Sur les suites des fonctions mesurables*”. C.R. Acad.Sci. Paris, 152, 244–246, 1911.

Este resultado tiene otra forma debida a LUSIN que puede encontrarse en la p.19 del libro

SACKS, S.: “*Theory of the integral*”, 1937. Dover, 1964.

El ejemplo citado en el tema, de un espacio de Banach isomorfo a su bidual pero no reflexivo, es de JAMES, R.C. y se encuentra en la p. 25 del libro

LINDENSTRAUSS, J. AND TZAFRIRI, L.: “*Classical Banach Spaces I y II*”. Springer–Verlag, 1996.

El estudio de las transformaciones conservando la medida, surgió a consecuencia de ciertas consideraciones en mecánica estadística: Supongamos que tenemos un sistema de k partículas cuyo estado queda descrito por un punto de una variedad \mathcal{V} de dimensión $6k$ —cada partícula viene determinada por su posición (3 coordenadas) y su velocidad o su momento (otras 3 coordenadas)—. De este modo la historia de las k partículas es una trayectoria en \mathcal{V} , la cual es una curva integral de un cierto campo tangente definido sobre dicha variedad. El flujo T_t de dicho campo nos da para cada punto x de la variedad y cada instante t , el punto $T_t(x)$ en el que se encuentra el punto x después del tiempo t . Uno de los resultados básicos en mecánica estadística, debido a LIOUVILLE establece que en esa variedad tenemos una medida canónica que el flujo T_t deja invariante.

En la práctica k es tan grande que no es posible observar en todo momento todas las partículas del sistema, por lo que preguntamos si es posible dar la probabilidad de que en el instante t el estado del sistema pertenezca a un cierto subconjunto $E \subset V$.

Para ser mas precisos T_t es un grupo uniparamétrico, por tanto

$$T_0 = id, \quad T_{t+r} = T_t \circ T_r,$$

y aunque dado un $x \in \mathcal{V}$ es imposible en la práctica conocer todos los $T_t(x)$, para los t de un intervalo, sí es posible conocer los puntos cada cierto tiempo r , es decir si llamamos $x_1 = x$ es posible conocer los puntos

$$x_2 = T_r(x), \quad x_3 = T_{2r}(x) = T_r[T_r(x)] = T_r(x_2), \dots$$

que si llamamos $T = T_r$ no es otra cosa que la sucesión

$$x_{n+1} = T_{nr}(x) = T(x_n),$$

y T es una transformación conservando la medida. Ahora si para cada $n \in \mathbb{N}$ contamos cuantos de los x_1, \dots, x_n están en E y llamamos a este número $x(n)$, entonces si consideramos que el recinto en el que se desarrollan las partículas es acotado (por ejemplo que se mantienen en la atmósfera terrestre, es decir en la capa gaseosa que rodea la tierra) y consideramos fija la energía total de las partículas (en particular las velocidades de las partículas están acotadas), el espacio de fases está en un compacto y por tanto tiene medida finita, en cuyo caso si T es ergódica podemos estimar la probabilidad de que las partículas definan un punto que esté en E , pues

$$\frac{x(n)}{n} \rightarrow P(E).$$

Del mismo modo si consideramos una función f medible en el espacio de fases, que representa alguna medición física de las partículas, podemos conocer su valor medio sin más que considerar su valor medio discreto, pues

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[T^i(x)] \rightarrow \frac{\int f d\mu}{\mu(\Omega)} \quad \text{c.s.}$$

El teorema ergódico puntual (6.6.4) fue demostrado por

BIRKHOFF, G.D.: “*Proof of the ergodic theorem*”. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 17, 656–660, 1931.

y supuso el que la *Hipótesis Ergódica de Maxwell–Boltzman* de la teoría cinética de los gases, se convirtiera en una consecuencia rigurosa en el marco de la Teoría de la medida.

Otros textos que traten esta teoría son:

YOSIDA, K.: “*Functional Analysis*”. Springer–Verlag, 1974.

que lo estudia en el marco de los procesos de Markov. El

CORNFELD, I.P.; FOMIN, S.V.; SINAY, Y.G.: “*Ergodic Theory*”. Springer–Verlag, 1982.

que lo hace en el marco de las variedades diferenciables. Y el

PETERSEN, K.: “*Ergodic Theory*”. Cambridge Univ.Press, 1983.

Por último remitimos al lector a la p.94 del

ARNOLD, V.I.: “*Mecánica clásica, métodos matemáticos*”. Ed. Paraninfo, 1983.

en la que se da otra versión del *teorema de Recurrencia de Poincare* y se comenta la siguiente paradójica consecuencia de este y el *teorema de Liouville*:

“*Si abrimos un tabique que separe una cámara que contiene un gas y una cámara en la que se ha hecho el vacío, entonces después de un cierto tiempo, las moléculas del gas se reunirán en la primera cámara*”.

Fin del Capítulo 6

Capítulo 7

Espacios de Hilbert

7.1. Espacios prehilbertianos

Definición. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Llamamos *producto interior* sobre un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathcal{E} a toda función

$$\langle, \rangle: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K},$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

- i) $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si $x = 0$.
- ii) $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$, para $x, y, z \in \mathcal{E}$ y $a, b \in \mathbb{K}$.
- iii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$, para $x, y \in \mathcal{E}$.

Llamaremos *espacio prehilbertiano* a todo \mathbb{K} -espacio vectorial \mathcal{E} dotado de un producto interior \langle, \rangle .

Dados x, y en un espacio prehilbertiano \mathcal{E} , se tiene que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle,$$

con la desigualdad estricta si x e y son independientes, lo cual implica que el discriminante del polinomio cuadrático es no positivo, es decir

para $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

que es la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*, y como consecuencia de ella es fácil demostrar que $\|\cdot\|$ define una norma¹ en \mathcal{E} .

Definición. Llamaremos *espacio de Hilbert* a todo espacio prehilbertiano completo para la norma que define

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Aunque en general distinguiremos en cada resultado si el espacio que consideramos es de Hilbert ó prehilbertiano, podríamos restringir nuestro estudio a los espacios de Hilbert sin pérdida de generalidad, pues todo espacio prehilbertiano es isomorfo a un subespacio denso de un Hilbert —en el sentido de que hay un isomorfismo lineal que conserva el producto interior—. Además si existen dos Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 de los que el nuestro es isomorfo a sendos subespacios densos en ellos, entonces \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son isomorfos. (Ver la Nota (6.2.17), pág.251).

Definición. Dado un espacio prehilbertiano \mathcal{E} , llamaremos *compleción de \mathcal{E}* al espacio de Hilbert \mathcal{H} —determinado salvo isomorfismos— del que hablamos en el párrafo anterior.

La existencia de tal compleción podemos verla utilizando el hecho de que \mathcal{E}^{**} es completo (ver (6.3.4), pág.256), por tanto cada cerrado suyo será completo. Como \mathcal{E} está inmerso isométricamente en \mathcal{E}^{**} por

$$\pi: x \in \mathcal{E} \longrightarrow \hat{x} \in \mathcal{E}^{**}, \quad \hat{x}(f) = f(x),$$

(ver la Nota (6.3.6), pág.256), basta considerar la clausura \mathcal{H} de la imagen de \mathcal{E} por dicha inmersión en \mathcal{E}^{**} .

Dado un espacio de medida (positiva), $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, el espacio L_2 correspondiente es de Hilbert, pues su norma está inducida por el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu.$$

Además como veremos mas adelante, estos son los únicos espacios de Hilbert.

¹Recordemos que una norma en un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathcal{E} es una aplicación $\|\cdot\|: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$, tal que $\|x\| = 0$ sii $x = 0$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ y $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para λ en el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathcal{E}$.

7.2. Propiedades de los espacios de Hilbert

\mathcal{H} será en esta lección un espacio prehilbertiano sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} .

La desigualdad de Cauchy–Schwarz $\|e_1\|^2\|e_2\|^2 \geq \langle e_1, e_2 \rangle^2$, tiene dos simples consecuencias. Una es que para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en cada subespacio bidimensional los puntos de norma 1 forman una elipse, pues si el subespacio está generado por e_1, e_2 independientes y llamamos $a = \|e_1\|^2$, $b = \langle e_1, e_2 \rangle$ y $c = \|e_2\|^2$

$$1 = \langle xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2 \rangle = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

y como e_1 y e_2 son independientes, $ac > b^2$ y los puntos de coordenadas (x, y) que satisfacen esa ecuación forman una elipse. La otra la exponemos en el siguiente resultado.

Proposición 7.2.1 *La aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ es continua y para cada $x \in \mathcal{H}$, las aplicaciones en \mathcal{H} , $\langle x, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, x \rangle$ son uniformemente continuas.*

La siguiente es una importante caracterización de los espacios prehilbertianos.

Ley del paralelogramo 7.2.2 *Un espacio normado \mathcal{H} es prehilbertiano sii para cada $x, y \in \mathcal{H}$*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

Además en un espacio prehilbertiano podemos recuperar el producto interior conocida la norma.

Igualdad de polarización 7.2.3 *Sea \mathcal{H} prehilbertiano y $x, y \in \mathcal{H}$, entonces*

$$\begin{aligned} 4 \langle x, y \rangle &= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \\ &\quad + i\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ 4 \langle x, y \rangle &= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definición. Diremos que $x, y \in \mathcal{H}$ son *ortogonales*, (y lo denotamos $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$. Para cada subespacio $M \subset \mathcal{H}$, llamaremos *complemento ortogonal* de M al subespacio cerrado de \mathcal{H}

$$M^\perp = \{y \in \mathcal{H} : \forall x \in M, y \perp x\} = \bigcap_{x \in M} \ker \langle x, \cdot \rangle.$$

Un subconjunto $B \subset \mathcal{H}$ se dice *ortogonal* si dados dos puntos distintos $x, y \in B$, es $x \perp y$. Diremos que B es *ortonormal* si además de ortogonal satisface que todo $x \in B$ es de $\|x\| = 1$.

Un simple cálculo demuestra el siguiente resultado

Teorema de Pitágoras 7.2.4 *Para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ ortogonales*

$$\left\| \sum x_i \right\|^2 = \sum \|x_i\|^2.$$

Desde el punto de vista de la teoría de la aproximación los conjuntos ortonormales son de una gran importancia, pues se puede dar una solución explícita al siguiente problema: *Dado un subespacio y un punto exterior a él, encontrar un punto del subespacio que diste lo menos posible del punto exterior.*

Teorema 7.2.5 *Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathcal{H}$ ortonormal y $x \in \mathcal{H}$. Entonces $\|x - \sum a_i e_i\|$ es mínimo sii $a_i = \langle x, e_i \rangle$, para $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Es consecuencia de que la última expresión alcanza el valor mínimo cuando los $b_i = a_i$.

$$\begin{aligned} \|x - \sum b_i e_i\|^2 &= \langle x - \sum b_i e_i, x - \sum b_i e_i \rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum b_i \bar{a}_i - \sum \bar{b}_i a_i + \sum b_i \bar{b}_i \\ &= \|x\|^2 - \sum |a_i|^2 + \sum |b_i - a_i|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición. Dado un subconjunto $B = \{e_i : i \in I\}$ de \mathcal{H} ortonormal, llamaremos *coeficiente i -ésimo de Fourier* de un punto $x \in \mathcal{H}$ relativo a B a $\langle x, e_i \rangle$.

Definición. Dado un subconjunto $B \subset \mathcal{H}$ y una función $f : B \rightarrow [0, \infty]$, llamaremos

$$\sum_{x \in B} f(x),$$

al supremo de todas las sumas finitas $f(x_1) + \cdots + f(x_n)$, donde los $x_i \in B$.

Es fácil demostrar que

$$\sum_{x \in B} f(x) = \int_B f d\mu,$$

en $(B, \sigma(B), \mu)$ donde $\sigma(B)$ es la σ -álgebra generada por los puntos de B y μ es la medida de contar.

Recordemos que $l_2(B) = \mathcal{L}_2(B, \sigma(B), \mu)$.

Como consecuencia de la definición y del teorema de Pitágoras (7.2.4) tenemos el siguiente resultado.

Desigualdad de Bessel 7.2.6 Sea $B \subset \mathcal{H}$ ortonormal y $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$\sum_{y \in B} |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración. Basta demostrar que para cada subconjunto finito $\{b_1, \dots, b_n\} \subset B$ y $c_i = \langle x, b_i \rangle$, $\sum_{i=1}^n |c_i|^2 \leq \|x\|^2$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \sum c_i b_i\|^2 = \langle x - \sum c_i b_i, x - \sum c_i b_i \rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum c_i \langle b_i, x \rangle - \sum \bar{c}_i \langle x, b_i \rangle + \sum |c_i|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum c_i \bar{c}_i - \sum \bar{c}_i c_i + \sum |c_i|^2 = \|x\|^2 - \sum |c_i|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 7.2.7 De aquí se sigue trivialmente que a lo sumo hay una cantidad numerable de $y \in B$ tales que $\langle x, y \rangle \neq 0$ y que $\langle x, \cdot \rangle, \langle \cdot, x \rangle \in l_2(B)$. Por tanto podemos definir la aplicación lineal

$$F : \mathcal{H} \longrightarrow l_2(B), \quad F(x) = \langle x, \cdot \rangle$$

la cual es continua pues por el resultado anterior

$$\|F(x)\|_2 = \left(\sum_{y \in B} |\langle x, y \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|,$$

y $\|F\| \leq 1$. A continuación vemos que si \mathcal{H} es completo F es sobre.

Teorema de Riesz–Fischer 7.2.8 Si \mathcal{H} es de Hilbert y $B \subset \mathcal{H}$ ortonormal, entonces para cada $f \in l_2(B)$ existe un $x \in \mathcal{H}$ tal que $f = \langle x, \cdot \rangle$.

Estos resultados nos caracterizan los conjuntos $\{t_i \in \mathbb{K}, i \in I\}$ que son los *coeficientes de Fourier* de algún punto x de un espacio de Hilbert \mathcal{H} relativos a un subconjunto $B = \{e_i \in \mathcal{H} : i \in I\}$ ortonormal. Ya que (7.2.6) asegura que es necesario que

$$\sum_{i \in I} |t_i|^2 < \infty,$$

mientras que (7.2.8) nos dice que es suficiente.

En (7.2.5) hemos visto que puede darse explícitamente la aproximación óptima de un punto de un espacio prehilbertiano \mathcal{H} relativa al subespacio generado por un subconjunto ortonormal y finito. En general no existe tal caracterización para un conjunto C cualquiera, sin embargo podemos dar la existencia y la unicidad de aproximación óptima de un punto $x \in \mathcal{H}$ relativa a un subconjunto C que sea *convexo* —es decir tal que $tx + (1-t)y \in C$ para $x, y \in C$ y $t \in [0, 1]$ —, y cerrado.

Teorema 7.2.9 Sea \mathcal{H} prehilbertiano, entonces:

(a) Si $C \subset \mathcal{H}$ es convexo, completo y no vacío, entonces para cada $x \in \mathcal{H}$ existe un único $y \in C$ aproximación óptima de x en C , es decir tal que

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in C\}.$$

(b) Sea C un subespacio cerrado en \mathcal{H} , entonces $y \in C$ es aproximación óptima de $x \in \mathcal{H}$ en C sii $x - y \in C^\perp$. En este caso a y la llamaremos *proyección de x en C* .

Teorema de la proyección 7.2.10 Sea M un subespacio completo de un espacio prehilbertiano \mathcal{H} (ó un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert). Entonces existen únicas transformaciones lineales

$$P : \mathcal{H} \longrightarrow M, \quad Q : \mathcal{H} \longrightarrow M^\perp,$$

tales que:

- (a) Para cada $x \in \mathcal{H}$, $x = P(x) + Q(x)$,
- (b) Para cada $x \in M$, $P(x) = x$ y para cada $x \in M^\perp$, $Q(x) = x$.
- (c) $\|x - P(x)\| \leq \|x - y\|$, para cualesquiera $x \in \mathcal{H}$, $y \in M$.
- (d) Para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2.$$

Como consecuencia de este resultado podemos entender el nombre de complemento ortogonal M^\perp de un subespacio cerrado M en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , pues se tiene que

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp.$$

En \mathcal{H} prehilbertiano podemos definir la aplicación

$$\sigma: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*, \quad \sigma(x) = \sigma_x = \langle \cdot, x \rangle,$$

(obsérvese que en el caso complejo, $\langle x, \cdot \rangle \notin \mathcal{H}^*$), que es isometría pues

$$\|\sigma_x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| : \|y\| \leq 1\} = \|x\|$$

ya que por la desigualdad de Cauchy–Schwartz $|\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \|x\| \leq \|x\|$, y tomando $y = x/\|x\|$ tenemos la otra desigualdad. Pero además tenemos que si \mathcal{H} es de Hilbert, entonces σ es isomorfismo isométrico.

Teorema de Riesz 7.2.11 *Si \mathcal{H} es de Hilbert σ es un isomorfismo y la norma de \mathcal{H}^* viene inducida por el producto interior,*

$$\langle \sigma_x, \sigma_y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

Corolario 7.2.12 *Si \mathcal{H} es de Hilbert entonces \mathcal{H}^* es de Hilbert y \mathcal{H} es reflexivo, es decir la isometría canónica*

$$\pi: x \in \mathcal{H} \rightarrow \hat{x} \in \mathcal{H}^{**}, \quad \hat{x}(\omega) = \omega(x),$$

es sobre.

7.3. Clasificación de los Espacios de Hilbert

Nota 7.3.1 Dado $B \subset \mathcal{H}$ entenderemos por $\langle B \rangle$ el subespacio generado por B y por $s(B)$ el mínimo subespacio cerrado que contiene a B . Es fácil ver que

$$s(B) = \text{Adh } \langle B \rangle.$$

Teorema de ortonormalización de Gram–Schmidt 7.3.2 *Sea \mathcal{H} un espacio prehilbertiano y $A \subset \mathcal{H}$ un subconjunto de vectores independientes. Entonces existe $B \subset \mathcal{H}$ ortonormal tal que $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ y $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.*

Definición. Diremos que $B \subset \mathcal{H}$ es una base ortonormal para \mathcal{H} si B es ortonormal y dado C ortonormal con $B \subset C \subset \mathcal{H}$, entonces $B = C$.

Teorema 7.3.3 *Sea \mathcal{H} de Hilbert y B ortonormal, entonces son equivalentes:*

- (a) B es una base ortonormal.
- (b) $B^\perp = \{0\}$.
- (c) $s(B) = \text{Adh } \langle B \rangle = \mathcal{H}$.
- (d) Para cada $x \in \mathcal{H}$ se tiene²

$$x = \sum_{y \in B} \langle x, y \rangle y = \sum_{y \in B} \sigma_y(x) y.$$

- (e) **Identidad de Parseval.** Para $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{z \in B} \langle x, z \rangle \langle z, y \rangle = \sum_{z \in B} \overline{\sigma_x(z)} \sigma_y(z).$$

- (f) Si $x \in \mathcal{H}$

$$\|x\|^2 = \sum_{z \in B} |\langle x, z \rangle|^2 = \sum_{z \in B} |\sigma_x(z)|^2 = \sum_{z \in B} |\sigma_z(x)|^2.$$

Nos preguntamos ahora si todo espacio prehilbertiano tiene una base ortonormal: Consideremos la familia de todos los conjuntos ortonormales de \mathcal{H} , ordenemos esta familia por inclusión. Como la unión de una colección creciente de conjuntos ortonormales es ortonormal, el *lema de Zorn* garantiza la existencia de un conjunto ortonormal maximal.

Proposición 7.3.4 *Cada espacio prehilbertiano tiene una base ortonormal.*

Además como consecuencia de (7.3.3) tenemos los siguientes resultados.

²La igualdad $x = \sum_{y \in B} \langle x, y \rangle y$ se entiende del siguiente modo: por la desigualdad de Bessel (7.2.6), pág. 285, hay a lo sumo una colección numerable de $y_n \in B$ tales que $\langle x, y_n \rangle \neq 0$, y $x_n = \sum_{i=1}^n \langle x, y_i \rangle y_i \rightarrow x$.

Corolario 7.3.5 *Dos bases ortonormales en un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal.*

Corolario 7.3.6 *Sea \mathcal{H} de Hilbert y $B \subset \mathcal{H}$ ortonormal, entonces:*

- (a) *B es una base ortonormal para el espacio de Hilbert $s(B)$.*
- (b) *Si $x \in \mathcal{H}$ y $P(x)$ es la proyección de x sobre $s(B)$, entonces*

$$P(x) = \sum_{z \in B} \langle x, z \rangle z.$$

Como consecuencia de (7.3.4) y (7.3.5) podemos ahora clasificar todos los posibles espacios de Hilbert.

Teorema 7.3.7 *Sea S un conjunto arbitrario y \mathcal{H} un espacio de Hilbert con una base ortonormal B con $\text{card}(B) = \text{card}(S)$, entonces hay un isomorfismo isométrico entre \mathcal{H} y $l_2(S)$.*

En cuanto a los espacios de Hilbert separables tenemos.

Teorema 7.3.8 *Un espacio de Hilbert \mathcal{H} es separable sii tiene una base ortonormal finita o numerable. Si la base tiene n elementos \mathcal{H} es isomorfo a \mathbb{K}^n y si es numerable \mathcal{H} es isomorfo a $l_2(\mathbb{N})$.*

7.4. Teorema Ergódico en L_2

En (6.6.4), página 273 del tema anterior vimos el teorema ergódico puntual para funciones de L_1 de un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si la función está en L_2 hay una forma alternativa de aquel teorema en el que la convergencia casi seguro es reemplazada por la convergencia en media cuadrática.

Teorema 7.4.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, $T: \Omega \rightarrow \Omega$ una transformación conservando la medida, $f_1 \in L_2$, $f_{n+1} = T^*(f_n) = f_1 \circ T^n$ y

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i,$$

entonces existe $g \in L_2$ tal que $g_n \rightarrow g$ (en L_2) y verifica:

- (i) $T^*(g) = g$ c.s.
- (ii) $\|g\|_2 \leq \|f_1\|_2$.
- (iii) Se tiene $\langle f, g \rangle = \langle f, f_1 \rangle$, para cada $f \in L_2$ tal que $T^*(f) = f$.

Ahora como consecuencia de (7.4.1) y lo visto en el tema anterior, tenemos.

Corolario 7.4.2 En las condiciones anteriores y suponiendo que T es ergódica existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g = c$ c.s. y además

- (i) Si $\mu(\Omega) = \infty$, entonces $g = 0$ c.s.
- (ii) Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_1[T^i(x)] \longrightarrow \frac{1}{\mu(\Omega)} \int f_1 d\mu \quad (L_2).$$

<h2>Bibliografía y comentarios</h2>

Para la confección del presente tema hemos hecho uso de los siguientes libros:

- ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.
DAY, M.M.: “*Normed linear spaces*”. Springer-Verlag, 1973.
MUHKERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.
TAYLOR, S.J.: “*Introduction to measure and integration*”. Cambridge Univ. Press, 1973.
RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”, Tata McGraw-Hill, 1974.

A continuación sugerimos una bibliografía complementaria.

- DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol,I*”. John Wiley-Interscience Pub., 1958.
HALMOS, P.R.: “*Introduction to Hilbert Space*”, 1951. Reed. de Chelsea Pub. Co., 1972.
HALMOS, P.R.: “*A Hilbert Space problem book*”. Van Nostrand, 1967.
HALMOS, P.R.: “*Lectures on ergodic theory*”. Chelsea Pub. Co., 1956.
CORNFELD, I.P.; FOMIN, S.V.; SINAY, Y.G.: “*Ergodic Theory*”. Springer-Verlag, 1982.
PETERSEN, K.: “*Ergodic Theory*”. Cambridge Univ.Press, 1983.
YOSIDA, K.: “*Functional Analysis*”. Springer-Verlag, 1974.
ZAAENEN, A.C.: “*Integration*”. North-Holland, 1967.

En 1888 PEANO define en esencia el concepto de espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Entre 1904 y 1910 D. HILBERT estudia en detalle los espacios l_2 (de sucesiones de cuadrado sumable) y L_2 (de funciones de cuadrado integrable). Aunque HILBERT no habló de espacios infinitamente dimensionales, las ideas básicas estaban en sus estudios a los que llegó a partir de los trabajos sobre ecuaciones integrales de I.FREDHOLM.

Es curioso observar como a pesar del grado de abstracción que en su momento representó el *espacio de Hilbert*, este encontrase rápida aplicación en la moderna Teoría cuántica, de la que recomendamos el siguiente

texto, que son las notas de un curso dado por *Schwartz* en la Universidad de Buenos Aires

SCHWARTZ, L.: “*Matemática y física cuántica*”. Univ. Buenos Aires, 1958.

La axiomatización de los espacios de Hilbert no se hizo hasta 1920 por VON NEUMANN para el caso separable y hasta 1934–35 por LOWIG AND RELICH para el caso general. (Ver DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T., p.372).

La caracterización de los espacios de Hilbert, llamada Ley del paralelogramo aparece en el trabajo

JORDAN, P. AND NEUMANN, J.: “*On inner products in linear metric spaces*”. Ann. of Math., 2, 36, 719–723, 1935.

Uno de los resultados mas importantes en un espacio de Hilbert es la *Identidad de Parseval*, la cual tiene sus raíces en una igualdad para series de potencias dada por PARSEVAL en 1799. Para ver una aplicación de esta desigualdad a la célebre desigualdad isoperimétrica, referimos al lector a la p.322 del libro

BERGER, M. AND GOSTIAUX, B.: “*Differential geometry: Manifolds, curves and surfaces*”. Springer-Verlag, 1988.

ó a la p.211 del libro

PARTHASARATHY, K.R.: “*Introduction to probability and measure*”, McMillan Press, 1980.

Fin del Capítulo 7

Capítulo 8

Espacios de Banach

8.1. El Teorema de Hahn–Banach

El teorema de Hahn–Banach es uno de los más importantes resultados del Análisis funcional. Una de sus consecuencias inmediatas es la existencia de funcionales lineales y continuos en espacios normados, es decir que el dual topológico de un espacio normado no es vacío.

Pero su importancia fundamental reside en lo siguiente: Si g es un funcional lineal definido en un subespacio \mathcal{S} de un espacio vectorial \mathcal{E} , no hay dificultad en extender g a un funcional lineal definido en \mathcal{E} . Bastaría con extender una base de Hamel de \mathcal{S} a \mathcal{E} y definir el funcional arbitrariamente en los elementos de la base que no estén en \mathcal{S} , y luego a todo \mathcal{E} por linealidad. Sin embargo si \mathcal{E} es normado, g es continua y queremos que la extensión sea continua y conserve la norma, las cosas se complican y esto es precisamente lo que justifica el teorema de Hahn–Banach.

En los siguientes resultados \mathcal{E} es un \mathbb{K} -espacio vectorial (para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) y \mathcal{S} un subespacio suyo.

Lema 8.1.1 *Sea \mathcal{E} un \mathbb{R} -espacio vectorial \mathcal{E} y sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para $x, y \in \mathcal{E}$.
- b) $p(tx) = tp(x)$, para $t > 0$ y $x \in \mathcal{E}$.

Si $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y $g \leq p$ en \mathcal{S} , entonces son equivalentes, para $e \in \mathcal{E}$ y $c \in \mathbb{R}$,

- c) $g(x) + tc \leq p(x + te)$, para todo $x \in \mathcal{S}$ y $t \in \mathbb{R}$.
- d) $-p(-x - e) - g(x) \leq c \leq p(x + e) - g(x)$, para $x \in \mathcal{S}$.

Además para cada $e \in \mathcal{E}$ existe un $c \in \mathbb{R}$ satisfaciendo (c) y (d).

Teorema de Hahn–Banach 8.1.2 *En las condiciones anteriores si $g \leq p$ en \mathcal{S} , existe un funcional lineal $\tilde{g} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g} = g$ en \mathcal{S} y $\tilde{g} \leq p$ en \mathcal{E} .*

Definición. Diremos que $p : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$, con \mathcal{E} un \mathbb{K} -espacio vectorial es una *seminorma* si:

- a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para $x, y \in \mathcal{E}$.
- b) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathcal{E}$.

si además es $p(x) = 0$ sii $x = 0$, diremos que p es una *norma*.

Teorema de Hahn–Banach complejo 8.1.3 *Sea \mathcal{E} un \mathbb{C} -espacio vectorial y $p : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty)$ una seminorma. Si $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ es lineal y $|g| \leq p$ en \mathcal{S} entonces existe $\tilde{g} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ lineal tal que $\tilde{g} = g$ en \mathcal{S} y $|\tilde{g}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in \mathcal{E}$.*

Si \mathcal{E} es un \mathbb{K} -espacio normado, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ es un subespacio y

$$g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}$$

es lineal y continua, entonces g es acotada y podemos definir la seminorma

$$p : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty), \quad p(x) = \|g\| \|x\|$$

para la que obviamente

$$|g(x)| \leq \|g\| \|x\| = p(x)$$

y el teorema de Hahn–Banach puede aplicarse obteniendo el siguiente resultado, del que ya hemos hablado en la pág.256, como el teorema de Hahn–Banach.

Corolario 8.1.4 *Sea \mathcal{E} un \mathbb{K} -espacio normado, $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ un subespacio y $g \in \mathcal{S}^*$, entonces existe $\tilde{g} \in \mathcal{E}^*$, tal que $\tilde{g} = g$ en \mathcal{S} y $\|\tilde{g}\| = \|g\|$.*

Otras consecuencias importantes de este resultado son las siguientes.

Teorema 8.1.5 *Sea \mathcal{S} un subespacio del espacio normado \mathcal{E} , entonces:*

a) *Si $x \notin \text{Adh}(\mathcal{S})$ y el $\inf\{\|x - z\| : z \in \mathcal{S}\} = r > 0$, entonces existe $\omega \in \mathcal{E}^*$, tal que $\omega = 0$ en \mathcal{S} , $\omega(x) = 1$ y $\|\omega\| = 1/r$.*

b) *$x \in \text{Adh}(\mathcal{S})$ sii cada $\omega \in \mathcal{E}^*$ que se anula en \mathcal{S} se anula en x .*

c) *Si $x \neq 0$ existe $\omega \in \mathcal{E}^*$, tal que $\|\omega\| = 1$ y $\omega(x) = \|x\|$. En particular dados $x \neq y$ hay una $\omega \in \mathcal{E}^*$, con $\|\omega\| = 1$ tal que $\omega(x) \neq \omega(y)$.*

Nota 8.1.6 El teorema de Hahn–Banach es esencial en el estudio de la reflexividad. Dado un espacio normado \mathcal{E} podemos establecer la aplicación lineal canónica

$$\pi: x \in \mathcal{E} \rightarrow \hat{x} \in \mathcal{E}^{**}, \quad \hat{x}(\omega) = \omega(x),$$

para cada $\omega \in \mathcal{E}^*$. En la Nota (6.3.6), pág.256, hemos demostrado como consecuencia del Teorema de Hahn–Banach, que π es una isometría.

Recordemos que un espacio normado \mathcal{E} es *reflexivo* si $\pi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{**}$. Los espacios de Hilbert son reflexivos así como los espacios L_p , para $1 < p < \infty$, sin embargo L_1 no siempre es reflexivo como probamos a continuación:

Consideremos $l_1 = L_1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, con μ la medida de contar, sabemos que $l_1^* = l_\infty$, ahora bien l_1 es separable pues el conjunto

$$\{x = (x_n) \in l_1, \exists m \in \mathbb{N} : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Q}, x_n = 0, n > m\}$$

es denso en l_1 y numerable; y que l_∞ no es separable, pues podemos considerar el conjunto no numerable

$$S = \{x = (x_n) \in l_\infty : \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0 \text{ ó } x_n = 1\}$$

y el conjunto no numerable de abiertos disjuntos $\{B(x, 1/2) : x \in S\}$.

De esto y el siguiente resultado se sigue que l_1 no es reflexivo, pues en tal caso sería $l_\infty^* = l_1^{**} = l_1$.

Teorema 8.1.7 *Si \mathcal{E}^* es separable, entonces \mathcal{E} también lo es.*

A continuación vemos una aplicación de (8.1.5–c) a la teoría de la medida. En la página 72 del tema I hablamos de la demostración hecha por Banach sobre la existencia de una medida finitamente aditiva definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante por traslaciones y que sobre los intervalos coincidía con la de Lebesgue. Para demostrar este resultado necesitamos la siguiente extensión del teorema de Hahn–Banach.

Teorema 8.1.8 Sean \mathcal{E} , \mathcal{S} , $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ como en (8.1.1). Sea $\mathcal{G} = \{T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}\}$ un semigrupo abeliano de operadores lineales tales que:

- a) Si $x \in \mathcal{S}$ entonces $T(x) \in \mathcal{S}$ y $g(x) = g[T(x)]$, para todo $T \in \mathcal{G}$.
- b) Para todo $x \in \mathcal{E}$ y $T \in \mathcal{G}$, $p[T(x)] \leq p(x)$.

Entonces hay una única extensión lineal $\omega : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\omega = g$ en \mathcal{S} , y para todo $x \in \mathcal{E}$ y $T \in \mathcal{G}$, $\omega(x) \leq p(x)$ y $\omega[T(x)] = \omega(x)$.

Observemos que para $\mathcal{G} = \{\text{id}\}$ (8.1.8) es (8.1.2).

Como consecuencia se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 8.1.9 Existe una medida μ aditiva, definida en los subconjuntos acotados de \mathbb{R} , tal que:

- a) $\mu(t + A) = \mu(A)$, para cada $A \subset \mathbb{R}$ acotado y $t \in \mathbb{R}$.
- b) Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ es acotado, entonces $\mu(A) = m(A)$.

8.2. Teoremas clásicos

Definición. Un *espacio de Banach* es un espacio normado y completo.

La importancia de los espacios de Banach radica en su completitud, que es uno de los conceptos mas frecuentemente explotados en Análisis Funcional. La razón de esto radica básicamente en el siguiente teorema sobre espacios métricos completos y que habitualmente se conoce como **Teorema de Baire** o de la categoría (no en sentido algebraico). Dicho teorema tiene como consecuencia dos de los tres resultados mas importantes del análisis funcional. Nos referimos al **Teorema de Banach–Steinhaus** y al **Teorema de la aplicación abierta** (el tercero es el **Teorema de Hahn–Banach**).

Otra importante consecuencia de este resultado, que veremos en la siguiente lección, y que entra en el marco de la teoría de la medida, es el **Teorema de Vitali–Hahn–Saks**.

Teorema de Baire 8.2.1 Sea \mathcal{X} un espacio métrico completo y U_n una sucesión de abiertos densos en \mathcal{X} , entonces $\bigcap U_n$ es densa en \mathcal{X} .

Definición. Diremos que un subconjunto E de un espacio topológico \mathcal{X} es *denso en ningún lado* si $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$.

Llamamos *conjunto de primera categoría* a la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte y de *segunda categoría* a los demás.

Recordemos que por (1.2.17), pág.9 si $E \subset \mathcal{X}$ y $B = \mathcal{X} \setminus E$, entonces se tiene

$$\overset{\circ}{E} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} = \mathcal{X}.$$

y si E es denso en ningún lado entonces $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ y por tanto E^c es denso.

Corolario 8.2.2 *Todo espacio métrico completo es de segunda categoría.*

Hay otra importante clase de espacios con la propiedad (8.2.1), los espacios Hausdorff, localmente compactos (ver ASH, p.399).

Como consecuencia de (8.2.1) tenemos el siguiente resultado también conocido como **principio de la acotación uniforme**.

Teorema de Banach–Steinhaus 8.2.3 *Sea \mathcal{E} un espacio de Banach, \mathcal{N} un espacio normado y $\{L_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}, i \in I\}$ un conjunto de aplicaciones lineales acotadas puntualmente, es decir tales que para cada $x \in \mathcal{E}$ existe un $k > 0$ tal que para todo $i \in I$ $\|L_i(x)\| < k$. Entonces*

$$\sup\{\|L_i\| : i \in I\} < \infty.$$

La otra consecuencia establece que si en un espacio vectorial tenemos dos normas completas tal que la topología de una contiene a la de la otra, entonces ambas topologías coinciden.

Teorema de la aplicación abierta 8.2.4 *Sea $L : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ una aplicación lineal continua y sobre entre espacios de Banach, entonces es abierta. Por tanto si L es también inyectiva entonces L es isomorfismo lineal y continuo.*

Finalizamos la lección con una útil consecuencia de (8.2.4), la cual nos permite asegurar que una cierta aplicación lineal entre espacios normados es continuo.

Definición. Sean \mathcal{E} y \mathcal{F} espacios normados y consideremos en $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ la topología producto. Diremos que una *aplicación lineal* $L : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ es *cerrada* si

$$G(L) = \{(x, L(x)) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F} : x \in \mathcal{E}\},$$

es cerrado.

La topología producto dice que

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \iff x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y,$$

por tanto $L : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ lineal es cerrada sii

$$(x_n, L(x_n)) \rightarrow (x, y) \implies y = L(x),$$

y se sigue que si L es continua entonces es cerrada. El recíproco sin embargo no es cierto en general, pero si lo es si los espacios son de Banach.

Teorema del gráfico cerrado 8.2.5 *Sea $L : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ lineal y cerrada entre espacios de Banach, entonces es continua.*

Una aplicación de este resultado es la siguiente:

Consideremos un espacio de Banach \mathcal{E} suma directa de dos subespacios cerrados suyos

$$\mathcal{E} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N},$$

entonces las proyecciones $\pi_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ y $\pi_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}$ son continuas. Para demostrarlo, como son lineales, basta ver que son cerradas. Veámoslo para π_1 : Si $x_n = y_n + z_n$, con $y_n = \pi_1(x_n)$ y $z_n = \pi_2(x_n)$ y $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ entonces $y = \pi_1(x)$, pues $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y \in \mathcal{M}$ y $z_n = x_n - y_n \rightarrow x - y = z \in \mathcal{N}$, por tanto $y = \pi_1(x)$ y $z = \pi_2(x)$.

8.3. El Teorema de Vitali—Hahn—Saks

En el tema del teorema de Radon–Nikodym (4.4.3), de la página 174, vimos como la absoluta continuidad de una medida respecto de otra tiene bastante que ver con el concepto topológico de continuidad. El problema para una correcta interpretación en este sentido reside en que las medidas están definidas en una σ —álgebra \mathcal{A} que no tiene, en principio, estructura topológica (ver no obstante el ejercicio (10.11.79), pág.424).

En esta lección introducimos una métrica d en la σ —álgebra \mathcal{A} de un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, de tal forma que (\mathcal{A}, d) es un espacio métrico completo y las medidas absolutamente continuas respecto de μ son funciones continuas en (\mathcal{A}, d) .

Una σ —álgebra \mathcal{A} tiene una estructura natural de anillo con las operaciones para $A, B \in \mathcal{A}$

$$A + B = A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), \quad AB = A \cap B$$

para el que $A = A^2$ y $A + A = 0$.

Teorema 8.3.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, entonces:*

a) *El conjunto $I = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$ es un ideal del anillo \mathcal{A} y el anillo cociente $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}/I$ es un espacio métrico completo con la métrica*

$$d(A, B) = \arctan \mu(A\Delta B).$$

b) *Si $\lambda \ll \mu$, entonces λ pasa a \mathcal{A}_I y es continua.*

c) *$A \cup B, A \cap C, A\Delta B$ son continuas de $\mathcal{A}_I \times \mathcal{A}_I \rightarrow \mathcal{A}_I$ y A^c de $\mathcal{A}_I \rightarrow \mathcal{A}_I$.*

d) *Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces la clausura en \mathcal{A}_I de un álgebra \mathcal{A}_0 de \mathcal{A} pasada al cociente, es la σ —álgebra $\sigma(\mathcal{A}_0)$ pasada al cociente.*

El siguiente resultado es uno de los más importantes en la teoría de las funciones de conjunto. La demostración que habitualmente se da (la de nuestra referencia), es de Saks y consiste en aplicar el **Teorema de Baire** a \mathcal{A}_I , del mismo modo que se hace en el **Teorema de Banach—Steinhaus**.

Teorema 8.3.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y λ_n una sucesión de medidas en \mathcal{A} finitamente aditivas y complejas, tales que $\lambda_n \ll \mu$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si existe el límite $\lambda(E) = \lim \lambda_n(E)$, para cada $E \in \mathcal{A}$, entonces se tiene que si $\mu(E) \rightarrow 0$ entonces $\lambda_n(E) \rightarrow 0$ uniformemente en n , es decir la absoluta continuidad es uniforme en n . Si además $\mu(\Omega) < \infty$ entonces λ es una medida.*

La última afirmación es mejorada en el siguiente resultado de Nikodym.

Teorema 8.3.3 *Si las λ_n son complejas y σ —aditivas en (Ω, \mathcal{A}) y existe el límite finito $\lambda(E) = \lim \lambda_n(E)$, entonces λ es una medida y la σ —aditividad de λ_n es uniforme en n , es decir que $\lambda_n(B_k) \rightarrow 0$ uniformemente en n , para cada $B_k \downarrow \emptyset$ en \mathcal{A} .*

Bibliografía y comentarios

Para la confección de este tema han sido utilizados los siguientes libros:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J.T.: “*Linear operators, Vol,I*”. John Wiley–Interscience Pub., 1958.

HALMOS, P.R.: “*Measure Theory*”. Springer–Verlag, 1974.

MUHKERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.

RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”, Tata McGraw–Hill, 1974.

YOSIDA, K.: “*Functional Analysis*”. Springer–Verlag, 1974.

A partir de 1920 empiezan a estudiarse espacios mas generales que los de Hilbert, los espacios de Banach. En su desarrollo contribuyeron WIENER y fundamentalmente S.BANACH, que con su libro

BANACH, S.: “*Theorie des operations lineaires*”. Reimp. con correcciones de la 1a. ed. de 1932 por Chelsea Pub.Co., 1978.

inicia una nueva etapa en el desarrollo del Análisis Matemático.

En la p.32 de su libro se encuentra esencialmente (8.1.9), no obstante remitimos al lector interesado en la cuestión a un trabajo previo del mismo autor,

BANACH, S.: “*Sur le probleme de la mesure*”. Fund.Math., IV, 7–33, 1923.

Hemos dicho que un espacio normado \mathcal{E} es reflexivo cuando $\pi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{**}$, para π el isomorfismo isométrico canónico $\pi(x)[\omega] = \omega(x)$. En este sentido es curioso que la existencia de otro isomorfismo isométrico entre ambos espacios no garantice la reflexividad. Para un ejemplo demostrando este hecho remitimos al lector al trabajo,

JAMES, R.C.: “*A nonreflexive Banach space isometric with its second conjugate*”. Proc. Nat. Sci., USA, **37**, 174–177, 1951.

Capítulo 9

La transformada de Fourier

9.1. Análisis de Fourier en $L_2(T)$

Sea $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unidad en \mathbb{C} . Dada una función $F : T \rightarrow \mathbb{C}$, la función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(t) = F[e^{it}] = F[\cos t + i \operatorname{sen} t]$$

es 2π -periódica y recíprocamente dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -periódica, entonces hay una función $F : T \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(t) = F[e^{it}]$. Además f es continua si lo es F .

Definición. Con esta identificación entenderemos por $\mathcal{L}_p(T)$, para $1 \leq p < \infty$, el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ borel medibles y 2π -periódicas tales que

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p dm \right)^{1/p} < \infty$$

Por $\mathcal{L}_\infty(T)$ entenderemos el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ borel medibles y 2π -periódicas tales que $\|f\|_\infty < \infty$.

Por $\mathcal{C}(T)$ entenderemos el espacio de las funciones continuas $F : T \rightarrow \mathbb{C}$ (equivalentemente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continuas y 2π -periódicas), con la norma del máximo.

Definición. Llamaremos *polinomio trigonométrico* a las funciones de la forma

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)],$$

para $a_i, b_i \in \mathbb{C}$. Denotaremos con $\mathcal{P}(T)$ la colección de los polinomios trigonométricos.

Nota 9.1.1 Los polinomios trigonométricos se corresponden con las funciones polinómicas en z

$$F : T \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) = \sum_{n=-N}^N c_n z^n,$$

pues se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{itn} = c_0 + \sum_1^N c_n [\cos(tn) + i \operatorname{sen}(tn)] + \\ &\quad + \sum_1^N c_{-n} [\cos(-tn) + i \operatorname{sen}(-tn)] \\ &= a_0 + \sum_1^N [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)], \end{aligned}$$

para $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ y $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Teorema 9.1.2 *Los polinomios trigonométricos $\mathcal{P}(T)$ son densos en $\mathcal{C}(T)$.*

Demostración. $\mathcal{P}(T) = \{F : T \rightarrow \mathbb{C}, F(z) = \sum_{n=-N}^N c_n z^n\}$ es una subálgebra del álgebra $\mathcal{C}(T)$, la cual:

- 1) separa puntos,
- 2) contiene a las funciones constantes y
- 3) si $F \in \mathcal{P}$ entonces $\overline{F} \in \mathcal{P}$.

Se sigue entonces del **Teorema de Stone–Weierstrass** (ver ASH, p.393) que toda función continua $F : T \rightarrow \mathbb{C}$ puede aproximarse uniformemente por funciones de \mathcal{P} . ■

En $L_2(T)$ tenemos el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} \, dm,$$

respecto del que el sistema de funciones $B = \{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$

$$u_n(t) = e^{int}, \quad (\text{en términos de } z, u_n(z) = z^n)$$

es ortonormal pues $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt = 0$.

Proposición 9.1.3 *El sistema $B = \{u_n(t) = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal en $L_2(T)$.*

Demostración. Es una consecuencia de (7.3.3), pág.288, pues por (9.1.2) sabemos que $\mathcal{P}(T) = \langle B \rangle$ es denso en $\mathcal{C}(T)$ con la $\|\cdot\|_{\infty}$. Como por otra parte en $\mathcal{C}(T)$ $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{\infty}$, tendremos que $\mathcal{P}(T)$ es denso con la $\|\cdot\|_2$ en $\mathcal{C}(T)$ y como a su vez veremos en (10.2.7), pág.334 que $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}_c(T)$ es denso en $L_2(T)$, pues T es compacto y Hausdorff, tendremos que $\mathcal{P}(T) = \langle B \rangle$ es denso en $L_2(T)$. ■

Para cada $f \in L_2(T)$ consideremos sus coeficientes de Fourier relativos a B , es decir

$$\hat{f}(n) = \langle f, u_n \rangle = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-int} \, dt,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición. Llamaremos *Transformada de Fourier en $L_2(T)$* a la aplicación anterior

$$L_2(T) \rightarrow l_2(\mathbb{Z}), \quad f \rightarrow \hat{f}.$$

La cual es un isomorfismo isométrico en virtud del Teorema (7.3.3), pág.288, ya que por (d)

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, u_n \rangle u_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

lo cual debe interpretarse como que si $s_n(t) = \sum_{-n}^n \hat{f}(m) e^{itm}$, entonces $s_n \rightarrow f$ en \mathcal{L}_2 . Además de (f) se sigue que

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2,$$

y de (e) que dados $f, g \in L_2(T)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)},$$

y como consecuencia de esto último, tomando $g = I_{[a,b]}$, con $-\pi \leq a < b \leq \pi$, tenemos lo siguiente.

Teorema 9.1.4 *Sea $f \in L_2(T)$, entonces*

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_a^b \hat{f}(n) e^{int} dt$$

Lo cual es sorprendente, pues podemos calcular la integral de f en $[a, b]$, integrando término a término su serie de Fourier, siendo así que no tenemos ni la convergencia puntual de la serie. Por último observemos que el **Teorema de Riesz—Fischer**, nos asegura que si $z_n \in \mathbb{C}$ son tales que $\sum |z_n|^2 < \infty$, entonces existe una única $f \in L_2(T)$, tal que los z_n son los coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ de f relativos a u_n .

9.2. Análisis de Fourier en $L_1(T)$ y $\mathcal{C}(T)$

Definición. Extendemos la definición dada en la lección anterior, llamando *transformada de Fourier en $L_1(T)$* a la aplicación que hace corresponder a cada función $f \in L_1(T)$ la sucesión

$$\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-int} dt.$$

Y llamaremos *serie de Fourier* de $f \in L_1(T)$ a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}.$$

En la lección anterior hemos visto que la serie de Fourier de una $f \in L_2(T)$ converge en L_2 a f . Ahora veremos la convergencia de la serie de Fourier de una $f \in \mathcal{C}(T)$, como aplicación del **Teorema de Banach–Steinhaus** (8.2.3), pág.297, (el cual debemos observar que es válido también si \mathcal{E} es de segunda categoría). En primer lugar se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.2.1 *Existe $f \in \mathcal{C}(T)$ tal que su serie de Fourier diverge en 0. El conjunto de tales funciones es de segunda categoría en $\mathcal{C}(T)$.*

Definición. Llamaremos c_0 al espacio de Banach de las (sucesiones) funciones $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ cuando $|n| \rightarrow \infty$, con la norma del supremo.

En el siguiente resultado veremos que la transformada de Fourier en $L_1(T)$ es una aplicación lineal de

$$(9.1) \quad L_1(T) \rightarrow c_0,$$

Como $\mathcal{P}(T)$ es denso en $\mathcal{C}(T)$ con la $\|\cdot\|_\infty$, también lo es con la $\|\cdot\|_1$, pues $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$ y como $\mathcal{C}(T)$ es denso en $L_1(T)$ con $\|\cdot\|_1$, tenemos que $\mathcal{P}(T)$ es denso en $L_1(T)$ con $\|\cdot\|_1$.

Por otra parte dado $P \in \mathcal{P}(T)$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para $|n| \geq N$ es

$$\int_{-\pi}^{\pi} P e^{-int} dt = 0,$$

por lo que para $|n| \geq N$

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - P) e^{-int} dt \right| \leq \|f - P\|_1.$$

Este resultado es conocido como Lema de Riemann–Lebesgue. Para otra formulación de este resultado ver Mukherjea–Pothoven, p.142-143.

Nos interesa saber si el recíproco es cierto, es decir si es sobre la transformada de Fourier (9.1). La contestación es negativa y hace uso del teorema de la aplicación abierta.

Teorema 9.2.2 *La transformada de Fourier es lineal, acotada e inyectiva pero no sobre.*

La demostración de este resultado puede seguirse por el RUDIN, p.110. No obstante hay que hacer algunas modificaciones pues él se basa en resultados que tiene en el libro pero que nosotros no hemos introducido hasta el momento. Tales modificaciones pueden realizarse con el material desarrollado aquí por nosotros.

9.3. Análisis de Fourier en $L_1(\mathbb{R})$

En esta lección por L_1 entenderemos $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, donde $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ y μ es la medida de Lebesgue dividida por $(2\pi)^{1/2}$. Esta medida hace que las expresiones en los resultados sean mas simples y simétricas.

Definición. Llamaremos *transformada de Fourier en L_1* a la aplicación \mathcal{F} que a cada $f \in L_1$ le hace corresponder la función

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(t) = \int f(x)e^{-ixt} d\mu,$$

Una simple consecuencia del **teorema de la convergencia dominada** nos da cierta información sobre el rango de \mathcal{F} .

Proposición 9.3.1 *Para cada $f \in L_1$, $\mathcal{F}(f)$ es uniformemente continua en \mathbb{R} .*

Definición. Dadas $f, g \in L_1$ llamamos su *producto de convolución* a $f * g \in L_1$ (ver (3.6.11), página 149)

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y) d\mu.$$

Veamos ahora algunas propiedades de \mathcal{F} .

Proposición 9.3.2 *Sean $f, g \in L_1$, $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces:*

- a) $\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$.
- b) $\mathcal{F}(zf) = z\mathcal{F}(f)$.
- c) $\mathcal{F}(\overline{f})(t) = \overline{\mathcal{F}(f)}(-t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

- d) \hat{f} está acotada y $\|\hat{f}\|_\infty = \sup\{|f(t)|\} \leq \|f\|_1$.
- e) Si $g(x) = f(x) e^{iax}$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t - a)$.
- f) Si $g(x) = f(x - a)$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t) e^{-iat}$.
- g) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
- h) Si $a > 0$ y $g(x) = f(x/a)$, entonces $\hat{g}(t) = a\hat{f}(at)$.
- i) Si $a > 0$ y $g(x) = af(ax)$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t/a)$.
- j) Si $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L_1$, entonces \hat{f} es diferenciable y $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$.
- k) Si f es absolutamente continua y $f' \in L_1$, entonces $(\widehat{f'})(t) = it\hat{f}(t)$.
- l) Si $f_n \in L_1$ es una sucesión convergente en L_1 , entonces $\widehat{f_n}$ converge uniformemente en todo \mathbb{R} .

Los siguientes resultados están encaminados a describir el rango de \mathcal{F} , por tanto complementan a (9.3.1).

Teorema 9.3.3 Sea $f \in L_p$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces la aplicación $T : \mathbb{R} \rightarrow L_p$, $T(y) = f_y$, para $f_y(x) = f(x - y)$, es uniformemente continua.

El resultado anterior se puede probar modificando ligeramente la demostración de la p.196 del Rudin.

Teorema 9.3.4 Sea $f \in L_1$, entonces $\hat{f}(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$, es decir $f \in c_0$. Por tanto la transformada de Fourier es una aplicación

$$\mathcal{F} : L_1 \rightarrow c_0.$$

A continuación vemos, como consecuencia de la propiedad (k) de (9.3.2), cómo el grado de diferenciabilidad de una función $f \in L_1$ y la velocidad de decrecimiento en el infinito de su transformada \hat{f} están íntimamente relacionados.

Proposición 9.3.5 Si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son absolutamente continuas y

$$f, f', \dots, f^{(n)} \in L_1,$$

entonces $\widehat{f^{(n)}}(t) = (it)^n \hat{f}(t)$, por tanto

$$(9.2) \quad |\hat{f}(t)| = |t|^{-n} |\widehat{f^{(n)}}(t)|.$$

9.4. El Teorema de inversión

Hemos visto cómo la transformada de Fourier convierte “operaciones difíciles”, como el producto de convolución y la derivada en “operaciones fáciles”, como el producto ordinario y la multiplicación por it . Esto hace de esta transformada una poderosa herramienta en diversos campos de las matemáticas, como en las ecuaciones diferenciales ó en la teoría de las probabilidades (en la pág.318 veremos la relación existente entre el producto de convolución y la suma de variables aleatorias independientes).

Sin embargo esta utilidad sería mayor si dispusiéramos de una fórmula que nos permitiese reconstruir la función de origen a partir de su transformada de Fourier. Este es nuestro objetivo en esta lección. Para alcanzarlo precisamos de la ayuda de una función auxiliar

$$h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

con las siguientes propiedades:

- a) $h, \hat{h} \in L_1(\mathbb{R})$ y $\int \hat{h} d\mu = 1$.
- b) h es continua en 0 y $h(0) = 1$.

Una función con estas propiedades es

$$h(x) = e^{-|x|} \quad (\text{también valdría} \quad h(x) = e^{-x^2/2}).$$

En el primer caso

$$\begin{aligned} \hat{h}(t) &= \int e^{-|x|} e^{-itx} d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-|x|} [\cos tx - i \operatorname{sen} tx] dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos tx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+t^2}, \end{aligned}$$

Por tanto si definimos, para $s > 0$, $h_s(x) = h(sx)$, entonces

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \widehat{h_s}(t) &= \frac{1}{s} \hat{h}\left(\frac{t}{s}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s^2}{s^2 + t^2}, \\ \int \widehat{h_s} d\mu &= \int \hat{h} d\mu = 1. \end{aligned}$$

Estas funciones $h_s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y tienen una gran importancia pues dada $f \in L_1$, $f * h_s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y se puede demostrar que $f * h_s \rightarrow f$ c.s. (ver RUDIN, p.210).

El siguiente resultado es una simple consecuencia del teorema de Fubini.

Teorema 9.4.1 *Sea $f \in L_1$, entonces*

$$f * h_s(x) = \int \hat{f}(t)h(st) e^{ixt} d\mu,$$

El siguiente resultado es una simple consecuencia de (9.3) y el teorema de la convergencia dominada (2.4.12), pág.98.

Teorema 9.4.2 *Si $g \in L_\infty(\mathbb{R})$ y es continua en $x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{s \rightarrow 0} g * h_s(x) = g(x).$$

Por otra parte como consecuencia del Teorema de Fubini, los resultados anteriores y que en un espacio probabilístico $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$, para $1 \leq p \leq q \leq \infty$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.4.3 *Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L_p(\mathbb{R})$, entonces*

$$\|f * h_s - f\|_p \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow 0).$$

Podemos enunciar el principal resultado de esta lección.

Teorema de Inversion 9.4.4 *Si $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ y*

$$g(x) = \int \hat{f}(t) e^{ixt} d\mu,$$

entonces $g \in c_0$ y $f = g$ c.s.

Teorema de Unicidad 9.4.5 *Si $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} = 0$, entonces $f = 0$ c.s.*

9.5. Teorema de Plancherel

Consideremos ahora el caso $L_2(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{A}, m, \mathbb{C})$. Por ser la medida de Lebesgue de \mathbb{R} , $m(\mathbb{R}) = \infty$, no se tiene que $L_2(\mathbb{R})$ sea un subespacio de $L_1(\mathbb{R})$, al contrario de lo que ocurriría en el caso de la circunferencia T , en el que $L_2(T) \subset L_1(T)$. Sin embargo si $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ veremos que $\mathcal{F}(f) = \hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ y que esta \mathcal{F} conserva la norma y es una isometría que puede extenderse a todo L_2 .

No obstante aunque la transformada de Fourier de cada $f \in L_1(\mathbb{R})$ es una función, la de una $f \in L_2(\mathbb{R})$ será un elemento de $L_2(\mathbb{R})$, es decir una clase de equivalencia de funciones, y no habrá en principio una función de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ privilegiada que la represente.

Teorema de Plancherel 9.5.1 *Existe una transformación*

$$\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}),$$

con las siguientes propiedades:

- Es la transformada de Fourier en $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.
- Para cada $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.
- \mathcal{F} es un isomorfismo.
- Si $f \in L_2(\mathbb{R})$ y $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, entonces para cualesquiera $a_n \downarrow -\infty$, $b_n \uparrow \infty$, las funciones

$$g_n(t) = \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-ixt} d\mu, \quad h_n(t) = \int_{a_n}^{b_n} \hat{f}(x) e^{ixt} d\mu,$$

están en $L_2(\mathbb{R})$ y $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$, $\|h_n - \hat{f}\|_2 \rightarrow 0$.

Indicación. Lo fundamental y difícil es demostrar que para $f \in L_1 \cap L_2$, $\hat{f} \in L_2$ y $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Del resto veamos una parte: Si $f \in L_2$, entonces $f_n = fI_{[a_n, b_n]} \in L_1 \cap L_2$ y por el teorema de la convergencia dominada $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$, por tanto f_n es de Cauchy (además de implicar que $L_1 \cap L_2$ es denso en L_2). Pero por la igualdad del principio también es de Cauchy $\hat{f}_n = g_n$ y por tanto convergente en L_2 a una función que denotamos $\mathcal{F}(f)$ y que llamamos *transformada de Fourier de f* , pues si $f \in L_1 \cap L_2$, g_n converge puntualmente, por el teorema de la

convergencia dominada, a \hat{f} y por (6.2.14), pág.250, este límite puntual coincide c.s. con el de L_2 . De este modo extendemos la transformada a L_2 , pero además por la igualdad del principio, $\|g_n\|_2 = \|f_n\|_2$ y tomando límites

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \lim \|g_n\|_2 = \lim \|f_n\|_2 = \|f\|_2,$$

tendremos que \mathcal{F} es isometría en todo L_2 . ■

Como una simple consecuencia de esto y de (6.2.14), pág.250, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 9.5.2 Si $f \in L_2(\mathbb{R})$ y $\hat{f} = \mathcal{F}(f) \in L_1(\mathbb{R})$, entonces

$$f(x) = \int \hat{f}(t) e^{ixt} d\mu, \quad (c.s.)$$

El teorema de Plancherel nos dice que la transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}),$$

es un operador lineal y continuo. Escogiendo una base ortonormal completa en $L_2(\mathbb{R})$, \mathcal{F} está determinada por una matriz infinita, que adquiere su forma mas sencilla (diagonal), cuando la base que se toma es la de los autovectores de \mathcal{F} , en cuyo caso los elementos de la diagonal son los autovalores.

En la p.490 del KOLMOGOROV-FOMIN se demuestra que tales autovectores son las *funciones de Hermite*, las cuales se obtienen ortonormalizando la sucesión de funciones

$$p_n(x) = x^n e^{-x^2/2}, \quad n = 0, \dots, \infty,$$

y que en esta base la matriz está formada por los valores en la diagonal $1, -1, i, -i$.

El teorema de Plancherel tiene una gran diversidad de aplicaciones, entre las que destacamos dos de índole muy diferente:

Ejemplo 9.5.3 Cálculo de integrales.- Para ilustrar este punto calculemos la integral del *núcleo de Fejer*, es decir para $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sen}(ay)}{y} \right)^2 dy.$$

Observemos que para $A = [-a, a]$

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{\text{sen}(ay)}{y} = \frac{e^{-iay} - e^{iay}}{-2iy} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a e^{-iyx} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \widehat{I_A}(y), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sen}(ay)}{y} \right)^2 dy &= \|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \|\widehat{I_A}\|_2^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \|I_A\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

por tanto para cada $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sen}(ay)}{y} \right)^2 dy = a\pi.$$

Ejemplo 9.5.4 Caracterización de los subespacios cerrados de $L_2(\mathbb{R})$ invariantes por traslaciones.

Definición. Diremos que un subespacio M de $L_2(\mathbb{R})$ es *invariante por traslaciones* si para cada $f \in M$, se tiene que $f_a \in M$, para cada $a \in \mathbb{R}$ y $f_a(x) = f(x - a)$.

Definición. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es un *carácter*¹ si $|f| = 1$ y $f(x + y) = f(x)f(y)$, es decir si es un morfismo del grupo aditivo \mathbb{R} , en el grupo multiplicativo $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Proposición 9.5.5 *Sea M un subespacio cerrado de $L_2(\mathbb{R})$ invariante por traslaciones, entonces $\widehat{M} = \mathcal{F}(M)$ es un subespacio de $L_2(\mathbb{R})$ cerrado e invariante bajo multiplicaciones por cada carácter continuo de \mathbb{R} .*

Demostración. \mathcal{F} es un isomorfismo isométrico por tanto lleva subespacios cerrados en subespacios cerrados. Si $f \in M$, entonces $f_a \in$

¹Veremos en (9.4), pág.315 que las exponenciales

$$e_a(t) = e^{-iat},$$

son los únicos caracteres continuos del grupo aditivo \mathbb{R} y en la pág.239 del FOLLAND se demuestra que son los únicos caracteres medibles.

M y por el teorema de Plancherel $f_{a,n} \rightarrow \widehat{f}_a = \mathcal{F}(f_a)$, para

$$\begin{aligned} f_{a,n}(t) &= \int_{-n}^n f_a(x) e^{-ixt} d\mu = \int_{-n}^n f(x-a) e^{-ixt} d\mu \\ &= e^{-iat} \int_{-n-a}^{n-a} f(x) e^{-ixt} d\mu = e_a(t) \int_{-n-a}^{n-a} f(x) e^{-ixt} d\mu, \end{aligned}$$

pero $f_{a,n} \rightarrow e_a \widehat{f}$ en (L_2) , por tanto $e_a \widehat{f} = \widehat{f}_a \in \widehat{M}$. ■

Sea ahora $E \in \mathcal{A}$, $B = E^c$ y sea

$$\widehat{M} = \{h \in L_2(\mathbb{R}) : h = hI_B \text{ c.s.}\},$$

entonces \widehat{M} es un subespacio de $L_2(\mathbb{R})$ y verifica

$$h \in \widehat{M} \Rightarrow e_a h \in \widehat{M}, \text{ para todo } a \in \mathbb{R},$$

además $h \in \widehat{M}$ sii $\langle h, g \rangle = 0$ para toda $g \in L_2(\mathbb{R})$ tal que $g = gI_E$ c.s., por lo que \widehat{M} es cerrado por ser la intersección de los cerrados $C(g) = \{h \in L_2 : \langle h, g \rangle = 0\}$.

Tenemos así un subespacio cerrado $M = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{M})$ invariante por traslaciones. El siguiente resultado nos dice que así son todos estos subespacios.

Teorema 9.5.6 *Sea $E \in \mathcal{A}$ y $M_E = \{f \in L_2 : \mathcal{F}(f) = 0 \text{ c.s. en } E\}$, entonces M_E es un subespacio cerrado de L_2 invariante por traslaciones. Además cada subespacio de L_2 cerrado e invariante por traslaciones es de la forma M_E para algún $E \in \mathcal{A}$ y si hay otro $F \in \mathcal{A}$ tal que $M_E = M_F$ entonces $m(E\Delta F) = 0$, es decir que existe una biyección entre el “espacio métrico” \mathcal{A}/\simeq , definido en el ejercicio (10.11.79), pág.424, y los subespacios cerrados de L_2 invariantes por traslaciones.*

9.6. El álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R})$

Definición. Diremos que \mathcal{E} es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , si es un \mathbb{K} —espacio de Banach con una operación interna multiplicativa que satisface,

- a) Para cada $x, y, z \in \mathcal{E}$, $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$.
 b) Para cada $x, y \in \mathcal{E}$, $t \in \mathbb{K}$, $(tx)y = t(xy) = x(ty)$.
 c) Para cada $x, y \in \mathcal{E}$, $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

El espacio $L_1(\mathbb{R})$ con el producto de convolución es un álgebra de Banach conmutativa sobre \mathbb{K} . Es fácil ver que no tiene unidad, es decir un elemento $h \in L_1$, tal que $h * f = f$, para cada $f \in L_1$. Ya que en caso contrario debería de ser $\mathcal{F}(h) = 1$, siendo $\mathcal{F}(h) \in c_0$.

Definición. Diremos que una función $\Lambda : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ es un *funcional lineal multiplicativo* en el álgebra de Banach \mathcal{E} , si dados $x, y \in \mathcal{E}$ y $a, b \in \mathbb{K}$

$$\Lambda(ax + by) = a\Lambda(x) + b\Lambda(y), \quad \Lambda(xy) = \Lambda(x)\Lambda(y).$$

Teorema 9.6.1 *Todo funcional lineal multiplicativo $\Lambda : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ es continuo y $\|\Lambda\| < 1$.*

Nuestro objetivo en esta lección consiste en caracterizar los funcionales lineales y multiplicativos en $L_1(\mathbb{R})$, es decir los funcionales lineales

$$\Lambda : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C},$$

tales que para $f, g \in L_1$

$$\Lambda(f * g) = \Lambda(f)\Lambda(g).$$

Observemos que si $t \in \mathbb{R}$ y definimos

$$\Lambda : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Lambda(f) = \hat{f}(t),$$

entonces Λ es un funcional lineal y multiplicativo. Veremos que así son todos.

Teorema 9.6.2 *Para cada funcional lineal multiplicativo $\Lambda : L_1 \rightarrow \mathbb{K}$ no nulo, existe un único $t \in \mathbb{R}$, tal que $\Lambda(f) = \hat{f}(t)$, para cada $f \in L_1$ y $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.*

Indicación. Dado un tal funcional Λ , como $\Lambda \in L_1^* = L_\infty$, por (6.4.7), pág.262, pues m es σ -finita, tendremos que existe $g \in L_\infty$, tal que para toda $f \in L_1$

$$\Lambda(f) = \int fg \, dm.$$

En el RUDIN, p.208, se demuestra que g satisface para cada $x, y \in \mathbb{R}$

$$(9.4) \quad g(x+y) = g(x)g(y),$$

por tanto $g(0) = 1$, pues no es nula; se demuestra que es diferenciable y derivando en $y = 0$ y llamando $k = g'(0) = a + bi$

$$g'(x) = g(x)k \quad \Rightarrow \quad g(x) = e^{kx} = e^{ax} e^{bix},$$

ahora bien g es acotada, por tanto $a = 0$ y para $t = -b \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-itx}$. Por tanto

$$\Lambda(f) = \hat{f}(t). \quad \blacksquare$$

9.7. La transformada de Fourier–Stieltjes

Hemos definido la transformada de Fourier de una $f \in L_1(\mathbb{R})$ como²

$$\hat{f}(t) = \int e^{-itx} f(x) d\mu = \int e^{-itx} d\nu,$$

para $\nu \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{K})$, la medida (real o compleja) en \mathcal{A} , $\nu(A) = \int_A f d\mu$, la cual es $\nu \ll \mu$.

Nuestro objetivo en esta lección es extender las nociones de transformada de Fourier, convolución, etc. a los elementos del espacio de Banach \mathcal{M} , con la norma $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$.

Definición. Llamaremos *transformada de Fourier–Stieltjes* de una medida $\nu \in \mathcal{M}$ a la función

$$\hat{\nu}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{\nu}(t) = \int e^{-itx} d\nu.$$

Esta transformada conserva algunas de las propiedades de la transformada de Fourier de $L_1(\mathbb{R})$.

²Para $f \geq 0$, la igualdad $\int gf d\mu = \int g d\nu$, se demuestra de forma estandar: para g indicador, simple, $g \geq 0$ y en general. Para $f = f^+ - f^-$ real se demuestra utilizando el caso anterior y que $\nu^+(A) = \int_A f^+ d\mu$ y $\nu^-(A) = \int_A f^- d\mu$ (ver el ejercicio (4.2.6), pág.167). Para $f = f_1 + if_2$ compleja se sigue del anterior.

Proposición 9.7.1 *Sea $\nu \in \mathcal{M}$, entonces $\hat{\nu}$ es uniformemente continua en \mathbb{R} y está acotada por $\|\nu\|$.*

Sin embargo no se tiene que $\hat{\nu} \in c_0$, pues basta tomar $\nu = \delta$, la medida de Dirac, que vale $\delta(0) = 1$ y $\delta(B) = 0$, para cada boreliano B que no contenga al 0. Para ella es $\hat{\nu} = 1$ en \mathbb{R} .

Es interesante observar que si $\nu \ll \mu$ y $\nu = f\mu$, entonces $\hat{\nu} = \hat{f}$, es decir que la transformada de Fourier–Stieltjes de ν coincide con la transformada de Fourier de su derivada de Radon–Nikodym respecto de la medida de Lebesgue (modificada).

Lema 9.7.2 *Si dos medidas complejas μ, λ coinciden en un álgebra \mathcal{A}_0 de un espacio Ω , entonces coinciden en $\sigma(\mathcal{A}_0)$.*

Demostración. Supongamos primero que son medidas reales, entonces $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ con las cuatro medidas finitas y tales que las medidas finitas (positivas) $\mu^+ + \lambda^-$ y $\lambda^+ + \mu^-$ coinciden en \mathcal{A}_0 , por tanto en $\sigma(\mathcal{A}_0)$ por el Teorema de extensión de Hahn. Se sigue que también μ y λ . El caso complejo se sigue del real. ■

El teorema de la medida producto se extiende fácilmente a medidas complejas.

Proposición 9.7.3 *Dadas dos medidas complejas μ_1 en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y μ_2 en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, existe una única medida compleja en el espacio producto $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, tal que para cada producto de medibles $A \times B$*

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

y que para cada medible E del producto satisface

$$\mu_1 \times \mu_2(E) = \int \mu_1(E^y) d\mu_2 = \int \mu_2(E_x) d\mu_1.$$

Demostración. La unicidad es obvia por el Lema anterior pues dos medidas complejas que coinciden en un álgebra (en nuestro caso las uniones finitas disjuntas de productos de medibles, ver (1.2.6), pág.14) coinciden en la σ -álgebra que genera (la σ -álgebra producto, ver (3.2.2), pág.121). Ahora para la existencia basta observar en el caso real que la medida real

$$\mu = \mu_1^+ \times \mu_2^+ + \mu_1^- \times \mu_2^- - \mu_1^- \times \mu_2^+ - \mu_1^+ \times \mu_2^-,$$

satisface la propiedad, pues

$$\mu(A \times B) = (\mu_1^+(A) - \mu_1^-(A))(\mu_2^+(B) - \mu_2^-(B)) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

Para el caso complejo (considerando que las medidas son $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ y $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$) es la medida compleja

$$\mu_1 \times \lambda_1 - \mu_2 \times \lambda_2 + i(\mu_1 \times \lambda_2 + \mu_2 \times \lambda_1). \quad \blacksquare$$

Definición. Dadas dos medidas reales o complejas $\nu, \lambda \in \mathcal{M}$, del espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, definimos su *producto de convolución* como la medida

$$\nu * \lambda = F_*(\nu \times \lambda), \quad \text{para } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x + y,$$

Proposición 9.7.4 Sean $\nu, \lambda, \eta \in \mathcal{M}$ y $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces:

- $\nu * \lambda(E) = \int \nu(E - x)d\lambda = \int \lambda(E - x)d\nu = \lambda * \nu(E)$.
- $(\nu * \lambda) * \eta = \nu * (\lambda * \eta)$, $\nu * (\lambda + \eta) = \nu * \lambda + \nu * \eta$.
- $\nu * \lambda = \eta$ si $\int f d\eta = \int \int f(x + y)d\nu d\lambda$, para toda $f \in c_0$.
- $\|\nu * \lambda\| \leq \|\nu\| \|\lambda\|$.
- Si $\nu = f\mu$ y $\lambda = g\mu$, con $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, entonces $\nu * \lambda = (f * g)\mu$.
- \mathcal{M} tiene unidad y es la δ de Dirac en 0, es decir que para toda $\nu \in \mathcal{M}$ se tiene que $\nu * \delta = \nu$.
- $\widehat{\nu * \lambda} = \hat{\nu} \cdot \hat{\lambda}$.

También se tiene una relación análoga a la fórmula de Parseval.

Teorema 9.7.5 Sea $\nu \in \mathcal{M}$ y $f \in L_1(\mathbb{R})$ continua y tal que $\hat{f} = \mathcal{F}(f) \in L_1(\mathbb{R})$, entonces $\int f d\nu = \int \hat{f}(t)\hat{\nu}(-t)d\mu$.

Nota 9.7.6 Para terminar la lección sólo observar la aplicación particularmente importante, que tendrá para nosotros la transformada de Fourier–Stieltjes, cuando estudiemos la suma de variables aleatorias independientes.

Una variable aleatoria $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible en un espacio de Probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Tal variable define una probabilidad imagen $X_*P = P_X$ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mediante

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)),$$

y se tiene que si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, es decir tales que para cualesquiera $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $A_i = X^{-1}(B_i)$, se tiene

$$P(\cap A_i) = P(A_1) \cdots P(A_n),$$

entonces para $S = X_1 + \cdots + X_n$ se tiene que

$$P_S = P_{X_1} * \cdots * P_{X_n},$$

por lo que el estudio de la distribución P_S de S , se puede realizar, mediante la transformada de Fourier–Stieltjes, de una forma muy sencilla ya que su transformada es el producto de las transformadas de las X_i .

Bibliografía y comentarios

Para la confección de este tema han sido utilizados los siguientes libros:

ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.

MUHKERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.

RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”, Tata McGraw–Hill, 1974.

entre los que destacamos este último por la excelente exposición que da a nuestro entender de las transformadas de Fourier

No obstante en la composición del tema han sido utilizados otros textos que sugerimos como bibliografía complementaria.

BUTZER, P.L. AND NESSEL, R.J.: “*Fourier Analysis and approximation Vol.I (One dimensional Theory)*”. Birkhauser–Verlag, 1971.

HEWITT, E. AND STROMBERG, K.: “*Real and abstract analysis*”. Springer–Verlag, 1965.

HEWITT, E. AND ROSS, K.A.: “*Abstract harmonic analysis*”. Vol.I (1963), Vol.II (1970), Springer–Verlag.

KATZNELSON, Y.: “*An introduction to harmonic analysis*”. Dover, 1976.

KAWATA, T.: “*Fourier Analysis in Probability Theory*”. Ac.Press, 1972.

KOLMOGOROV A.N. AND FOMIN, S.V.: “*Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*”. Ed. Mir, Moscu, 1975.

LETAC G.: “*Integration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale. Exercices*”. Mason, 1982.

El problema de representar una función por su serie trigonométrica tiene una larga historia y en buena medida este problema fue el causante de que se fuera aclarando el propio concepto de función.

El primero en considerar una serie trigonométrica

$$a_1 \operatorname{sen} x \cos t + a_2 \operatorname{sen} 2x \cos 2t + \cdots ,$$

fue el suizo DANIEL BERNOULLI (1700–1782) en su intento de resolver una de las más importantes ecuaciones en derivadas parciales de la física clásica: la ecuación de ondas. Este aseguraba que tal serie representaba la solución general, aunque no argumentaba basándose en criterios matemáticos sino físicos.

Estudiando problemas en las teorías de propagación del calor, oscilación y otras, el Francés JOSEPH FOURIER (1768–1830), anunció en 1807 que cualquier función en $x \in [-\pi, \pi]$ podía representarse por una serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx),$$

para a_n y b_n los (ahora llamados) coeficientes de Fourier de la función, por esta razón tales series llevan su nombre. En 1824 dio una demostración de esto, sin embargo los encargados de informar sobre su trabajo, LAGRANGE, LAPLACE y LEGENDRE, lo criticaron por su vaguedad y “alegría” en los razonamientos sobre la convergencia de la serie a la función.

En un artículo de 1828, el Alemán PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859) fue el primero en demostrar rigurosamente la convergencia de la serie de Fourier para cierta clase de funciones y esto sin tener todavía una definición clara de lo que era una función. De hecho el propio DIRICHLET, propuso 9 años después, en 1837, la siguiente definición de función:

“Si una variable y está relacionada con una variable x , de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x , hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x ”.

Esta definición de función se aproxima a la actual, de aplicación entre dos conjuntos de números reales, pero lo cierto es que los conceptos de

“conjuntos de “número real.” estaban lejos de tener un significado preciso en aquella época.

Nosotros hemos probado que para cada $f \in L_2(T)$ su serie de Fourier converge a la función

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

lo cual significa que para $s_n(t) = \sum_{-n}^n \hat{f}(m) u_m(t)$, $s_n \rightarrow f$ en (\mathcal{L}_2) . Sin embargo no hemos dicho nada sobre la convergencia puntual de la serie a f , es decir de la convergencia $s_n(t) \rightarrow f(t)$, para $t \in \mathbb{R}$.

En la p.452 del KOLMOGOROV–FOMIN tenemos el siguiente resultado, que es incluso válido para $f \in L_1(T) \supset L_2(T)$,

“Sea $f \in L_2(T)$, $x \in [-\pi, \pi]$ y $t \in (0, \pi]$ tales que existe y es finita la integral

$$\int_{-t}^t \frac{f(x+s) - f(x)}{s} ds,$$

entonces la serie de Fourier de f converge en x a $f(x)$ ”.

La condición sobre la integral es conocida como *condición de Dini*.

En particular se tiene que $s_n(x) \rightarrow f(x)$ si f es diferenciable en x , o si existen las derivadas a la derecha y a la izquierda de f en x .

Durante mucho tiempo permaneció sin contestación la conjetura de si la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{C}(T)$, convergía puntualmente a f . Hasta que en 1876 DUBOIS–REYMOND dio un ejemplo de una función continua cuya serie divergía en un punto (ver MUKHERJEA–POTHOVEN, p.269). En 1915 LUSIN planteo la cuestión de si existen funciones en $L_2(T)$ cuya serie de Fourier diverja en un conjunto de medida positiva. KOLMOGOROV demostró que existen funciones en $L_1(T)$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto. En 1966 CARLESON contesta negativamente a la cuestión de Lusin. Este resultado lo extiende HUNT, en 1968, a todos los L_p para $1 < p \leq \infty$.

Por último estos resultados hacen ver el ya clásico descubrimiento de 1900 de FEJER como más impresionante, pues con una simple transformación de las series de Fourier, se obtiene una convergencia uniforme para cualquier $f \in \mathcal{C}(T)$.

Teorema de Fejer 9.7.7 (Ver Kolmogorov-Fomin, p.459; Cheney, p.123).
Sea $f \in \mathcal{C}(T)$ y

$$s_N(t) = \sum_{-N}^N f(n) e^{itn},$$

sus sumas parciales de Fourier, entonces para $g_n = (s_1 + \cdots + s_n)/n$ se tiene que $g_n \rightarrow f$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

En su primer trabajo de 1811, sobre la difusión del calor, Fourier introdujo, para cada f , las integrales (que llevan su nombre)

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} f(x) \cos tx \, dx, \quad \chi(t) = \int_0^{\infty} f(x) \sin tx \, dx,$$

y de sus inversas, para $x > 0$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos tx \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \chi(t) \sin tx \, dt,$$

En 1822 elaboró la teoría de las integrales de Fourier en su libro

FOURIER, J.: “*Theorie Analytique de la chaleur*”. 1822.

Las fórmulas anteriores las obtuvo a partir de la expansión en serie de Fourier de una función periódica, haciendo que el intervalo de periodicidad tendiese a infinito (recomendamos al lector la p.464 del KOLMOGOROV–FOMIN para un enfoque similar muy sugestivo).

Combinando las fórmulas anteriores se obtiene el teorema de la integral de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos t(y-x) \, dy \, dt.$$

Durante el siglo XIX, la teoría de las integrales de Fourier recibieron poca atención en comparación a la que se daba a la teoría de las series de Fourier, que ocuparon un lugar central en el Análisis. Las demostraciones del teorema de la integral de Fourier, que se dieron a principios del siglo XIX, no decían explícitamente que condición debía satisfacer f hacia el infinito. A lo largo del siglo, cuando las condiciones sobre f fueron establecidas, el teorema se probaba para una familia muy reducida de funciones.

Ya en el siglo XX, en 1910, PRINGSHEIM encontró, en una descripción elaborada del trabajo que había realizado previamente sobre este tema, una única condición que era suficientemente general. Esta había sido dada por HARNACK y decía:

- a) $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.
- b) f tiene en un entorno de ∞ una derivada absolutamente integrable.

Sin embargo PRINGSHEIM señaló que esta segunda condición no era del todo satisfactoria y propuso en el mismo año otras condiciones para el que el teorema era válido.

También en 1910 PLANCHEREL publica un trabajo en el que da su famosa extensión de la transformada de Fourier a $L_2(0, \infty)$. Este resultado había tenido como precursor, en 1907, el **Teorema de Riesz–Fischer**.

En 1927 RIESZ da una prueba corta y elegante del **Teorema de Plancherel** y en 1933 Wiener lo demuestra utilizando que las funciones de Hermite son una base ortonormal de $L_2(\mathbb{R})$ y autovectores de la transformada de Fourier. (Ver HEWITT–ROSS, p.251).

En 1924 H.HAHN da la primera generalización, realmente significativa, de la transformada de Fourier, introduciendo la primera versión de la transformada de Fourier–Stieltjes. Este fue el primer paso hacia un punto de vista distinto, que llevó a la creación en 1945 de la **Teoría de las distribuciones** de L.SCHWARTZ, de la que hablaremos mas adelante.

WIENER en 1925, BOCHNER en 1926 y CARLEMANN en 1935 contribuyeron en una u otra forma al nacimiento de esta nueva teoría.

Remitimos al lector a las pp.73–87 del libro

LUTZEN J.: “*The prehistory of the theory of distributions*”. Springer–Verlag, 1982.

Hemos comentado en el tema dos aplicaciones particularmente importantes de la transformada de Fourier. Una en las ecuaciones diferenciales, que pasamos a comentar, y otra en la teoría de Probabilidades, de la que hablaremos en temas posteriores.

La aplicación de la transformada de Fourier a las ecuaciones diferenciales se basa en que convierte la operación de derivación en la de multiplicación por la variable independiente —salvo un factor complejo—. Por tanto una ecuación diferencial de coeficientes constantes, se convierte por la transformada de Fourier en una ecuación algebraica. Sin embargo a este método se le suele dar poca importancia en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que la solución de estas no ofrece dificultades. Además el método de la transformada es posible si la función incógnita es integrable en toda la recta y esto en general no es así.

De mayor importancia es la aplicación de la transformada a ecuaciones en derivadas parciales, donde permite reducir la solución de esta a la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Para una ilustración de esto remitimos al lector a la pág.479 del KOLMOGOROV–FOMIN, donde se resuelve el problema de Cauchy para la ecuación del calor.

Decíamos que la posibilidad de aplicar el método de la transformada de Fourier a las ecuaciones diferenciales resulta considerablemente res-

tringida, debido a que esta transformación está definida en $L_1(\mathbb{R})$. Sin embargo se puede obtener una ampliación sustancial de su campo de aplicación introduciendo el concepto de transformada de Fourier para funciones generalizadas.

Esta idea fue introducida en 1945 por L.SCHWARTZ quien publicó el célebre tratado en dos volúmenes

SCHWARTZ, L.: “*Theorie des distributions*”. Hermann, 1973.

Las funciones generalizadas son el espacio dual de un cierto espacio, llamado de funciones test que sea “suficientemente pequeño e importante”, con el objeto de que su dual sea suficientemente grande y con buenas propiedades. Ejemplos de funciones test son $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ —funciones de clase ∞ y de soporte compacto—, ó el *espacio de Schwartz* S_∞ , que son las funciones de clase ∞ que se anulan en el infinito más rápido que cualquier potencia de $1/|x|$, más concretamente si $x^n f^{(m)}(x)$ está acotado para todo $n, m \geq 0$, lo cual equivale a que $(x^n f)^{(m)}(x)$ esté acotado para todo $n, m \geq 0$ y en este espacio podemos definir para cada $n, m \geq 0$ las seminormas

$$\|f\|_{n,m} = \sup\{(1 + |x|)^n |f^{(m)}(x)| : x \in \mathbb{R}\},$$

con las que S_∞ es un espacio de Frechet, es decir es completo (ver FOLLAND, pág.227).

Es sencillo probar que $S_\infty \subset L_1$ y en la pág.244 del FOLLAND se demuestra que

$$\mathcal{F} : S_\infty \rightarrow S_\infty,$$

es un isomorfismo. Esta simple propiedad permite extender el concepto de transformada de Fourier a S_∞^* de la siguiente manera

$$\mathcal{F}^* : S_\infty^* \rightarrow S_\infty^*, \quad \mathcal{F}^*(\omega)f = \omega[\mathcal{F}(f)],$$

para cada $\omega \in S_\infty^*$ y $f \in S_\infty$. Con esta definición extendemos la transformada de Fourier a una clase mucho mas amplia que $L_1(\mathbb{R})$, conservando sus propiedades fundamentales.

Como $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S_\infty$, se tiene que

$$S_\infty^* \subset \mathcal{D}_\infty = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})^*.$$

A S_∞^* se le llama *espacio de las distribuciones temperadas* y a \mathcal{D}_∞ *espacio de las distribuciones*.

Remitimos al lector interesado en un tratamiento de la transformada de Fourier en esta linea, a los siguientes libros.

FRIEDLANDER, F.G.: “*Introduction to the theory of distributions*”. Cambridge Univ. Press 1982.

CRITESCU, R. AND MARINESCU, G.: “*Applications to the theory of distributions*”. John Wiley, 1973.

WEIDMAN, J.: “*Linear operators in Hilbert Spaces*”. Springer-Verlag, 1980.

YOSIDA, K.: “*Functional Analysis*”. Springer-Verlag, 1974.

Para un análisis de la transformada de Fourier en $L_2(\mathbb{R})$, desde un punto de vista distinto —a partir de las transformaciones unitarias en un espacio de Hilbert, es decir isomorfismos isométricos de un espacio de Hilbert en si mismo—, nos remitimos al capítulo 13 del libro de

ZAAENEN, A.C.: “*Integration*”. North-Holland, 1967.

Por último dado un grupo conmutativo localmente compacto se puede demostrar que existe una medida, llamada de Haar y de la que hablaremos en el próximo capítulo, distinta de cero sobre los abiertos, acotada sobre los compactos e invariante por traslaciones. Sobre este grupo con esta medida en los borelianos del grupo se considera el espacio L_1 que es un anillo normado con el producto de convolución, al que se le añade una unidad formal si no la tiene. En estas condiciones todo elemento del anillo se representa como una función en su espectro —conjunto de todos sus ideales maximales—, que hace corresponder al producto (de convolución) en el anillo el producto ordinario de funciones en el espectro. Esta correspondencia es la transformada de Fourier.

Este aspecto de la transformada de Fourier es la base del Análisis armónico sobre los grupos conmutativos localmente compactos. Remitimos al lector interesado al libro

GELFAND, I.M.; RAIKOV, D.A. AND CHILOV, G.E.: “*Les anneaux normes commutatifs*”. Gauthier-Villars, Paris, 1964.

Fin del Capítulo 9

Capítulo 10

Medida y topología

10.1. Espacios Hausdorff LC

En esta lección estudiaremos algunas cuestiones relativas a una de las propiedades topológicas más importantes y características de los espacios euclídeos, la compacidad local. La razón de incluir esta lección en el programa es que trata un concepto no desarrollado habitualmente en los textos de topología general, al menos en cuanto a los resultados que son de interés para nosotros.

Definición. Diremos que un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ —a partir de ahora sólo \mathcal{X} — es *localmente compacto* (LC) si para cada $x \in \mathcal{X}$ y U abierto entorno de x , existe¹ un entorno compacto de x en U . Diremos que el espacio es σ -compacto si es unión numerable de compactos. Recordemos que \mathcal{X} es *Hausdorff* si dados $x, y \in \mathcal{X}$ distintos tienen entornos disjuntos. Diremos que un espacio es HLC si es Hausdorff y localmente compacto.

Los siguientes resultados se siguen prácticamente de las definiciones.

¹Esta no es la definición de autores como: Ash, Rudin ó Folland; que dan la (c) de (10.1.3). En ese resultado probamos que son equivalentes si el espacio es Hausdorff. Para la que damos aquí es válido que un abierto de un espacio LC es LC, mientras que para la otra en general no, y por tanto no es una buena definición local.

Proposición 10.1.1 *Sea \mathcal{X} un espacio topológico, entonces:*

- (a) *Si $F \subset K \subset \mathcal{X}$, F es cerrado y K compacto entonces F es compacto.*
- (b) *Si \mathcal{X} es Hausdorff, $K \subset \mathcal{X}$ compacto y $x \notin K$, entonces existen abiertos U y V disjuntos tales que $x \in U$ y $K \subset V$.*
- (c) *Si \mathcal{X} es Hausdorff y $K \subset \mathcal{X}$ compacto entonces K es cerrado.*
- (d) *Si \mathcal{X} es Hausdorff, $F \subset \mathcal{X}$ cerrado y $K \subset \mathcal{X}$ compacto entonces $F \cap K$ es compacto.*

Se sigue de la definición y del resultado anterior, que en un espacio HLC los *abiertos relativamente compactos*, es decir con adherencia compacta, forman una base para la topología (recordemos que una base de la topología es una colección de abiertos tal que cualquier abierto del espacio se puede poner como unión de abiertos básicos).

Proposición 10.1.2 *Todo abierto de un espacio HLC, con una base numerable es σ -compacto.*

Demostración. Todo punto del abierto tiene un entorno compacto en el abierto y este uno de la base con adherencia compacta y estos son numerables. ■

Teorema 10.1.3 *Sea \mathcal{X} Hausdorff, entonces son equivalentes:*

- (a) *\mathcal{X} es localmente compacto.*
- (b) *Si K es compacto, U abierto y $K \subset U$, entonces hay un abierto V relativamente compacto, tal que $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$.*
- (c) *Cada $x \in \mathcal{X}$ tiene un entorno compacto.*

Demostración. (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) son obvias.

Veamos (c) \Rightarrow (a): Sea $x \in U$ con U abierto y consideremos un entorno abierto de x , W con adherencia compacta $K = \bar{W}$. Consideremos el cerrado $E = U^c$ y para cada $y \in E$ abiertos disjuntos U_y entorno de x y E_y entorno de y (por ser el espacio Hausdorff), por tanto tales que $y \notin \bar{U}_y$. Entonces los compactos $K_y = E \cap K \cap \bar{U}_y$ tienen intersección $\bigcap_{y \in E} K_y = \emptyset$ y se sigue de (1.5.3), pág.29, que una colección finita de ellos también, $K_{y_1} \cap \dots \cap K_{y_n} = \emptyset$ y el abierto

$$V = W \cap U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n},$$

satisface el resultado pues $\bar{V} \subset K \cap \bar{U}_{y_1} \cap \dots \cap \bar{U}_{y_n} \subset U$. ■

Proposición 10.1.4 Sea \mathcal{X} un espacio HLC y $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{p\}$, donde $p \notin \mathcal{X}$. Los abiertos de \mathcal{X} junto con los complementarios en $\bar{\mathcal{X}}$, de los compactos² de \mathcal{X} , forman una topología en $\bar{\mathcal{X}}$ para la que la inclusión $\mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ es continua y $\bar{\mathcal{X}}$ es Hausdorff y compacto.

Demostración. Veamos que es topología:

(i) \emptyset y $\bar{\mathcal{X}}$ son abiertos.

(ii) Si A, B son abiertos de \mathcal{X} , $A \cap B$ también. Si A lo es de \mathcal{X} y $B = \bar{\mathcal{X}} \setminus K$ es entorno de p , entonces $A \cap B \subset \mathcal{X}$ y es abierto pues es el complementario en \mathcal{X} del cerrado $(\mathcal{X} \setminus A) \cap K$. Si $A = \bar{\mathcal{X}} \setminus K_1$ y $B = \bar{\mathcal{X}} \setminus K_2$ son entornos de p , su intersección también pues es el complementario del compacto $K_1 \cup K_2$.

(iii) Si A_i son abiertos de \mathcal{X} su unión A es abierto de \mathcal{X} ; si $B_j = \bar{\mathcal{X}} \setminus K_j$ son entornos de p , su unión $\bar{\mathcal{X}} \setminus K$, para el compacto $K = \bigcap K_j$ es entorno de p y la unión de todos estos abiertos es $A \cup (\bar{\mathcal{X}} \setminus K)$ que es un entorno de p , complementario del compacto $(\mathcal{X} \setminus A) \cap K \subset \mathcal{X}$.

Para ver que $\bar{\mathcal{X}}$ es compacto sea V_i un recubrimiento por abiertos y sea $\bar{\mathcal{X}} \setminus K = V_k$ uno que contenga a p , entonces

$$\bar{\mathcal{X}} = (\bar{\mathcal{X}} \setminus K) \cup (\cup_{i \neq k} V_i) \Rightarrow K \subset \cup_{i \neq k} V_i \Rightarrow K \subset \cup_{i \neq k} V_i \setminus \{p\}$$

y podemos extraer un subrecubrimiento finito pues los $V_i \setminus \{p\}$ son abiertos de \mathcal{X} .

Para ver que es Hausdorff basta verlo para $x \in \mathcal{X}$ y p . Tomando un entorno compacto K de x y un entorno abierto de x , $U \subset K$, U y $\bar{\mathcal{X}} \setminus K$ son abiertos disjuntos que separan los puntos. ■

Este resultado nos permite dar la siguiente definición.

Definición. Sea \mathcal{X} un espacio topológico HLC, llamamos *compactificación de \mathcal{X} por un punto* (ó de Alexandrov) al espacio topológico compacto $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{p\}$, formado por su unión (disjunta) con un punto $p \notin \mathcal{X}$ y considerando la topología en la que los abiertos son los de \mathcal{X} y los complementarios en $\bar{\mathcal{X}}$, de los compactos de \mathcal{X} (que son los abiertos entornos de p).

Definición. Sea \mathcal{X} un espacio topológico y $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ una función, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Llamamos *soporte de f* al conjunto

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{X} : f(x) \neq 0\}},$$

²que serán los entornos de p

y denotaremos con $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ el \mathbb{K} -espacio vectorial de las funciones $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ continuas de soporte compacto. Es obvio que si $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, entonces $f(\mathcal{X})$ es un compacto de \mathbb{K} .

A continuación vamos a exponer una de las propiedades más importantes del espacio $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ para el desarrollo de la teoría de la medida en un espacio HLC. Pero antes veamos algunos resultados sobre funciones semicontinuas.

Definición. Diremos que una función $f: \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty]$ es *semicontinua inferiormente* si para cada $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}[-\infty, a] = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq a\}$ es cerrado. Diremos que es *semicontinua superiormente* si $f^{-1}[a, \infty]$ es cerrado ó equivalentemente $-f$ es semicontinua inferiormente.

Proposición 10.1.5 (a) $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si es semicontinua inferior y superiormente.

(b) El supremo de cualquier colección de funciones semicontinuas inferiormente también lo es y el mínimo de las colecciones finitas. El ínfimo de cualquier colección de funciones semicontinuas superiormente también lo es y el máximo de las colecciones finitas.

(c) Si V es abierto I_V es semicontinua inferiormente. Si C es cerrado I_C es semicontinua superiormente.

Lema de Urysohn 10.1.6 Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico HLC y sean $K \subset V$, con K compacto y V abierto, entonces existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, tal que $\text{sop}(f) \subset V$ e $I_K \leq f \leq I_V$.

Demostración. Sea $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_0, r_1, r_2, \dots\}$, con $r_0 = 0$, $r_1 = 1$ y $r_n \in (0, 1)$. Por (10.1.3) existe un abierto V_0 con adherencia compacta y después un abierto V_1 con adherencia compacta tales que

$$K \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset V,$$

ahora como $r_0 = 0 < r_2 < 1 = r_1$ aplicamos de nuevo (10.1.3) y existe un abierto V_2 con adherencia compacta tal que

$$\overline{V_1} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_0,$$

y procedemos por inducción de tal forma que para r_0, \dots, r_n los abiertos V_i correspondientes satisfacen

$$r_i < r_j \quad \Rightarrow \quad \overline{V_j} \subset V_i,$$

y el abierto V_{n+1} con adherencia compacta, correspondiente a r_{n+1} , se construye considerando $r_i < r_{n+1} < r_j$ con

$$\begin{aligned} r_i &= \text{máx}\{r_k : k = 0, 1, \dots, n; r_k < r_{n+1}\}, \\ r_j &= \text{mín}\{r_k : k = 0, 1, \dots, n; r_k > r_{n+1}\}, \end{aligned}$$

ahora aplicando (10.1.3) existe V_{n+1} tal que

$$\overline{V_j} \subset V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_i,$$

de este modo construimos una sucesión de abiertos V_n uno para cada racional r_n de $[0, 1]$, tales que si $r_n < r_m$, $\overline{V_m} \subset V_n$. Ahora consideramos las funciones semicontinuas inferior y superiormente respectivamente

$$f_n(x) = \begin{cases} r_n & \text{si } x \in V_n, \\ 0 & \text{si } x \notin V_n, \end{cases} \quad g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{V_n}, \\ r_n & \text{si } x \notin \overline{V_n}, \end{cases}$$

y las funciones, semicontinua inferiormente la $f = \sup\{f_n\}$, y semicontinua superiormente la $g = \inf\{g_n\}$, para las que $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ para $x \in K$ y $\text{sop}(f) \subset \overline{V_0}$. Ahora basta demostrar que $f = g$.

Por una parte $f \leq g$, pues para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $f_n \leq g_m$, ya que

$$\begin{aligned} r_n \leq r_m &\Rightarrow f_n \leq r_n \leq r_m \leq g_m, \\ r_n > r_m &\Rightarrow \overline{V_n} \subset V_m \Rightarrow f_n \leq g_m, \end{aligned}$$

y si para un x es $f(x) < g(x)$, existen $r_n, r_m \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tales que

$$f_n(x) \leq f(x) < r_n < r_m < g(x) \leq g_m(x),$$

lo cual implica por una parte que $\overline{V_m} \subset V_n$ y por otra que

$$f_n(x) = 0 \text{ y } g_m(x) = 1 \Rightarrow x \in V_n^c \cap \overline{V_m},$$

y llegamos a un absurdo. ■

Como consecuencia podemos construir particiones de la unidad en un espacio Hausdorff localmente compacto. Esta herramienta fundamental que habitualmente se utiliza para reducir un problema de naturaleza global a uno local, la vamos a usar en el teorema de representación de Riesz.

Teorema de Particiones de la unidad 10.1.7 Sea \mathcal{X} HLC, $K \subset \mathcal{X}$ compacto y V_1, \dots, V_n abiertos que recubren a K . Entonces existen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, tales que $f_i(\mathcal{X}) \subset [0, 1]$, $\text{sop}(f_i) \subset V_i$ y en K la $\sum_{i=1}^n f_i = 1$.

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, n$, existen abiertos U_i con $\overline{U_i}$ compacto, tales que $K \subset \cup_{i=1}^n U_i$ y $U_i \subset \overline{U_i} \subset V_i$, para ello basta considerar por (10.1.3), para cada $x \in K$ e i tal que $x \in V_i$, un entorno abierto $U_x \subset \overline{U_x} \subset V_i$, y extraer un subrecubrimiento finito, U_{x_j} y para cada i unir los que satisfacen $\overline{U_{x_j}} \subset V_i$. Ahora por el Lema de Urysohn existen $g_i \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $I_{\overline{U_i}} \leq g_i \leq I_{V_i}$ y $\text{sop } g_i \subset V_i$. Consideremos ahora las funciones de $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$

$$f_1 = g_1, \quad f_2 = (1 - g_1)g_2, \quad \dots, \quad f_n = (1 - g_1) \cdots (1 - g_{n-1})g_n,$$

para las que $\{f_i \neq 0\} \subset \{g_i \neq 0\}$, por tanto $\text{sop } f_i \subset V_i$, $f_i \leq I_{V_i}$ y por inducción se demuestra que

$$f_1 + \cdots + f_n = 1 - (1 - g_1) \cdots (1 - g_n),$$

por tanto en K , $f_1 + \cdots + f_n = 1$ pues $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. ■

10.2. Medidas regulares

A lo largo de toda la lección supondremos que $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y que \mathcal{A} es una σ -álgebra que contiene a los borelianos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. En la lección (1.7.6), pág.62, hemos estudiado las propiedades de regularidad en las medidas de \mathbb{R}^n . Ahora las volvemos a estudiar en estos espacios.

Definición. Diremos que μ es *cuasi-regular* en $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ si μ es finita en los compactos de \mathcal{X} , es *regular exterior* en cada $E \in \mathcal{A}$, es decir

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ abierto}\},$$

y es *regular interior* en los abiertos y en los $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \infty$, es decir tal que en este tipo de conjuntos

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Un espacio $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ en estas condiciones será llamado *cuasi-regular*. Diremos que μ es *regular* si es finita en los compactos, regular exterior y regular interior en todo $E \in \mathcal{A}$ y en tal caso diremos que el espacio de medida es regular.

Como un ejemplo hemos visto en (1.7.19), pág.64, que los espacios $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ con μ finita en los compactos (i.e. de Lebesgue–Stieltjes) son regulares, en particular para $\mu = m$ la medida de Lebesgue. La base de ese resultado radica en que todo abierto de \mathbb{R}^n es σ -compacto. Veremos a continuación que el resultado sigue siendo válido en los espacios con esta propiedad (recordemos que por (10.1.2), pág.326, si el espacio tiene base numerable todo abierto suyo es σ -compacto).

Teorema 10.2.1 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ Hausdorff localmente compacto, tal que todo abierto es σ -compacto. Entonces toda medida μ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ finita en los compactos es regular.*

Demostración. La demostración es como en (1.7.19), pág.64, modificando ligeramente el final, donde utilizabamos la existencia de abiertos V_n , con adherencia compacta (por tanto con $\mu(V_n) < \infty$) y tales que $V_n \uparrow \mathcal{X}$. En nuestro caso esto se sigue de (10.1.3b), pág.326, pues basta considerar un recubrimiento numerable del espacio por compactos K_n , considerar para cada uno un abierto relativamente compacto $U_n \supset K_n$ y definir los abiertos $V_n = \cup_{i=1}^n U_i$. ■

Como decíamos al principio de la lección supondremos que $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y que \mathcal{A} es una σ -álgebra que contiene a los borelianos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Proposición 10.2.2 *Sea μ una medida en $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ finita en los compactos de \mathcal{X} , regular exterior en cada $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y regular interior en los abiertos, entonces es cuasi-regular.*

Demostración. Falta ver que μ es regular interior en cada boreliano E con $\mu(E) < \infty$. Por ser μ regular exterior en E , para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \supset E$, tal que $\mu(V \cap E^c) < \epsilon$ y por lo mismo existe otro abierto $U \supset V \cap E^c$, tal que $\mu(U) < \epsilon$. Ahora por ser regular interior en V y $\mu(V) < \infty$, existe un compacto $K \subset V$, tal que $\mu(V \cap K^c) < \epsilon$ y el compacto $K \cap U^c \subset E$ verifica que

$$\begin{aligned} \mu[E \cap (K^c \cup U)] &\leq \mu(E \cap K^c) + \mu(E \cap U) \\ &\leq \mu(V \cap K^c) + \mu(U) < 2\epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 10.2.3 (a) Una medida cuasi-regular y σ -finita es regular.
 (b) Si \mathcal{X} es σ -compacto toda medida cuasi-regular es regular.

Demostración. (a) Falta ver que μ es regular interior en los $E \in \mathcal{A}$, con $\mu(E) = \infty$, pero como existe una sucesión de medibles $A_n \uparrow \mathcal{X}$, con $\mu(A_n) < \infty$, tendremos que $\mu(E \cap A_n) \uparrow \mu(E) = \infty$, por tanto para cada $k > 0$, existe un n , tal que

$$k < \mu(E \cap A_n) \leq \mu(A_n) < \infty$$

y por regularidad interior existe un compacto $K \subset E \cap A_n \subset E$, tal que $k < \mu(K)$.

(b) Se sigue de (a) pues μ es finita en los compactos, por tanto σ -finita. ■

Definición. Diremos que una medida (real para $\mu_2 = 0$ ó en general compleja)

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2 = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^- \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathbb{K}),$$

es *regular* si las cuatro medidas finitas μ_i^\pm son regulares. Denotaremos estas medidas con $\mathcal{M}_r(\mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathbb{K})$ ó con \mathcal{M}_r si no hay confusión. Recordemos que \mathcal{M} es un \mathbb{K} -espacio de Banach con la norma $\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{X})$.

Proposición 10.2.4 $\mu \in \mathcal{M}$ es regular sii lo es su variación $|\mu|$. Además \mathcal{M}_r es un subespacio cerrado de \mathcal{M} .

Demostración. Como una medida positiva λ finita es regular sii para cada $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ y $\epsilon > 0$, existe un compacto K y un abierto U tales que $K \subset E \subset U$ y $\lambda(U \setminus K) < \epsilon$, se tiene que si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ son medidas positivas y λ_2 es regular, entonces también lo es λ_1 y que la suma de medidas positivas regulares también lo es, de esto se sigue que $\mu = \mu_1 + i\mu_2 = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^-$, es regular sii lo es $|\mu|$, pues

$$\mu_i^\pm \leq |\mu| \leq \mu_1^+ + \mu_1^- + \mu_2^+ + \mu_2^-,$$

y que \mathcal{M}_r es un subespacio de \mathcal{M} . Veamos que es cerrado, si $\mu_n \in \mathcal{M}_r$ y $\|\mu - \mu_n\| \rightarrow 0$, entonces $\mu \in \mathcal{M}_r$ pues si $K \subset U$, entonces

$$|\mu|(U \setminus K) \leq |\mu - \mu_n|(U \setminus K) + |\mu_n|(U \setminus K) \leq \|\mu - \mu_n\| + |\mu_n|(U \setminus K),$$

por tanto \mathcal{M}_r es un espacio de Banach. ■

10.2.1. Funciones continuas y funciones medibles

Veamos ahora algunos resultados fundamentales que nos relacionan las funciones medibles con las funciones continuas, en particular veremos que una función medible puede convertirse en una función continua variando sus valores en un conjunto de medida tan pequeña como queramos.

Teorema de Lusin 10.2.5 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ cuasi-regular y $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ medible con $\mu\{f \neq 0\} < \infty$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ tal que*

$$\mu\{x \in \mathcal{X} : f(x) \neq g(x)\} < \epsilon.$$

además g puede obtenerse verificando $\|g\|'_\infty = \sup |g| \leq \|f\|'_\infty = \sup |f|$.

Demostración. (a) Supongamos primero que $0 \leq f < 1$ y que existe $A \supset F = \{f \neq 0\}$ compacto, por tanto existe un abierto V con $A \subset V$ y \bar{V} compacto. Consideremos la sucesión de funciones simples que construimos en (2.2.8), pág.81,

$$f_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n} I_{f^{-1}[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})},$$

con $f_n \uparrow f$. Sea ahora $t_1 = f_1$ y para $n \geq 2$, $t_n = f_n - f_{n-1}$, las cuales toman sólo dos valores 0 y $1/2^n$, pues si $f(x) \in [\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}) = [\frac{2j-2}{2^n}, \frac{2j}{2^n})$,

$$f_{n-1}(x) = \frac{2j-2}{2^n} \quad \text{y} \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{2j-2}{2^n}, & \text{si } f(x) \in [\frac{2j-2}{2^n}, \frac{2j-1}{2^n}), \\ \frac{2j-1}{2^n} & \text{si } f(x) \in [\frac{2j-1}{2^n}, \frac{2j}{2^n}), \end{cases}$$

por tanto $2^n t_n = I_{C_n}$, con $C_n \subset A$ y $\sum t_n = \lim f_n = f$. Ahora por la regularidad de μ en C_n existen abiertos $V_n \subset V$ y compactos K_n con $K_n \subset C_n \subset V_n$ tales que $\mu(V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\epsilon$ y por el Lema de Urysohn existen $h_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $I_{K_n} \leq h_n \leq I_{V_n}$ y $\text{sop } h_n \subset V_n$, por tanto $h_n = I_{C_n}$ salvo en $V_n \setminus K_n$. Ahora la serie $g = \sum 2^{-n} h_n$ converge uniformemente, por tanto g es continua y de soporte compacto pues

$$\{g \neq 0\} \subset \cup \text{sop } h_n \subset \cup V_n \subset \bar{V},$$

por tanto $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ y $f = \sum t_n = \sum 2^{-n} h_n = g$ excepto en $E = \cup V_n \setminus K_n$ y $\mu(E) < \epsilon$.

(b) Si f es medible no negativa y acotada, $0 \leq f < M$, y A compacto el resultado se sigue aplicando (a) a f'/M .

(c) Si f es medible real y acotada y A compacto aplicamos (b) a f^+ y a f^- .

(d) Si f es medible real y acotada pero no existe el compacto A , por regularidad interior en F existe un compacto $K \subset F$, con $\mu(F \setminus K) < \epsilon/2$ y aplicamos (c) a $f' = fI_K$, observando que $f = f'$ salvo en $F \setminus K$ y que $\{f' = g\} \cap \{f = f'\} \subset \{f = g\}$, y el resultado se sigue pasando a los complementarios.

(e) Si f es medible real, consideramos $A_n = \{|f| > n\} \subset F$, siendo $A_n \downarrow \emptyset$, por tanto $\mu(A_n) \downarrow 0$ y aplicamos (d) a $f' = fI_{A_n^c}$ que es acotada y $f = f'$ salvo en A_n . Si f es compleja consideramos la parte real y la imaginaria.

Por último si $\sup |f| = a < \infty$, consideramos la aplicación continua $\phi(z) = z$ si $|z| < a$ y $\phi(z) = az/|z|$ si $|z| \geq a$, entonces $\phi \circ g$ satisface los dos apartados, pues $\{\phi \circ g \neq f\} \subset \{g \neq f\}$. ■

Como consecuencia de este resultado y del Lema de Borel–Cantelli, tenemos que las funciones medibles acotadas, son límite c.s. de funciones continuas.

Corolario 10.2.6 *En las condiciones del Teorema de Lusin supongamos que $|f| \leq 1$, entonces existen $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $|g_n| \leq 1$, tales que $f(x) = \lim g_n(x)$ c.s.*

Demostración. Por el Teorema de Lusin para cada n existe $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $|g_n| \leq 1$ y $\mu\{g_n \neq f\} < 2^{-n}$. Ahora por el Lema de Borel–Cantelli, ver ejercicio (1.3.6) de la página 18,

$$\sum \mu\{g_n \neq f\} = 1 < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup\{g_n \neq f\}) = 0,$$

y fuera de este conjunto $g_n(x) = f(x)$ a partir de un n . ■

Corolario 10.2.7 *En un espacio de medida cuasi-regular $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ es denso en L_p , para $0 < p < \infty$.*

Demostración. Dada $f \in L_p$ y $\epsilon > 0$ sabemos por 6.2.16 (página 251), que existe una $s \in \tilde{\mathcal{S}}$ tal que $\|f - s\|_p \leq \epsilon$, y por el Teorema de Lusin una función $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $|g| \leq \|s\|'_\infty$, tal que $g = s$ salvo en un boreliano E con $\mu(E) < (\epsilon/2\|s\|'_\infty)^p$, por tanto

$$\|s - g\|_p = \left(\int_E |s - g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq 2\|s\|'_\infty \mu(E)^{1/p} < \epsilon,$$

y $\|f - g\|_p \leq 2\epsilon$. ■

Nota 10.2.8 Comentemos brevemente el significado particular de este último resultado cuando

$$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m).$$

En $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ tenemos que para cada $0 < p \leq \infty$, las seudométricas d_p definidas en \mathcal{L}_p , son realmente métricas, pues si $f(x) \neq g(x)$, para $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces y sólo entonces existe un abierto V en \mathbb{R}^n en el que $f \neq g$, y esto equivale a que

$$\int |f - g|^p dm > 0 \quad \text{ó para } p = \infty \quad \|f - g\|_\infty > 0,$$

además también se tiene que

$$\|f\|_\infty = \|f\|'_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\},$$

pues $\{|f| > \|f\|'_\infty\} = \emptyset$, por tanto $\|f\|_\infty \leq \|f\|'_\infty$ y para todo $\epsilon > 0$, $\{|f| > \|f\|'_\infty - \epsilon\}$ es un abierto no vacío y por tanto no es localmente nulo, de donde $\|f\|_\infty \geq \|f\|'_\infty - \epsilon$.

Por (10.2.7) sabemos que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L_p(\mathbb{R}^n)$ que es completo, por tanto $L_p(\mathbb{R}^n)$ es la completación del espacio métrico $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), d_p)$. En particular, para $p = n = 1$, si definimos la distancia entre dos funciones continuas f y g de soporte compacto en \mathbb{R} como la integral de Riemann $\int |f(x) - g(x)| dx$, entonces la completación del correspondiente espacio métrico consiste en las funciones Lebesgue integrables en \mathbb{R} (siempre que identifiquemos cada dos que difieran en un conjunto de medida nula).

La importancia de estos casos estriba en que la completación del espacio métrico de funciones $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, no es necesario verla como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy —como habitualmente ocurre—, sino como un espacio de funciones de \mathbb{R}^n mas amplio (con la identificación de las que difieran en un conjunto nulo). El caso $p = \infty$ es distinto de los demás casos, pues la completación de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, con la métrica d_∞ no es $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, sino el espacio $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ de las funciones continuas en \mathbb{R}^n que se anulan en el ∞ , como veremos a continuación.

Definición. Diremos que una función $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ se anula en el ∞ si para cada $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subset \mathcal{X}$, tal que para cada $x \in K^c$ se tiene $|f(x)| < \epsilon$. Denotaremos con $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ el \mathbb{K} —espacio vectorial de las funciones continuas f que se anulan en el ∞ .

Trivialmente se tiene que $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}) \subset \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$, y si \mathcal{X} es compacto entonces se da la igualdad, en cuyo caso escribiremos

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}) = \mathcal{C}_c(\mathcal{X}) = \mathcal{C}_0(\mathcal{X}).$$

Nota 10.2.9 Sea \mathcal{X} Hausdorff localmente compacto y $\bar{\mathcal{X}}$ su compactificación por un punto p (ver (10.1.4), pág.327). Entonces se tiene la inclusión isométrica

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_0(\mathcal{X}) & \hookrightarrow & \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}}) \\ f & \rightarrow & \bar{f} \end{array} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{X} \\ 0 & \text{si } x = p \end{cases}$$

y mediante esta aplicación $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ es isomorfa a su imagen que es el hiperplano cerrado de $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$

$$\ker \hat{p} = \{f \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}}) : f(p) = 0\}.$$

Del mismo modo su subespacio $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ es isomorfo a su imagen que es el subespacio de $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$ de las funciones cuyo germen en p es nulo, es decir que se anulan en un entorno del p .

Podemos considerar el cociente³ $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})/\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$, considerando en $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$ la relación de equivalencia $f \sim g$ sii $f - g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ ó equivalentemente $f(p) = g(p)$ y tenemos la sucesión exacta

$$(10.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})/\mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \equiv \mathbb{K} \rightarrow 0$$

$$f \rightsquigarrow \bar{f} \rightsquigarrow [f] \equiv \hat{p}(f) = f(p)$$

que usaremos mas adelante en la pág.344. Observemos que además el isomorfismo $\hat{p}: \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})/\mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \equiv \mathbb{K}$, $\hat{p}([f]) = f(p)$ es isometría de espacios normados, pues para la función constante $g \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$, $g(x) = f(p)$ se tiene $f \sim g$ y para cualquier $h \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$, tal que $h(p) = f(p)$ se tiene $|f(p)| = \|g\| \leq \|h\| = \sup |h(x)|$, por tanto $\|[f]\| = \|g\| = |f(p)|$.

Teorema 10.2.10 *Sea \mathcal{X} HLC, entonces $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ es de Banach con la norma*

$$\|f\|'_\infty = \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)|,$$

y $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ es denso en él.

Demostración. Por la nota anterior basta demostrar que $\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$ es completo, pues $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ es un cerrado suyo. Sea $f_n \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})$ una sucesión

³Dado un espacio normado E y un subespacio cerrado suyo M consideramos el espacio normado cociente, $E/M = \{[x] = x + M : x \in E\}$, con las operaciones y norma

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \lambda[x] = [\lambda x], \quad \|[x]\| = \inf\{\|y\| : y \in x + M\}.$$

Además si E es de Banach, también lo es el cociente (ver *Hewitt–Stromberg*, pág.222).

de Cauchy, entonces $f_n(x)$ es de Cauchy uniformemente en $\bar{\mathcal{X}}$, por tanto existe $f(x) = \lim f_n(x)$ y es continua pues f_n lo es y

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Ahora veamos la densidad, dada $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ y $\epsilon > 0$ hay un compacto $K \subset \mathcal{X}$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ fuera de K y por el Lema de Urysohn existe una función $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $0 \leq g \leq 1$ y $g = 1$ en K , entonces $h = fg \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ y $\|f - h\|'_\infty \leq \epsilon$. ■

10.3. Teoremas de representación de Riesz

Es fácil ver que si μ es una medida en $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, tal que $\mu(K) < \infty$ para cada compacto K , entonces podemos definir el funcional lineal

$$\Lambda : \mathcal{C}_c(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

pues si f es continua entonces es medible y si es de soporte compacto es integrable, ya que es acotada $\|f\|'_\infty = \sup\{|f|\} < \infty$, por ser continua, y $\int |f| \leq \|f\|'_\infty \mu[\text{sop}(f)] < \infty$. Además Λ es positivo en el sentido de que si $f \geq 0$, $\Lambda(f) \geq 0$. Observemos que además si μ es finita, entonces Λ es continua y $\|\Lambda\| \leq \mu(\mathcal{X}) = \|\mu\|$.

Ahora nos planteamos la siguiente cuestión: ¿son de esta forma todos los funcionales lineales y positivos en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$?. Veremos que sí, además de modo único si imponemos que μ sea *cuasi-regular*. Observemos que para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si $\Lambda : \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ es lineal y positivo, entonces está determinado sobre $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, pues si $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, $f = f_1 + if_2$, con las $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ y $\Lambda(f) = \Lambda(f_1) + i\Lambda(f_2)$, además si $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, $\Lambda(f) \in \mathbb{R}$, pues $\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$ y $\Lambda(f^+), \Lambda(f^-) \geq 0$.

Teorema de Representación de Riesz I 10.3.1 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espacio topológico HLC y Λ un funcional lineal y positivo en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, entonces existe una única medida μ , cuasi-regular en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, tal que para cada $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$.*

$$\Lambda(f) = \int f d\mu.$$

Demostración. Unicidad. Si μ es cuasi-regular y satisface el resultado entonces para cada abierto $U \in \mathcal{T}$ y $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(f) \subset U$ y $0 \leq f \leq I_U$,

$$\Lambda(f) = \int f d\mu \leq \mu(U),$$

por otra parte para cada compacto $K \subset U$, existe $h \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, por el Lema de Urysohn (10.1.6), con $\text{sop}(h) \subset U$ y $I_K \leq h \leq I_U$, por lo que $\mu(K) \leq \Lambda(h) \leq \mu(U)$, y como μ es regular interior en el abierto U tendremos que

$$(10.2) \quad \mu(U) = \sup\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}), \text{sop}(f) \subset U, 0 \leq f \leq I_U\},$$

y por tanto μ está determinada de modo único en los abiertos y como es regular exterior en todo conjunto, es única.

Existencia. De existir μ , la igualdad (10.2) nos indica la única forma de definirla en \mathcal{T} y tiene las propiedades: (a) $\mu(\emptyset) = 0$; (b) $\mu(U) \geq 0$ para todo abierto U , por ser Λ positivo; (c) $\mu(E) \leq \mu(U)$ para $E \subset U$ abiertos.

Ahora la demostración consiste en:

- (1) Construir una medida exterior μ^* que extienda a μ .
- (2) Demostrar que $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{A}_*$.
- (3) Demostrar que $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}$ es cuasi-regular.
- (4) Demostrar que $\Lambda(f) = \int f d\mu$, para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$.

(1) Por (1.4.3), pág.21, podemos definir la medida exterior

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : E \subset \cup A_i, A_i \text{ abiertos}\right\},$$

la cual verifica

$$(10.3) \quad \mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \in \mathcal{T}\}.$$

(lo cual nos dará automáticamente la regularidad exterior) para lo cual basta demostrar que si $U_n \in \mathcal{T}$ y $U = \cup U_n$, que es abierto, entonces $\mu(U) \leq \sum \mu(U_n)$. Sea $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(f) \subset U$ y $0 \leq f \leq I_U$, entonces por ser $\text{sop}(f)$ compacto tendremos que existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $\text{sop}(f) \subset \cup_{i=1}^m U_i$, ahora por (10.1.7) existe una partición de la unidad $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(g_i) \subset U_i$, $0 \leq g_i \leq I_{U_i}$ y $1 = \sum g_i$ en $\text{sop}(f)$. Entonces $f = \sum f g_i$, $\text{sop}(f g_i) \subset U_i$ y $0 \leq f g_i \leq I_{U_i}$, por tanto

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^m \Lambda(f g_i) \leq \sum_{i=1}^m \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i),$$

y tomando supremo se sigue por (10.2) $\mu(U) \leq \sum \mu(U_n)$ y por tanto la igualdad (10.3). Ahora bien por esta igualdad y la propiedad (c) anterior se sigue que μ^* extiende a μ , es decir que si E es abierto $\mu^*(E) = \mu(E)$.

(2) Sea U abierto y veamos que es \mathcal{A}_* -medible, para lo cual basta ver que si $E \subset \mathcal{X}$, con $\mu^*(E) < \infty$, entonces

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c).$$

Supongamos primero que E es abierto, entonces por la definición (10.2) de $\mu(U \cap E)$, para cada $\epsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(f) \subset U \cap E$, $0 \leq f \leq I_{U \cap E}$ y $\Lambda(f) > \mu(U \cap E) - \epsilon$ y como $V = E \cap \text{sop}(f)^c$ también es abierto, existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ con $\text{sop}(g) \subset V$, $0 \leq g \leq I_V$ y $\Lambda(g) > \mu(V) - \epsilon$, además $\text{sop}(f + g) \subset E$ y como $g = 0$ en V^c y $f = 0$ en V , entonces $0 \leq f + g \leq I_E$ y

$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) > \mu(U \cap E) + \mu(V) - 2\epsilon \\ &\geq \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U^c \cap E) - 2\epsilon, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue haciendo $\epsilon \rightarrow 0$. Consideremos ahora que E es arbitrario y que $\mu^*(E) < \infty$, entonces por (10.3) para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto $V \supset E$, tal que $\mu(V) < \mu^*(E) + \epsilon$, por tanto

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \epsilon &> \mu(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c). \end{aligned}$$

(3) $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}$ es cuasi-regular: Es regular exterior por definición.

Veamos que es finita en cada compacto K : si $I_K \leq f$ para $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ (que existe por el Lema de Urysohn) y elegimos un $t > 1$ tendremos que $K \subset \{f > 1/t\} = U_t$, por tanto $\mu(K) \leq \mu(U_t)$, pero además U_t es abierto y por (10.2) $\mu(U_t) \leq t\Lambda(f)$, pues para toda $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\text{sop}(g) \subset U_t$ y $0 \leq g \leq I_{U_t}$, tendremos que $g \leq tf$ y por ser Λ positivo $\Lambda(g) \leq t\Lambda(f)$. Ahora haciendo $t \rightarrow 1$, $\mu(K) \leq \Lambda(f) < \infty$ y μ es finita en los compactos. Ahora si $U \supset K$ es un abierto, por el Lema de Urysohn existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $I_K \leq f \leq I_U$ y $\text{sop}(f) \subset U$, por tanto

$$\mu(K) \leq \Lambda(f) \leq \mu(U),$$

y por ser μ regular exterior tendremos

$$(10.4) \quad \mu(K) = \inf\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}), I_K \leq f\}.$$

Veamos ahora que μ es regular interior en cada abierto U , para ello sea $r < \mu(U)$ entonces por (10.2) existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $g \leq I_U$, $K =$

$\text{sop}(g) \subset U$, tal que $r < \Lambda(g) < \mu(U)$, y para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $I_K \leq f$, tendremos que $g \leq f$, por tanto $\Lambda(g) \leq \Lambda(f)$ y por (10.4) $\Lambda(g) \leq \mu(K)$, por tanto $r < \mu(K) \leq \mu(U)$ y se tiene el resultado.

(4) Por linealidad basta ver que $\Lambda(f) = \int f d\mu$, para $f \geq 0$. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) < (n-1)\epsilon, \\ f(x) - (n-1)\epsilon, & \text{si } (n-1)\epsilon \leq f(x) < n\epsilon, \\ \epsilon, & \text{si } n\epsilon \leq f(x), \end{cases}$$

entonces $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ pues para $K_0 = \text{sop}(f)$ y $K_n = \{n\epsilon \leq f\}$, $\text{sop}(f_n) \subset K_{n-1}$ y todas son nulas salvo un número finito, pues para un m suficientemente grande $f(x) \leq m\epsilon$, ya que f es acotada. Además $f = \sum_{n=1}^m f_n$ y $\epsilon I_{K_n} \leq f_n \leq \epsilon I_{K_{n-1}}$, por tanto integrando se obtiene la primera de las desigualdades

$$\begin{aligned} \epsilon \mu(K_n) &\leq \int f_n d\mu \leq \epsilon \mu(K_{n-1}), \\ \epsilon \mu(K_n) &\leq \Lambda(f_n) \leq \epsilon \mu(K_{n-1}), \end{aligned}$$

y la de la izquierda en la segunda se sigue de (10.4) y $\epsilon I_{K_n} \leq f_n$ y la de la derecha también de (10.4), pues para cada $g \in \mathcal{C}_c$, con $I_{K_{n-1}} \leq g$, es $f_n \leq \epsilon g$, ya que $f_n \leq \epsilon I_{K_{n-1}}$, por tanto $\Lambda(f_n)/\epsilon \leq \Lambda(g)$. Ahora sumando en ambas desigualdades se tiene que

$$\epsilon \sum_{n=1}^m \mu(K_n) \leq \int f d\mu, \quad \Lambda(f) \leq \epsilon \sum_{n=0}^{m-1} \mu(K_n),$$

y por tanto

$$\left| \int f d\mu - \Lambda(f) \right| \leq \epsilon [\mu(K_0) - \mu(K_m)] \leq \epsilon \mu(K_0),$$

pues $K_m \subset K_0$ y $\mu(K_m) \leq \mu(K_0)$. ■

Nota 10.3.2 Observemos que el enunciado del Teorema de Riesz se puede cambiar en los siguientes casos:

Si \mathcal{X} es σ -compacto, poniendo regular en vez de cuasi-regular, por (10.2.3), pág.332.

Si todo abierto de \mathcal{X} es σ -compacto, poniendo simplemente finita en los compactos en vez de cuasi-regular, que por (10.2.1), pág.331 equivale a ser regular.

Corolario 10.3.3 *En las condiciones del Teorema anterior si además Λ es continua, entonces la medida μ es regular y finita y $\|\mu\| = \mu(\mathcal{X}) = \|\Lambda\|$.*

Demostración. Por (10.2) se tiene la igualdad en

$$\|\Lambda\| \leq \mu(\mathcal{X}) = \sup\{\Lambda(f) : f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}), 0 \leq f \leq 1\} \leq \|\Lambda\|. \quad \blacksquare$$

Nota 10.3.4 Si denotamos con \mathcal{M}_r^+ el subconjunto de las medidas positivas de \mathcal{M}_r (ver definición 10.2, pág.332) y con $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})^{*+}$ los funcionales lineales continuos y positivos en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, el resultado anterior nos dice que hay una biyección isométrica entre ellos, que entenderemos mejor en el segundo **Teorema de Representación de Riesz** (10.3.7), pág.343, en el que nos preguntamos si hay un resultado análogo para $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})^*$, es decir para los funcionales lineales continuos sin que sean necesariamente positivos.

En este sentido lo primero que observamos es que la aplicación restricción

$$\mathcal{C}_0(\mathcal{X})^* \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathcal{X})^*,$$

es un isomorfismo isométrico, pues es inyectiva por ser $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ denso en $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ (ver (10.2.10), pág.336); y es sobre y conserva la norma por el Teorema de Hahn–Banach (6.3.7), pág.257.

Por otra parte cada funcional lineal y continuo complejo $I \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{C})^*$, está determinado por su restricción J a $\mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, pues para cada $f = f_1 + if_2 \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, $I(f) = I(f_1) + iI(f_2) = J(f_1) + iJ(f_2)$ y $J = J_1 + iJ_2$, para $J_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})^*$, funcionales lineales y continuos reales. Veamos que cada $J_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})^*$ tiene una *descomposición de Jordan*.

Teorema 10.3.5 *Si $J \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})^*$, existen funcionales lineales continuos y positivos $J^+, J^- \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})^*$, tales que $J = J^+ - J^-$.*

Demostración. Para cada $f \geq 0$, $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, definimos

$$J^+(f) = \sup\{J(g) : g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R}), 0 \leq g \leq f\},$$

el cual es finito pues para cada g del conjunto $|J(g)| \leq \|J\| \|f\|_\infty$, por tanto $0 \leq J^+(f) \leq \|J\| \|f\|_\infty$. Además para cada $c \geq 0$, $J^+(cf) = cJ^+(f)$ y si $f_1, f_2 \geq 0$, $f_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, entonces

$$(10.5) \quad J^+(f_1 + f_2) = J^+(f_1) + J^+(f_2),$$

pues por una parte si $0 \leq g_i \leq f_i$ y $g_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$ siendo $J^+(f_1 + f_2) \geq J(g_1 + g_2) = J(g_1) + J(g_2)$ y tomando supremos $J^+(f_1 + f_2) \geq J^+(f_1) + J^+(f_2)$; y por otra parte si $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ y $g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, considerando $g_1 = \min(g, f_1)$ y $g_2 = g - g_1$, tendremos que $g_i \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, $0 \leq g_1 \leq f_1$ y $0 \leq g_2 \leq f_2$, por tanto

$$J(g) = J(g_1) + J(g_2) \leq J^+(f_1) + J^+(f_2),$$

y tomando supremos tenemos la otra desigualdad.

Ahora para cada $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, consideramos $f = f^+ - f^-$ y definimos

$$J^+(f) = J^+(f^+) - J^+(f^-),$$

observando que si $g, h \geq 0$, $g, h \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ y $f = g - h$, entonces también $J^+(f) = J^+(g) - J^+(h)$, pues $f^+ + h = g + f^-$ y por (10.5)

$$\begin{aligned} J^+(f^+) + J^+(h) &= J^+(g) + J^+(f^-) \quad \Rightarrow \\ J^+(f^+) - J^-(f^-) &= J^+(g) - J^+(h). \end{aligned}$$

De esto se sigue que J^+ es lineal, pues para $f, g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ como $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, tendremos que

$$J^+(f + g) = J^+(f^+ + g^+) - J^+(f^- + g^-) = J^+(f) + J^+(g),$$

y para $c \in \mathbb{R}$, $J^+(cf) = cJ^+(f)$. Además es positivo y continuo, pues es acotado ya que para cada $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |J^+(f)| &\leq \max\{J^+(f^+), J^+(f^-)\} \\ &\leq \|J\| \cdot \max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\} = \|J\| \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

y $\|J^+\| \leq \|J\|$. Por último definimos $J^-(f) = J^+(f) - J(f)$, el cual es lineal, continuo y positivo y se tiene el resultado. ■

Corolario 10.3.6 *Para cada funcional lineal y continuo complejo $I \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{C})^*$, existen cuatro medidas finitas y regulares μ_i^\pm , con $i = 1, 2$, tales que para $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i\mu_2^+ - i\mu_2^- \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathbb{C})$,*

$$I(f) = \int f d\mu.$$

Demostración. Se sigue de los resultados anteriores pues para cada $f = f_1 + if_2 \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, $J_i^\pm(f) = \int f d\mu_i^\pm$ y

$$\begin{aligned} I(f) &= I(f_1) + iI(f_2) = J(f_1) + iJ(f_2) \\ &= J_1(f_1) + iJ_2(f_1) + i(J_1(f_2) + iJ_2(f_2)) \\ &= J_1^+(f_1) - J_1^-(f_1) + i(J_2^+(f_1) - J_2^-(f_1)) \\ &\quad + i[J_1^+(f_2) - J_1^-(f_2) + i(J_2^+(f_2) - J_2^-(f_2))]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dada $\mu \in \mathcal{M}_r$ el funcional

$$\Lambda: \mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

es lineal y continuo pues

$$|\Lambda(f)| = \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu| \leq \|f\|'_\infty \|\mu\|,$$

y $\|\Lambda\| \leq \|\mu\|$. El siguiente teorema nos asegura que todos los funcionales lineales y continuos en $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$ son de esta forma y que además $\|\Lambda\| = \|\mu\|$.

Teorema de Representación de Riesz II 10.3.7 *La aplicación*

$$\mathcal{M}_r \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{X})^*, \quad \mu \rightarrow \Lambda, \quad \Lambda(f) = \int f d\mu,$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Que es sobre lo hemos visto en (10.3.6). Veamos que es isometría, es decir que si $\mu \in \mathcal{M}_r$ y $\Lambda(f) = \int f d\mu$, entonces $\|\Lambda\| = \|\mu\|$. La desigualdad $\|\Lambda\| \leq \|\mu\|$ acabamos de verla y por otro lado si consideramos la representación polar de μ , $h = d\mu/d|\mu|$, con $|h| = 1$ (ver (4.4.11), pág.180) y cualquier $\epsilon > 0$, tendremos por el Teorema de Lusin (10.2.5), pág.333, que existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, con $\|f\|'_\infty \leq 1$ y $f = \bar{h}$ salvo en un boreliano E con $|\mu|(E) < \epsilon/2$. Por tanto

$$\begin{aligned} \|\mu\| &= |\mu|(\mathcal{X}) = \int \bar{h}h d|\mu| = \int \bar{h} d\mu = \left| \int (f + \bar{h} - f) d\mu \right| \\ &\leq \left| \int f d\mu \right| + \left| \int (\bar{h} - f) d\mu \right| \leq |\Lambda(f)| + 2|\mu|(E) \leq \|\Lambda\| + \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 10.3.8 El caso compacto de este Teorema es aparentemente un caso particular, sin embargo es el general, pues tomando duales en la sucesión exacta (10.1), pág.336,

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})/\mathcal{C}_0(\mathcal{X}) \equiv \mathbb{K} \rightarrow 0$$

$$f \rightsquigarrow f \rightsquigarrow [f] \equiv \hat{p}(f) = f(p)$$

tendremos la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})^* \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{X})^* \rightarrow 0$$

$$a \rightsquigarrow \Lambda \rightsquigarrow \Lambda|_{\mathcal{C}_0} \rightsquigarrow 0$$

$$a \rightsquigarrow a\hat{p} \rightsquigarrow 0$$

siendo la norma del espacio $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})^*$ la cociente, es decir

$$\|\Lambda|_{\mathcal{C}_0}\| = \inf\{\|\Gamma\| : \Gamma \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})^*, \Gamma = \Lambda \text{ en } \mathcal{C}_0\},$$

pues por un lado se tiene la desigualdad \geq por el Teorema de Hahn–Banach, (6.3.7), pág.257, ya que existe $\Gamma \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})^*$, verificando $\Gamma = \Lambda$ en \mathcal{C}_0 y $\|\Gamma\| = \|\Lambda|_{\mathcal{C}_0}\|$ y por otro lado la \leq , pues para cualquier Γ del conjunto

$$\|\Lambda|_{\mathcal{C}_0}\| = \sup\{|\Lambda(f)| : f \in \mathcal{C}_0, \|f\| = 1\}$$

$$= \sup\{|\Gamma(f)| : f \in \mathcal{C}_0, \|f\| = 1\} \leq \|\Gamma\|.$$

Y por otro lado tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{M}_r(\bar{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathcal{M}_r(\mathcal{X}) \rightarrow 0$$

$$a \rightsquigarrow \mu \rightsquigarrow \mu|_{\mathcal{X}} \rightsquigarrow 0$$

$$a \rightsquigarrow a\delta_p \rightsquigarrow 0$$

con lo que el isomorfismo isométrico en el caso compacto implica el del caso localmente compacto

$$\mathcal{C}(\bar{\mathcal{X}})^* \simeq \mathcal{M}_r(\bar{\mathcal{X}}) \Rightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{X})^* \simeq \mathcal{M}_r(\mathcal{X}).$$

10.4. Regularidad. T. de Radón–Nikodym

Una interesante propiedad topológica de las medidas regulares es que para ellas existe el cerrado mas pequeño en el que está concentrada toda la medida.

Teorema 10.4.1 *Sea \mathcal{X} HLC y \mathcal{A} una σ -álgebra que contenga a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Si μ es una medida cuasi-regular en \mathcal{A} , entonces la unión de todos los abiertos de medida cero por μ , es un abierto A con $\mu(A) = 0$.*

Demostración. Por ser μ cuasi-regular es regular interior en el abierto $A = \cup A_i$, por tanto

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subset A\} = 0,$$

pues para cada K existen i_1, \dots, i_n , $K \subset \cup A_{i_j}$ y $\mu(K) \leq \sum \mu(A_{i_j}) = 0$.

■

Definición. Sea \mathcal{X} HLC, \mathcal{A} una σ -álgebra que contiene a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ y μ una medida regular en \mathcal{A} . Llamaremos *soporte de μ* al cerrado $\text{sop}(\mu) = A^c$ del resultado anterior. Si μ es real finita ó compleja, entonces llamamos soporte de μ al soporte de $|\mu|$.

A continuación vemos algunas propiedades del soporte de una medida en relación con la integración de funciones continuas.

Ejercicio 10.4.1 Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ como en (10.4.1). Demostrar:

- (a) Si $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ es continua entonces $\int f d\mu = 0$ sii $f = 0$ en el $\text{sop}(\mu)$.
- (b) $x \in \text{sop}(\mu)$ sii para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ no negativa, tal que $f(x) > 0$, se tiene $\int f d\mu > 0$.

Definición. Sea \mathcal{E} una familia de funciones $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que \mathcal{E} está dirigido superiormente si dadas $f, g \in \mathcal{E}$ existe $h \in \mathcal{E}$, tal que $f \leq h$ y $g \leq h$.

Podemos dar una versión del teorema de la convergencia dominada con este nuevo concepto.

Proposición 10.4.2 (Ver Cohn, p.229). *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ como en (10.4.1) y \mathcal{E} una familia de funciones semicontinuas superiormente, no negativas y dirigidas superiormente, entonces*

$$\int \sup \mathcal{E} d\mu = \sup_{h \in \mathcal{E}} \left\{ \int h d\mu \right\}.$$

Terminamos esta lección contestando a dos preguntas en relación con el teorema de Radon–Nikodym. Si $\nu = f\mu$ y μ es regular ¿es ν regular?, ¿podemos caracterizar estas ν aunque μ no sea σ -finita?

Teorema 10.4.3 (Ver Cohn, p.223). Sea \mathcal{X} HLC y μ una medida regular en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Si $f \in \mathcal{L}_1$ y $\nu = f\mu$, entonces ν es regular.

Teorema 10.4.4 (Ver Cohn, p.224). Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mu)$ como en (10.4.3) y sea ν una medida regular, real finita ó compleja. Entonces son equivalentes:

- (a) Existe $f \in \mathcal{L}_1$ tal que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.
- (b) Para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, si $\mu(A) = 0$ entonces $\nu(A) = 0$.
- (c) Para K compacto, si $\mu(K) = 0$, entonces $\nu(K) = 0$.

Corolario 10.4.5 (Ver Cohn, p.224). Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mu)$ como en (10.4.3). La aplicación

$$L: \mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_r(\mathcal{X}, \mathbb{K}), \quad L(f) = f\mu,$$

induce una isometría lineal de L_1 en el subespacio de \mathcal{M}_r de las medidas absolutamente continuas respecto de μ .

10.5. El dual de L_1 en un espacio Hlc

Hemos visto que L_p y L_q son espacios duales para $1 < p, q < \infty$ conjugados. Y que L_∞ es el dual de L_1 en un espacio de medida σ -finito. Veremos ahora que bajo ciertas condiciones topológicas este último resultado es cierto aunque el espacio de medida no sea σ -finito. Para ello utilizaremos el primer teorema de representación de Riesz y los resultados que a continuación desarrollamos.

Proposición 10.5.1 Sea \mathcal{X} un espacio HLC, $\Lambda: \mathcal{C}_c(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{K}$ lineal y positivo y $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ como en (10.3.1). Entonces son equivalentes:

- (a) $B \in \mathcal{A}_*$.
- (b) $B \cap U \in \mathcal{A}_*$, para todo abierto U con $\mu(U) < \infty$.
- (c) $B \cap K \in \mathcal{A}_*$, para todo compacto K .

Por otra parte tenemos las siguientes propiedades del espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_*, \mu^*)$, en cuya demostración se hace uso del **Lema de Zorn**.

Proposición 10.5.2 *En las condiciones de (10.5.1) existe una familia \mathcal{K} de compactos disjuntos de \mathcal{X} tales que:*

- (a) $\mu(K) > 0$, para cada $K \in \mathcal{K}$.
- (b) $\mu(K \cap U) > 0$, para cada abierto U y $K \in \mathcal{K}$ con $K \cap U \neq \emptyset$.
- (c) Si $A \in \mathcal{A}_*$ y $\mu(A) < \infty$, entonces $A \cap K \neq \emptyset$ a lo sumo para una colección numerable de $K \in \mathcal{K}$. Además $\mu(A) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \mu(A \cap K)$.
- (d) $A \in \mathcal{A}_*$ sii $A \cap K \in \mathcal{A}_*$ para cada $K \in \mathcal{K}$.
- (e) $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$ es medible sii para cada $K \in \mathcal{K}$, $f|_K$ es medible.

Volviendo ahora al tema que nos ocupa, podemos demostrar, como consecuencia de (10.5.2) la siguiente relación entre L_1^* y L_∞ .

Teorema 10.5.3 *(Ver Cohn, p.235). En las condiciones de (10.3.1) para el espacio de medida cuasi-regular $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_*, \mu^*)$, la aplicación*

$$T: L_\infty \longrightarrow L_1^*, \quad T(g)(f) = \int fg d\mu^*,$$

para $g \in L_\infty$ y $f \in L_1$, es un isomorfismo isométrico.

Debemos decir que aunque el teorema es válido reemplazando el espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_*, \mu^*)$ por $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mu)$ cuando μ es σ -finita en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, esto no es cierto en general (ver Cohn, p.236).

10.6. Funcionales de Radón

En esta lección veremos la relación existente entre los dos conceptos de integración que habitualmente siguen los textos: el abstracto, que es el que nosotros hemos desarrollado y el topológico, desarrollado por Bourbaki y que pasamos a comentar.

Definición. Llamaremos *funcional de Radon positivo* en un espacio HLC \mathcal{X} , a todo funcional lineal y positivo

$$\Lambda: \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

es decir tal que si $f \geq 0$ entonces $\Lambda(f) \geq 0$.

Dado un funcional de Radon positivo Λ en \mathcal{X} , Bourbaki define un nuevo funcional $I: \mathcal{S}_+ \rightarrow [0, \infty]$ en el espacio de las funciones $h: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ semicontinuas inferiormente,

$$I(h) = \sup\{\Lambda(g) \in \mathbb{R} : g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}), 0 \leq g \leq h\},$$

y después para cualquier función $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$,

$$I(f) = \inf\{I(h) : h \in \mathcal{S}_+, f \leq h\},$$

Esta I definida en el espacio de todas las funciones $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ tiene las siguientes propiedades: $I(f + g) \leq I(f) + I(g)$, $I(af) = aI(f)$, para $a \in [0, \infty)$.

Considera entonces el espacio vectorial \mathcal{E} de las funciones $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $I(|f|) < \infty$, con la seminorma $p(f) = I(|f|)$. Considera entonces el espacio $\mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \Lambda)$ como la clausura de $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ en \mathcal{E} , respecto de la topología que define p , y extiende Λ a $\mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \Lambda)$ de la forma $\Lambda(f) = \lim \Lambda(f_n)$, para $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ y $p(f_n - f) \rightarrow 0$ (se demuestra que el límite existe y no depende de las f_n). A las funciones de $\mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \Lambda)$ las llama funciones Λ -integrables e integral de $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \Lambda)$ a $\Lambda(f)$. Dice que $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es Λ -medible si para cada compacto K y cada $\epsilon > 0$, existe un cerrado $C \subset K$, tal que f es continua en C y $\Lambda(I_{K \setminus C}) \leq \epsilon$. además dice que $A \subset \mathcal{X}$ es Λ -integrable si I_A es Λ -integrable y que es Λ -medible si I_A es Λ -medible. En el siguiente resultado vemos qué relación existe entre los conceptos de Bourbaki y los que nosotros hemos desarrollado.

Teorema 10.6.1 (Ver Cohn, p.238). Sea \mathcal{X} un espacio HLC y

$$\Lambda: \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

un funcional lineal y positivo. Sea $\mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \Lambda)$ el espacio definido en el párrafo anterior y $(\mathcal{X}, \mathcal{A}_*, \mu)$ el espacio de medida cuasi-regular asociado a Λ por (10.3.1). Entonces:

- (a) $\mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \Lambda) = \mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \mathcal{A}_*, \mu, \mathbb{R}) = \mathcal{L}_1$.
- (b) $\Lambda(f) = \int f d\mu$, para cada $f \in \mathcal{L}_1$.
- (c) $A \subset \mathcal{X}$ es Λ -medible sii $A \in \mathcal{A}_*$.
- (d) $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es Λ -medible sii es medible respecto de \mathcal{A}_* .

Observemos que si $\Lambda: \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y positivo, entonces para cada compacto K existe $k = \mu(K) < \infty$ tal que para cualquier

$f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ con $\text{sop}(f) \subset K$

$$|\Lambda(f)| \leq k\|f\|_\infty,$$

y la diferencia de dos funcionales de Radón positivas tiene la misma propiedad. Esto lleva a Bourbaki a dar la siguiente definición.

Definición. Llamaremos *funcional de Radón en \mathcal{X}* a todo funcional $\Lambda: \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineal verificando que para cada compacto K existe un $0 \leq k < \infty$ tal que para cada $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ con $\text{sop}(f) \subset K$

$$|\Lambda(f)| \leq k\|f\|_\infty.$$

En particular todo funcional

$$\Lambda: \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

lineal y continuo (al que le corresponde por (10.3.7) una medida real regular) es de Radón.

Proposición 10.6.2 *Todo funcional de Radon $\Lambda: \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferencia de dos funcionales de Radon positivos $\Lambda = \Lambda^+ - \Lambda^-$.*

Demostración. La demostración es similar a la de (10.3.5), pág.341. Para cada $f \geq 0$, $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, definimos

$$\Lambda^+(f) = \sup\{\Lambda(g) : g \in \mathcal{C}_c, 0 \leq g \leq f\},$$

el cual es finito pues dado el compacto $K = \text{sop}(f)$ existe un $0 \leq k < \infty$ tal que para cada g del conjunto, $|\Lambda(g)| \leq k\|g\|_\infty \leq k\|f\|_\infty$, por tanto $0 \leq \Lambda^+(f) \leq k\|f\|_\infty$. Veamos que es lineal: Por una parte para $c \geq 0$, $\Lambda^+(cf) = c\Lambda^+(f)$ y si $f_1, f_2 \geq 0$, $f_i \in \mathcal{C}_c$, entonces

$$(10.6) \quad \Lambda^+(f_1 + f_2) = \Lambda^+(f_1) + \Lambda^+(f_2),$$

pues por una parte si $0 \leq g_i \leq f_i$ y $g_i \in \mathcal{C}_c$, $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$ siendo $\Lambda^+(f_1 + f_2) \geq \Lambda(g_1 + g_2) = \Lambda(g_1) + \Lambda(g_2)$ y tomando supremos $\Lambda^+(f_1 + f_2) \geq \Lambda^+(f_1) + \Lambda^+(f_2)$; y por otra parte si $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ y $g \in \mathcal{C}_c$, considerando $g_1 = \text{mín}(g, f_1)$ y $g_2 = g - g_1$, tendremos que $g_i \in \mathcal{C}_c$, $0 \leq g_1 \leq f_1$ y $0 \leq g_2 \leq f_2$, por tanto

$$\Lambda(g) = \Lambda(g_1) + \Lambda(g_2) \leq \Lambda^+(f_1) + \Lambda^+(f_2),$$

y tomando supremos tenemos la otra desigualdad.

Ahora para cada $f \in \mathcal{C}_c$, consideramos $f = f^+ - f^-$ y definimos

$$\Lambda^+(f) = \Lambda^+(f^+) - \Lambda^+(f^-),$$

observando que si $g, h \geq 0$, $g, h \in \mathcal{C}_c$ y $f = g - h$, entonces también $\Lambda^+(f) = \Lambda^+(g) - \Lambda^+(h)$, pues $f^+ + h = g + f^-$ y por (10.6)

$$\begin{aligned} \Lambda^+(f^+) + \Lambda^+(h) &= \Lambda^+(g) + \Lambda^+(f^-) \Rightarrow \\ \Lambda^+(f^+) - \Lambda^+(f^-) &= \Lambda^+(g) - \Lambda^+(h). \end{aligned}$$

De esto se sigue que Λ^+ es lineal, pues para $f, g \in \mathcal{C}_c$ como $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, tendremos que

$$\Lambda^+(f + g) = \Lambda^+(f^+ + g^+) - \Lambda^+(f^- + g^-) = \Lambda^+(f) + \Lambda^+(g),$$

y para $c \in \mathbb{R}$, $\Lambda^+(cf) = c\Lambda^+(f)$. Además es positivo y por el **Teorema de Representación de Riesz 10.3.1** es de Radón, no obstante en este caso se sigue fácilmente ya que para cada compacto K existe un $0 \leq k < \infty$ tal que para cada f con $\text{sop}(f) \subset K$

$$|\Lambda^+(f)| \leq \max\{\Lambda^+(f^+), \Lambda^+(f^-)\} \leq k\|f\|_\infty,$$

pues para cualquier $0 \leq g \leq f^\pm$,

$$|\Lambda(g)| \leq k\|g\|_\infty \leq k\|f\|_\infty.$$

Por último definimos $\Lambda^-(f) = \Lambda^+(f) - \Lambda(f)$, el cual es lineal y positivo y de Radón y se tiene el resultado. ■

Sin embargo aunque todo funcional de Radón se pone como diferencia de dos funcionales de Radón positivos $\Lambda = \Lambda^+ - \Lambda^-$, los cuales por (10.3.1) se representan como integrales respecto de medidas cuasi-regulares, $\Lambda^+(f) = \int f d\mu_1$, $\Lambda^-(f) = \int f d\mu_2$, un funcional de Radón no se puede poner, en general, como una integral respecto de una medida real. Como por ejemplo,

$$\Lambda(f) = \int_{-\infty}^0 f dm - \int_0^\infty f dm,$$

pues las partes positiva y negativa de una medida real no pueden ambas ser infinito. Sin embargo todo funcional de Radón sí puede ponerse como diferencia de dos integrales respecto de medidas de Borel cuasi-regulares. En base a esto podemos decir que los funcionales de Radón positivos se corresponden con las medidas (cuasi-regulares), mientras que los funcionales de Radón con las “medidas reales a las que admitimos que tomen el valor ∞ y el valor $-\infty$ ”, por esta razón algunos autores los llaman *medidas de Radon*.

10.7. Producto de dos espacios HLC

Hemos visto que si $(\mathcal{X}_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\mathcal{X}_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ son espacios de medida σ -finita, entonces en $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ existe una única medida $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, tal que para cada $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_2$, $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$.

Nos preguntamos ahora como podemos mejorar este resultado si imponemos propiedades topológicas a los espacios \mathcal{X}_i . Sean \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 espacios HLC, consideremos las σ -álgebras de Borel $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathcal{X}_1)$ y $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(\mathcal{X}_2)$ y sendas medidas μ_1 y μ_2 en \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 , cuasi-regulares. En este caso es fácil demostrar que $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ es HLC. Pero:

¿Es $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2)$?

¿Existe $\mu_1 \times \mu_2$?

¿Si existe, es regular $\mu_1 \times \mu_2$?

Dos obstáculos nos encontramos de entrada. El primero consiste en que una medida cuasi-regular no es necesariamente σ -finita. El segundo que aunque $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2)$ en general no se da la igualdad, por tanto no tiene sentido hablar de regularidad de una medida definida en $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. A continuación estudiamos dos formas de abordar este problema. La primera consiste en considerar que los \mathcal{X}_i tienen bases numerables para sus topologías, en cuyo caso $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2)$ y si μ_1 y μ_2 son cuasi-regulares veremos que son σ -finitas, en cuyo caso existe $\mu_1 \times \mu_2$ y es cuasi-regular. La segunda consiste en utilizar el primer teorema de Representación de Riesz para construir el espacio producto.

Lema 10.7.1 (Ver Cohn, p.241). Sean \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 Hausdorff. Entonces:

- a) $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2) = \mathcal{B}$.
- b) Si $E \in \mathcal{B}$, $x \in \mathcal{X}_1$, $y \in \mathcal{X}_2$, entonces $E_x \in \mathcal{B}_2$ y $E^y \in \mathcal{B}_1$.
- c) Sea $f : (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ medible, $x \in \mathcal{X}_1$ e $y \in \mathcal{X}_2$, entonces f_x es \mathcal{B}_2 -medible y f^y es \mathcal{B}_1 -medible.

Teorema 10.7.2 (Ver Cohn, p.242). Sean \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 HLC con bases numerables para sus topologías respectivas. Entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ y si μ_1 y μ_2 son medidas cuasi-regulares en $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$ y $(\mathcal{X}_2, \mathcal{B}_2)$, entonces son σ -finitas y $\mu_1 \times \mu_2$ es cuasi-regular en $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathcal{B})$.

El segundo procedimiento hemos dicho que se basa en el teorema de representación de Riesz y lo hace del siguiente modo. Consideremos los dos espacios HLC cuasi-regulares $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ y $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. Entonces para funciones $h \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}_1, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}_2, \mathbb{R})$ y $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = h(x)g(y)$ se tiene que $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ y $\int \int f d\mu_1 d\mu_2 = \int \int f d\mu_2 d\mu_1$.

Por otra parte las combinaciones lineales finitas de funciones de este tipo son densas en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Esto puede verse utilizando el **Teorema de Weierstrass**, así lo hacen Segal—Kunze, p.132 ó Lang, p.343, o directamente como hace el Cohn utilizando las propiedades de los espacios en cuestión. Esta forma será la que nosotros seguiremos. De esta forma podremos definir un funcional lineal positivo Λ en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ mediante la igualdad anterior $\Lambda(f) = \int f d\mu_1 d\mu_2$ aplicando a continuación el teorema de Riesz.

Lema 10.7.3 (Ver Cohn, p.243). Sean \mathcal{X}_1 y \mathcal{X}_2 espacios topológicos con \mathcal{X}_2 compacto y $f: \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces para cada $x_1 \in \mathcal{X}_1$ y cada $\epsilon > 0$, existe un abierto $U \subset \mathcal{X}_1$, con $x_1 \in U$, tal que para cada $x \in U$ e $y \in \mathcal{X}_2$, $|f(x, y) - f(x_1, y)| \leq \epsilon$.

Proposición 10.7.4 (Ver Cohn, p.243). Sean $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ espacios HLC de Borel cuasi-regulares para $i = 1, 2$. Sea $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, y $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Entonces:

- Para cada $(x, y) \in \mathcal{X}$, $f_x \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}_2, \mathbb{R})$, $f^y \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X}_1, \mathbb{R})$.
- Las funciones $\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \int f_x d\mu_2$, y $\mathcal{X}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $y \rightarrow \int f^y d\mu_1$, están en $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}_1, \mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}_2, \mathbb{R})$ respectivamente.
- $\int \int f d\mu_1 d\mu_2 = \int \int f d\mu_2 d\mu_1$.

Definimos ahora el funcional lineal y positivo

$$\Lambda: \mathcal{C}_c(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Lambda(f) = \int \int f d\mu_1 d\mu_2,$$

y aplicando el **Teorema de representación de Riesz** (10.3.1), pág.337, tendremos que existe una medida cuasi-regular μ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, tal que $\Lambda(f) = \int f d\mu$.

Definición. En las condiciones anteriores llamamos a $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ la medida (cuasi-regular) producto de μ_1 y μ_2 .

Proposición 10.7.5 (Ver Cohn, p.245). Sean $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, para $i = 1, 2$ como en (10.7.4). Sea $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ y U abierto de \mathcal{X} . Entonces:

a) Las funciones $h_1(x) = \mu_2(U_x)$ en \mathcal{X}_1 y $h_2(y) = \mu_1(U^y)$ en \mathcal{X}_2 son semicontinuas inferiormente.

b) $\mu(U) = \int h_1 d\mu_1 = \int h_2 d\mu_2$.

Si $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $E \subset A \times B$ con $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_1)$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_2)$, σ -finitos por μ_1 y μ_2 respectivamente, entonces también se tiene:

c) $h_1(x) = \mu_2(E_x)$ en \mathcal{X}_1 y $h_2(y) = \mu_1(E^y)$ en \mathcal{X}_2 son Borel medibles.

d) $\mu(E) = \int h_1 d\mu_1 = \int h_2 d\mu_2$.

Por último tenemos la siguiente versión del teorema de Fubini.

Teorema de Fubini 10.7.6 (Ver Cohn, p.247). Sean $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ como en (10.7.5). Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ y existen $A \in \mathcal{B}_1$ y $B \in \mathcal{B}_2$, σ -finitos por μ_1 y μ_2 respectivamente y tales que $f = 0$ en $\mathcal{X} \setminus (A \times B)$, entonces:

a) $f_x \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}_2)$ c.s. (\mathcal{B}_1, μ_1) , $f^y \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}_1)$ c.s. (\mathcal{B}_2, μ_2) .

b) Las funciones $h_1 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}_1)$, $h_2 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}_2)$, donde

$$h_1(x) = \begin{cases} \int f_x d\mu_2 & \text{si } f_x \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}_2) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$h_2(y) = \begin{cases} \int f^y d\mu_1 & \text{si } f^y \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}_1) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

c) $\int f d\mu = \int \int f d\mu_1 d\mu_2 = \int \int f d\mu_2 d\mu_1$.

10.8. Producto no numerable de espacios

Vamos a seguir dos vías distintas, aunque ambas topológicas, para construir una medida en el producto de una cantidad no numerable de espacios medibles $(\mathcal{X}_t, \mathcal{A}_t)$. En la primera, en la que seguiremos el ASH, consideraremos que los espacios \mathcal{X}_t son *polacos*.

Definición. Diremos que un espacio topológico \mathcal{X} es *polaco* si es separable y metrizable por una métrica completa.

En la segunda, en la que seguiremos el TJUR, haremos uso del primer teorema de representación de Riesz y los espacios \mathcal{X}_t serán Hausdorff y compactos.

Sean $(\mathcal{X}_t, \mathcal{A}_t)$, con $t \in T$ una familia de espacios medibles. Sea $\mathcal{X} = \prod \mathcal{X}_t$, es decir el conjunto de las aplicaciones $x : T \rightarrow \cup \mathcal{X}_t$, tales que para cada $t \in T$, $x(t) \in \mathcal{X}_t$.

Definición. Para cada subconjunto finito de T , $I = \{t_1, \dots, t_n\}$, denotemos por

$$\mathcal{X}_I = \mathcal{X}_{t_1} \times \dots \times \mathcal{X}_{t_n}, \quad \mathcal{A}_I = \mathcal{A}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{t_n},$$

Llamaremos *cilindro con base* $B \subset \mathcal{X}_I$ al conjunto $B(I) = \{x \in \mathcal{X} : (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in B\}$.

Diremos que $B(I)$ es un *cilindro medible* si $B \in \mathcal{A}_I$, y diremos que $B(I)$ es un *producto finito de medibles* si $B = B_1 \times \dots \times B_n$, con $B_i \in \mathcal{A}_{t_i}$.

Denotaremos con $\mathcal{A}_T = \prod \mathcal{A}_t$ a la mínima σ -álgebra de $\mathcal{X} = \mathcal{X}_T$ que contiene a los cilindros medibles (observemos que estos forman un álgebra).

Definición. Llamaremos *σ -álgebra producto* de los espacios medibles $(\mathcal{X}_t, \mathcal{A}_t)$, a la única σ -álgebra \mathcal{A} del producto \mathcal{X} , que verifica las siguientes condiciones:

a) Para cada $s \in T$ la proyección $\pi_s : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_s$, $\pi_s(x) = x(s)$ es medible.

b) Dado cualquier otro espacio medible (Ω, \mathcal{F}) una aplicación $F : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ es medible si lo son todas las $F_t = \pi_t \circ F$, para $t \in T$.

Se verifica que la σ -álgebra \mathcal{A}_T satisface ambas propiedades.

Nuestra intención es construir una medida sobre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_T$, que sea consistente con la dada para T finito o numerable.

Definición. Sean $I \subset J \subset T$. Definimos la proyección de J en I , como la aplicación

$$\pi_{JI} : \mathcal{X}_J \rightarrow \mathcal{X}_I, \quad \pi_{JI}(x) = x|_I$$

Es fácil demostrar que π_{JI} es medible respecto de las σ -álgebras definidas anteriormente \mathcal{A}_J y \mathcal{A}_I y que si $I \subset J \subset K \subset T$, entonces $\pi_{KI} = \pi_{JI} \circ \pi_{KJ}$

Definición. Diremos que una función $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es *función de un número finito de variables* si existe $I \subset T$ finito y $f_I: \mathcal{X}_I \rightarrow \mathbb{R}$, tales que $f = f_I \circ \pi_{TI}$.

Definición. Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(T)$ una colección de subconjuntos de T . Diremos que las medidas μ_I en los espacios medibles $(\mathcal{X}_I, \mathcal{A}_I)$, para $I \in \mathcal{S}$, satisfacen la condición de consistencia o que son consistentes si dados $J, I \in \mathcal{S}$, con $J \subset I$ se tiene que $\mu_J = \pi_{IJ*}(\mu_I)$, es decir para cada $B_J \in \mathcal{A}_J$, $\mu_J(B_J) = \mu_I[\pi_{IJ}^{-1}(B_J)]$.

Si μ es una medida en $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, podemos definir una medida $\mu_I = \pi_{TI*}(\mu)$ en cada $(\mathcal{X}_I, \mathcal{A}_I)$, para $I \subset T$, es decir $\mu_I(B_I) = \mu[\pi_{TI}^{-1}(B_I)]$, para cada $B_I \in \mathcal{A}_I$.

En este caso las medidas μ_I para $I \in \mathcal{P}(T)$ son consistentes. Como también son consistentes las μ_I para $I \in \mathcal{S}$ donde \mathcal{S} recorre los conjuntos finitos de T . El objetivo de esta lección es probar que, bajo ciertas condiciones topológicas, también se tiene el recíproco.

Lema 10.8.1 (Ver Cohn, p.207). Sea \mathcal{X} Hausdorff tal que cada abierto es unión numerable de cerrados y sea μ una medida finita en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, entonces para cada $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(A) : E \subset A, A \text{ abierto}\} \\ &= \sup\{\mu(C) : C \subset E, C \text{ cerrado}\}. \end{aligned}$$

Teorema 10.8.2 (Ver Cohn, p.258). Sea \mathcal{X} un espacio polaco. Entonces cada medida finita en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ es regular.

Teorema 10.8.3 (Ver Ash, p.191; Cohn, p.256). Sea (\mathcal{X}_n, d_n) una sucesión de espacios metrizables y separables y sea $\mathcal{X} = \prod \mathcal{X}_n$, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \prod \mathcal{B}(\mathcal{X}_n)$.

Podemos enunciar el resultado fundamental de esta lección.

Teorema de Extensión de Kolmogorov I 10.8.4 (Ver Ash,p.191). Sea \mathcal{X}_t un espacio polaco para cada $t \in T$ y consideremos para cada $I \subset T$ finito, una probabilidad P_I en el espacio $(\mathcal{X}_I, B(\mathcal{X}_I))$, que sean consistentes. Entonces existe una única probabilidad P en $(\mathcal{X}_T, \mathcal{B}_T)$, tal que para cada $I \subset T$ finito $\pi_{TI^*}(P) = P_I$.

Veamos ahora la otra versión del resultado.

Proposición 10.8.5 (Ver Tjur,p.7). Para cada $t \in T$ sea \mathcal{X}_t Hausdorff y compacto y sea $\mathcal{X} = \prod \mathcal{X}_t$. Entonces el espacio $\mathcal{C}_f(\mathcal{X})$ de las funciones continuas reales, de un número finito de variables en \mathcal{X} , es denso en $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ con la norma del supremo.

Teorema de Extensión de Kolmogorov II 10.8.6 (Ver Tjur,p.27) Para cada $t \in T$ sea \mathcal{X}_t Hausdorff y compacto y sea μ_I para cada $I \subset T$ finito, una medida regular en $(\mathcal{X}_I, B(\mathcal{X}_I))$ consistentes. Entonces existe una única medida regular μ en $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, tal que para cada $I \subset T$ finito, $\mu_I = \pi_{TI^*}(\mu)$.

Un caso particularmente importante, satisfaciendo las hipótesis de este teorema, se tiene cuando en cada espacio medible $(\mathcal{X}_t, B(\mathcal{X}_t))$ hay definida una medida regular μ_t . Pues para cada $I \subset T$ finito, podemos definir en $(\mathcal{X}_I, B(\mathcal{X}_I))$ la medida regular producto μ_I (ver la pág.352, donde lo hemos hecho para 2), y son consistentes. No obstante en este caso si las μ_t son probabilidades, la existencia de μ vendría dada sin necesidad de hacer consideraciones topológicas (ver la Nota (3.7.7) de la página 157 del tema de la medida producto). Para terminar la lección debemos decir que una de las razones que dan importancia a este resultado, es que sirve como base para el estudio de los procesos estocásticos, que son familias de variables aleatorias definidas sobre un espacio probabilístico.

10.9. Medida de Haar en grupos compactos

Definición. Un *Grupo topológico* es un espacio topológico \mathcal{G} que tiene una estructura de grupo, para el que las operaciones de grupo son continuas

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}, & (x, y) &\rightarrow xy, \\ \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}, & x &\rightarrow x^{-1},\end{aligned}$$

o equivalentemente que lo es la aplicación $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$.

Definición. Un *grupo localmente compacto* es un grupo topológico HLC. Un *grupo compacto* es un grupo topológico Hausdorff compacto.

La *medida de Haar* es una generalización de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n a un grupo localmente compacto \mathcal{G} , en el sentido de que es una medida μ en los borelianos de \mathcal{G} , regular e invariante por traslaciones (por la derecha ó por la izquierda, que en general será distinto a menos que el grupo sea abeliano), es decir tal que para cada boreliano B y cada $x \in \mathcal{G}$ —si es invariante por la izquierda—, $\mu(B) = \mu(xB)$, para todo x .

Nosotros demostraremos la existencia y unicidad de tal medida en un grupo compacto como consecuencia de un **Teorema de punto fijo de Kakutani** y del **Teorema de Representación de Riesz**.

Definición. Sea $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado, diremos que una familia \mathcal{O} de operadores lineales $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, es *equicontinua* en $A \subset \mathcal{X}$, si para cada entorno abierto U de 0, hay un entorno abierto V de 0, tales que si $x, y \in A$ y $x - y \in V$, entonces $F(x - y) \in U$, para toda $F \in \mathcal{O}$.

Teorema de punto fijo de Kakutani 10.9.1 (*Ver Mukherjea-Pothoven, p.453*).

Sea \mathcal{X} un espacio normado, $K \subset \mathcal{X}$ compacto y convexo y \mathcal{O} un grupo de operadores lineales de \mathcal{X} equicontinuos en K , tales que $F(K) \subset K$ para cada $F \in \mathcal{O}$. Entonces existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $F(x) = x$ para toda $F \in \mathcal{O}$.

Veamos antes de pasar a la existencia de la medida de Haar, algunos resultados que necesitaremos sobre grupos topológicos.

Proposición 10.9.2 *Sea \mathcal{G} un grupo topológico y $x \in \mathcal{G}$. Entonces las aplicaciones $y \rightarrow xy$, $y \rightarrow yx$, $y \rightarrow y^{-1}$ son homeomorfismos de \mathcal{G} .*

Proposición 10.9.3 (Ver Mukherjea-Pothoven, p.455). Sea \mathcal{G} un grupo topológico y $e \in \mathcal{G}$ el neutro. Entonces son equivalentes:

- \mathcal{G} es T_0 .
- \mathcal{G} es T_1 .
- \mathcal{G} es T_2 .
- $\{e\}$ es la intersección de todos los abiertos que lo contienen.
- $\{e\}$ es cerrado.

Proposición 10.9.4 (Ver Mukherjea-Pothoven, p.455). Sea \mathcal{G} un grupo topológico, entonces toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ es uniformemente continua.

A continuación y como consecuencia de (10.9.4) y del Teorema de Ascoli—Arzelá (ver ASH, p.396), veremos que para \mathcal{G} grupo compacto, el espacio normado $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ de las funciones reales continuas en \mathcal{G} con la norma del supremo y $f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ fijo, la envolvente convexa de las funciones $f_s(x) = f(sx)$, con $s \in \mathcal{G}$, es densa en un compacto de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$.

Teorema 10.9.5 (Ver Mukherjea-Pothoven, p.456) Sea \mathcal{G} un grupo compacto y $f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$. Si

$$\mathcal{C}_f = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_{s_i} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}) : n \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. 0 \leq a_i \leq 1, \sum a_i = 1, f_{s_i}(x) = f(s_i x), s_i \in \mathcal{G} \right\},$$

entonces $\text{Adh}(\mathcal{C}_f)$ es un compacto de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$, con la topología de la norma del supremo.

Como consecuencia de (10.9.5) y del Teorema de Kakutani (10.9.1) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 10.9.6 (Ver Mukherjea-Pothoven, p.457). Sea \mathcal{G} un grupo compacto. Existe una única probabilidad regular P en $B(\mathcal{G})$ tal que para cada $f \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ y $s \in \mathcal{G}$ se tiene

$$\int f dP = \int f_s dP = \int f^s dP = \int (f \circ i) dP$$

para $f_s(x) = f(sx)$, $f^s(x) = f(xs)$ y $i(x) = x^{-1}$. A esta medida P la llamamos probabilidad de Haar de \mathcal{G} .

Teorema 10.9.7 *Sea \mathcal{G} un grupo compacto y P su probabilidad de Haar. Entonces:*

a) *Para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ y $x \in \mathcal{G}$, $P(B) = P(xB) = P(Bx) = P(B^{-1})$, para $B^{-1} = \{x^{-1} : x \in B\}$.*

b) *Para cada abierto V de \mathcal{G} , $P(V) > 0$.*

10.10. La integral de Daniell

Hay otra forma de introducir el concepto de integral, sin utilizar para ello el concepto de medida. La idea fundamental consiste en considerar la integral como un funcional lineal sobre un cierto espacio vectorial de “funciones elementales”, que bajo ciertas hipótesis apropiadas podremos extender a una clase de funciones más amplia, a fin de que los teoremas fundamentales de convergencia sean válidos. Este proceso fue llevado a cabo por DANIELL, en 1918, para el caso en el que las funciones elementales consideradas eran $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y el funcional la integral de Riemann. Partiendo de esto, la extensión que se obtiene son las funciones Lebesgue integrables y la integral de Lebesgue. Este proceso fue generalizado por STONE. Nuestra intención en esta lección es estudiar este proceso de extensión y analizar su conexión con la teoría de la medida.

Definición. Por un *retículo vectorial* L en un conjunto \mathcal{X} entenderemos un espacio vectorial de funciones $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

a) Si $f \in L$, entonces $|f| \in L$.

Diremos que un retículo vectorial L en \mathcal{X} es de Stone si satisface,

b) Si $f \in L$ entonces $\min\{1, f\} \in L$.

Proposición 10.10.1 *En un retículo vectorial L de \mathcal{X} se tienen las siguientes propiedades:*

i) Si $f, g \in L$ entonces

$$f \vee g = \max\{f, g\} = (1/2)[f + g + |f - g|] \in L.$$

ii) Si $f, g \in L$ entonces

$$f \wedge g = \min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\} \in L.$$

iii) Si $f \in L$ entonces $f^+, f^- \in L$ y $f = f^+ - f^-$.

Definición. Sea L un retículo vectorial. Diremos que un funcional lineal $I : L \rightarrow \mathbb{R}$ es una *integral de Daniell* si es positivo, es decir si $f \in L$ y $f \geq 0$ entonces $I(f) \geq 0$, y satisface la condición:

c) Si $f_n \in L$ y $f_n \downarrow 0$, entonces $I(f_n) \downarrow 0$ ó equivalentemente si $f_n \in L$, $f_n \uparrow f$ y $f \in L$ entonces $I(f_n) \uparrow I(f)$.

El primer paso para hacer la extensión que pretendemos de este funcional, consiste en quedarnos con las funciones $f \in L$ no negativas, conjunto que denotaremos con L_+ . A continuación se prueba que I puede extenderse de forma natural a los límites ascendentes de funciones de L_+ .

Lema 10.10.2 (Ver Ash, p.171). Sean $f_n, g_n \in L$, tales que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow g$. Si $f \leq g$, entonces $\lim I(f_n) \leq \lim I(g_n)$.

En base a esto definimos el conjunto

$$L' = \{f = \lim f_n : f_n \in L_+, f_n \uparrow f\},$$

y extendemos I de L_+ a L' de modo que para cada $f \in L'$ tal que $f = \lim f_n$, con $f_n \in L_+$ y $f_n \uparrow f$, $I(f) = \lim I(f_n)$.

Esta extensión tiene las siguientes propiedades.

Proposición 10.10.3 (Ver Ash, p.171). En las condiciones anteriores se tiene:

- Para cada $f \in L'$, $0 \leq I(f) \leq \infty$.
- Si $f, g \in L'$ y $f \leq g$ entonces $I(f) \leq I(g)$.
- Si $f \in L'$ y $a \in [0, \infty)$, entonces $af \in L'$ y $I(af) = aI(f)$.
- Si $f, g \in L'$, entonces $f + g, f \vee g, f \wedge g \in L'$ y

$$I(f + g) = I(f \vee g) + I(f \wedge g) = I(f) + I(g).$$

- Si $f_n \uparrow f$, con $f_n \in L'$, entonces $f \in L'$ y $I(f_n) \uparrow I(f)$.

Definición. Diremos que un $A \subset \mathcal{X}$ es L -abierto si $I_A \in L'$. Denotaremos el conjunto de los L -abiertos por \mathcal{T}_L y definimos la función de conjunto

$$\mu : \mathcal{T}_L \rightarrow [0, \infty], \quad \mu(A) = I(I_A).$$

Proposición 10.10.4 (Ver Ash, p.173). En los términos anteriores se tiene que:

- a) $\emptyset, \mathcal{X} \in \mathcal{T}_L, \mu(\emptyset) = 0$.
- b) Si $A, B \in \mathcal{T}_L$ entonces $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{T}_L$ y $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- c) Si $A, B \in \mathcal{T}_L$ y $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- d) Si $A_n \in \mathcal{T}_L$ y $A_n \uparrow A$, entonces $A \in \mathcal{T}_L$ y $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.

Nota 10.10.5 En un espacio HLC \mathcal{X} , se tiene que:

“La mínima σ -álgebra que hace medibles a todas las funciones de $C_c(\mathcal{X})$ es la σ -álgebra de Baire, la cual está generada por los compactos que son intersección numerable de abiertos”. (Ver ROYDEN, p.301; WEIR, p.180).

Por otra parte se tiene que: “Las funciones medibles respecto de la σ -álgebra de Baire forman el retículo vectorial más pequeño de funciones en \mathcal{X} que contiene a $C_c(\mathcal{X})$, a las funciones constantes y es cerrado para la convergencia puntual de sucesiones de funciones”. (Ver WEIR, p.180).

Si ahora pedimos que L sea un retículo vectorial de Stone tendremos una importante relación entre los conjuntos L -abiertos y las funciones de L , en un sentido que recuerda la relación anterior entre los conjuntos de Baire y las funciones continuas reales de soporte compacto en un espacio Hausdorff localmente compacto.

Proposición 10.10.6 (Ver Mukherjea-Pothoven, p.394). Sea L un retículo vectorial de Stone de funciones sobre \mathcal{X} , L' la extensión correspondiente y \mathcal{T}_L los conjuntos L -abiertos de \mathcal{X} . Entonces:

- a) Para cada $t > 0$ y $f \in L'$, el conjunto $\{x \in \mathcal{X} : f(x) > t\} \in \mathcal{T}_L$, por tanto si llamamos $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{T}_L)$,

$$f : (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X})) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, B(\overline{\mathbb{R}})),$$

es medible.

- b) La mínima σ -álgebra que hace medibles a las funciones de L es $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Nuestra intención ahora es, dado (\mathcal{X}, L, I) con L retículo vectorial de Stone e I una integral de Daniell, construir un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{A}$, tal que $L \subset \mathcal{L}_1$ e $I(f) = \int f d\mu$, para cada $f \in L$. Para ello construimos una medida exterior, tal que para cada $E \subset \mathcal{X}$

$$\mu_*(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A, A \in \mathcal{T}_L\}.$$

Observemos que si $E \in \mathcal{T}_L$ entonces $\mu_*(E) = \mu(E)$.

Proposición 10.10.7 (Ver Mukherjea-Pothoven, p.394). *La función de conjunto μ_* es una medida exterior.*

Hemos demostrado en el Teorema de Extensión de Caratheodory (1.4.7), pág.23, que la familia \mathcal{A}_* de los conjuntos $B \subset \mathcal{X}$, μ_* -medibles, es decir tales que para cualquier $E \subset \mathcal{X}$,

$$\mu_*(E) = \mu_*(E \cap B) + \mu_*(E \cap B^c),$$

forman una σ -álgebra de \mathcal{X} y que μ_* restringida a \mathcal{A}_* es una medida.

En nuestro caso tenemos que $\mathcal{T}_L \subset \mathcal{A}_*$ (ver MUKHERJEA-POTHOVEN, p.395) y por tanto $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{T}_L) \subset \mathcal{A}_*$.

Podemos ahora enunciar el principal resultado de la lección.

Teorema de Representación de Daniell–Stone 10.10.8 (Ver Mukherjea-Pothoven, p.396-8). *Sea L un retículo de Stone de funciones reales en \mathcal{X} e I una integral de Daniell en L . Entonces existe una única medida λ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ —que es μ_* restringida a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ —, verificando las condiciones:*

- a) $L \subset \mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \lambda)$.
- b) $I(f) = \int f d\lambda$, para cada $f \in L$.
- c) Para cada $E \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

$$\lambda(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A, A \in \mathcal{T}_L\}.$$

Dicha medida es una extensión de μ y es única aunque (c) lo modifiquemos por la siguiente condición.

Proposición 10.10.9 (ver Mukherjea-Pothoven, p.398). *Sea L un retículo vectorial en \mathcal{X} e I una integral de Daniell en L . Supongamos que λ es una medida en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ satisfaciendo (a), (b) del anterior resultado (10.10.8) y:*

- c') *Existen $A_n \in \mathcal{T}_L$ tales que $\cup A_n = \mathcal{X}$ y $\lambda(A_n) < \infty$. Entonces λ es única.*

10.11. Bibliografía y comentarios

Este capítulo es una especie de cajón de sastre en el que hemos colocado aquellos resultados, a nuestro entender mas importantes, en los que se relacionan la topología y la medida. No obstante hay muchas cuestiones relativas a este tópico que no hemos incluido y que esperamos cubrir con las referencias y comentarios que a continuación detallamos. Por lo que respecta a la confección directa del tema, la bibliografía básica es la siguiente:

- ASH, R.B.: “*Real Analysis and Probability*”. Ac.Press, 1972.
 COHN, D.L.: “*Measure theory*”. Birkhauser (Boston), 1980.
 LANG, S.: “*Real Analysis*”. Addison–Wesley, 1969.
 MUHKERJEA, A. AND POTHOVEN, K.: “*Real and functional Analysis*”. Plenum Press, 1978.
 ROYDEN, H.L.: “*Real Analysis*”. McMillan Pub., 1968.
 RUDIN, W.: “*Real and complex analysis*”, Tata McGraw–Hill, 1974.
 SEGAL, I.E. AND KUNZE, R.A.: “*Integrals and operators*”. Springer–Verlag, 1978.
 TJUR, T.: “*Probability based on Radon Measures*”. J.Wiley, 1980.
 WEIR, A.J.: “*General integration and measure. Vol.II*”. Cambridge Univ. Press, 1974.

Como bibliografía complementaria consideramos el

DINCULEANU, N.: “*Integration on locally compact spaces*”. Noordhoff, 1974.

que es un grueso tratado, continuación del libro del mismo autor “*Vector measures*”, y en el que se estudia la integración de funciones $f: \mathcal{X} \rightarrow E$ donde \mathcal{X} es Hausdorff localmente compacto y E es de Banach. La importancia de los espacios localmente compactos en la teoría de la medida queda justificada, en palabras de este autor en el prefacio de su libro, por las siguientes tres razones:

1.- *Los espacios localmente compactos tienen la propiedad de que las medidas definidas sobre ellos poseen propiedades similares a las de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Una de las características principales de estos espacios es la existencia de una rica clase de subconjuntos con propiedades muy importantes: Los compactos. Otra importante característica es la existencia de una familia localmente numerable (ver p.190 del libro) de compactos disjuntos cuya unión*

es casi igual a todo el espacio. Esto permite establecer teoremas clásicos como Radón—Nikodym ó Fubini sin hacer restricciones sobre la medida.

2.- Los espacios localmente compactos son al mismo tiempo suficientemente generales como para que una teoría de integración, desarrollada en ellos, sea aplicable en distintas áreas del Análisis, como por ejemplo en Análisis armónico o la teoría potencial.

3.- Por último, la integración sobre espacios abstractos puede siempre ser reducida a la integración sobre espacios localmente compactos.

Esta última razón puede leerse también en la p.2 del libro

NACHBIN, L.: “*The Haar integral*”. Krieger, 1976.

en la que añade su autor que tal reducción puede hacerse en cierto sentido en base a un cierto resultado de KAKUTANI del que no da referencia. Desconocemos tal resultado, no obstante remitimos al lector al capítulo VIII, p.233 del libro de SEGAL—KUNZE, sobre teoría de integración algebraica, en la que se da un resultado en esta línea de interés en teoría de probabilidades. Tal resultado se basa en las ideas de GELFAND de representación de un anillo conmutativo como un espacio de funciones continuas sobre su espectro.

En los libros de TJUR, p.23 y LANG, p.339, podemos encontrar un interesante resultado válido en los espacios localmente compactos, en el que se construye una (única) medida en todo el espacio, a partir de una familia de medidas en abiertos del espacio que lo recubren, con la propiedad de que en la intersección de dos abiertos de la familia las correspondientes medidas coinciden, de tal manera que la medida obtenida restringida a cada abierto nos da la del abierto. En el SEGAL—KUNZE, p.132, se demuestra un teorema de la medida producto para σ -anillos de Baire, que complementa el dado por nosotros en (10.7.2). En este teorema se establece que el producto de σ -anillos de Baire es un σ -anillo de Baire —ver también HALMOS, p.222—, y que el producto de medidas regulares es regular. Su prueba hace uso, como comentamos en la lección 7, del teorema de Stone-Weierstrass. Si el espacio tiene una base numerable para su topología, entonces los σ -anillos de Borel y de Baire coinciden (ver SEGAL—KUNZE, p.54). En el ROYDEN, p.314 se demuestra que toda medida de Baire regular puede extenderse a una medida de Borel cuasi-regular, tal que cada Borel de medida finita puede ponerse como diferencia simétrica de un Baire y un Borel de medida nula.

En el libro de SEGAL—KUNZE, “*se sugiere...*”, en palabras de CONSTANTINESCU—WEBER, “... *pero no se desarrolla, la definición abstracta de integral...*”, que utilizan en su libro

CONSTANTINESCU, C. AND WEBER, K.: “*Integration theory, Vol. I, Measure and integral*”. J. Wiley, 1985.

en el que la intención de sus autores es unificar los dos aspectos en los que se ha venido considerando la teoría de la integración en la segunda mitad del siglo XX: el abstracto y el topológico. Hemos visto en algunos resultados del tema, y lo comentábamos a propósito de las razones de DINCLEANU sobre su preferencia de la teoría topológica, que cuando el espacio tiene buenas propiedades topológicas, ambas teorías llevan prácticamente a los mismos resultados esenciales. Pero para espacios topológicos más complicados la teoría topológica lleva a resultados más fuertes. La unificación de estas dos vías propuesta por estos autores se basa en una definición alternativa para la integral de la teoría abstracta, de tal manera que incluye a la antigua, en el sentido de que aumentan las funciones integrables y las que antes lo eran siguen teniendo la misma integral. Además ambas definiciones coinciden si el espacio es σ -finito. El libro desarrolla los conceptos siguiendo el marco de ideas de Daniell.

En el libro de

OXTOBY, J. C.: “*Measure and Category*”. Springer-Verlag, 1971.

hay dos temas principales —ambos relacionando la topología con la medida—, que son: El **teorema de la categoría de Baire**, como un método para probar la existencia (ver la lección de análisis de Fourier en $\mathcal{C}(T)$). Y la dualidad entre categoría (en el sentido topológico) y medida.

Hagamos un poco de historia sobre los resultados más importantes del tema. En 1903 HADAMARD propone en la nota

HADAMARD: “*Sur les opérations fonctionnelles*”. C.R. Acad. Sci. Paris, 1903.

el problema de encontrar una expresión analítica para los funcionales lineales y continuos de $\mathcal{C}[a, b]$. Él mismo contesta la cuestión del siguiente modo:

“*Dado $\Lambda : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continuo puede ponerse de la forma*

$$\Lambda(f) = \lim_{y \rightarrow \infty} \int F(x, y) f(x) dx,$$

para F continua”.

Sin embargo esta representación no es única. En 1909 RIESZ da la solución definitiva en

RIESZ, F.: “*Sur les operations fonctionelles lineaires*”. C.R.Acad.Sci. Paris, **149**, 974–977, 1909.

utilizando la integral definida por Stieltjes y probando el **Primer Teorema de Representación de Riesz** (ver BENEDETTO, p.255):

$\Lambda \in \mathcal{C}^*[a, b]$ sii existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada, tal que $\|\Lambda\| = v_g(b)$ y para cada $f \in \mathcal{C}[a, b]$ se tiene $\Lambda(f) = \int f dg$. Además g es única si identificamos las funciones de variación acotada con los mismos puntos de continuidad y en ellos se diferencien en una constante”.

El nombre de *medida de Radón* se debe al hecho de que el autor del artículo

RADON, J.: “*Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*”. S.B. Akad. Wiss. Wien, **122**, 1295–1438, 1913.

da una correspondencia biunívoca entre las medidas sobre un compacto \mathcal{X} de \mathbb{R}^n y los funcionales lineales y positivos en $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ (no se en que términos). En 1937 S.BANACH, en un apéndice titulado “*The Lebesgue integral in abstract spaces*”, en las pp. 320-330, del libro

SACKS, S.: “*Theory of the integral*”, 1937. Dover, 1964.

extiende el resultado al caso de un espacio métrico compacto y lo hace no considerando una medida, sino extendiendo el funcional a un espacio de funciones que contiene a todas las borel medibles acotadas (la medida de un boreliano A es entonces el funcional aplicado al I_A). En 1941 es

KAKUTANI, S.: “*Concrete representation of abstract (M)-Spaces. A characterization of the space of continuous functions*”. Ann.of Math., **2**, 42, 994–1024, 1941.

quien lo extiende al caso de un espacio Hausdorff compacto, considerando medidas reales en vez de medidas positivas. Recientemente han contribuido en este tema,

HALMOS, P.R.: “*Measure Theory*”. Springer-Verlag, 1974.

HEWITT, E.: “*Linear functionals on spaces of continuous functions*”. Fund. Math., **37**, 161–189, 1950.

EDWARDS, R.E.: “*A theory of Radon measures on locally compact spaces*”. Acta. Math., **89**, 133–164, 1953.

Sin embargo una introducción completa a la teoría de la medida basada en las medidas de Radón, no fue realizada hasta 1952 por un grupo de matemáticos franceses llamado NICOLAS BOURBAKI, cuando publicó la primera edición de la obra

BOURBAKI, N.: “*Integration, Ch.I-IX*”. Hermann, Paris, 1952–1956–1959–1963–1969.

Todos los anteriores e incluso bastantes de los posteriores libros sobre medida e integración, están basadas en medidas abstractas con suposiciones topológicas adicionales cuando son convenientes. La aproximación Bourbakista tiene por otra parte la ventaja de suministrar una base conveniente, para pasar de la teoría de integración a la teoría de las distribuciones de L.SCHWARTZ. Por otra parte, como el propio L.Schwartz dice en su libro

SCHWARTZ, L.: *“Radon measures on arbitrary topological spaces. And cylindrical measures”*. Oxford Univ. Press., 1973.

“... el defecto fundamental de la teoría Bourbakista de las medidas de Radón consiste en que los espacios en los que están definidas las funciones que aparecen en la teoría de las Probabilidades, no suelen ser localmente compactos...”. Por ello introduce su propio concepto de medida de Radón —realmente introduce tres conceptos mutuamente relacionados, de los que terminará quedándose con el mas conveniente—, la cual está definida en los borelianos de un espacio Hausdorff. En sus palabras tal medida “... combina las ventajas de las dos exposiciones habituales, la abstracta y la de Bourbaki, dando cohesión a muchos resultados que en la teoría abstracta se obtienen con hipótesis adicionales y manteniendo las buenas propiedades de las medidas de Radón de Bourbaki”.

El teorema de existencia de Kolmogorov apareció en

KOLMOGOROV, A.N.: *“Foundations of the theory of Probability”*. 1933; Reed. por Chelsea Pub. Co., 1956.

para el caso en que los espacios $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$. Una versión temprana de este resultado, en la línea del dado por TJUR ó por BOURBAKI fue dada por

DANIELL, P.J.: *“Functions of limited variation in an infinite number of dimensions”*. Ann.Math. (2), 21, 30–38, 1920.

Otra prueba del teorema de existencia de Kolmogorov puede verse en la pág.506 del libro de

BILLINGSLEY, P.: *“Probability and measure”*. John Wiley, 1986.

y en el que hace hincapié de su importancia fundamental en el estudio de los procesos estocásticos (familias de variables aleatorias en un espacio de probabilidad), pues estos vienen descritos habitualmente en términos de las distribuciones que inducen en los espacios euclídeos, es decir por sus distribuciones finito dimensionales, y aunque el sistema de estas distribuciones finito dimensionales no determinan completamente las propiedades del proceso, el primer paso en una teoría general es construir

un proceso que tenga un sistema dado de distribuciones finito dimensionales.

En cuanto a la medida de Haar esta constituye un importante campo de la teoría de la medida, siendo una generalización extremadamente útil de la teoría de Lebesgue en el grupo \mathbb{R}^n . La medida de Haar es una medida invariante por traslaciones, sobre un grupo topológico Hausdorff localmente compacto. Los grupos topológicos fueron considerados por primera vez por SOPHUS LIE en el caso particular, pero fundamental, de los grupos analíticos, en los que mediante apropiados sistemas de coordenadas las operaciones del grupo pueden expresarse en términos de funciones analíticas. A comienzos del siglo XX, HILBERT y BROUWER consideraron grupos topológicos mas generales que los tratados por LIE. Los fundamentos de la teoría general de grupos topológicos fue establecida mucho después, en 1926 y 1927 por SCHREIER y LEJA. Para estudiar la estructura de ciertos grupos topológicos D.HILBERT propone en 1900 el siguiente problema —conocido como quinto problema de Hilbert, de una larga serie que propuso—: ¿Es cada grupo topológico, localmente euclídeo⁴, un grupo de Lie?. En 1933

HAAR, A.: “*Der massbegriff in der theorie der kontinuierlichen gruppen*”. Ann. of Math., 2, 34, 147–169, 1933.

da un paso fundamental hacia la solución del problema, estableciendo la existencia de una medida invariante por traslaciones, sobre un grupo topológico localmente compacto con una base numerable de abiertos. Ese mismo año J.VON NEUMANN, utilizando ese resultado, resuelve afirmativamente el problema de HILBERT para grupos compactos localmente Euclídeos y en el artículo

NEUMANN, J. VON.: “*Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen*”. Comp. Math., I, 106–114, 1934.

prueba que para grupos compactos la medida de Haar estaba únicamente determinada salvo factores constantes. J.VON NEUMANN y A.WEYL generalizaron el resultado de Haar a grupos localmente compactos. En 1940

WEYL, A.: “*L’integration dans les groupes topologiques et ses applications*”. Hermann, 1940.

prueba que la existencia de una medida invariante en un grupo es una característica de los grupos localmente compactos, en el sentido de que si

⁴es decir tales que cada punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de un \mathbb{R}^n , lo que suele llamarse variedad topológica

un grupo topológico Hausdorff la tiene, entonces es localmente precompacto. Por otra parte la demostración que aquí da WEYL de la existencia de una medida invariante por traslaciones en un grupo localmente compacto, se basa en el **Teorema de Tychonov** —que es consecuencia del axioma de elección— y aquí radica su crítica habitual, aunque su demostración es mas corta que otras, como la que da

BANACH, S.: “*On Haar’s Measure*”. Apéndice del libro de Saks, pp.314–319.

que está formulada en términos de límites generalizados y que en palabras de NACHBIN “. . . *conlleva críticas similares a las de Weyl. . .*”. En 1940

CARTAN, H.: “*Sur la mesure de Haar*”. C.R.Acad.Sci.Paris, **211**, 759–762, 1940.

da una prueba de este resultado sin las críticas que acompañaron a sus predecesores. CARTAN construye la integral de Haar como un cierto límite, aplicando el criterio de convergencia de Cauchy, con lo que consigue garantizar simultáneamente su existencia y su unicidad. No obstante su demostración es mas larga y menos simple que la de WEYL. Para una demostración de ambas remitimos al lector al libro de

NACHBIN, L.: “*The Haar integral*”. Krieger, 1976.

Otra demostración de este resultado fue dada por MONTGOMERY Y ZIPPIN en 1955, siguiendo para ello una idea de KAKUTANI y KODAIRA en base a la cual era suficiente establecer el resultado para grupos localmente compactos separables, pues el caso general se obtenía teniendo en cuenta que cada grupo localmente compacto tiene numerosos subgrupos invariantes y cerrados cuyos grupos cocientes son separables. Por otra parte tres años antes, en 1952, estos dos autores junto con A. GLEASON dieron una contestación completa al quinto problema de HILBERT.

Nosotros hemos probado la existencia de la medida de Haar en un grupo compacto, siguiendo al Mukherjea–Pothoven, quienes a su vez lo hacen basándose en un resultado de

KAKUTANI, S.: “*Two fixed–point theorems concerning bicomact convex sets*”. Proc. Imp. Acad. Tokyo, **14**, 242–245, 1938.

Para otros comentarios históricos y bibliográficos sobre la medida de Haar, remitimos al lector a la pág.316 del libro

BOURBAKI, N.: “*Elementos de historia de las matemáticas*”. Alianza Univ., 1976.

En cuanto a la teoría de integración de Daniell, tenemos que en 1911

YOUNG, W.H.: “*A new method in the theory of integration*”. Proc.London Math.Soc., **2**, T.9, 15–50, 1911.

partiendo de la integral de Cauchy sobre las funciones continuas de soporte compacto, define sucesivamente la integral superior de las funciones semicontinuas inferiormente y después de cualquier función, obteniendo de esta manera una definición de las funciones integrables idéntica a la de LEBESGUE, pero por medios únicamente funcionales. En 1918

DANIELL, P.J.: “*A general form of integral*”. *Ann. Math.*, **19**, 279–294, 1918.

extendió esta exposición, con algunas modificaciones, a las funciones definidas en un conjunto cualquiera, definiendo la integral como un funcional lineal sobre una clase de funciones y definiendo las nociones de medida y medibilidad de funciones en términos de ese funcional. En 1940

RIESZ, F.: “*Sur quelques notions fondamentales dans la theorie generale des operations lineaires*”. *Ann. of Math.*, (2), t.XLI, 174–206, 1940.

expone, de forma concisa y elegante, los resultados de la teoría de los espacios ordenados que intervienen en la teoría de integración. Sobre este tópico remitimos al lector a los siguientes tratados:

LUXEMBURG, W.A.J. AND ZAANEN, A.C.: “*Riesz Spaces. Vol. I*”. North Holland, 1971.

FREMLIN, D.H.: “*Topological Riesz Spaces and Measure Theory*”. Cambridge Univ. Press. 1974.

Por último citemos la importante aportación de

STONE, M.H.: “*Notes on integration I–IV*”. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **34**, **35**, 1848–1949.
que ha contribuido notablemente en el desarrollo de este punto de vista.

Fin del Capítulo 10

Densidades

Definición. Llamaremos *densidad* en una variedad diferenciable \mathcal{V} a una aplicación simétrica (por la siguiente propiedad (1))

$$\mu: \mathcal{D}^n(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{V}),$$

que cumple las siguientes propiedades:

(1) Si para toda $\omega \in \Lambda_n(V)$ y $2n$ campos tangentes $D_i, E_i \in \mathcal{D}(V)$ se tiene

$$|\omega_n(D_1, \dots, D_n)| = |\omega_n(E_1, \dots, E_n)|,$$

entonces $\mu(D_1, \dots, D_n) = \mu(E_1, \dots, E_n)$.

(2) Para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $\mu(fD_1, \dots, D_n) = |f|\mu(D_1, \dots, D_n)$.

De donde se sigue que:

(i) (Por (2)). Si algún $D_i = 0$, $\mu(D_1, \dots, D_n) = 0$.

(ii) Si $D_i = D_j$, para $i \neq j$, $\mu(D_1, \dots, D_n) = 0$, pues $|\omega(D_1, \dots, D_n)| = 0 = |\omega(0, \dots, 0)|$, por tanto

$$\mu(D_1, \dots, D_n) = \mu(0, \dots, 0) = 0.$$

Lema 10.11.1 *Sea μ una densidad, $U \subset \mathcal{V}$ un abierto y $D_i, E_i \in \mathcal{D}(V)$ $2n$ campos, tales que $D_i = E_i$ en U , entonces $\mu(D_1, \dots, D_n) = \mu(E_1, \dots, E_n)$ en U .*

Demostración. Basta considerar un punto $x \in U$ y una función badén ϕ en x , con soporte en U , entonces $\phi D_i = \phi E_i$ en \mathcal{V} , por tanto como $\phi(x) = 1$

$$\begin{aligned} \mu(D_1, \dots, D_n)(x) &= |\phi(x)|^n \mu(D_1, \dots, D_n)(x) = \mu(\phi D_1, \dots, \phi D_n)(x) \\ &= \mu(\phi E_1, \dots, \phi E_n)(x) = \mu(E_1, \dots, E_n)(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esto nos permite definir la restricción de una densidad.

Definición. Llamamos *restricción* de una densidad μ a un abierto $U \subset \mathcal{V}$ a la densidad en U

$$\mu|_U(D_1, \dots, D_n)(x) = \mu(\widehat{D}_1, \dots, \widehat{D}_n)(x),$$

para cualquier $\widehat{D}_i \in \mathcal{D}(V)$ que coincida con D_i en un entorno de x .

Sea $(U; x_i)$ un entorno coordenado, entonces μ está determinada en U por su valor $\mu(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ que es un generador del módulo libre

$\mathcal{D}^n(U)$, por tanto toda densidad μ está determinada en U por la función $\beta = \mu(\partial)$, pues para cada $D \in \mathcal{D}^n(U)$, existe f diferenciable, tal que $D = f\partial$ y

$$\mu(D) = |f|\beta.$$

Proposición 10.11.2 *Sea μ una densidad, $x \in \mathcal{V}$ y $D, E \in \mathcal{D}^n(\mathcal{V})$, tales que $D_x = E_x$, entonces $\mu(D)(x) = \mu(E)(x)$.*

Demostración. Sean $D = f\partial$ y $E = g\partial$, en un entorno coordenado $(U; x_i)$; entonces $f(x) = g(x)$ y

$$\mu(D)(x) = f(x)\mu(\partial)(x) = g(x)\mu(\partial)(x) = \mu(E)(x). \quad \blacksquare$$

Esto nos permite definir densidad en un punto.

Definición. Llamamos *restricción de una densidad μ en un punto $x \in \mathcal{V}$* a la aplicación

$$\mu_x: \mathcal{D}^n(\mathcal{V})_x \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu_x(D_x) = \mu(D)(x),$$

para cualquier $D \in \mathcal{D}^n(\mathcal{V})$, que en x defina D_x .

Nota 10.11.3 Observemos que μ_x define una única medida de Lebesgue⁵ m_x en $T_x(\mathcal{V})$, tal que $\mu_x(D) = m_x(C_D)$, para $D = D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$, $D_i \in T_x(\mathcal{V})$ y C_D el hipercubo definido por los vectores D_i , pues fijando un D cualquiera con los D_i independientes tendremos una única medida de Lebesgue que lo verifica para ese D y para cualquier otro $E = fD$, como se tiene que $f = \det(a_{ij})$, para $E_i = \sum a_{ij}D_j$, tendremos

$$\mu_x(E) = |f|\mu_x(D) = |\det(a_{ij})|m_x(C_D) = m_x(C_E).$$

Definición. Para cada $x \in \mathcal{V}$ podemos considerar el \mathbb{R} -espacio vectorial 1-dimensional de las medidas de Lebesgue \mathcal{M}_x de $T_x(\mathcal{V})$ y el fibrado $\mathcal{M} = \cup_{x \in \mathcal{V}} \mathcal{M}_x$, con la estructura diferenciable siguiente: Consideremos un $m_x \in \mathcal{M}_x$ y un entorno coordenado de x , $(U; x_i)$ y para la proyección natural $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V}$, $\pi(m_x) = x$, consideramos las coordenadas en $\pi^{-1}(U)$,

$$x_i(m_y) = x_i(y), \quad z(m_y) = m_y(C_D),$$

⁵Por medida de Lebesgue entendemos sólo que sea invariante por traslaciones, por tanto se sigue de 1.5.19 que para cada hipercubo C y cada constante $c \in \mathbb{R}$ existe una única medida invariante por traslaciones m tal que $m(C) = c$.

para $D = \partial$. Se demuestra que estas cartas definen una única estructura diferenciable en \mathcal{M} y que una densidad es una sección de este fibrado.

El conjunto de las densidades de V , que denotaremos $\mathcal{M}(V)$ forman un $\mathcal{C}(V)$ -módulo y \mathcal{M} es un haz.

Ejemplo.- Toda n -forma $\omega \in \Lambda_n(V)$, define una densidad

$$\mu(D_1, \dots, D_n) = |\omega(D_1, \dots, D_n)|.$$

Ejemplo 10.11.4 Toda variedad Riemanniana (\mathcal{V}, g) define una densidad que en cada abierto coordenado $(U; x_i)$ vale

$$\mu(\partial) = \sqrt{\det(\partial_{x_i} \cdot \partial_{x_j})}.$$

Ejercicios difíciles

Ejercicio 1 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y dos medidas en él $\mu \leq \nu$. Demostrar:

- Hay una medida λ tal que $\mu + \lambda = \nu$.
- Si μ es σ -finita, λ es única.

Ejercicio 2 Demostrar que para $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, la relación $A \simeq B$ si y sólo si $\mu(A \Delta B) = 0$, es de equivalencia, que la aplicación

$$\rho(A, B) = \mu(A \Delta B),$$

es una métrica en el conjunto cociente $\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\} / \simeq$ y que el espacio métrico (\mathcal{X}, ρ) es completo.

Ejercicio 3 Demostrar que el espacio métrico completo del ejercicio anterior, en el caso particular de $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{A} los borelianos del intervalo y μ la medida de Lebesgue, no es compacto.

Ejercicio 4 Sean f, f_n, g, g_n integrables, tales que $|f_n| \leq g_n$, $f_n \rightarrow f$ c.s., $g_n \rightarrow g$ c.s. y $\int g_n \rightarrow \int g$. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$.

Ejercicio 5 Demostrar que si $f, f_n \in L_p$ ($p < \infty$) y $f_n \rightarrow f$ c.s. entonces $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ si y sólo si $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Ejercicio 6 Para cada $1 \leq p \leq \infty$, ¿bajo que condiciones sobre f y g se da la igualdad en la desigualdad de Holder?, ¿y en la de Minkowsky?.

Ejercicio 7 Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y $f \geq 0$ es medible, entonces para $k = \int f d\mu$, se verifica

$$\sqrt{1+k^2} \leq \int \sqrt{1+f^2} d\mu \leq 1+k.$$

Dar una interpretación geométrica de las desigualdades en el caso en que $f = g'$ y sea continua, $\mu = m$ y $\Omega = [0, 1]$.

Ejercicio 8 Demostrar que si $1 \leq r < p < s < \infty$, entonces: a) $L_r \cap L_s$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \|f\|_r + \|f\|_s$ y la inclusión $L_r \cap L_s \rightarrow L_p$ es continua. b) Que $L_r + L_s$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \inf\{\|g\|_r + \|h\|_s : f = g + h\}$ y la inclusión $L_p \rightarrow L_r + L_s$ es continua.

Ejercicio 9 i) Demostrar que para $x \geq 0$, $\log x \leq x - 1$ y $x \log x \geq x - 1$.

ii) Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y $0 < r < s < \infty$, entonces para $f \in L_s$, $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ y que para $\exp\{-\infty\} = 0$ y $\log 0 = -\infty$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = \exp\left\{\int \log |f| d\mu\right\}.$$

Ejercicio 10 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $f \in L_\infty$, $\|f\|_\infty \neq 0$, entonces para $a_n = \int |f|^n d\mu$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \|f\|_\infty.$$

Ejercicio 11 Demostrar la desigualdad de Heisenberg para $f = f_1 + if_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con $f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f \in L_2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ejercicio 12 Demostrar que si $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $g \in L_p(\mathbb{R})$, entonces $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ está en L_p y

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Ejercicio 13 Demostrar que en un espacio de medida σ -finito $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, si $fg \in L_1$ para toda $f \in L_p$, entonces $g \in L_q$, para q el conjugado de p .

Ejercicios resueltos

Ejercicios resueltos Tema I

Ejercicio 1.2.3.- Dada una aplicación $F: \Omega \rightarrow \Omega'$, demostrar que:

- (a) Si \mathcal{A} es una σ -álgebra de Ω , $\mathcal{A}' = \{B \subset \Omega' : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ lo es de Ω' .
(b) Si \mathcal{A}' es una σ -álgebra de Ω' , $\mathcal{A} = F^{-1}[\mathcal{A}'] = \{F^{-1}(B) \subset \Omega : B \in \mathcal{A}'\}$ lo es de Ω .
(c) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega')$, $\sigma[F^{-1}(\mathcal{C})] = F^{-1}[\sigma(\mathcal{C})]$.
(d) Demostrar que si (Ω, \mathcal{T}) y (Ω', \mathcal{T}') son espacios topológicos y F es continua, entonces $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega)$, para todo $B \in \mathcal{B}(\Omega')$.

Ind.- (c) Aplicar el principio de los buenos conjuntos. (d) Aplicar (c). ■

Ejercicio 1.2.4.- Consideremos las siguientes extensiones de una familia \mathcal{C} de subconjuntos de Ω :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{C} \text{ ó } A^c \in \mathcal{C}\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_i \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : A_i \in \mathcal{C}_2, n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Demostrar que $\mathcal{C}_3 = \alpha(\mathcal{C})$.

Solución.- Por una parte tenemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_3 \subset \alpha(\mathcal{C})$, por tanto $\alpha(\mathcal{C}_3) = \alpha(\mathcal{C})$ y basta demostrar que \mathcal{C}_3 es álgebra. Que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{C}_3$ es obvio,

$$\begin{aligned}A &= A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{C}_3 \quad \Rightarrow \\ A^c &= A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = (\cup_{j=1}^{m_1} B_{1j}) \cap \cdots \cap (\cup_{j=1}^{m_n} B_{nj}) \\ &= \cup_{j_1=1}^{m_1} \cdots \cup_{j_n=1}^{m_n} [\cap_{i=1}^n B_{ij_i}] \in \mathcal{C}_3,\end{aligned}$$

donde los $B_{ij} \in \mathcal{C}_1$. Por último es cerrado para uniones finitas. ■

Ejercicio 1.2.5.- Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ espacios medibles. Demostrar que la familia de los productos de medibles,

$$\mathcal{R} = \{A_1 \times \cdots \times A_n \subset \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{A}_i\},$$

es una clase elemental (es decir que satisface las condiciones: (i) $\emptyset \in \mathcal{C}$, (ii) si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{C}$ y (iii) si $A \in \mathcal{C}$, A^c es unión finita disjunta de elementos de \mathcal{C}).

Solución.- $\emptyset \in \mathcal{R}$ y

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n),$$

$$[A_1 \times \cdots \times A_n]^c = A_1^c \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \cup$$

$$A_1 \times A_2^c \times \cdots \times \Omega_n \cup \dots \cup$$

$$A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n^c \in \mathcal{A}_0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.2.6.- Demostrar que si \mathcal{C} es una clase elemental, la familia de uniones finitas disjuntas de conjuntos de \mathcal{C} es el álgebra $\alpha(\mathcal{C})$.

Solución.- Basta ver que la familia \mathcal{A}_0 de uniones finitas disjuntas de conjuntos de \mathcal{C} es álgebra, pues $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0 \subset \alpha(\mathcal{C})$.

Se tiene: $\emptyset \in \mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0$ y si $R, Q \in \mathcal{A}_0$, con $R = \cup_{i=1}^m R_i$, $R_i \in \mathcal{C}$ disjuntos y $Q = \cup_{j=1}^k Q_j$, con los $Q_j \in \mathcal{C}$ disjuntos, entonces

$$R \cap Q = \cup_{i=1}^m (R_i \cap Q) = \cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^k (R_i \cap Q_j) \in \mathcal{A}_0,$$

ya que los $R_i \cap Q_j \in \mathcal{C}$ y son disjuntos. Por último es cerrado por paso al complementario, pues por definición para $R_i \in \mathcal{C}$, $R_i^c \in \mathcal{A}_0$ y para $R \in \mathcal{A}_0$ como antes,

$$R^c = \cap_{i=1}^m R_i^c \in \mathcal{A}_0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.2.10.- ¿Puede una σ -álgebra infinita contener sólo una colección numerable de elementos?

Ind. No, porque al menos tendría una colección numerable B_n de conjuntos disjuntos, cosa que vemos de tres formas: (1) De un medible no trivial A , sacamos dos A y A^c , y por inducción, de n disjuntos A_1, \dots, A_n sacamos $n+1$, pues o bien $B = \cup A_i \neq \Omega$ y consideramos $A_{n+1} = B^c$ o en caso contrario estos n conjuntos son una partición del espacio y basta considerar cualquier medible E que no sea uno de los 2^n que se obtienen uniendo estos A_i , y por tanto con intersección no trivial con alguno de los A_i , al que parte en dos $E \cap A_i$ y $E^c \cap A_i$. (2) Si la σ -álgebra es numerable $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Podemos considerar para cada x del espacio, el medible $A_x = \cap \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$, pues la intersección es numerable. Si $y \in A_x$, entonces $A_y = A_x$, pues si $x \in A_n$ entonces $y \in A_n$ y por lo mismo si $x \in A_n^c = A_m$, entonces $y \in A_m$ ó equivalentemente si $y \in A_n$, $x \in A_n$; y si $y \notin A_x$, $A_x \cap A_y = \emptyset$ pues si tuviera un z , sería $A_x = A_z = A_y$ e $y \in A_x$. Obviamente cada $A_n = \cup_{x \in A_n} A_x$, por tanto tenemos una colección numerable de conjuntos disjuntos. (3) Si tenemos una colección numerable $A_n \in \mathcal{A}$, entonces \mathcal{A} contiene los conjuntos disjuntos de la forma $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$, para $E_n = A_n$ ó $E_n = A_n^c$, los cuales no pueden formar un conjunto finito B_1, \dots, B_m , pues entre los 2^m que se obtienen uniendo estos, tienen que estar todos los A_n , que son infinitos.

Ahora las uniones arbitrarias de estos serían distintas e identificando cada B_n con $n \in \mathbb{N}$, estas uniones se identificarían con partes de \mathbb{N} que es no numerable. \blacksquare

Ejercicio 1.3.3.- Dada una medida μ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ind. Tómnense los conjuntos disjuntos $B_n = (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})^c \cap A_n$. ■

Ejercicio 1.3.5.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una sucesión $A_n \in \mathcal{A}$, demostrar que:

(a) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.

(b) Que si $\mu(\cup A_n) < \infty$, entonces $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

Solución.- Sean $B_n = \cap_{i=n}^{\infty} A_i$ y $C_n = \cup_{i=n}^{\infty} A_i$, entonces $B_n \subset A_n \subset C_n$, $\mu(B_n) \leq \mu(A_n) \leq \mu(C_n)$ y $B_n \uparrow \liminf A_n$, $C_n \downarrow \limsup A_n$. ■

Ejercicio (Lema de Borel–Cantelli) 1.3.6.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $C_n \in \mathcal{A}$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\limsup C_n) = 0.$$

Ind. Sea $D_n = \cup_{i=n}^{\infty} C_i$, $\mu(D_1) < \infty$, $\mu(D_n) \downarrow 0$ y $D_n \downarrow \limsup C_n$. ■

Ejercicio 1.3.8.- Dada una sucesión doble $x_{nm} \in (-\infty, \infty]$, tal que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $x_{nm} \leq x_{n+1, m}$ y $x_{nm} \leq x_{n, m+1}$, demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}.$$

Ind. Demostrar que existen los límites $a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm}$ y $b = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m$, que $x_{nm} \leq a_n \leq a$ y por tanto $b \leq a$, la otra desigualdad por simetría. ■

Ejercicio 1.3.10.- Dado un conjunto Ω no numerable, demostrar que

$$\mathcal{A} = \{E \subset \Omega : E \text{ ó } E^c \text{ es numerable}\},$$

es σ -álgebra y en ella $\mu(E) = 0$ si E es numerable y $\mu(E) = 1$, si E^c es numerable, es una medida.

Ind. Si $A_n \in \mathcal{A}$ y para todo n A_n es numerable, entonces $\cup A_n \in \mathcal{A}$ por ser numerable y si existe un i tal que A_i^c es numerable, entonces $(\cup A_n)^c = \cap A_n^c \subset A_i^c$ es numerable. Y si los A_n son disjuntos y todos numerables, $\mu(\cup A_n) = 0 = \sum \mu(A_n)$, y si un A_j no lo es, entonces para todo $j \neq i$, $A_j \subset A_i^c$ es numerable y $\mu(\cup A_n) = 1 = \mu(A_i) = \sum \mu(A_n)$. ■

Ejercicio 1.3.11.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, tal que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$ (estas medidas suelen llamarse *semifinitas*), demostrar que para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = \infty$ y todo $r > 0$ existe $F \in \mathcal{A}$, con $F \subset E$ y $r < \mu(F) < \infty$.

Solución.- Basta demostrar que

$$\sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset E \text{ y } \mu(B) < \infty\} = \infty.$$

En caso contrario, el supremo valdría $c < \infty$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, podríamos encontrar $F_n \subset E$ tal que $\mu(F_n) > c - (1/n)$ y considerando $B_n = \cup_{i=1}^n F_i$ y su unión expansiva

$B_n \uparrow B$, tendríamos que $\mu(B_n) \leq c$, pues $B_n \subset E$ y $\mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^n \mu(F_i) < \infty$, por tanto tomando límites $\mu(B) \leq c$, pero como

$$\mu(B_n) \geq \mu(F_n) \geq c - \frac{1}{n},$$

tomando límites $\mu(B) \geq c$, por tanto $\mu(B) = c$ y como $B \subset E$ llegamos a contradicción pues $\mu(E \setminus B) = \infty$ ya que $\mu(E) = \mu(B) + \mu(E \setminus B)$, y por definición existe un medible $A \subset E \setminus B$ con $0 < \mu(A) < \infty$, por lo que $B \cup A \subset E$ tiene medida finita mayor que c . ■

Ejercicio 1.3.13.- Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, definimos $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, de la siguiente manera

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A \text{ y } \mu(B) < \infty\},$$

demostrar que:

- (a) λ es una medida semifinita.
 (b) Que si μ es semifinita entonces $\lambda = \mu$.

Solución.- (a) Es aditiva, pues para $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos y cualquier $C \subset A \cup B$, con $C \in \mathcal{A}$ y $\mu(C) < \infty$, tenemos $A \cap C \subset A$, $B \cap C \subset B$, con $A \cap C, B \cap C \in \mathcal{A}$ y $\mu(A \cap C) < \infty$, $\mu(B \cap C) < \infty$, por tanto como son disjuntos

$$\mu(C) = \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) \leq \lambda(A) + \lambda(B),$$

y como esto es válido para cualquier C , $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$. Veamos la otra desigualdad; para cualesquiera $A' \subset A$, $B' \subset B$, de \mathcal{A} con medidas finitas por μ , tendremos que son disjuntos y

$$\mu(A') + \mu(B') = \mu(A' \cup B') \leq \lambda(A \cup B),$$

y se sigue la otra desigualdad. Ahora basta demostrar que si $A_n \uparrow A$, entonces $\lambda(A_n) \rightarrow \lambda(A)$. Ahora bien como λ es no negativa y aditiva es monótona, por tanto $\lambda(A_n) \leq \lambda(A_{n+1}) \leq \lambda(A)$, para todo n y si consideramos un $B \subset A$ medible con $\mu(B) < \infty$ y la sucesión $B_n = B \cap A_n \uparrow B$, tendremos $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$, $\mu(B_n) \leq \mu(B) < \infty$ y $B_n \subset A_n$, por tanto $\mu(B_n) \leq \lambda(A_n)$, de donde

$$\mu(B) = \lim \mu(B_n) \leq \lim \lambda(A_n) \leq \lambda(A),$$

y tomando sup en $\mu(B)$ se dan igualdades y por tanto λ es medida. Además si $\mu(A) < \infty$, $\lambda(A) = \mu(A)$ y si $\lambda(A) = \infty$, existe $B_n \subset A$ medibles con $\mu(B_n) < \infty$ y $\mu(B_n) \rightarrow \infty$, por tanto existe $B_n \subset A$, con $0 < \lambda(B_n) = \mu(B_n) < \infty$, lo que prueba que es semifinita.

- (b) Es consecuencia del ejercicio 1.3.11. ■

Ejercicio 1.4.1.- Demostrar que la medida exterior de Lebesgue en \mathbb{R} , se puede definir en vez de con la clase $\mathcal{C} = \{(a, b]\}$, con cualquiera de las clases $\mathcal{C}_1 = \{(a, b)\}$, $\mathcal{C}_2 = \{[a, b]\}$, $\mathcal{C}_3 = \{[a, b)\}$.

Ind.- Para \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 , denotemos

$$\mathcal{D}_A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n < b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

$$\mathcal{D}_{1A} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (d_n - c_n) : c_n < d_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n) \right\},$$

entonces por un lado $\mathcal{D}_{1A} \subset \mathcal{D}_A$, pues $(c, d) \subset (c, d]$ y por otro para cada $x \in \mathcal{D}_A$ y $\epsilon > 0$, $x + \epsilon \in \mathcal{D}_{1A}$, pues para $x = \sum(b_n - a_n)$, con $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$, tendremos $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n + \epsilon/2^n)$ y la suma correspondiente a estos intervalos es $\epsilon + x$. ■

Ejercicio 1.4.2.- Sea μ^* una medida exterior en Ω y λ la medida restricción de μ^* a la σ -álgebra \mathcal{A}_* . Demostrar que:

(a) $\mu^* \leq \lambda^*$.

(b) Si μ^* es la medida exterior generada por una medida μ en un álgebra \mathcal{A} , entonces $\mu^* = \lambda^*$.

(c) Encontrar una medida exterior μ^* en $\Omega = \{0, 1\}$, para la que $\mu^* \neq \lambda^*$.

Ind. (a) Para $A \subset \Omega$, $\lambda^*(A) = \inf\{\sum \mu^*(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_*, A \subset \cup A_i\}$, y dado uno de estos números $\sum \mu^*(A_i)$,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(\cup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i),$$

por tanto $\mu^*(A) \leq \lambda^*(A)$.

(b) Para $A \subset \Omega$, $\lambda^*(A) = \inf\{\sum \mu(A_i) : A_i \in \mathcal{A}, A \subset \cup A_i\}$, y dado uno de estos números $\sum \mu(A_i)$, como los $A_i \in \mathcal{A}_*$

$$\lambda^*(A) \leq \sum \mu^*(A_i) = \sum \mu(A_i),$$

por tanto $\lambda^*(A) \leq \mu^*(A)$.

(c) $\mu^*\{0\} = \mu^*\{1\} = 2$, $\mu^*\{0, 1\} = 3$, por tanto $\mathcal{A}_* = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\lambda^*\{0\} = 3$. ■

Ejercicio 1.5.1.- Sean $\mu_i : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, para $i = 1, \dots, n$ medidas de Lebesgue–Stieltjes. Demostrar que existe una única medida $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, tal que para cada semi-rectángulo acotado $(a, b]$,

$$\mu(a, b] = \mu_1(a_1, b_1] \cdots \mu_n(a_n, b_n].$$

Ind. Considérense funciones de distribución F_i que generen μ_i , la función de distribución $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ y la medida que genera. ■

Ejercicio 1.5.2.- Demostrar que toda medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de Lebesgue–Stieltjes es σ -finita. Encontrar una que sea σ -finita pero no de Lebesgue–Stieltjes.

Ind. En \mathbb{R} , $\mu(A)$ el número de racionales de A . ■

Ejercicio 1.5.3.- Demostrar que para $a < b \in \mathbb{R}^n$ y la medida de Lebesgue n -dimensional

$$m(a, b) = m[a, b] = m(a, b] = m[a, b].$$

Ind. Para $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, se tiene, entendiéndose $a - 1/m$ el vector de coordenadas $a_i - 1/m$, $(a - 1/m, b] \downarrow [a, b]$, por tanto

$$m[a, b] = \lim m(a - 1/m, b] = \lim \prod (b_i - a_i + 1/n) = \prod (b_i - a_i) = m(a, b].$$

y por lo mismo $m[a, b] = m(a, b)$, pues $(a, b - 1/m) \uparrow (a, b)$. ■

Ejercicio 1.5.4.- Demostrar que si $t \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $m(tB) = |t|^n m(B)$. Además si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Ind. Para $t > 0$, $m(tB) = |t|^n m(B)$, pues $m^*(tB) = t^n m^*(B)$ y para $t < 0$, $m^*(tB) = m^*[t|(-B)] = |t|^n m^*(-B)$ y basta demostrar que $m^*(-B) = m^*(B)$. Ahora bien para $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} m^*(B) &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (b_{mi} - a_{mi}) : A \subset \cup (a_i, b_i] \right\} = a \\ m^*(-B) &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (d_{mi} - c_{mi}) : -A \subset \cup (c_i, d_i] \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (b_{mi} - a_{mi}) : A \subset \cup [a_i, b_i] \right\} = b, \end{aligned}$$

siendo $a = b$, pues ambos son iguales a

$$c = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (b_{mi} - a_{mi}) : A \subset \cup [a_i, b_i] \right\}.$$

Veamos que $a = c$. Obviamente se tiene $c \leq a$, y si tomamos cualquier elemento $r = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (b_{mi} - a_{mi})$, del conjunto cuyo ínfimo es c , con recubrimiento $A \subset \cup [a_i, b_i]$, entonces dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $a'_i < a_i$ de modo que $\prod_{i=1}^n (b_{mi} - a'_{mi}) \leq \prod_{i=1}^n (b_{mi} - a_{mi}) + \epsilon/2^m$ y $A \subset \cup [a_i, b_i] \subset \cup (a'_i, b_i]$, siendo $\sum \prod_{i=1}^n (b_{mi} - a'_{mi}) \leq r + \epsilon$, de donde $a \leq r$ y por tanto $a \leq c$. Ahora con esta fórmula $m^*(tB) = |t|^n m^*(B)$, se demuestra fácilmente que si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $tB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Que las homotecias conservan Borelianos es por ser homeomorfismos. El ejercicio también se puede demostrar utilizando esto último, que los Lebesgue medibles son la completación de los Borel y que la medida de Lebesgue es la única medida invariante por traslaciones que verifica $m([0, 1]^n) = 1$, considerando para ello la medida de Borel $\mu(B) = m[tB]/|t|^n$. ■

Ejercicio 1.5.5.- Demostrar que la medida de Lebesgue es invariante por rotaciones.

Ind. Sea $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una rotación y consideremos la medida invariante por traslaciones $\mu(E) = m[R(E)]$. Entonces existe $c > 0$ tal que $\mu = c \cdot m$ y como la bola unidad B es invariante por rotaciones $\mu(B) = m(B)$ y $c = 1$, pues $0 < m(B) < \infty$. ■

Ejercicio 1.6.1.- Demostrar que para $p = 0$, H_p es la medida de contar.

Ind. Para $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ y $\delta < \min\{d(x_i, x_j)\}$, $H_{0,\delta}(A) = n$. ■

Ejercicio 1.6.2.- Sea $\Omega' \subset \Omega$ y consideremos el espacio métrico (Ω', d) , con la métrica inducida. Demostrar que la medida exterior de Hausdorff en Ω' , $H'_p = H_p|_{\mathcal{P}(\Omega')}$.

Ind. Para $A \subset \Omega'$,

$$\begin{aligned} H'_{p,\delta}(A) &= \inf \left\{ \sum d(A_n)^p : A \subset \cup A_n \subset \Omega', d(A_n) \leq \delta \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum d(B_n)^p : A \subset \cup B_n \subset \Omega, d(B_n) \leq \delta \right\} = H_{p,\delta}(A). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6.4.- Demostrar que $\dim_H(\{x\}) = 0$, para cada $x \in \Omega$.

Ind. $H_0(\{x\}) = 1$. ■

Ejercicio 1.6.5.- Demostrar que $\dim_H(\cup A_n) = \sup \dim_H(A_n)$.

Ind. Si $A = \cup A_i$, $H_p(A_i) \leq H_p(A) \leq \sum H_p(A_n)$, por tanto si $p < \sup \dim_H(A_n)$, existe un i tal que $p < \dim_H(A_i)$, por tanto $H_p(A_i) = \infty = H_p(A)$ y $p \leq \dim_H(A)$ y si $\sup \dim_H(A_n) < p$, $H_p(A_n) = 0$ para todo n y $H_p(A) = 0$, por tanto $\dim_H(A) \leq p$. ■

Ejercicio 1.6.6.- En los subespacios de \mathbb{R}^n con la métrica euclídea, demostrar que la dimensión vectorial y la de Hausdorff coinciden.

Ind. Es consecuencia de los resultados anteriores y de que para un cubo Q , n -dimensional, se tiene que $0 < H_n(Q) < \infty$, por tanto $\dim_H(Q) = n$. ■

Ejercicio 1.7.1.- Demostrar que para cada función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: (a) El conjunto de puntos de continuidad de f , $C(f) \in \mathcal{A}_\delta$ y los de discontinuidad $D(f) \in \mathcal{C}_\sigma$. (b) Demostrar que $C(f)$ y $D(f)$ son borelianos.

Ind. Como $C(f) = D(f)^c$ basta verlo para uno. Consideremos para cada intervalo abierto y acotado $I = (a, b)$, $\omega_f(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$, para la que se tiene que

$$I \subset J \Rightarrow 0 \leq \omega_f(I) \leq \omega_f(J),$$

y para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $\omega_f(x) = \inf_{x \in I} \omega_f(I)$. Se sigue de la definición que x es punto de continuidad de f ($x \in C(f)$) sii $\omega_f(x) = 0$ y que para cada $k > 0$, $\{x : \omega_f(x) < k\}$ es abierto. Se sigue el resultado pues para $A_n = \{x : \omega_f(x) < 1/n\}$, $C(f) = \{\omega_f = 0\} = \cap A_n$. ■

Ejercicio 1.7.2.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea \mathcal{A}_μ su completación y μ^* la medida exterior generada por μ . Demostrar que para cada $A \subset \Omega$:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, A \subset B\},$$

y que si definimos la “medida interior”

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\},$$

entonces si $A \in \mathcal{A}_\mu$ se tiene que $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ y recíprocamente si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$.

Ind. Si $A \in \mathcal{A}_\mu$, existen $B, D \in \mathcal{A}$, con $B \subset A \subset D$ y $\mu(D \setminus B) = 0$, por tanto $\mu(D) = \mu(A) = \mu(B) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq \mu(D)$ y se tiene la igualdad. Ahora dado $A \subset \Omega$ se demuestra que existen $B, D \in \mathcal{A}$, con $B \subset A \subset D$, $\mu(B) = \mu_*(A)$ y $\mu^*(A) = \mu(D)$ y si $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$ entonces $A \in \mathcal{A}_\mu$. ■

Ejercicio 1.7.4.- Encontrar una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ que sea σ -finita pero no regular.

Ind. En \mathbb{R} , $\mu(A)$ el número de racionales de A . ■

Ejercicio 1.7.5.- Demostrar que toda medida semifinita $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ es regular interior.

Ind. Se ha demostrado que toda medida es regular interior en los borelianos de medida finita, sea B un boreliano con $\mu(B) = \infty$, entonces por ser semifinita hemos demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un boreliano $B_n \subset B$, tal que $n < \mu(B_n) < \infty$, pero entonces existe un compacto $K_n \subset B_n$, tal que $n < \mu(K_n)$ y $K_n \subset B$. ■

Ejercicios resueltos Tema II

Ejercicio 2.2.4.- Sean h y g funciones medibles. Demostrar que los conjuntos

$$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) \leq g(x)\}, \quad \{x \in \Omega : h(x) = g(x)\},$$

son medibles.

Ind. El primer conjunto es medible porque en él $h < \infty$, $-\infty < g$ y en este conjunto existe $g - h$ que es medible, ó también porque

$$\{x \in \Omega : h(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{h(x) < r\} \cap \{r < g(x)\}),$$

el segundo porque su complementario lo es y el tercero es la diferencia. ■

Ejercicio 2.2.11.- Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable, f y f' son Borel medibles.

Solución.- Si f es derivable es continua y por tanto medible, como también lo es $f_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$ y como $f_n \rightarrow f'$, f' es medible. ■

Ejercicio 2.2.12.- Demostrar que $f = (f_1, \dots, f_n): (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ es medible si y sólo si cada f_i lo es.

Solución.- Si f es medible, $f_i = x_i \circ f$ es medible por que las proyecciones $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y por tanto medibles. Recíprocamente sea $(a, b]$ un semi-rectángulo, con $a < b \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$f^{-1}(a, b] = \{x \in \Omega : a < f(x) \leq b\} = \bigcap_{i=1}^n \{x \in \Omega : a_i < f_i(x) \leq b_i\} \in \mathcal{A},$$

y como estos semi-rectángulo generan $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, f es medible. ■

Ejercicio 2.4.1.- Sean $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles tales que $f = g$ c.s. y existe $\int f d\mu$. Demostrar que entonces también existe $\int g d\mu$ y coinciden.

Indicación.- Consideremos el medible $A = \{x : f(x) = g(x)\}$, por tanto $\mu(A^c) = 0$, y como en A , $f^+ = g^+$ y $f^- = g^-$, tendremos por (2.4.1), que

$$\int f^+ d\mu = \int_A f^+ + \int_{A^c} f^+ = \int_A f^+ = \int_A g^+ = \int_A g^+ + \int_{A^c} g^+ = \int g^+,$$

y por lo mismo $\int f^- = \int g^-$. ■

Ejercicio 2.4.2.- Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e integrable. Demostrar que $g(x) = \int_{(a,x)} f dm$ es diferenciable y que $g' = f$.

Ind.- Por ser integrable lo es $|f|$, y por tanto lo es en (a, x) . Ahora para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $y \in (x - \delta, x + \delta) \subset (a, b)$, $f(x) - \epsilon \leq f(y) \leq f(x) + \epsilon$

y para $|h| < \delta$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\int_{(a,x+h)} f - \int_{(a,x)} f}{h} = \begin{cases} \frac{-\int_{(x+h,x)} f}{h}, & h < 0; \\ \frac{\int_{(x,x+h)} f}{h}, & h > 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) - \epsilon \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(x) + \epsilon. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.4.3.- Sean $-\infty < a < b \leq \infty$ y $g: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase 1. Demostrar que para cualesquiera $c < d$, en (a, b) , $\int_{[c,d]} g' dm = g(d) - g(c)$.

Ind.- Como g' es continua, es acotada en $[c, x]$ y por tanto integrable, para $x \in (c, b)$, y podemos definir $F(x) = \int_{[c,x]} g' dm = \int_{(c,x)} g' dm$. Ahora por el resultado anterior $F'(x) = g'(x)$, por tanto $F(x) = g(x) - k$, con k constante y como $F(c) = 0$, $k = g(c)$ y $F(d) = g(d) - g(c)$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.4.- Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable

$$\int_{(-\infty, \infty)} f dm = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f dm.$$

¿Es cierto si existe la integral pero no es finita?

Solución.- $\lambda(A) = \int_A f dm$ es una carga y si $A_n \uparrow A$, $\lambda(A_n) \rightarrow \lambda(A)$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.5.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{A_n}$, con $a_n \in (0, \infty)$ y $A_n \in \mathcal{A}$, calcular $\int f d\mu$.

Ind. $\int \sum f_n = \sum \int f_n$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.6.- Sea $f \geq 0$ integrable. Demostrar que $\forall \epsilon > 0$ existe un medible A , con $\mu(A) < \infty$ tal que $\int f < \int_A f + \epsilon$.

Ind. $A_n = \{1/n \leq f\} \uparrow A = \{0 < f\}$, $\mu(A_n) < \infty$ y $\int_{A_n} f \uparrow \int_A f = \int f$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.10.- Sean $f, f_n \geq 0$ integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$ sii $\int |f_n - f| \rightarrow 0$.

Ind. Por el TCD, pues $-f \leq f_n - |f - f_n| \leq f$, por tanto $\int f_n - \int |f_n - f| \rightarrow \int f$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.12.- Sean f, f_n integrables, tales que $f_n \rightarrow f$ c.s. Demostrar que $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ sii $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$.

Ind. Por el TCD pues $-|f| \leq |f_n| - |f_n - f| \leq |f|$, por tanto $\int |f_n| - \int |f_n - f| \rightarrow \int |f|$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.18.- Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dm.$$

Ind. Por el TCD, pues: 1 es integrable; $0 \leq f_n \leq 1$, ya que

$$(1 + x^2)^n = 1 + nx^2 + (1/2)n(n-1)x^4 + \dots \geq 1 + nx^2,$$

y $f_n \downarrow 0$, pues

$$\frac{(1 + x^2)^n}{1 + nx^2} \geq \frac{1 + nx^2 + (1/2)n(n-1)x^4}{1 + nx^2} \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.4.20.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $e^{tx} f(x)$ es integrable para todo $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Demostrar que $F(t) = \int e^{tx} f(x) dm$ es diferenciable y que $F'(t) = \int x e^{tx} f(x) dm$.

Ind. Para cada $s \in (a, b)$ existe un $\delta > 0$ tal que $[s - 2\delta, s + 2\delta] \subset (a, b)$. Basta demostrar que F es diferenciable en $I = (s - \delta, s + \delta)$. Existe $r > 0$, tal que para $x > r$, $x \leq e^{\delta x}$, por lo que el módulo de la derivada del integrando, $|x e^{tx} f(x)|$, está acotado para $t \in I$ por la función integrable

$$h(x) = \begin{cases} e^{(s-2\delta)x} |f(x)|, & \text{si } x < -r, \\ r e^{(s-2\delta)x} |f(x)|, & \text{si } -r \leq x \leq 0, \\ r e^{(s+2\delta)x} |f(x)|, & \text{si } 0 \leq x \leq r, \\ e^{(s+2\delta)x} |f(x)|, & \text{si } x > r, \end{cases}$$

y el resultado se sigue del teorema de derivación bajo el signo integral. ■

Nota. Para los siguientes ejercicios puede ser útil recordar que:

$$\lim_{|a_n| \rightarrow \infty} (1 + 1/a_n)^{a_n} = e,$$

Ejercicio 2.4.21.- Demostrar que para $t > 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, $(1 + (t/n)^\alpha)^n$ es creciente en $n \geq 1$. Para $1 \leq \alpha$, $(1 - (t/n)^\alpha)^n$ es creciente en $n \geq t$.

Ind. Los dos son similares, veamos el segundo

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^\alpha\right)^n &\leq \left(1 - \left(\frac{t}{n+1}\right)^\alpha\right)^{n+1} \Leftrightarrow \\ \frac{(n^\alpha - t^\alpha)^n}{((n+1)^\alpha - t^\alpha)^{n+1}} &\leq \frac{n^{\alpha n}}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}, \end{aligned}$$

lo cual induce a considerar la función en $[0, n^\alpha]$

$$f(x) = \frac{(n^\alpha - x)^n}{((n+1)^\alpha - x)^{n+1}},$$

y demostrar que $f' \leq 0$, en cuyo caso $f(x) \leq f(0)$. ■

Ejercicio 2.4.22.- Demostrar que

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, n]} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t \, dm &= \int_{[1, \infty)} e^{-t} \log t \, dm. \\ \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t \, dm &= \int_{[0, 1]} e^{-t} \log t \, dm. \end{aligned}$$

Ind. (a) Se puede hacer utilizando el ejercicio (2.4.21) y el TCM pues $0 \leq I_{(1, n)}(1 - (t/n))^n \log t$ y $(1 - (t/n))^n$ es creciente para $0 \leq t \leq n$.

También se puede hacer utilizando el TCD, probando que

$$|I_{(1, n)}(1 - (t/n))^n \log t| = I_{(1, n)}(1 - (t/n))^n \log t \leq e^{-t} t,$$

y demostrando que $e^{-t} t$ es integrable. (b) Se sigue del desarrollo de (a), utilizando el TCM y teniendo en cuenta que como en $(0, 1)$ el $\log t$ es negativo, la sucesión $(1 - (t/n))^n \log t \leq 0$ y es decreciente. ■

Ejercicio 2.4.23.- Sea f no negativa e integrable, con $0 < \int f d\mu = c < \infty$ y sea $0 < \alpha < \infty$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \log \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{si } \alpha = 1, \\ 0, & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Ind. La sucesión $0 \leq f_n = n \log[1 + (f/n)^\alpha]$, es creciente para $\alpha \leq 1$, por el ejercicio (2.4.21) y

$$\left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right]^n = \left[1 + \frac{1}{(n/f)^\alpha} \right]^{(n/f)^\alpha n (f/n)^\alpha}, \quad n^{1-\alpha} \begin{cases} \downarrow 0, & \text{si } \alpha > 1. \\ = 1, & \text{si } \alpha = 1. \\ \uparrow \infty, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

y $f_n \uparrow f$ para $\alpha = 1$ y $f_n \uparrow \infty$ para $\alpha < 1$, en cuyo caso el resultado se sigue del TCM. Para $\alpha \geq 1$, $f_n \leq \alpha f$, pues para $x \geq 0$ y $\alpha \geq 1$, $1 + x^\alpha \leq (1+x)^\alpha$ (ya que si $h(x) = (1+x)^\alpha - x^\alpha - 1$, $h(0) = 0$ y $h'(x) > 0$), y

$$e^{f_n} = \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right]^n \leq \left(1 + \frac{f}{n} \right)^{n\alpha} \uparrow e^{\alpha f},$$

y se aplica el TCD. ■

Ejercicio 2.4.24.- Demostrar que si f es μ -integrable, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| d\mu < \epsilon.$$

Ind. Sea $\lambda(A) = \int_A |f| d\mu$, que es una medida finita y $B_n = \{|f| > n\}$, entonces $B_n \downarrow B = \{|f| = \infty\}$, por tanto $\lambda(B_n) \rightarrow \lambda(B) = \int_B |f| d\mu = 0$, por tanto existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq N$, $\lambda(B_n) \leq \epsilon/2$. Ahora bien

$$\int_E |f| d\mu = \int_{E \cap B_n} |f| d\mu + \int_{E \cap B_n^c} |f| d\mu \leq \frac{\epsilon}{2} + n\mu(E),$$

y basta tomar $\delta \leq \epsilon/2n$. ■

Ejercicio 2.4.25.- Demostrar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable $F(x) = \int_{(-\infty, x]} f dm$ es uniformemente continua.

Ind. Aplicar el ejercicio anterior. ■

Ejercicio 2.4.26.- Demostrar que si $F: (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es medible, $\mu_F = F_*\mu$, para $\mu_F(B) = \mu[F^{-1}(B)]$, es una medida, llamada *medida imagen*, para la que se verifica que si g es medible en Ω' y $B \in \mathcal{A}'$, entonces

$$\int_B g d\mu_F = \int_{F^{-1}(B)} (g \circ F) d\mu.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ind. Para indicadores se sigue de la definición, para funciones simples por aditividad, para funciones no negativas por el teorema de la convergencia monótona, pág.93 y para funciones con integral de la definición. ■

Ejercicio 2.4.27.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa. Si definimos la medida $\lambda(A) = \int_A f d\mu$, demostrar que para cada función medible g

$$\int g d\lambda = \int gf d\mu,$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ind. Demuéstrese para indicadores, funciones simples, funciones no negativas y en general. ■

Ejercicio 2.4.28.- (a) Demostrar que si $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces para $t > 0$

$$t \int_{[0, \infty)} f(tx) dm = \int_{[0, \infty)} f dm.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

(b) Demostrar que si $f: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces para $t > 0$

$$t \int_{[0, 1]} f(tx) dm = \int_{[0, t]} f dm.$$

en el sentido de que si una de las integrales existe también la otra y son iguales.

Ind. Aplíquese el ejercicio (2.4.26), para $F(x) = tx$, viendo que $t \cdot m_F = m$. ■

Ejercicio 2.4.29.- Teorema de cambio de variable. Sea $F: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow (c, d) \subset \mathbb{R}$ un difeomorfismo creciente de clase 1, con inversa G . Demostrar que la medida imagen de la de Lebesgue por G es $m_G(A) = \int_A F' dm$ y que

$$\int_{(c, d)} g dm = \int_{(a, b)} g \circ F \cdot F' dm.$$

para toda función medible $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, en el sentido de que si existe una también la otra y son iguales.

Solución.- Como $F' > 0$ y es medible por el ejercicio (2.2.11), podemos considerar por el Teorema de la carga (2.4.1), la medida $\lambda(A) = \int_A F' dm$. Ahora bien para $x \leq y$ en (c, d) se sigue del ejercicio (2.4.3), que

$$\begin{aligned} m_G(x, y] &= m(G^{-1}(x, y]) = m(F(x), F(y)] = F(y) - F(x) \\ &= \int_{[x, y]} F' dm = \lambda(x, y] \end{aligned}$$

siendo F la función de distribución asociada a ambas, que por tanto coinciden en todo boreliano por la unicidad. Lo segundo es consecuencia de lo primero y de los ejercicios (2.4.26) y (2.4.27). Observemos que si F es decreciente F' es negativa y el resultado se sigue igualmente poniendo $-F'$, es decir $|F'|$. ■

Ejercicio 2.4.30.- (a) Demostrar por inducción que $\int_{(0,\infty)} x^n e^{-x} dm = n!$.
 (b) Demostrar que para $t > 0$, $\int_{(0,\infty)} e^{-tx} dm = 1/t$ y admitiendo que podemos derivar bajo el signo integral tantas veces como queramos, utilizar esta igualdad para demostrar (a).

Ind.- (b) Aplicando los ejercicios (2.4.3) y (2.4.4),

$$-1 = \int_{[0,\infty)} (e^{-tx})' dm = (-t) \int_{[0,\infty)} e^{-tx} dm.$$

(También se puede ver utilizando (2.4.28)). Ahora, para $F(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-tx} dm = 1/t$ tendremos

$$F^{(n)}(t) = \int_{[0,\infty)} (-x)^n e^{-tx} dm = (-1)^n n! t^{-n-1}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.4.31.- Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(0) = 0$ y existe $f'(0^+) \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x)x^{-3/2}$ es Lebesgue integrable.

Ind.- Existe g continua en $[0, 1]$, tal que $f(x) = xg(x)$, por tanto g está acotada, $|g| \leq M$ y $|f(x)x^{-3/2}| = |g(x)|/\sqrt{x} \leq M/\sqrt{x}$ que es integrable. \blacksquare

Ejercicio 2.4.32.- Calcular:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,\infty)} (1 + (x/n))^{-n} \operatorname{sen}(x/n) dm$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,\infty)} n \operatorname{sen}(x/n) [x(1 + x^2)]^{-1} dm$.
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,\infty)} n(1 + n^2 x^2)^{-1} dm$, en función de a .

Ind. (a) = 0 por TCD, pues la sucesión $(1 + (x/n))^n$ es creciente —y converge a e^x —, por tanto, $|(1 + (x/n))^{-n} \operatorname{sen}(x/n)| \leq (1 + (x/2))^{-2}$, y esta última es integrable. (b) = $\pi/2$ pues $|\operatorname{sen} t/t| \leq 1$ y por el ejercicio (2.4.3), $\int_{(0,x)} dm/(1 + x^2) = \arctan(x)$ y para (c) se hace el cambio $t = nx$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.33.- Dadas las funciones definidas en $(0, \infty)$

$$f(t) = \left(\int_{[0,t]} e^{-x^2} dm \right)^2, \quad g(t) = \int_{[0,1]} \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2 + 1} dm,$$

demostrar que: (a) $f(t) + g(t) = \pi/4$. (b) $\int_{(0,\infty)} e^{-x^2} dm = \sqrt{\pi}/2$.

Ind. (1) Por (2.4.2), (2.4.28) y (2.4.21), $f'(t) + g'(t) = 0$. (2) Por (2.4.19), $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.34.- Demostrar que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dm = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dm = \sigma^2.$$

Indicación.- Integrando en $(x e^{-x^2})' = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$, tendremos, por el ejercicio (2.4.33), que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_{(0,\infty)} e^{-x^2} dm = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dm$$

y haciendo el cambio de variable $F(y) = y/\sqrt{2\sigma^2}$,

$$\sqrt{\pi} = 2 \int_{\mathbb{R}} F(y)^2 e^{-F(y)^2} F'(y) dm = \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} dm. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.4.35.- Demostrar que para $b = (a + 1)/2$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2} r^a dm = \begin{cases} \Gamma(b), & \text{si } a \text{ es par;} \\ 0, & \text{si } a \text{ es impar.} \end{cases}$$

Indicación.- Para a par, las integrales en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$ son iguales y para a impar son contrarias. Ahora por el teorema de cambio de variable para $x = r^2 = G(r)$ (ver 2.4.29), y por la función factorial, (2.4.22), pág.102, la integral del enunciado es para $b = (a + 1)/2$

$$2 \int_{(0, \infty)} e^{-r^2} r^a dm = \int_{(0, \infty)} e^{-x} x^{\frac{a-1}{2}} dx = \Gamma(b-1) = \Gamma(b). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.4.36.- Dada $f(t) = \int_{[0, \infty)} e^{-x^2} \cos 2xt dm$, demostrar que satisface $f'(t) + 2tf(t) = 0$ y que $f(t) = (1/2)\sqrt{\pi}e^{-t^2}$.

Ind. El integrando es integrable porque en módulo está acotada por e^{-x^2} que lo es por el ejercicio anterior. Ahora como $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$, tendremos por (2.4.4), que $\int_{(0, \infty)} 2xe^{-x^2} = 1$, por tanto $(e^{-x^2} \sin 2xt)' = (-2x)e^{-x^2} \sin 2xt + e^{-x^2} (2t) \cos 2xt$ es integrable por ser suma de integrables y

$$0 = \int_{[0, \infty)} (e^{-x^2} \sin 2xt)' = \int_{(0, \infty)} (-2x)e^{-x^2} \sin 2xt + e^{-x^2} (2t) \cos 2xt = f'(t) + 2tf(t).$$

Por tanto $f(t) = f(0)e^{-t^2}$ y por el resultado anterior $f(0) = \sqrt{\pi}/2$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.37.- Demostrar:

- (1) $\int_{(-\infty, \infty)} x^{2n} e^{-x^2} dm = (2n)! \sqrt{\pi}/4^n n!$.
- (2) Para $a \geq 0$, $\int_{(-\infty, \infty)} e^{-x^2} \cos ax dm = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$.
- (3) Para $p > 0$, $\int_{[0, 1]} x^{p-1} (x-1)^{-1} \log x dm = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(p+n)^2$.

Ind. (1) Por inducción derivando $x^{2n+1} e^{-x^2}$ y utilizando los ejercicios (2.4.3), (2.4.4) y (2.4.33).

- (2) $e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, por tanto $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n)!$. Por
- (1) $\sum \int |f_n| < \infty$, para $f_n = (-1)^n e^{-x^2} (ax)^{2n}/(2n)!$, por tanto $\int (\sum f_n) = \sum \int f_n$.
- (3) $1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$,

$$(x^{n+p} \log x^{-1})' = (n+p)x^{n+p-1} \log x^{-1} - x^{n+p-1},$$

por tanto $\int_{[0, 1]} x^{n+p-1} \log x^{-1} dm = 1/(p+n)^2$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.38.- Demostrar que la función $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^r \log^n x^{-1}$, para $-1 < r$ y $n \geq 0$ es Lebesgue integrable y que

$$\int_{(0, 1)} x^r \log^n x^{-1} dm = \frac{n!}{(1+r)^{n+1}}.$$

Ind. En primer lugar aunque los integrandos no son acotados, son no negativos, por lo que las integrales existen, aunque aun no sabemos que sean finitas. Las denotamos I_n . Por L'Hopital se tiene derivando n veces que

$$(10.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{r+1} \log^n x^{-1} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log^n y}{y^{r+1}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{n!}{(r+1)^n y^{r+1}} = 0.$$

Ahora para $n = 0$, como $(x^{r+1})' = (r+1)x^r$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{r+1} = 0$, $I_0 = 1/(r+1)$ y por inducción se tiene que todas las I_n son finitas, pues

$$(x^{r+1} \log^n x^{-1})' = (r+1)x^r \log^n x^{-1} - x^r n \log^{n-1} x^{-1}$$

por tanto integrando y teniendo en cuenta (10.7) —y los ejercicios (2.4.3) y (2.4.4)—

$$I_n = \frac{n}{r+1} I_{n-1} = \cdots = \frac{n!}{(r+1)^{n+1}}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.4.39.- Demostrar que la función $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} x^k$, para $k \in \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable.

Ind. Basta demostrarlo para $N \in \mathbb{N}$, pues si $k \leq N$, como $x \geq 1$, tendremos

$$0 \leq e^{-x} x^k \leq e^{-x} x^N \quad \text{por tanto} \quad 0 \leq \int_{[1, \infty)} e^{-x} x^k \leq \int_{[1, \infty)} e^{-x} x^N.$$

Denotemos con I_N la última integral y veamos por inducción que son finitas. Por (2.4.1) y (2.4.3), se tiene

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{[1, \infty)} e^{-x} = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{[1, d]} e^{-x} = - \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{[1, d]} (e^{-x})' = e^{-1}. \\ I_{N+1} &= \int_{[1, \infty)} e^{-x} x^{N+1} = \int_{[1, \infty)} [(N+1) e^{-x} x^N - (e^{-x} x^{N+1})'] = \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{[1, d]} [(N+1) e^{-x} x^N - (e^{-x} x^{N+1})'] = \\ &= (N+1) I_N + e^{-1}. \end{aligned}$$

Por inducción obtenemos que $I_N < \infty$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.40.- Sea $k \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Demostrar que

$$\begin{aligned} \int_{[0, r]} x^k dm < \infty &\Leftrightarrow -1 < k \\ \int_{[r, \infty)} x^k dm < \infty &\Leftrightarrow k < -1 \end{aligned}$$

Ind. Es una simple consecuencia de que para $0 < a < b$

$$\int_{[a, b]} x^k = \begin{cases} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, & k+1 \neq 0 \\ \log b/a, & k+1 = 0 \end{cases}, \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} a^{k+1} = \begin{cases} \infty, & k+1 < 0 \\ 1, & k+1 = 0 \\ 0, & 0 < k+1 \end{cases}$$

y de que $\lim_{b \rightarrow \infty} \log b = \infty$ y $\lim_{a \rightarrow 0^+} \log a = -\infty$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.41.- Demostrar que si $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ son Riemann-integrables y $f_n \rightarrow f$ uniformemente, entonces f es Riemann-integrable.

Ind. f_n es continua salvo en un Borel medible nulo A_n . Por tanto todas las f_n son continuas fuera del Borel medible nulo $A = \cup A_n$ y por tanto f , pues

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.4.42.- Sea $C = [a, b] \cap \mathbb{Q} = \{c_n\}$ y $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si x es irracional, $x \in C^c$; y $f(c_n) = 1/n$. Demostrar que f es Riemann-integrable y calcular su integral.

Ind. f es continua fuera del medible nulo C , pues si x es irracional $0 \leq f(z) \leq \epsilon$ para los z del entorno de x $V_x = \{c_1, \dots, c_n\}^c$ y $1/n \leq \epsilon$. \blacksquare

Ejercicio 2.4.43.- (a) Demostrar que si f tiene integral impropia de Riemann, entonces es continua c.s. (m), pero no recíprocamente. (b) Si $f \geq 0$ y es acotada en cada compacto, entonces se tiene la equivalencia.

Ind. (a) Se sigue del teorema de caracterización, pues es Riemann integrable en cada intervalo acotado y por tanto en él es continua c.s. El recíproco no es cierto para $f(x) = x$, ni siquiera para f acotada, $f = I_{(0, \infty)} - I_{(-\infty, 0)}$.

(b) Por el Teorema de caracterización f es Riemann integrable en cada intervalo $[a_n, b_n]$, para cualesquiera $a_n \rightarrow -\infty$ y $b_n \rightarrow \infty$ y f es Lebesgue medible en $[a_n, b_n]$. Además $f_n = fI_{[a_n, b_n]} \uparrow f$ y f es Lebesgue medible y $\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int f_n \uparrow \int f$, por el Teorema de la convergencia monótona. \blacksquare

Ejercicio 2.4.44.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, con integral impropia de Riemann finita, demostrar que f es Lebesgue medible e integrable y las dos integrales coinciden. Dar un contraejemplo si quitamos la no negatividad.

Ind. Consideremos la sucesión $f_n = fI_{[-n, n]}$, para la que $f_n \uparrow f$, entonces es Lebesgue medible por serlo las f_n y por el Teorema de caracterización y el Teorema de la convergencia monótona

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dm = \int f dm,$$

Si quitamos la no negatividad es falso pues por ejemplo para

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} I_{[n-1, n]},$$

existe

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

y es finita y sin embargo no es Lebesgue integrable, pues no lo es $|f|$, ya que $\int |f| dm = \sum (1/n) = \infty$. \blacksquare

Ejercicio 3.2.1.- Sean Ω_1 y Ω_2 espacios topológicos. Demostrar que:

(a) $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) \subset \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(b) Si sus topologías tienen bases numerables, $\mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2) = \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Solución.- (a) Como las proyecciones $\pi_i: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_i$ son continuas son $\mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ -medibles, por tanto dados $A \in \mathcal{B}(\Omega_1)$ y $B \in \mathcal{B}(\Omega_2)$,

$$A \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

y se sigue la inclusión de (a).

(b) Si \mathcal{C}_i es una base numerable de la topología \mathcal{T}_i de Ω_i ,

$$\mathcal{C} = \{U \times V : U \in \mathcal{C}_1, V \in \mathcal{C}_2\} \subset \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2),$$

es una base numerable de la topología producto \mathcal{T} , por tanto

$$\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\Omega_1) \otimes \mathcal{B}(\Omega_2),$$

y se sigue el resultado. ■

Ejercicio 3.2.4.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f_x es Borel medible para cada x y f^y continua para cada y . Demostrar que f es Borel medible.

Ind.- Basta observar que la sucesión de funciones medibles

$$f_n(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i/n, y) I_{\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}(x),$$

verifica $f_n \rightarrow f$, pues $f_n(x, y) = f(x_n, y)$, para un $x_n = i/n$ tal que $|x_n - x| \leq 1/n$.

■

Ejercicio 3.3.1.- Demostrar que: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+k})$ y que la medida de Lebesgue m_{n+k} es la medida producto de las medidas de Lebesgue m_n y m_k .

Indicación.- Lo primero se sigue del ejercicio (3.2.1). Para el resto, m_{n+k} es la única medida en los Borelianos de \mathbb{R}^{n+k} , que sobre el producto de $n+k$ semiintervalos es el producto de sus longitudes y la medida producto de m_n y m_k verifica esta propiedad. ■

Ejercicio 3.3.2.- Demostrar que para cada $r > 0$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es medible la función de \mathbb{R}^n , $f(x) = m[A \cap B[x, r]]$ y demostrar que $\int f dm = r^n \cdot m(A) \cdot m[B[0, 1]]$.

Ind.- Es consecuencia de (3.3.6), pág.129, pues $A \cap B[x, r]$ es la sección por x del medible de \mathbb{R}^{2n} ,

$$E = \mathbb{R}^n \times A \cap \{(z, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \|z - y\| \leq r\}$$

(obsérvese que el conjunto de la derecha es cerrado). Ahora $m[E^y] = m[B[y, r]]I_A = r^n m[B[0, 1]]I_A$ y el resultado se sigue del mismo teorema. ■

Ejercicio 3.4.2.- Sea $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrable. Demostrar que $g(x) = \int_{(x,1)} \frac{f(y)}{y} dm$ es medible, integrable y que $\int_{(0,1)} g dm = \int_{(0,1)} f dm$.

Indicación.- Consideremos $E = \{(x, y) \in (0, 1)^2 : x \leq y\}$ y $\mu_1 = \mu_2 = m$ en $(0, 1)$, entonces $h(x, y) = I_E f(y)/y$ es medible y

$$\int \left(\int |h^y| d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int |f(y)/y| \mu_1(E_y) d\mu_2 = \int |f| dm < \infty$$

y aplicando Fubini, $g(x) = \int h_x dm$ es medible y $\int g d\mu_1 = \int h dm_2 = \int f d\mu_2$. ■

Ejercicio 3.6.1.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la gráfica de f es medible

$$E = \{(x, y) \in \Omega \times [0, \infty] : y = f(x)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),$$

y que $\mu \times m(E) = 0$.

Ind. Consideremos las funciones medibles $\pi_2(x, y) = y$ y $h(x, y) = f(x)$, entonces $E = \{h = \pi_2\}$ y como $m(E_x) = 0$, $\mu \times m(E) = 0$. ■

Ejercicio 3.6.2.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y no negativa. Demostrar que la función $F(y) = \mu\{f^{-1}(y)\}$ es medible y $F = 0$ c.s.

Ind. En los términos del ejercicio anterior $F(y) = \mu(E^y)$ y $0 = \mu \times m(E) = \int F(y) dm$. ■

Ejercicio 3.6.4.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita, $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ medible y $0 < p < \infty$. Demostrar que

$$\int f^p d\mu = \int_{[0, \infty)} p t^{p-1} \mu\{f > t\} dt,$$

y que si $\mu\{f > t\} \leq e^{-t}$, entonces $\int f^p d\mu \leq \Pi(p)$.

Ind. Por el Teorema de Fubini, para la función medible $h(y) = \mu\{f^p > y\}$ y el Teorema de cambio de variable, ejercicio 2.4.29, para $F(t) = t^p: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \int f^p d\mu &= \int_{[0, \infty)} h(y) dm = \int_{[0, \infty)} h[F(t)] F'(t) dt \\ &= \int_{[0, \infty)} p t^{p-1} \mu\{f > t\} dt. \end{aligned}$$

Para lo último obsérvese que $\int_0^\infty (t^p e^{-t})' dt = 0$. ■

Ejercicio 3.6.5.- Demostrar que para una rotación o una traslación⁶ $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el centro de masas $C(B)$ de un boreliano B satisface $T[C(B)] = C[T(B)]$.

Ind. Una traslación o una rotación T , conserva las medidas de Hausdorff, $(T_*(H_k) = H_k)$, por tanto

$$x_i[C(T(B))] = \frac{\int_{T(B)} x_i dH_k}{H_k[T(B)]} = \frac{\int_B x_i \circ T dH_k}{H_k(B)},$$

⁶Debemos observar que este resultado no es cierto para isomorfismos en general, salvo que $\dim_H(B) = n$ (ver el ej. (5.5.7), pues sólo sabemos que $H_k[T(B)] = J(T)H_k[B]$, para $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

y si $T(x) = x + a$ es una traslación, $x_i \circ T = x_i + a_i$ y $x_i[C(T(B))] = x_i[C(B)] + a_i = x_i[T(C(B))]$; y si $T(p) = (\sum a_{ij} p_j)$ es una rotación, $x_i \circ T = \sum a_{ij} x_j$ y $x_i[C(T(B))] = \sum a_{ij} x_j[C(B)]$, por tanto $C[T(B)] = T[C(B)]$. ■

Ejercicio 3.6.7.- Dado el polinomio de \mathbb{R}^n , $p(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$, $0 \leq a_i \in \mathbb{N}$, demostrar que para $b_i = (a_i + 1)/2$ y σ la medida en la esfera unidad, definida en (3.6.8)

$$\int_{S_{n-1}} p(x) d\sigma = \begin{cases} \frac{2 \prod_{i=1}^n \Gamma(b_i)}{\Gamma(\sum b_i)}, & \text{si todo } a_i \text{ es par;} \\ 0, & \text{si } \exists i : a_i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Indicación.- Por el ejercicio (2.4.35), el teorema de Fubini y el teorema (3.6.9)

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \Gamma(b_i) &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} x^{a_1} dm_1 \right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} x^{a_n} dm_1 \right) \\ &= \int e^{-\sum x_i^2} p(x) dm = \int_{(0,\infty)} \int_S e^{-r^2} p(ry) r^{n-1} d\sigma dm \\ &= \left(\int_S p(y) d\sigma \right) \left(\int_{(0,\infty)} e^{-r^2} r^{\sum a_i + n - 1} dm \right) \\ &= \left(\int_S p(y) d\sigma \right) \frac{1}{2} \Gamma(\sum b_i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos Tema IV

Ejercicio 4.2.4.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio medible con una carga. Demostrar:

- g es λ -integrable si y sólo si es $|\lambda|$ -integrable.
- Si g es λ -integrable, $|\int g d\lambda| \leq \int |g| d|\lambda|$.
- Existe una medida μ y una función medible f , con integral respecto de μ , tal que para todo $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) = \int_E f d\mu$.

Ind. (c) Considerar una descomposición de Hahn, P, N , $f = I_P - I_N$ y $\mu = |\lambda|$.
■

Ejercicio 4.2.9.- Sea λ una carga en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que

$$|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| : E_i \in \mathcal{A}, \text{ disjuntos, } \cup E_i = A \right\},$$

¿Es cierto el resultado si ponemos $\sum_{i=1}^{\infty}$ en lugar de sumas finitas?.

Ind. Sean $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ medibles y disjuntos, tales que $\cup E_i = A$ entonces

$$\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda|(E_i) = |\lambda|(A),$$

por tanto $|\lambda|(A)$ es una cota superior para el supremo. Veamos que se alcanza, para ello sea P, N una descomposición de Hahn

$$|\lambda|(A) = \lambda^+(A) + \lambda^-(A) = |\lambda(A \cap P)| + |\lambda(A \cap N)|,$$

y el resultado se sigue pues $A \cap P, A \cap N$ es una partición de A . ■

Ejercicio 4.3.1.- Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible con una medida compleja $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i\lambda_2^+ - i\lambda_2^-$, demostrar que $\lambda_i^\pm \leq |\lambda| \leq \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-$.

Ind. $\lambda_i^\pm \leq \lambda_i^+ + \lambda_i^- = |\lambda_i| \leq |\lambda| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = \lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-$. ■

Ejercicio 4.4.2.- Sean μ y ν medidas σ -finitas, con $\nu \ll \mu$ y sea $\lambda = \mu + \nu$. Demostrar que $\nu \ll \lambda$ y si $f = d\nu/d\lambda$, entonces $0 \leq f < 1$ c.s. (μ) y que $d\nu/d\mu = f/(1-f)$.

Ind. Existe $g = d\nu/d\mu$, con $0 \leq g < \infty$, entonces $g + 1 = d\lambda/d\mu$ y $f(g+1) = d\nu/d\mu$, por tanto $g = f(g+1)$ c.s. (μ) y $0 \leq f = g/(g+1) < 1$ c.s. (μ) y $g = f/(1-f)$ c.s. (μ). ■

Ejercicio 4.4.3.- Sean λ y μ medidas σ -finitas en (Ω, \mathcal{A}) , demostrar que son equivalentes las condiciones:

(a) $\mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$.

(b) $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\} = \{A \in \mathcal{A} : \lambda(A) = 0\}$.

(c) Existe una función medible $g: \Omega \rightarrow (0, \infty)$, tal que $\lambda(A) = \int_A g d\mu$.

Ind. (a) \Leftrightarrow (b) es trivial.

(a) \Rightarrow (c) Por el Teorema de Radon-Nikodym $0 \leq d\lambda/d\mu < \infty$ y por el ejercicio anterior

$$1 = \frac{d\mu}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu},$$

por tanto $d\lambda/d\mu$ es invertible c.s. y por tanto positiva c.s.

(c) \Rightarrow (a) Como existe g^{-1} y es no negativa tiene integral y si consideramos $\nu(A) = \int_A g^{-1} d\lambda$, tendremos que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} = g^{-1}g = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu = \mu. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 4.4.4.- Demostrar que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finita, existe una medida finita λ , que tiene los mismos conjuntos nulos que μ .

Ind. Sea A_n una partición de Ω , con $0 < \mu(A_n) < \infty$ (observemos que los de medida nula los podemos unir a cualquier otro A_n de medida positiva) y sea

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} I_{A_n},$$

entonces el resultado se sigue del ejercicio anterior para $\lambda(A) = \int_A g d\mu$. ■

Ejercicio 4.4.5.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrable. Demostrar que si S es un cerrado de \mathbb{C} , tal que para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$$

entonces $f(x) \in S$ c.s.

Ind. Hay que demostrar que $\mu[f^{-1}(S^c)] = 0$, ahora bien como S^c es abierto es una unión numerable de discos cerrados y basta demostrar que para cualquiera de ellos $D[z, r]$, $\mu[f^{-1}(D[z, r])] = 0$. Supongamos que no, que $E = f^{-1}(D[z, r])$, tiene $\mu(E) > 0$, entonces llegamos a un absurdo, pues

$$r < \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu - z \right| = \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E (f - z) d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - z| d\mu \leq r. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 4.4.6.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que $\{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\}$, es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

Ind. Veamos que su complementario es abierto. Sea $\mathcal{M}_\mu = \{\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{R}) : \lambda \ll \mu\}$ y $\lambda \in \mathcal{M} - \mathcal{M}_\mu$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$, tal que $\mu(A) = 0$ y $\lambda(A) \neq 0$, entonces para $0 < r \leq |\lambda(A)|$ y $\|\nu - \lambda\| < r$, $\nu \in \mathcal{M} - \mathcal{M}_\mu$, pues

$$|\nu(A) - \lambda(A)| \leq \|\nu - \lambda\| < r,$$

y por tanto $\nu(A) \neq 0$. \blacksquare

Ejercicio 4.4.7.- Sean $\nu_1 \ll \mu_1$ en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $\nu_2 \ll \mu_2$ en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, medidas σ -finitas. Demostrar que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y que

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y).$$

Solución.- Sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) = \mu_1 \times \mu_2(E) = 0$, entonces como $\mu(E) = \int \mu_2(E_x) d\mu_1$, $\mu_2(E_x) = 0$ c.s. μ_1 , por tanto c.s. ν_1 y $\nu_2(E_x) = 0$ c.s. ν_1 , por tanto $\nu(E) = \nu_1 \times \nu_2(E) = \int \nu_2(E_x) d\nu_1 = 0$.

Ahora si $f = d\nu_1/d\mu_1$, $g = d\nu_2/d\mu_2$ y $h(x, y) = f(x)g(y)$, entonces como $h \geq 0$, tiene integral y

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \int \nu_2(E_x) d\nu_1 = \int \left(\int_{E_x} g d\mu_2 \right) d\nu_1 = \int \left(\int_{E_x} g d\mu_2 \right) f d\mu_1 \\ &= \int \left(\int I_{E_x} h_x d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_E h d\mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 4.5.1.- Demostrar que si λ_1 y λ_2 son complejas y $\lambda_1 \perp \lambda_2$, entonces $|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$.

Ind. Existe un medible A tal que para cada medible B , $\lambda_1(B) = \lambda_1(B \cap A)$ y $\lambda_2(B) = \lambda_2(B \cap A^c)$, además

$$\begin{aligned} |\lambda_1 + \lambda_2|(B) &= |\lambda_1 + \lambda_2|(B \cap A) + |\lambda_1 + \lambda_2|(B \cap A^c) \\ &= |\lambda_1|(B \cap A) + |\lambda_2|(B \cap A^c) = |\lambda_1|(B) + |\lambda_2|(B), \end{aligned}$$

pues si $A_i \subset B \cap A$, $|\lambda_1(A_i) + \lambda_2(A_i)| = |\lambda_1(A_i)|$ y si $A_i \subset B \cap A^c$, $|\lambda_1(A_i) + \lambda_2(A_i)| = |\lambda_2(A_i)|$. Térmelo el lector. \blacksquare

Ejercicios resueltos Tema V

Ejercicio 5.5.1.- Calcular el área y el volumen de la elipse y elipsoide respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ind. Consideremos la aplicación lineal

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix},$$

que para $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, y $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $T(B) = E$, por tanto

$$m[E] = m[T(B)] = |\det T| m[B] = ab\pi. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 5.5.2.- Una bicicleta de longitud L hace un recorrido en el que nunca gira a la derecha. Si el ángulo total girado es φ , demostrar que el área que barre es⁷ $\varphi L^2/2$.

Demostración. Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano, con el origen en el punto del que parte y siendo el semieje x positivo la dirección en la que sale. Parametricemos la curva trayectoria $(x(t), y(t))$, por el tiempo $t \in [0, T]$ y tal que $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$ y sea $\theta: [0, T] \rightarrow [0, \varphi]$ el ángulo de la pendiente a la curva en cada punto $(x(t), y(t))$, por tanto tal que $x' \sin \theta - y' \cos \theta = 0$, el cual es creciente por la hipótesis.

La región barrida es

$$B = F[[0, T] \times [0, L]], \quad F(t, r) = (x(t) + r \cos \theta(t), y(t) + r \sin \theta(t)),$$

siendo $|DF| = r\theta'$, por tanto

$$m[B] = \int_0^T \int_0^L r\theta'(t) dr dt = L^2 \varphi/2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 5.5.3.- Curva de Agnesi⁸: Dada una circunferencia de radio $a/2$ tangente al eje x y centro en el eje y y dada la tangente paralela al eje x en el punto $(0, a)$, se considera el lugar geométrico de los puntos del plano (x, y) , obtenidos de la siguiente forma: Se traza la recta que une el origen con el punto de la tangente de abscisa x , es decir (x, a) y se considera la ordenada y del punto de corte de esta recta con la circunferencia.

Demostrar que el área subyacente a la curva es 4 veces el área del círculo de la construcción. Que la curva tiene dos puntos simétricos en los que pasa de ser convexa a cóncava y las verticales en esos puntos dividen el área subyacente

⁷En particular si la bicicleta vuelve al punto de partida, el área que barre es constante e igual a la del círculo de radio L .

⁸Ver comentarios en la pág.236

en tres regiones de igual área y que los pies de esas verticales en el eje x definen con el punto máximo $(0, a)$ de la curva un triángulo equilátero. Encontrar el centro de masa de la región entre la curva y el eje x .

Demostrar que la longitud de la curva es infinito. Que el área de la superficie de revolución que genera al girarla respecto del eje x es finita y que su volumen es 2 veces el del toro que genera el círculo.

Ind. Se tiene por cálculo inmediato que

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}, \quad y' = -2a^3 \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}, \quad y'' = 2a^3 \frac{x^2(x^2 + a^2)2x - (x^2 + a^2)^2}{(x^2 + a^2)^4}.$$

El área es para $\tan \theta = t = x/a$, para la que $(1 + t^2)d\theta = dt = dx/a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = a^2 \pi.$$

La longitud de la curva es, para $\sigma(x) = (x, y(x))$, $H_1(\sigma[\mathbb{R}]) = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{1 + y'(x)^2} dm_1 = \infty$, pues el integrando es ≥ 1 .

Ahora y'' es $>, =, <$ que 0 si $4x^2$ es respectivamente $>, =, <$ que $x^2 + a^2$, es decir $3x^2$ es $>, =, <$ que a^2 , por lo tanto $y''(p) = y''(-p) = 0$, para $p = a/\sqrt{3}$, $y'' < 0$ en $(-p, p)$, por tanto en este intervalo y es cóncava e y' es decreciente siendo $y'(-p) = \sqrt{3}/2$, $y'(p) = -\sqrt{3}/2$; $y'' > 0$ en los intervalos $(-\infty, -p)$ y (p, ∞) , en los que y es convexa e y' es creciente, siendo $\lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0$, por tanto

$$\sqrt{1 + y'^2(x)} \leq \sqrt{1 + y'^2(p)} = \sqrt{7}/2.$$

Se sigue que el área de la superficie de revolución es por (5.5.21)

$$\begin{aligned} \gamma_2 H_2(\mathcal{S}) &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dm_x = 2a\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{a^2}{x^2 + a^2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dm_x \\ &\leq \sqrt{7}a\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{a^2}{x^2 + a^2} dm_x = \sqrt{7}a^2\pi^2 < \infty. \end{aligned}$$

El volumen de revolución es por el teorema de la medida producto y teniendo en cuenta por el cambio anterior que $\cos^2 \theta = 1/(1 + t^2)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi y^2(x) dx = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^3}{(1 + t^2)^2} dt = \pi a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi^2 a^3}{2} = V,$$

mientras que el volumen del toro es $\pi^2 a^3/4$, que por el Teorema de Pappus es el producto del área del círculo, $\pi a^2/4$, por la longitud, πa , de la circunferencia que genera el centroide, $(0, a/2)$, del círculo.

Ahora por el Teorema de Pappus podemos calcular la altura r del centroide de la región plana, de área $A = a^2\pi$, que genera el volumen V que acabamos de calcular, pues $V = (2\pi r)A$ y $r = a/4$. ■

Ejercicio 5.5.6.- (a) Demostrar que el área de la esfera de radio r es $4\pi r^2$.
(b) Demostrar que el área del casquete esférico de radio r y altura h es $2\pi r h$.

Ind. Basta demostrar (b). La proyección del casquete es el círculo de radio $k = \sqrt{2rh - h^2}$, pues $k^2 + (r - h)^2 = r^2$, y su área es para $z(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ y $U = \{x^2 + y^2 \leq k^2\}$

$$\int_U \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = r \int_U \frac{dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

y por el teorema de cambio de variable para $F = (f_1, f_2): V = (0, k) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, como $F(V) = U = \{x^2 + y^2 \leq k^2\}$ y $J(DF_{(\rho, \theta)}) = |f_{1\rho}f_{2\theta} - f_{1\theta}f_{2\rho}| = \rho$,

$$r \int_{F(V)} \frac{dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r \int_V \frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = -2\pi r \left[\sqrt{r^2 - \rho^2} \right]_0^k = 2\pi r h. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 5.5.7.- Demostrar que si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, el centro de masas $C(B)$ de un boreliano B , con $0 < m(B) < \infty$, satisface $C[T(B)] = T[C(B)]$.

Ind. Es similar al ejercicio (3.6.5), teniendo en cuenta que $m[T(B)] = |\det T| m[B]$ y por tanto $T_* m = |\det T|^{-1} m$, por tanto

$$x_i[C(T(B))] = \frac{\int_{T(B)} x_i dm}{m[T(B)]} = \frac{\int_{T(B)} x_i d(T_* m)}{m[B]} = \frac{\int_B x_i \circ T dm}{m(B)}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 5.5.8.- Dado en el plano un triángulo T_2 de vértices ABC , consideremos los tres conjuntos: T_2 (la envolvente convexa de los vértices), $T_1 = \partial T_2$ formado por los tres lados y $T_0 = \{A, B, C\}$ formado por los tres vértices. Calcular el centro de masas de cada uno. ¿coinciden?

Ind. Consideremos el isomorfismo del plano $(1, 0) \rightarrow B - A$ y $(0, 1) \rightarrow C - A$ y la traslación $x \rightarrow x + A$, la composición L de ambas lleva el triángulo T' de vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ en T_2 . Ahora por los ejercicios (3.6.5) y (5.5.7), basta encontrar $C(T')$, siendo su abscisa

$$\frac{\int_{T'} x dm_2}{m_2(T')} = 2 \int_{[0,1]} x(1-x) dm_1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

del mismo modo se calcula la coordenada y , siendo $C(T') = (1/3, 1/3)$, y dashaciendo el cambio,

$$C(T_2) = C(L(T')) = L(C(T')) = \frac{B-A}{3} + \frac{C-A}{3} + A = \frac{A+B+C}{3}$$

Calculemos ahora el centro de masa de un segmento PQ de extremos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$, para x_1 y x_2 las coordenadas, $\sigma(t) = tQ + (1-t)P$ y $|\sigma'(t)| = |Q - P|$

$$\frac{\int_{PQ} x_i dH_1}{H_1(PQ)} = \frac{\int_0^1 x_i(\sigma(t)) |Q - P| dH_1}{|Q - P|} = \int_0^1 (t(q_i - p_i) + p_i) dt = \frac{p_i + q_i}{2},$$

es decir que el centro de masa de PQ es $(P + Q)/2$.

Veamos ahora el centro de masa de T_1 el cual es unión de los segmentos AB, BC y CA , con $H_1(A) = H_1(B) = H_1(C) = 0$, por tanto se sigue del ejercicio (3.6.6), pág.150, que para $|A - C| = c, |A - B| = d$ y $|B - C| = e$

$$C(T_1) = \frac{c}{c+d+e} \frac{A+C}{2} + \frac{d}{c+d+e} \frac{A+B}{2} + \frac{e}{c+d+e} \frac{B+C}{2}.$$

el cual es el incentro del triángulo formado por los puntos medios P, Q, R de los lados de nuestro triángulo, pues

$$C(T_1) = \frac{c}{c+d+e} P + \frac{d}{c+d+e} Q + \frac{e}{c+d+e} R$$

$$\begin{aligned} C(T_1) &= P + \frac{d}{c+d+e}(Q-P) + \frac{e}{c+d+e}(R-P) \\ &= P + \frac{de}{c+d+e} \left(\frac{Q-P}{e} + \frac{R-P}{d} \right), \end{aligned}$$

es el incentro de PQR , pues $(Q-P)/e$ y $(R-P)/d$ son de igual módulo, $1/2$, por tanto $C(T_1)$ está en la bisectriz del ángulo en P y de modo análogo está en las otras dos bisectrices.

Por último el de T_0 también es el baricentro, pues

$$\frac{\int_{T_0} x_i dH_0}{H_0(T_0)} = \frac{x_i(A) + x_i(B) + x_i(C)}{3} = x_i \left(\frac{A+B+C}{3} \right).$$

En definitiva $C(T_2) = C(T_0) = (A+B+C)/3$ y $C(T_1)$ es distinto. ■

Ejercicio 5.5.9.- Demostrar que para $t, s > -1$

$$\Pi(t)\Pi(s) = \Pi(t+s+1) \int_{(0,1)} x^t (1-x)^s dm.$$

Indicación.- Por Fubini (3.4.3) y el Teorema de cambio de variable (5.5.11), para $F: A = (0, \infty)^2 \rightarrow B = (0, 1) \times (0, \infty)$, $F(x, y) = (x/(x+y), x+y) = (u, v)$, $J(DF) = 1/(x+y)$

$$\begin{aligned} \Pi(t)\Pi(s) &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty)} x^t e^{-(x+y)} y^s dm dm \\ &= \int_A x^t y^s e^{-(x+y)} dm_2 \\ &= \int_A \frac{x^t y^s}{(x+y)^{t+s}} (x+y)^{t+s} e^{-(x+y)} dm_2 \\ &= \int_B u^t (1-u)^s v^{t+s+1} e^{-v} dm_2 \\ &= \Pi(t+s+1) \int_{(0,1)} x^t (1-x)^s dm. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 5.5.10.- Dado $\alpha > 0$, llamaremos α -integral fraccional de una función continua $f \rightarrow [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, a la función

$$I_\alpha f(x) = \frac{\int_{[0,x]} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dm}{\Gamma[\alpha]}. \quad (\text{Sol.})$$

Demostrar que para $\alpha, \beta > 0$, $I_\alpha \circ I_\beta = I_{\alpha+\beta}$.

Indicación.- Por el ejercicio anterior (5.5.9) y

$$\begin{aligned}
 \frac{I_{\alpha+\beta}f(x)}{I_{\alpha}(I_{\beta}f)(x)} &= \frac{\Gamma[\alpha]\Gamma[\beta] \int_{[0,x]}(x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t) dm}{\Gamma[\alpha+\beta] \int_{[0,x]}(x-t)^{\alpha-1} \left(\int_{[0,t]}(t-s)^{\beta-1}f(s) dm \right) dm} \\
 &= \frac{\left(\int_{(0,1)} x^t(1-x)^s dm \right) \left(\int_{[0,x]}(x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t) dm \right)}{\int_{[0,x]}(x-t)^{\alpha-1} \left(\int_{[0,t]}(t-s)^{\beta-1}f(s) dm \right) dm} \\
 &= \frac{\left(\int_{(0,1)} x^t(1-x)^s dm \right) \left(\int_{[0,x]}(x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t) dm \right)}{\int_E(x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}f(s) dm_2} \\
 &= \frac{\left(\int_{(0,1)} x^t(1-x)^s dm \right) \left(\int_{[0,x]}(x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t) dm \right)}{\int_{[0,x]} f(s) \left(\int_{[s,x]}(x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dm \right) dm} \\
 &= \frac{\left(\int_{(0,1)} x^t(1-x)^s dm \right) \left(\int_{[0,x]}(x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t) dm \right)}{\int_{[0,x]} f(s) \left(\int_{[0,1]} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}(x-s)^{\alpha+\beta-1} dm \right) dm}
 \end{aligned}$$

para $E = \{(t, s) \in [0, x]^2 : s \leq t\}$ y el cambio de variable $u = (x-t)/(x-s)$. ■

Ejercicios resueltos Tema VI

Ejercicio 6.2.2.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Demostrar que $\mu_f(B) = \mu[f^{-1}(B)]$ es una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, y que si $f \in L_\infty$, entonces

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \mu_f[B(z, \epsilon)] > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

es un compacto, donde $B(z, \epsilon) = \{z' : |z' - z| < \epsilon\}$ y que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|z| : z \in K\}.$$

Solución.- Veamos que K^c es abierto. Sea $z \in K^c$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu_f[B(z, \epsilon)] = 0$, pero entonces $B(z, \epsilon) \subset K^c$, pues la bola es abierta y dado $z' \in B(z, \epsilon)$, existe un $\delta > 0$, tal que $B(z', \delta) \subset B(z, \epsilon)$, por tanto $\mu_f[B(z', \delta)] = 0$ y $z' \in K^c$. Ahora veamos que K es acotado, para ello veamos que si $z \in K$, $|z| \leq \|f\|_\infty$ ó equivalentemente que si $\|f\|_\infty < |z|$, entonces $z \notin K$, lo cual es obvio pues z está en el abierto $B[0, \|f\|_\infty]^c$ y por tanto existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$B(z, \epsilon) \subset B[0, \|f\|_\infty]^c \Rightarrow \mu_f(B(z, \epsilon)) \leq \mu_f(B[0, \|f\|_\infty]^c) = \mu(|f| > \|f\|_\infty) = 0,$$

(por ser el espacio σ -finito), por tanto $z \in K^c$.

Ahora veamos que el supremo es $\|f\|_\infty$. Para ello hemos visto la desigualdad " \leq ", veamos la otra, para lo cual basta demostrar que para todo $\epsilon > 0$ hay puntos de K en la rosquilla compacta

$$C = \{z : \|f\|_\infty - \epsilon \leq |z| \leq \|f\|_\infty\}.$$

En caso contrario para cada $z \in C$ existiría un $\epsilon_z > 0$, tal que $\mu_f(B(z, \epsilon_z)) = 0$ y por compacidad C se rellena con una colección finita de estas bolas y $\mu_f(C) = 0$, por tanto

$$\mu\{|f| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\} = \mu_f\{|z| \geq \|f\|_\infty - \epsilon\} = 0$$

lo cual es absurdo. ■

Ejercicio 6.2.3.- Demostrar que si $0 < r < p < s \leq \infty$, entonces $L_r \cap L_s \subset L_p \subset L_r + L_s$.

Solución.- Sea $A = \{|f| \leq 1\}$, entonces si $f \in L_r \cap L_s$, y $s < \infty$

$$\begin{aligned} \int |f|^p d\mu &= \int_{A^c} |f|^p d\mu + \int_A |f|^p d\mu \\ &\leq \int_{A^c} |f|^s d\mu + \int_A |f|^r d\mu \leq \int |f|^s d\mu + \int |f|^r d\mu < \infty, \end{aligned}$$

y si $s = \infty$, $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.s. (ver ejercicio (6.1.2)) y $\int_{A^c} |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \mu(A^c) < \infty$, pues $\mu(A^c) < \infty$ por la desigualdad de Tchebycheff. Para la segunda inclusión, $f = I_A f + I_{A^c} f \in L_p$, $I_A f \in L_s$, $I_{A^c} f \in L_r$. ■

Ejercicio 6.2.4.- Demostrar que si $0 < r < s < \infty$ y $f \in L_r \cap L_s$, entonces $f \in L_p$, para todo $p \in [r, s]$; que la función

$$\phi(p) = \log \int |f|^p d\mu,$$

es convexa en $[r, s]$ y que $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$.

Solución.- Sean $r \leq a < b \leq s$ y $t \in [0, 1]$, entonces basta demostrar que

$$e^{\phi[ta+(1-t)b]} \leq e^{t\phi(a)+(1-t)\phi(b)},$$

es decir que, para $c = ta + (1-t)b$,

$$\int |f|^c d\mu \leq \left(\int |f|^a d\mu \right)^t \left(\int |f|^b d\mu \right)^{1-t},$$

y esto es consecuencia de la *Desigualdad de Holder*, pues para $p = 1/t$ y $q = 1/(1-t)$, obviamente conjugados y las funciones $g^p = |f|^a$, $h^q = |f|^b$, tendremos que $g \in L_p$, $h \in L_q$, y

$$gh = |f|^{\frac{a}{p} + \frac{b}{q}} = |f|^{ta+(1-t)b} = |f|^c,$$

además tomando ahora $a = r$ y $b = s$ y un valor intermedio $c = tr + (1-t)s$, tendremos que

$$\begin{aligned} \|f\|_c &= \left(\int |f|^c d\mu \right)^{1/c} \leq \left(\int |f|^r d\mu \right)^{t/c} \left(\int |f|^s d\mu \right)^{(1-t)/c} \\ &= \|f\|_r^{tr/c} \|f\|_s^{(1-t)s/c} \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 6.2.5.- Demostrar que un espacio normado \mathcal{E} es completo sii para cada sucesión $x_n \in \mathcal{E}$

$$\sum \|x_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum x_n \quad \text{es convergente.}$$

Solución.- \Rightarrow) Sea $\sum \|x_n\| < \infty$, entonces $v_n = \sum_{i=1}^n x_i$ es de Cauchy y tiene límite por ser el espacio completo.

\Leftarrow) Sea v_n de Cauchy e y_n una subsucesión suya tal que $\|y_{n+1} - y_n\| \leq 2^{-n}$, entonces para $x_n = y_{n+1} - y_n$, $\sum \|x_n\|$ es convergente, por tanto también es convergente $\sum x_n = x$ y como $y_n = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i$, tiene límite así como v_n . \blacksquare

Ejercicio 6.2.7.- Demostrar que si $f, g \in \mathcal{L}_p$ para $0 < p < 1$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Ind. Por la desigualdad $(a+b)^r < a^r + b^r$, para $0 < r < 1$ y $a, b > 0$ y por la concavidad de x^p

$$\frac{\int |f+g|^p d\mu}{2} \leq \frac{\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu}{2} \leq \left(\frac{(\int |f|^p)^{1/p} + (\int |g|^p)^{1/p}}{2} \right)^p. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6.2.8.- Demostrar que si $f \in L_p$ para algún $0 < p < \infty$, entonces $\|f\|_r \rightarrow \|f\|_\infty$, cuando $r \rightarrow \infty$.

Solución.- Si $f \in L_p \cap L_\infty$, entonces

$$\{|f| > 0\} \text{ es } \sigma\text{-finito y } \{|f| > \|f\|_\infty\} \text{ es loc. nulo,}$$

por tanto su intersección $A = \{|f| > \|f\|_\infty\}$ es nulo y para $r \geq p$

$$\begin{aligned} \|f\|_r &= \left(\int |f|^p |f|^{r-p} d\mu \right)^{1/r} = \left(\int_{A^c} |f|^p |f|^{r-p} d\mu \right)^{1/r} \\ &\leq \|f\|_\infty^{(r-p)/r} \left(\int_{A^c} |f|^p d\mu \right)^{1/r} = \|f\|_\infty^{(r-p)/r} \|f\|_p^{p/r} < \infty, \end{aligned}$$

y haciendo $r \rightarrow \infty$ se sigue que $\limsup \|f\|_r \leq \|f\|_\infty$. Ahora para cada $\epsilon > 0$, $B = \{|f| > \|f\|_\infty - \epsilon\}$ no es localmente nulo, por tanto $\mu(B) > 0$ y

$$\mu(B)^{1/r} (\|f\|_\infty - \epsilon) \leq \left(\int_B |f|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \|f\|_r,$$

por lo que $\mu(B) < \infty$ y haciendo $r \rightarrow \infty$, tendremos que

$$\|f\|_\infty - \epsilon \leq \liminf \|f\|_r,$$

y el resultado se sigue. Si por el contrario $\|f\|_\infty = \infty$, entonces para todo n , $\mu\{|f| > n\} > 0$ y

$$\mu\{|f| > n\}^{1/r} n \leq \left(\int_{\{|f| > n\}} |f|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \|f\|_r,$$

y haciendo $r \rightarrow \infty$, tendremos que $n \leq \liminf \|f\|_r$ y el resultado se sigue. ■

Ejercicio 6.2.9.- Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $0 < r < s < \infty$, entonces $L_s \subset L_r$ y que para $f \in L_s$

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \mu(\Omega)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}.$$

Ind. Sea $f \in L_s$, entonces para p y q conjugados, con $1 < p = s/r$, $f^r \in L_p$ y como $1 \in L_q$, tendremos por la *Desigualdad de Holder* que $f^r \cdot 1 = f^r \in L_1$, es decir $f \in L_r$ y además

$$\int |f|^r \leq \|f^r\|_p \cdot \|1\|_q = \left(\int |f|^{rp} d\mu \right)^{1/p} \mu(\Omega)^{1/q},$$

el resto es simple. Otra forma es utilizando la desigualdad de Holder generalizada ej.(6.2.6), tomando t tal que $1/s + 1/t = 1/r$, $f_1 = f$ y $f_2 = 1$, por tanto $\|f\|_r \leq \|f\|_s \|1\|_t = \|f\|_s \mu(\Omega)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}$. ■

Ejercicio 6.2.10.- Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y f_n, f son medibles, entonces:

(a) Si $f_n \rightarrow f$ c.s., entonces $f_n \rightarrow f$ en medida (es decir que para todo $\epsilon > 0$, $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \rightarrow 0$).

(b) Si $f_n \rightarrow f$ en L_p (con $1 \leq p < \infty$), entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Solución.- (a) Observemos que $f_n(x)$ no converge a $f(x)$ sii existe un $\epsilon > 0$, tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, hay un $n \geq N$, para el que $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$, por lo tanto

$$0 = \mu\{f_n \rightarrow f\} = \mu\{\cup_{\epsilon > 0} \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} |f_n - f| > \epsilon\},$$

y para cada $\epsilon > 0$ y $A_n(\epsilon) = \{|f_n - f| > \epsilon\}$, como la medida es finita se tiene (ver ejercicio 1.3.5)

$$\limsup \mu\{A_n(\epsilon)\} \leq \mu\{\limsup A_n(\epsilon)\} = 0 \Rightarrow \lim \mu\{A_n(\epsilon)\} = 0.$$

(b) Para $p < \infty$, por la desigualdad de Tchebycheff

$$\mu\{A_n(\epsilon)\} \leq \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\epsilon^p} \rightarrow 0,$$

y para $p = \infty$, dado el $\epsilon > 0$, basta considerar N tal que para $n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$, pues

$$\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \leq \mu\{|f_n - f| > \|f_n - f\|_\infty\} = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6.2.11.- Demostrar la **Desigualdad de Jensen**, es decir que si $\mu(\Omega) = 1$, $f: \Omega \rightarrow (a, b)$ es medible e integrable y $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces $\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu$.

Solución.- Las funciones convexas tienen la propiedad de que para todo $x_0 \in (a, b)$ existe una función afín, $h(x) = px + c$, tal que $h(x) \leq \varphi(x)$ y $h(x_0) = \varphi(x_0)$. Tomemos $x_0 = \int f d\mu$, y veamos en primer lugar que $x_0 \in (a, b)$, para ello observemos que para $a = -\infty$, como f es integrable, $a < x_0$, por lo que también si $b = \infty$ es $x_0 < b$. En el caso finito, pongamos $b < \infty$, si fuera $x_0 = b$, como $f < b$, $b - f > 0$ y tiene integral nula, lo cual implicaría que $b - f = 0$ c.s., lo cual es absurdo. Ahora el resultado es evidente pues tomando la función h correspondiente tendremos que

$$\begin{aligned} \varphi\left(\int f d\mu\right) &= \varphi(x_0) = h(x_0) = px_0 + c = p\left(\int f d\mu\right) + c \\ &= \int (pf + c) d\mu = \int h[f] d\mu \leq \int \varphi[f] d\mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 6.2.12.- Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y f, g son medibles y positivas y tales que $fg \geq 1$, entonces $\left(\int f d\mu\right) \cdot \left(\int g d\mu\right) \geq 1$.

Solución.- $1/f \leq g$ y por la *Desigualdad de Jensen*, para $\varphi(x) = 1/x$,

$$\frac{1}{\int f d\mu} \leq \int \frac{1}{f} d\mu \leq \int g d\mu. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6.2.13.- Demostrar que si $0 < r < s \leq \infty$, entonces $l_r \subset l_s$.

Solución.- Si $f = \{x_n\} \in l_r$, entonces $\sum |x_n|^r < \infty$, en particular tendremos que $|x_n|^r \rightarrow 0$ y por tanto $|x_n| \leq M$ está acotada, por lo que $f \in l_\infty$ y también se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^s = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r |x_n|^{s-r} \leq M^{s-r} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r < \infty. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6.4.1.- Sea $g \in L_\infty$, demostrar que para $1 \leq p < \infty$, si $f \in L_p$, $gf \in L_p$, que la aplicación $G: L_p \rightarrow L_p$, $G(f) = gf$, es lineal y continua y que $\|G\| = \|g\|_\infty$.

Solución.- Si $f \in L_p$ y $g \in L_\infty$, entonces $|fg| \leq |f|\|g\|_\infty$ c.s., por tanto $|fg|^p \leq |f|^p \|g\|_\infty^p$ c.s. y $\|G(f)\|_p \leq \|g\|_\infty \|f\|_p$, por tanto G es acotada y $\|G\| \leq \|g\|_\infty$, veamos

la otra desigualdad, para ello sea $\epsilon > 0$, entonces $\{|g| > \|g\|_\infty - \epsilon\}$ no es localmente nulo y tiene un subconjunto medible A , con $0 < \mu(A) < \infty$, por tanto $f = I_A \in L_p$, $\|f\|_p = \mu(A)^{1/p}$ y

$$(\|g\|_\infty - \epsilon)\mu(A)^{1/p} \leq \left(\int |fg|^p\right)^{1/p} = \|G(f)\|_p \leq \|G\|\|f\|_p. \quad \blacksquare$$

Otros Ejercicios

Ejercicio 10.11.1 Demostrar que si $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una clase monótona, también lo son

$$\{A \in \mathcal{M} : A^c \in \mathcal{M}\}, \quad \{A \in \mathcal{M} : \forall B \in \mathcal{C}, A \cap B \in \mathcal{M}\},$$

para cualquier $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Ejercicio 10.11.2 Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, demostrar que son equivalentes⁹ las siguientes propiedades:

- 1) Si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{C}$
- 2) Si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cap B, A \Delta B \in \mathcal{C}$.
- 3) Si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cup B, A \Delta B \in \mathcal{C}$.

Ind. Recordemos que $A \Delta B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

(1) \Rightarrow (2), pues $A \Delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \in \mathcal{C}$ y $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) \in \mathcal{C}$.

(2) \Rightarrow (3), pues si $E \cap F = \emptyset$, $E \Delta F = E \cup F$ y $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \Delta B) = (A \cap B) \Delta (A \Delta B)$, pues la segunda unión es disjunta.

(3) \Rightarrow (1), pues $A \setminus B = (A \cup B) \Delta B$ y si $A \subset B$ entonces $A \Delta B = B \setminus A$. ■

Ejercicio 10.11.3 Demostrar que para cada $A \subset \mathbb{R}$,

$$\inf\{\sum(b_n - a_n) : A \subset \cup(a_n, b_n]\} = \inf\{\sum(b_n - a_n) : A \subset \cup[a_n, b_n)\}.$$

Ejercicio 10.11.4 ¿Es la unión de σ -álgebras σ -álgebra?. ¿Y la intersección?

Ejercicio 10.11.5 ¿Cuales son los más pequeños intervalos $(a, b]$ cuyas uniones finitas o numerables forman $\sigma(\mathcal{C})$, para la clase $\mathcal{C} = \{(0, 1/n] : n \in \mathbb{N}\}$ en $(0, 1]$?

Solución. $(1/(n+1), 1/n]$. ■

⁹A tal colección se la llama *anillo*.

Ejercicio 10.11.6 Describir $\sigma(\mathcal{C})$, para la clase

$$\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{N} : 2n \in A, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Ejercicio 10.11.7 Dar todas las medidas exteriores en el conjunto $\Omega = \{0, 1\}$. Idem en $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

Ejercicio 10.11.8 Sea Ω un conjunto infinito y

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{x\}(\forall x \in \Omega)\}, \quad \rho: \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty], \quad \rho(\emptyset) = 0, \quad \rho(\Omega) = \infty, \quad \rho(\{x\}) = 1.$$

Dar la medida exterior generada por ρ y la σ -álgebra \mathcal{A}_* .

Ejercicio 10.11.9 Demostrar que para cada $E \subset \mathbb{N}$, $\mu^*(E) = n/(n+1)$ si E tiene n elementos y $\mu^*(E) = \infty$ si E es infinito, es una medida exterior. Encontrar \mathcal{A}_* .

Ejercicio 10.11.10 Sea μ la medida de contar en $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ y sea $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$: ¿Es μ_A de Lebesgue–Stieltjes, para $A = \mathbb{N}$? Si lo es, ¿cual es su función de distribución?. Idem para $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 10.11.11 Dado un conjunto finito Ω dar el mínimo y máximo de

$$\{\text{card } \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-álgebra de } \Omega\}.$$

Ejercicio 10.11.12 Sean A_n conjuntos medibles tales que $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$. Demostrar que casi seguro todo punto está a lo sumo en un número finito de conjuntos A_n .

Ejercicio 10.11.13 Sea $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida y $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación, demostrar que $\mathcal{A}_2 = \{B : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ es una σ -álgebra y $\mu_2 = F_*\mu_1$, es decir $\mu_2(B) = \mu_1(F^{-1}(B))$ una medida y que si el primer espacio es completo, también lo es el segundo.

Ejercicio 10.11.14 Sea $\mathcal{C} = \{[a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{F} = \{(a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{F})$. ¿Qué σ -álgebra es?.

Ejercicio 10.11.15 Demostrar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{C})$, para

$$\mathcal{C} = \{\{x_i \leq b\} : i \in \{1, \dots, n\}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ejercicio 10.11.16 Sea F una función de distribución en \mathbb{R} . Demostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de F es numerable y el de continuidad es denso.

Solución. Si μ es su medida asociada, tenemos que F es continua en x sii $\mu\{x\} = 0$. Ahora dados $a < b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x \in (a, b] : \mu\{x\} \geq 1/n\}$ es finito, pues $\mu(a, b] = F(b) - F(a) < \infty$; por tanto su unión, $\{x \in (a, b] : \mu\{x\} > 0\}$ a lo sumo es numerable, como también el conjunto de puntos de discontinuidad de F , $\{x \in \mathbb{R} : \mu\{x\} > 0\}$ y su complementario (los puntos de continuidad) es denso, pues los entornos no son numerables. ■

Ejercicio 10.11.17 Sea F una función de distribución continua en \mathbb{R} y μ su medida de Lebesgue–Stieltjes asociada. Demostrar que $\mu(A) = 0$ para A numerable y que hay conjuntos medibles A que no contienen ningún abierto y satisfacen $\mu(A) > 0$.

Ejercicio 10.11.18 Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución continua y μ la medida de Lebesgue–Stieltjes que define. ¿Es $\mu(a, b) > 0$ para todo $a < b \in \mathbb{R}$?; ¿es $\mu\{x\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

Ejercicio 10.11.19 Sea μ una medida en los Borelianos de \mathbb{R} , tal que $\mu(0, 1] = 1$, $\mu\{0\} < \infty$ y $\mu(tA) = |t|\mu(A)$, para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$ y A Boreliano. Demostrar que $\mu = m$.

Ind. $\mu\{0\} = 0$ y μ es finita en los acotados pues $\mu[-1, 0) = \mu((-1)(0, 1]) = 1$ y

$$\begin{aligned}\mu[-1, 1] &= \mu[-1, 0) + \mu\{0\} + \mu(0, 1] = 2 + \mu\{0\}, \\ \mu[-n, n] &= \mu[-n, 0) + \mu\{0\} + \mu(0, n] = 2n + \mu\{0\} \\ \mu[-n, n] &= \mu(n[-1, 1]) = 2n + n\mu\{0\},\end{aligned}$$

por tanto es de LS y $\mu\{x\} = 0$ para todo x , pues en caso contrario $\mu\{tx\} = |t|^n \mu\{x\}$ y los intervalos tendrían medida infinita. Por último tiene función de distribución $F(x) = \mu(0, x] = x$, para $x \geq 0$ y $F(x) = -\mu(x, 0] = -\mu[x, 0) = x$, para $x < 0$, por tanto es la de Lebesgue. ■

Ejercicio 10.11.20 Demostrar que $F(x, y) = x$, si $x \leq y$ y $F(x, y) = y$ si $y \leq x$ es una función de distribución en \mathbb{R}^2 ¿donde está concentrada toda la masa de su medida de L–S asociada, y de qué forma?

Ejercicio 10.11.21 Demostrar que si $a > 0$ y F y G son funciones de distribución en \mathbb{R}^n , con medidas de L–S asociadas μ_F y μ_G , entonces aF y $F + G$ también lo son y

$$\mu_{F+G} = \mu_F + \mu_G, \quad \mu_{aF} = a\mu_F.$$

Ejercicio 10.11.22 Dar una función de distribución asociada a la medida en \mathbb{R}^2 cuya masa está concentrada en la recta $x + y = 0$ uniformemente, es decir que cada segmento de esa recta mide su longitud.

Solución. $F(x, y) = (x + y)\sqrt{2}I_{\{x+y \geq 0\}}$. ■

Ejercicio 10.11.23 Dar una función de distribución asociada a la medida en \mathbb{R}^2 cuya masa está concentrada en la recta $x = 0$ uniformemente, es decir que cada segmento de esa recta mide su longitud.

Solución. $F(x, y) = yI_{[0, \infty)}(x)$. ■

Ejercicio 10.11.24 Sea $V \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío, K compacto y m la medida de Lebesgue. ¿Es cierto que $m(V) > 0$?, ¿y que $m(K) < \infty$?, ¿y para una medida μ de Lebesgue–Stieltjes?

Ejercicio 10.11.25 Demostrar que en \mathbb{R}^n la dimensión vectorial y de Hausdorff, de sus subespacios, coinciden y calcular la dimensión de Hausdorff de $H = \{x : |h(x)| = 1\}$, para $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineal.

Ejercicio 10.11.26 Consideremos en un espacio normado $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ la métrica inducida $d(x, y) = \|x - y\|$. Demostrar que en cada plano π todos los triángulos T , con una base fija y la misma altura (distancia del tercer vértice a la recta base) tienen la misma medida de Hausdorff $H_2(T)$.

Solución. La distancia es invariante por traslaciones, por tanto también las medidas de Hausdorff, por lo que H_2 es de Lebesgue y para la medida de Lebesgue es conocido. ■

Ejercicio 10.11.27 Sea $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, tal que $0 < m(E) < \infty$. Demostrar que para cada $0 < r < 1$, existe un intervalo abierto (a, b) , tal que

$$r \cdot m(a, b) < m[(a, b) \cap E].$$

Solución. m es regular exterior por tanto existe un abierto V tal que $E \subset V$ y $m(V) < m(E)/r$. Ahora todo abierto de \mathbb{R} es unión numerable y disjunta de intervalos abiertos $V = \cup I_n$, $m(V) = \sum m(I_n) < \sum m(E \cap I_n)/r$ y algún intervalo debe satisfacer la propiedad. ■

Ejercicio 10.11.28 Sea $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, tal que $0 < m(E) < \infty$. Demostrar que $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ es un entorno del origen.

Solución. Por el ejercicio anterior existe un intervalo abierto $I = (\alpha, \beta) = (a - 2\epsilon, a + 2\epsilon)$, tal que $(3/4)m(I) < m(I \cap E)$, veamos que $(-\epsilon, \epsilon) \subset E - E$. Para ello sea $|x| < \epsilon$, hay que ver que $x + E$ corta a E , para lo cual basta ver que $x + (E \cap I)$ corta a $E \cap I$. En caso contrario su unión es disjunta y mide $2m(E \cap I)$ y está en $(x+I) \cup I = (\alpha+x, \beta+x) \cup (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta+x)$ (si $x \geq 0$), que mide $|x| + m(I) = |x| + 4\epsilon$, y en definitiva llegamos a una contradicción, pues

$$6\epsilon = (3/2)m(I) < 2m(I \cap E) \leq x + m(I) \leq 5\epsilon. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.29 ¿Es todo conexo de \mathbb{R} Boreliano. Es todo convexo de \mathbb{R}^n Boreliano?

Ind. En \mathbb{R} sí porque todo conexo y todo convexo es un intervalo. Para $n > 1$ no, por ejemplo en el plano si consideramos el círculo abierto unidad B y por la proyección estereográfica la antiimagen E de un no-boreliano de \mathbb{R} , tendremos que $B \cup E$ no es boreliano y es convexo. ■

Ejercicio 10.11.30 ¿Es todo convexo de \mathbb{R}^n Lebesgue medible?.

Ind. Si es de interior vacío está en un hiperplano, que tiene medida nula, por tanto es Lebesgue medible. En general como la intersección de convexos es convexo, las bolas son convexas y todo convexo se pone como unión expansiva de convexos acotados, basta demostrar que la frontera de un convexo acotado es de medida nula, lo cual se sigue de que la gráfica de una función $f: A \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ es de medida nula, para A la proyección en $\{x_n = 0\}$ del convexo y f una de las dos funciones cuya gráfica esté en la frontera. ■

Ejercicio 10.11.31 En el espacio $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ consideramos la probabilidad $P(n) = 1/2^n$ ($n = 1, 2, \dots$) y definimos la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{K} = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, $f(n) = n \pmod{k}$ y la probabilidad inducida en \mathcal{K} , $\mu(B) = P(f^{-1}(B))$. Calcular $\mu(m)$, para cada $m \in \mathcal{K}$.

Ejercicio 10.11.32 Sea f medible e integrable en $((0, 1), \mathcal{B}(0, 1), m)$. Demostrar que para todo polinomio p , pf también es integrable y calcular el $\lim \int x^n f dm$.

Demostración. Si $p = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $|pf| \leq (\sum |a_i|)|f|$, que es integrable. Por otra parte como f es finita c.s., y $0 < x < 1$, $|x^n f| \leq |f|$ y $x^n f \downarrow 0$ c.s., y el límite pedido es 0 por el TCD. ■

Ejercicio 10.11.33 Demostrar que el volumen del cono generado por un Boreliano plano y un punto exterior al plano es $1/3$ del área del Boreliano por la altura del punto respecto del plano. Calcular la altura de su centro de masa en términos de la altura del cono.

Demostración. Por una traslación y un giro podemos suponer que el plano es $z = h$, para h la altura del cono y que el punto es el origen. Si el Boreliano plano es A , entonces el cono es

$$E = \{(tx, ty, th) : (x, y) \in A, t \in [0, 1]\},$$

por tanto $E_z = \emptyset$, si $z \notin [0, h]$ y si $z \in [0, h]$,

$$E_z = \{(tx, ty) : (x, y) \in A, th = z\} = \frac{z}{h} A,$$

y por el Teorema de la medida producto y el ejercicio (2.4.3)

$$m_3(E) = \int_{[0, h]} m_2 \left[\frac{z}{h} A \right] dm_1 = \frac{m_2(A)}{h^2} \int_{[0, h]} z^2 dm_1 = \frac{m_2(A)}{3} h.$$

Ahora la altura del centro de gravedad es

$$z[C(E)] = \frac{\int_E z dm_3}{m_3[E]} = \frac{\int z m_2[E_z] dm_1}{\int m_2[E_z] dm} = \frac{\frac{m_2(A)}{h^2} \int_{[0,h]} z^3 dm_1}{\frac{m_2(A)}{h^2} \int_{[0,h]} z^2 dm_1} = \frac{3}{4}h. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.34 Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $f = 0$ en \mathbb{Q} y $f(x) = n$ si en la representación decimal de x hay n ceros exactamente tras la coma decimal. Demostrar que f es medible y calcular $\int f dm$.

$$\text{Ind. } f = \sum n I_{[10^{-n-1}, 10^{-n}) \cap \mathbb{I}}, \int f = (9/100) \sum n (1/10)^{n-1} = 1/9. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.35 Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $f = 0$ en el conjunto ternario de Cantor K y $f = n$ en cada intervalo de K^c de longitud 3^{-n} . Demostrar que f es medible y calcular $\int f dm$.

$$\text{Ind. } f = \sum n I_{E_{n1} \cup E_{n,2^{n-1}}}, \int f = \sum n 2^{n-1} 3^{-n} = (1/3) \sum n (2/3)^{n-1} = 3. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.36 Sea $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $f = 0$ en \mathbb{Q} y en los irracionales $f(x) = [1/x]$, para $[y]$ la parte entera de y . Demostrar que f es medible y calcular $\int f dm$.

$$\text{Ind. } f = \sum m I_{(1/(m+1), 1/m) \cap \mathbb{I}}, \int f = \sum 1/(m+1) = \infty. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.37 Sea $f_{2n-1} = I_{[0,1]}$, $f_{2n} = I_{[1,2]}$, en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$. ¿Se puede aplicar el Lema de Fatou?, ¿Se da la igualdad al aplicar el Lema de Fatou?

Ejercicio 10.11.38 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $A_n \in \mathcal{A}$ y $f(x) = \sum_{n \in N_x} a_n$, con $a_n \geq 0$ y $N_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$. Demostrar que f es medible y calcular su integral en general y en particular para $a_n = 2^n$ y $\mu(A_n) = 1/n!$.

$$\text{Solución. } f = \sum a_n I_{A_n}, \int f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n/n! = e^2 - 1. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.39 Sean $0 \leq f_n \leq f$ medibles y $f_n \rightarrow f$. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$.

Solución. Por Fatou $\int f = \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$ y si $\int f = \infty$ es obvio en caso contrario por TCD. \blacksquare

Ejercicio 10.11.40 Sea $0 \leq f$ medible y $f_n = \min\{f, n\}$, demostrar que $\int f_n \uparrow \int f$.

$$\text{Ind. Por TCM pues } f_n \uparrow f. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.41 Sean $0 \leq g \leq f$ medibles y $\int g < \infty$, demostrar que

$$\int f - \int g = \int (f - g).$$

Ejercicio 10.11.42 Sea $a_n \downarrow 0$ y $f_n(x) = a_n/x$, para $x \geq 1$. Demostrar que existe el $\lim f_n = f$, ¿es $\int f_n dm \rightarrow \int f dm$?

Ejercicio 10.11.43 Para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definimos

$$\mu(B) = \int_{B \cap (0, \infty)} \frac{1}{1+x} dm,$$

demostrar que μ es una medida de Lebesgue–Stieltjes, hallar una función de distribución suya y encontrar una función medible f no nula en $(0, \infty)$ y tal que $\int f d\mu < \infty$ y $\int f dm = \infty$.

Ind. $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dm = \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt = \log(x+1)$; $f(x) = 1/(x+1)$. ■

Ejercicio 10.11.44 Sean $f, f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ medibles, tales que $f_n \rightarrow f$ y $\int f_n dm = \int f dm < \infty$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^x f_n dm \rightarrow \int_{-\infty}^x f dm,$$

Solución. Para $a = \int_{-\infty}^x f$, $b = \int_x^{\infty} f$, $a_n = \int_{-\infty}^x f_n$ y $b_n = \int_x^{\infty} f_n$, $a + b = a_n + b_n$ y por Fatou $a + b \leq \liminf a_n + \liminf b_n \leq \limsup a_n + \liminf b_n \leq \limsup(a_n + b_n) = a + b$. ■

Ejercicio 10.11.45 Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, tal que para $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\int f^n dm = \int f^m dm,$$

probar que existe un Boreliano B , tal que $f = I_B$ c.s.

Solución. Sea $A = \{|f| < 1\}$, $B = \{f = 1\}$, $C = \{f = -1\}$ y $D = \{|f| > 1\}$.

$$\int_A f^{2n} + \int_B f^{2n} + \int_C f^{2n} + \int_D f^{2n} = \int_A f + \int_B f + \int_C f + \int_D f.$$

Como $0 \leq \int_D f^{2n} \uparrow \infty$, por TCM y ser f integrable $m(D) = 0$, por tanto $\int_A f^{2n} + m(B) + m(C) = \int_A f + m(B) - m(C)$ y como $|I_A f^{2n}| \leq |f|$, por TCD $\int_A f^{2n} \rightarrow 0$ y como es constante pues $m(B)$ y $m(C)$ son finitos por ser f integrable, $\int_A f^{2n} = 0$, por tanto $f^{2n} = 0$ c.s. en A , es decir $f = 0$ c.s. en A , por último $m(B) + m(C) = m(B) - m(C)$, por tanto $m(C) = 0$ y $f = I_B$ c.s. ■

Ejercicio 10.11.46 Para funciones de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ¿qué afirmaciones son verdad? (justifica las respuestas):

- (a) Si f es medible entonces f^+ y f^- son medibles.
- (b) Si $f + g$ es medible entonces f ó g es medible.
- (c) Si g es medible y $0 \leq f \leq g$ entonces f es medible.
- (d) Si $f + g$ y $f - g$ son medibles entonces f y g son medibles.

Ind. (d) es verdad, sin embargo observemos que si $f, g: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ no lo es necesariamente, ni siquiera si f es medible tiene por qué serlo g , por ejemplo: $f = \infty$, g no medible finita. ■

Ejercicio 10.11.47 Para funciones de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ¿qué afirmaciones son verdad? (justifica las respuestas):

- (a) $|f|$ es medible $\Rightarrow f^+$ y f^- son medibles.
- (b) f^+ y f^- son medibles $\Rightarrow f$ medible.
- (c) f es medible $\Rightarrow |f|$ es medible.
- (d) $|f|$ es medible $\Rightarrow f$ es medible.

Ejercicio 10.11.48 Sean f, g integrables, ¿es $\max(f, g)$ integrable?, ¿es $\min(f, g)$ integrable?

Ind. Sea $A = \{f < g\}$ y $B = A^c$, entonces $\max(f, g) = fI_B + gI_A$. ■

Ejercicio 10.11.49 Dada una función medible f en un espacio de medida σ -finita $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, demostrar que existe una sucesión de funciones simples $s_n \rightarrow f$, tales que $|s_n| \leq |f|$ y $\mu\{s_n \neq 0\} < \infty$.

Ejercicio 10.11.50 ¿Es cierto que si $\{f \leq r\}$ es medible para todo r irracional entonces f es medible?. ¿Y para todo r racional?

Ejercicio 10.11.51 Demostrar que toda función continua es Borel medible y que si $V \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$, f y todas sus derivadas parciales de todos los ordenes son Borel medibles en V .

Ejercicio 10.11.52 Sea $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida y $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación, demostrar que $\mathcal{A}_2 = \{B : F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ es una σ -álgebra y $\mu_2 = F_*\mu_1$, es decir $\mu_2(B) = \mu_1(F^{-1}(B))$ una medida y que $g: \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tiene integral si y sólo si la tiene $g \circ F$ y $\int g \circ F d\mu_1 = \int g d\mu_2$.

Ejercicio 10.11.53 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Riemann integrable, con $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Demostrar que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ es una función de distribución uniformemente continua.

Ejercicio 10.11.54 Sea $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$ y para cada $n \geq 1$ sea $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$. Demostrar que las funciones en $[0, 1]$, $f_n = I_{A_n}$, son Riemann integrables, que existe $f = \lim f_n$ y justificar si es o no Riemann integrable f y si son Lebesgue integrables las f_n y la f .

Ejercicio 10.11.55 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{A_n}$, con $a_n \in (0, \infty)$ y $A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos, calcular $\int f^{-1} d\mu$.

Ejercicio 10.11.56 Para la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y f integrable ¿es cierto que

$$\int_{[a,b]} f d\mu + \int_{[b,c]} f d\mu = \int_{[a,c]} f d\mu?$$

¿es cierto para cualquier medida?, ¿para cuales?.

Ejercicio 10.11.57 (a) Sean f, g medibles, demostrar que $\{f = g\}$ es medible.
 (b) Sea f medible y $f = g$ c.s. ¿es necesariamente g medible?, ¿y si el espacio es completo?.
 (c) Sean $f \leq g \leq h$, con f y h medibles tales que $f = h$ c.s. ¿es necesariamente g medible?, ¿y si el espacio es completo?.

Ejercicio 10.11.58 Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótonas crecientes, ¿es $f - g$ Borel medible?

Ejercicio 10.11.59 Sea μ una probabilidad en los Borelianos de $[0, \infty)$, tal que $\mu\{(0, \infty)\} \neq 0$, sea $F(x) = \mu[0, x]$ su función de distribución y sea para $f(x) = x$ y $x \geq 0$

$$G(x) = \frac{\int_{[0,x]} f d\mu}{\int_{[0,\infty)} f d\mu}.$$

Demostrar que para todo $x \geq 0$, $G(x) \leq F(x)$.

Solución. Multiplicando respectivamente por $a = \mu[0, x]$ y por $b = \mu(x, \infty)$, las desigualdades $x \mu(x, \infty) \leq \int_{(x, \infty)} f d\mu$ e $\int_{[0, x]} f d\mu \leq x \mu[0, x]$, tendremos

$$b \int_{[0,x]} f d\mu \leq x a b \leq a \int_{(x,\infty)} f d\mu$$

y como $a + b = 1$, sumando $a \int_{[0,x]} f d\mu$, se tiene que

$$\int_{[0,x]} f d\mu \leq a \int_{(0,\infty)} f d\mu = \mu([0, x]) \int_{[0,\infty)} f d\mu.$$

Ahora por una parte $\int_{[0,\infty)} f d\mu > 0$, pues en caso contrario $f = 0$ c.s. es decir $0 = \mu\{f \neq 0\} = \mu(0, \infty)$ y $\mu\{0\} = 1$. Por último si $\int_{[0,\infty)} f d\mu = \infty$, $G(x) = 0$, pues $\int_{[0,x]} f d\mu \leq x \mu([0, x]) \leq x < \infty$. ■

Ejercicio 10.11.60 Sea λ una carga en un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, tal que si $\mu(A) < \infty$ entonces $|\lambda(A)| < \infty$. Demostrar que $\lambda \ll \mu$ sii para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$ entonces $|\lambda(E)| < \epsilon$.

Ind. Primero $\lambda \ll \mu$ sii $|\lambda| \ll \mu$ y si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo n existe un E_n con $\mu(E_n) < 1/2^n$ y $|\lambda|(E_n) \geq \epsilon$ entonces $A_n \downarrow A$ para $A_n = \cup_{i=n}^{\infty} E_i$ y $A = \limsup E_n$ y $|\lambda|(A_1) = |\lambda|(A_1 \cap P) + |\lambda|(A_1 \cap N) < \infty$ pues $\mu(A_1 \cap P), \mu(A_1 \cap N) \leq \mu(A_1) < \infty$, y $\mu(A) = \lim \mu(A_n) = 0$ por tanto $|\lambda|(A) = 0$ y $0 < \epsilon \leq |\lambda|(E_n) \leq |\lambda|(A_n) \rightarrow 0$. ■

Ejercicio 10.11.61 Sea λ una medida finita en un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y

$$f: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty], \quad f(x) = \sup\{\lambda(E) : \mu(E) \leq x\},$$

demostrar que f es monótona creciente y que si $f(0) = 0$ entonces f es continua en 0.

Ejercicio 10.11.62 Sean f_n μ -integrables y f medible tal que $\lim \int |f_n - f| = 0$. Demostrar que f es integrable y que si

$$\mu(A_n \Delta A) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{A_n} f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu.$$

Ind. $f = (f - f_n) + f_n$. Sea $g_n = I_{A_n} f_n$, $g = I_A f$ y consideremos la medida finita $\lambda(E) = \int_E |f| d\mu$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_n} f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| &\leq \|g_n - g\|_1 \leq \|g_n - I_{A_n} f\|_1 + \|I_{A_n} f - I_A f\|_1 \\ &\leq \|f_n - f\|_1 + \lambda(A_n \Delta A) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pues $\lambda((A_n \Delta A)) \rightarrow 0$ ya que para $B_m = \{|f| > m\}$, $B_m \downarrow B = \{|f| = \infty\}$ y $\mu(B) = 0$, por tanto $\lambda(B) = 0$ de donde $\lambda(B_m) \rightarrow 0$ y

$$\lambda(A_n \Delta A) = \lambda((A_n \Delta A) \cap B_m) + \lambda((A_n \Delta A) \cap B_m^c) \leq \lambda(B_m) + m\mu(A_n \Delta A). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.63 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ espacios de medida σ -finita tales que el espacio de medida producto es completo. Demostrar que si existe $B \in \mathcal{A}_2$ no vacío con $\mu_2(B) = 0$, entonces $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$.

Solución. Sea $A \subset \Omega_1$, entonces $A \times B$ está en el medible $\Omega_1 \times B$ con medida $\mu_1(\Omega_1)\mu_2(B) = 0$, por tanto $A \times B$ es medible en el producto y su sección por un $y \in B$ (que es medible) es A . ■

Ejercicio 10.11.64 Demostrar que si dos medidas complejas μ, λ coinciden en un álgebra \mathcal{A}_0 , entonces coinciden en $\sigma(\mathcal{A}_0)$.

Solución. Supongamos primero que son medidas reales, entonces $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ con la cuatro medidas finitas y tales que las medidas finitas (positivas) $\mu^+ + \lambda^-$ y $\lambda^+ + \mu^-$ coinciden en \mathcal{A}_0 , por tanto en $\sigma(\mathcal{A}_0)$ por el Teorema de extensión de Hahn. Se sigue que también μ y λ . El caso complejo se sigue del real. ■

Ejercicio 10.11.65 Demostrar que dadas dos medidas complejas μ_1 en $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y μ_2 en $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, existe una única medida compleja en el espacio producto $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, tal que para cada producto de medibles $A \times B$

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

y que para cada medible E del producto satisface

$$\mu_1 \times \mu_2(E) = \int \mu_1(E^y) d\mu_2 = \int \mu_2(E_x) d\mu_1.$$

Solución. La unicidad es obvia por el ejercicio anterior pues dos medidas complejas que coinciden en un álgebra coinciden en la σ -álgebra que genera. Ahora para la existencia basta observar en el caso real que la medida real

$$\mu = \mu_1^+ \times \mu_2^+ + \mu_1^- \times \mu_2^- - \mu_1^+ \times \mu_2^- - \mu_1^- \times \mu_2^+,$$

satisface la propiedad, pues

$$\mu(A \times B) = (\mu_1^+(A) - \mu_1^-(A))(\mu_2^+(B) - \mu_2^-(B)) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

Para el caso complejo (considerando que las medidas son $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ y $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$) se considera la medida compleja

$$\mu_1 \times \lambda_1 - \mu_2 \times \lambda_2 + i(\mu_1 \times \lambda_2 + \mu_2 \times \lambda_1). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.66 Considérese el toro T de revolución obtenido al hacer girar una circunferencia de radio r alrededor de una recta de su plano, de la que su centro dista R . Calcular su volumen y su área.

Solución. Veamos el volumen: Consideremos la circunferencia en el plano yz con centro en el eje y y eje de giro el eje z y hagamos la sección por cada z entre $-r$ y r obteniendo una corona de área

$$\pi([R + \sqrt{r^2 - z^2}]^2 - [R - \sqrt{r^2 - z^2}]^2) = 4\pi R\sqrt{r^2 - z^2},$$

por tanto por el teorema de la medida producto

$$\begin{aligned} m_3[T] &= \int_{-r}^r m_2[T_z] dz = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - z^2} dz \\ &= 4\pi R r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = (2\pi r)(\pi R^2), \end{aligned}$$

pues

$$\pi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Veamos el área: El casquete superior del toro se obtiene como gráfica de la función definida en la corona $B = \{(x, y) : R - r \leq \rho \leq R + r\}$, para $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$f(x, y) = h(\rho) = \sqrt{r^2 - (R - \rho)^2},$$

para la que

$$1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{r^2}{r^2 - (R - \rho)^2},$$

por tanto el área del toro es para $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y para el cambio de variable $R + tr = \rho$

$$\begin{aligned} 2\gamma_2 H_2[F(B)] &= 2 \int_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dm_2 \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{R-r}^{R+r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - (R - \rho)^2}} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - t^2 r^2}} (R + tr) r \, dt \\ &= 4\pi r R \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt = (2\pi r)(2\pi R). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.11.67 Calcular la longitud del trozo de una hélice que con pendiente 1 está sobre el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$ y cuya proyección da una vuelta.

Ejercicio 10.11.68 Demostrar que la derivada respecto del radio, del volumen n -dimensional de la bola de \mathbb{R}^n de radio r es el área $n - 1$ -dimensional de su esfera.

Ejercicio 10.11.69 Sea $f > 0$ integrable en Ω . Demostrar que $\int f^{1/n} \, d\mu \rightarrow \mu(\Omega)$.

Solución. Sea $A = \{f < 1\}$, entonces en A $f^{1/n} \uparrow 1$ y en A^c , $f^{1/n} \downarrow 1$, entonces por el TCM $\int_A f^{1/n} \rightarrow \mu(A)$ y como en A^c , $f^{1/n} \leq f$, por el TCD $\int_{A^c} f^{1/n} \rightarrow \mu(A^c)$.
 \blacksquare

Ejercicio 10.11.70 Demostrar que si $f, g > 0$ son integrables en un espacio de medida μ finita

$$\lim \frac{\int f^{1/n} \, d\mu}{\int g^{1/n} \, d\mu} = 1.$$

Ejercicio 10.11.71 Demostrar que las medidas $\mu\{n\} = a_n$, $\lambda\{n\} = b_n$ definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ y $0 = \inf a_n < \inf b_n$, son σ -finitas, que $\mu \ll \lambda$ y calcular $d\mu/d\lambda$.

Ind. $\mu(A) = \int_A f d\lambda$, en particular $\mu(n) = f(n)\lambda(n)$, y $f(n) = a_n/b_n$. ■

Ejercicio 10.11.72 (a) Demostrar que si $f_n \rightarrow f$ en L_p , entonces $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

(b) Demostrar que si $f_n \rightarrow f$ en L_p y $g_n \rightarrow g$ en L_q , con p y q conjugados, entonces $f_n g_n \rightarrow f g$ en L_1 .

Ind. (a) $-\|f_n - f\|_p \leq \|f_n\|_p - \|f\|_p \leq \|f_n - f\|_p$. (b) $\|f_n g_n - f g\|_1 = \|f_n(g_n - g) + (f_n - f)g\|_1$ y se concluye por Minkowski, Holder y (a). ■

Ejercicio 10.11.73 Consideremos la proyección estereográfica de la circunferencia unidad desde p , $F: S_1 \setminus \{p\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y H_1 la medida de Hausdorff en S_1 . Demostrar que la medida imagen $\mu = F_* H_1$ es de Lebesgue–Stieltjes ($\mu(B) = H_1[F^{-1}(B)]$). Dar una función de distribución.

Solución. H_1 es la medida uniforme en la circunferencia, es decir la de los ángulos y como la medida de un arco que visto desde p tiene ángulo α , es 2α , tendremos que $F(x) = 2 \arctan(x/2)$ es la función de distribución que verifica $F(0) = 0$. Como μ es finita, la que se anula en $-\infty$ es $\mu(-\infty, x] = \pi + F(x)$. ■

Ejercicio 10.11.74 Sea \mathcal{X} HLC (Hausdorff localmente compacto) y μ una medida en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, regular interior en los abiertos. Demostrar que la unión A de todos los abiertos de medida cero por μ , es un abierto con $\mu(A) = 0$. Su complementario se llama soporte de μ , $A^c = \text{sop}(\mu)$.

Solución. Por ser μ regular interior en el abierto $A = \cup A_i$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subset A\} = 0,$$

pues existen i_1, \dots, i_n , $K \subset \cup A_{i_j}$ y $\mu(K) \leq \sum \mu(A_{i_j}) = 0$. ■

Ejercicio 10.11.75 Sea \mathcal{X} HLC y μ una medida cuasi-regular en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Demostrar:

(a) Si $f: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ es continua entonces $\int f d\mu = 0$ sii $f = 0$ en el $\text{sop}(\mu)$.

(b) $x \in \text{sop}(\mu)$ sii para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ no negativa, tal que $f(x) > 0$, se tiene $\int f d\mu > 0$.

Solución. (a) “ \Rightarrow ”: Si $\int f d\mu = 0$, por Tchebycheff $\{f > 0\}$ es de medida nula y como es abierto $\{f > 0\} \subset A$.

$$\text{“}\Leftarrow\text{”}: \int f d\mu = \int_{\text{sop}(\mu)} f d\mu = 0$$

(b) “ \Rightarrow ”: Si $x \in \text{sop}(\mu)$ y $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ es no negativa y tal que $f(x) > 0$, existe un $\epsilon > 0$, tal que $x \in U = \{f > \epsilon\}$ y como U es abierto $\mu(U) > 0$, pues en caso contrario $U \subset A$ y $x \notin A$. Por tanto $\int f d\mu \geq \int_U f d\mu \geq \epsilon \mu(U) > 0$.

“ \Leftarrow ”: Si $x \in A$ por Urysohn existe $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ con $I_{\{x\}} \leq f \leq I_A$ y $\text{sop}(f) \subset A$, por tanto $f(x) = 1$, pero $f = 0$ en $\text{sop}(\mu)$, por tanto $\int f d\mu = 0$. ■

Ejercicio 10.11.76 Sea $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Demostrar que el área de $F(U)$ es¹⁰

$$\int_U \sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2} \, dudv.$$

Solución. Para

$$A^t = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \det(A^t A) &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 \\ &= (x_u y_v - x_v y_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.11.77 Calcular

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} \right)^2 dm.$$

Solución. Para $x > 0$ $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} = (1 + \sqrt{1 + 4x})/2$, pues es la raíz positiva del polinomio $t^2 = x + t$. También se puede resolver aplicando el TCM a $f_n(x)$ para $f_1(x) = \sqrt{x}$ y $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$, pues es creciente y acotada por $h(x) = (1 + \sqrt{1 + 4x})/2$, que satisface $h(x)^2 = x + h(x)$ —se ve por inducción, $f_1(x)^2 = x < x + h(x) = h(x)^2$ y $f_{n+1}(x)^2 = x + f_n(x) < x + h(x) = h(x)^2$ —.

$$\left(\frac{1}{2} - f_n(x) \right)^2 = \frac{1}{4} - f_n(x) + x + f_{n-1}(x),$$

y la integral vale $\int_0^4 (1/4) + x = 1 + 8 = 9$. \blacksquare

Ejercicio 10.11.78 Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) y dos medidas en él $\mu \leq \nu$. Demostrar:

- Hay una medida λ tal que $\mu + \lambda = \nu$.
- Si μ es σ -finita, λ es única.
- Que en general λ no es única, pero siempre hay una mínima.

¹⁰En términos vectoriales

$$\begin{aligned} D_1 &= F_* \partial_u = x_u \partial_x + y_u \partial_y + z_u \partial_z, \\ D_2 &= F_* \partial_v = x_v \partial_x + y_v \partial_y + z_v \partial_z, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{área}[F(U)] = \int_U |D_1 \times D_2|.$$

Ind. (a) Definimos

$$\lambda(A) = \begin{cases} \nu(A) - \mu(A), & \text{si } \mu(A) < \infty, \\ \sum[\nu(A_n) - \mu(A_n)], & \text{si } A \text{ es } \mu\text{-}\sigma\text{-finita,} \\ \infty, & \text{si } A \text{ no es } \mu\text{-}\sigma\text{-finita.} \end{cases}$$

donde en el segundo caso las $A_n \in \mathcal{A}$ son disjuntas, $\mu(A_n) < \infty$ y $A = \cup A_n$, para lo cual hay que demostrar que $\sum[\nu(A_n) - \mu(A_n)]$ no depende de los A_i , sólo de A , es decir si $A = \cup B_i$ es otra partición, entonces

$$\begin{aligned} \sum_i [\nu(A_i) - \mu(A_i)] &= \sum_i \left[\sum_j \nu(A_i \cap B_j) - \sum_j \mu(A_i \cap B_j) \right] \\ &= \sum_i \sum_j [\nu(A_i \cap B_j) - \mu(A_i \cap B_j)] \\ &= \sum_j \sum_i [\nu(A_i \cap B_j) - \mu(A_i \cap B_j)] = \sum_j [\nu(B_j) - \mu(B_j)]. \end{aligned}$$

ahora si los A_i son disjuntos y $\mu(A_i) < \infty$, entonces por definición $\lambda(\cup A_i) = \sum \lambda(A_i)$ y si $A = \cup A_i$ es $\mu\text{-}\sigma\text{-finita}$ pero los A_i no son finitos, entonces existen B_n disjuntos medibles tales que $\mu(B_n) < \infty$ y $A = \cup B_n$, entonces por lo anterior $\lambda(A_i) = \sum_n \lambda(A_i \cap B_n)$ y $\sum \lambda(A_i) = \sum_{i,n} \lambda(A_i \cap B_n) = \lambda(A)$; y si $\cup A_i$ no es $\mu\text{-}\sigma\text{-finita}$, entonces algún A_i tampoco lo es y $\lambda(\cup A_i) = \infty = \sum \lambda(A_i)$.

(b) Si hay dos, $\mu + \lambda = \mu + \lambda'$ y si $B_n \in \mathcal{A}$ es una partición $\mu\text{-}\sigma\text{-finita}$ de Ω , entonces para todo $A \in \mathcal{A}$ y $A_n = A \cap B_n$,

$$\lambda(A) = \sum \lambda(A_n) = \sum \lambda'(A_n) = \lambda'(A),$$

pues $\mu(A_n) + \lambda(A_n) = \mu(A_n) + \lambda'(A_n) = \mu(A_n) < \infty$.

(c) Veamos que otra posible medida (que es la mínima) es

$$\lambda(E) = \sup\{\nu(A) - \mu(A) : A \subset E, \mu(A) < \infty\}.$$

En primer lugar es aditiva, sean A, B disjuntos y sea $D \subset A \cup B$, con $\mu(D) < \infty$, entonces

$$\nu(D) - \mu(D) = \nu(D \cap A) + \nu(D \cap B) - \mu(D \cap A) - \mu(D \cap B) \leq \lambda(A) + \lambda(B),$$

y tomando sup tenemos $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$. Para la otra desigualdad tomemos $A' \subset A$ y $B' \subset B$, con $\mu(A'), \mu(B') < \infty$, entonces A' y B' son disjuntos y

$$\nu(A') - \mu(A') + \nu(B') - \mu(B') = \nu(A' \cup B') - \mu(A' \cup B') \leq \lambda(A \cup B),$$

y tomando sup tenemos la otra desigualdad.

Veamos la numerable aditividad, para ello basta ver que si $A_n \uparrow A$, entonces $\lambda(A_n) \rightarrow \lambda(A)$. Ahora bien sabemos que $\lambda(A_n) \leq \lambda(A)$ y la sucesión es creciente por tanto tiene límite. Sea $E \subset A$ tal que $\mu(E) < \infty$, entonces

$$\nu(E) - \mu(E) = \lim[\nu(A_n \cap E) - \mu(A_n \cap E)] \leq \lim \lambda(A_n) \leq \lambda(A),$$

y tomando sup tenemos $\lim \lambda(A_n) = \lambda(A)$.

Ahora si $\mu(E) = \infty$, entonces $\nu(E) = \infty$ y obviamente $\mu(E) + \lambda(E) = \nu(E)$ y si $\mu(E) < \infty$, $\nu(E) - \mu(E) \leq \lambda(E)$, por tanto se da la igualdad pues

$$\nu(E) \leq \lambda(E) + \mu(E) = \sup\{\nu(E') + \mu(E) - \mu(E') : E' \subset E, \mu(E') < \infty\} \leq \nu(E),$$

pues $\mu(E') < \infty$ y por tanto

$$\nu(E') + \mu(E) - \mu(E') = \nu(E') + \mu(E \setminus E') \leq \nu(E') + \nu(E \setminus E') = \nu(E). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.79 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, consideremos el espacio métrico asociado (ver ejercicios Tema I), (\mathcal{X}, ρ) , para $\mathcal{X} = \mathcal{A}/\simeq$, con la relación de equivalencia $A \simeq B$ sii $\mu(A\Delta B) = 0$, y la métrica $\rho(A, B) = \mu(A\Delta B)$. Demostrar que para una medida compleja λ

$$\lambda \ll \mu \Leftrightarrow \lambda \text{ se extiende a } \mathcal{X}.$$

en cuyo caso λ es continua.

Solución.- “ \Rightarrow ”

$$\begin{aligned} A \sim B &\Rightarrow \mu(A\Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(A \cap B^c) = \mu(A^c \cap B) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda(A \cap B^c) = \lambda(A^c \cap B) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = \lambda(B). \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ”

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow A \sim \emptyset \Rightarrow \lambda(A) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

Para ver que es continua basta demostrar que si $A \in \mathcal{X}$, $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$\rho(A, B) < \delta \Rightarrow |\lambda(A) - \lambda(B)| < \epsilon,$$

Ahora bien sabemos que $\lambda \ll \mu$ equivale a que $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow |\lambda|(E) < \epsilon,$$

y para $E = A\Delta B$, tendremos

$$\begin{aligned} |\lambda(A) - \lambda(B)| &= |\lambda(A \cap B^c) - \lambda(A^c \cap B)| \leq |\lambda(A \cap B^c)| + |\lambda(A^c \cap B)| \\ &\leq |\lambda|(A\Delta B) < \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.11.80 Demostrar que para $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, el espacio métrico (\mathcal{X}, ρ) del ejercicio (10.11.79), es completo.

Solución.- Sea $A_n \in \mathcal{X}$ de Cauchy y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ un m_n , tal que para $j, k \geq m_n$, $\rho(A_j, A_k) \leq 2^{-n}$, además elijamos m_n creciente y $m_n \rightarrow \infty$. Consideremos la subsucesión $B_n = A_{m_n}$ y $C_n = B_n \Delta B_{n+1}$, para la que $\mu(C_n) \leq 2^{-n}$, por tanto $\sum \mu(C_n) < \infty$ y para $C^c = \limsup C_n$, $\mu(C^c) = 0$ y para cada $x \in C = \liminf C_n^c$, existe un $m \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq m$, $x \in C_n^c = \{I_{B_n} = I_{B_{n+1}}\}$, por tanto existe c.s. el lím I_{B_n} , por tanto

$$I_{\liminf B_n} = \liminf I_{B_n} \stackrel{\text{c.s.}}{=} \limsup I_{B_n} = I_{\limsup B_n},$$

de donde $A = \liminf B_n \simeq \limsup B_n = B$. De esto se sigue que para cada $D \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mu(D\Delta A) &= \mu(D \cap A^c) + \mu(D^c \cap A) = \mu(D \cap A^c \cap B^c) + \mu(D^c \cap A) \\ &= \mu(D \cap B^c) + \mu(D^c \cap A) \\ &= \mu[D \cap (\liminf B_n^c)] + \mu[D^c \cap (\liminf B_n)] \\ &\leq \mu[\liminf (D\Delta B_n)] \leq \liminf \mu(D\Delta B_n), \end{aligned}$$

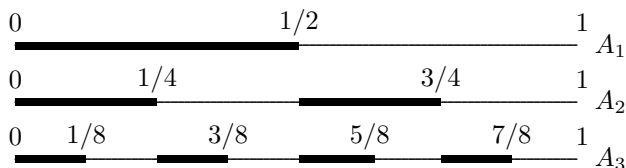
Veamos que $\rho(A_n, A) \rightarrow 0$, como

$$0 \leq \rho(A_n, A) \leq \rho(A_n, B_m) + \rho(B_m, A),$$

basta demostrar que $\mu(B_m \Delta A) \rightarrow 0$ y esto es obvio pues por lo anterior

$$0 \leq \mu(B_m \Delta A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(B_m \Delta B_n). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.81 Demostrar que el espacio métrico completo del ejercicio anterior en el caso particular de $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{A} los Borelianos del intervalo y μ la medida de Lebesgue, no es compacto.



Ind. Considérese la sucesión A_n , para la que $\rho(A_i, A_j) = 1/2$,

Ejercicio 10.11.82 Sean f, f_n, g, g_n integrables, tales que $|f_n| \leq g_n, f_n \rightarrow f$ c.s., $g_n \rightarrow g$ c.s. y $\int g_n \rightarrow \int g$. Demostrar que $\int f_n \rightarrow \int f$.

Ind. (Si x_n e y_n son acotadas, $\liminf(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \liminf y_n$). Aplicando el Lema de Fatou a $0 \leq g_n - f_n$ y $0 \leq g_n + f_n$

$$\begin{aligned} \int g - \int f &= \int (g - f) = \int \liminf (g_n - f_n) \leq \\ &\leq \liminf \int (g_n - f_n) \leq \int g - \limsup \int f_n, \\ \int g + \int f &= \int (g + f) = \int \liminf (g_n + f_n) \leq \\ &\leq \liminf \int (g_n + f_n) \leq \int g + \liminf \int f_n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.11.83 Demostrar que si $f, f_n \in L_p$ ($p < \infty$) y $f_n \rightarrow f$ c.s. entonces $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ sii $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Solución.- Como $|g_1 + g_2|^p \leq \alpha_p(|g_1|^p + |g_2|^p)$, para $\alpha_p = 1$ si $p \leq 1$ y $\alpha_p = 2^p$ si $p > 1$, tendremos que la implicación \Rightarrow se sigue de que $|f_n - f|^p \leq \alpha_p(|f_n|^p + |f|^p)$ y del ejercicio 4; y la implicación \Leftarrow se sigue del mismo ejercicio y de que $|f_n|^p \leq \alpha_p(|f_n - f|^p + |f|^p)$. \blacksquare

Ejercicio 10.11.84 Para cada $1 \leq p < \infty$, ¿bajo que condiciones sobre f y g se da la igualdad en la desigualdad de Holder?, ¿y en la de Minkowsky?

Solución.- La desigualdad de Holder es para $p = 1$ y $q = \infty$ consecuencia de la desigualdad $|fg| \leq |f||g|$ c.s. y se da la igualdad en Holder sii $|fg| = |f||g|$ c.s. lo cual equivale a que en $\{f \neq 0\}$, $g = \|g\|_\infty$ c.s. Para $1 < p, q < \infty$, Holder es consecuencia de la desigualdad $cd \leq c^p/p + d^q/q$, para $c = |f|/\|f\|_p$ y $d = |g|/\|g\|_q$, lo cual equivale a $\lambda \log a + (1-\lambda) \log b \leq \log(\lambda a + (1-\lambda)b)$, para $a = c^p = |f|^p/\|f\|_p^p$, $b = d^q = |g|^q/\|g\|_q^q$, $\lambda = 1/p$, y se da la igualdad en Holder sii se da la igualdad c.s. $a = b$, es decir existe una constante k (que a la fuerza es $\|f\|_p^p/\|g\|_q^q$) tal que c.s.

$$|f|^p = k|g|^q.$$

La desigualdad de Minkowsky para $p = 1$ es consecuencia de que $|f+g| \leq |f| + |g|$ y se da la igualdad sii $|f+g| = |f| + |g|$ c.s., lo cual en cada punto x equivale a que los vectores $f(x)$ y $g(x)$ sean proporcionales con una proporción positiva, por tanto sii existe una función medible $h \geq 0$ tal que $f = hg$. Para $1 < p < \infty$ Minkowsky es consecuencia de la desigualdad anterior y de Holder aplicada una vez a f y $(f+g)^{p-1}$ y otra aplicada a g y a $(f+g)^{p-1}$, por tanto por un lado existe una función $h \geq 0$ tal que $f = hg$ y por otra existe una constante k_1 tal que $|f|^p = k_1|f+g|^{(p-1)q} = k_1|f+g|^p$ y una k_2 tal que $|g|^p = k_2|f+g|^p$, en definitiva existe una constante $k \geq 0$ tal que $f = kg$ c.s. ■

Ejercicio 10.11.85 Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y $f \geq 0$ es medible, entonces para $k = \int f d\mu$, se verifica

$$\sqrt{1+k^2} \leq \int \sqrt{1+f^2} d\mu \leq 1+k.$$

Dar una interpretación geométrica de las desigualdades en el caso en que $f = g'$ y sea continua, $\mu = m$ y $\Omega = [0, 1]$.

Solución.- La segunda desigualdad es obvia pues para $t \geq 0$, $1+t^2 \leq (1+t)^2$, por tanto $\sqrt{1+f^2} \leq 1+f$. Para la segunda como f es límite ascendente de funciones simples, por el TCM basta demostrarlo para $f = \sum a_i I_{A_i}$ simple y este caso se sigue de $\|\sum \lambda_i x_i\|_2 \leq \sum \lambda_i \|x_i\|_2$, para $\lambda_i = \mu(A_i)$ y $x_i = (1, a_i) \in \mathbb{R}^2$.

Si $f = g'$ la segunda expresión es la longitud de la curva (creciente) $y = g(x)$, la primera es la longitud de la cuerda que une sus extremos, y la última es la suma de los catetos del triángulo rectángulo con hipotenusa la cuerda. ■

Ejercicio 10.11.86 Demostrar que si $1 \leq r < p < s < \infty$, entonces:

a) $L_r \cap L_s$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \|f\|_r + \|f\|_s$ y la inclusión $L_r \cap L_s \rightarrow L_p$ es continua.

b) Que $L_r + L_s$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \inf\{\|g\|_r + \|h\|_s : f = g + h\}$ y la inclusión $L_p \rightarrow L_r + L_s$ es continua.

Solución.- (a) Que es normado se sigue de serlo L_r y L_s y que es continua es obvio por el ejercicio (6.2.4), pues $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\} \leq \|f\|$. Veamos que es completo:

Sea f_n de Cauchy, entonces f_n es de Cauchy en L_r en el que tiene límite $g \in L_r$ al que además converge c.s. una subsucesión g_n de f_n . Ahora bien f_n es de Cauchy también en L_s y también tiene límite $h \in L_s$ (así como g_n que es una subsucesión de una sucesión convergente), al que converge c.s. una subsucesión de g_n , que como tiene límite c.s., $h = g$ c.s. están en $L_r \cap L_s$ y $\|f_n - g\| \rightarrow 0$.

(b) Veamos que es norma: Si $\|f\| = 0$, existen $g_n \in L_r$ y $h_n \in L_s$, tales que $\|g_n\|_r \rightarrow 0$, $\|h_n\|_s \rightarrow 0$ y $f = g_n + h_n$, por tanto $f = 0$ c.s. pues

$$\mu\{|f| > \epsilon\} \leq \mu\{|g_n| > \epsilon/2\} + \mu\{|h_n| > \epsilon/2\} \rightarrow 0,$$

por la desigualdad de Tchebycheff. La desigualdad triangular se sigue de

$$\|f_1 + f_2\| \leq \|g_1 + g_2\|_r + \|h_1 + h_2\|_s \leq \|g_1\|_r + \|h_1\|_s + \|g_2\|_r + \|h_2\|_s,$$

para cualquier descomposición $f_i = g_i + h_i$, con $g_i \in L_r$ y $h_i \in L_s$. Que es de Banach se sigue del ejercicio anterior, pues basta demostrar que si $f_n \in \mathcal{E} = L_r + L_s$ verifica $\sum \|f_n\| < \infty$, entonces $\sum f_n$ converge. Tomemos $f_n = g_n + h_n$, con $\|g_n\|_r + \|h_n\|_s \leq \|f_n\| + 2^{-n}$, entonces $\sum \|g_n\|_r$ y $\sum \|h_n\|_s$ son convergentes, por tanto lo son $\sum g_n = g \in L_r$ y $\sum h_n = h \in L_s$, pero entonces $\sum f_n = g + h$, pues

$$\left\| \sum_{n=1}^m f_n - g - h \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^m g_n - g \right\|_r + \left\| \sum_{n=1}^m h_n - h \right\|_s.$$

Veamos que la inclusión es continua en 0. Para ello dado $\epsilon > 0$, sea δ tal que $\delta^{p/r} + \delta^{p/s} \leq \epsilon$ (observemos que $x^{p/r} + x^{p/s} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0^+$), entonces si $\|f\|_p \leq \delta$, para $A = \{f \geq 1\}$, $g = fI_A$ y $h = fI_{A^c}$,

$$\|f\| \leq \|g\|_r + \|h\|_s = \left(\int_A |f|^r \right)^{1/r} + \left(\int_{A^c} |f|^s \right)^{1/s} \leq \|f\|_p^{p/r} + \|f\|_p^{p/s} \leq \epsilon. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.87 (i) Demostrar que para $x > 0$, $\log x \leq x-1$ y $x \log x \geq x-1$.

(ii) Demostrar que si $\mu(\Omega) = 1$ y $0 < r < s < \infty$, entonces para $f \in L_s$, $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ y que para $\exp\{-\infty\} = 0$ y $\log 0 = -\infty$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = \exp\left\{ \int \log |f| d\mu \right\}.$$

Sol. (i) $F(x) = \log x$ es cóncava, pues $F'' < 0$, por tanto su gráfica está por debajo de su tangente en $x = 1$, es decir $\log x \leq x - 1$. $G(x) = x \log x$ es convexa, pues $G'' > 0$.

(ii) Que $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ se sigue del ejercicio (6.2.9), además por (i)

$$\begin{aligned} \log \frac{\|f\|_r^p}{\|f\|_s^p} &\leq \frac{\|f\|_r^p}{\|f\|_s^p} - 1 \Rightarrow \int \log \frac{|f|^p}{\|f\|_s^p} \leq 0 \\ &\Rightarrow \int \log |f| \leq \log \|f\|_p = \frac{\log \int |f|^p}{p} \\ &\leq \frac{\int |f|^p - 1}{p} = \int \frac{|f|^p - 1}{p} \rightarrow \int \log |f|, \end{aligned}$$

donde la última convergencia se sigue del teorema de la convergencia monótona extendido (página 97), pues para $x \geq 0$, $\frac{x^p - 1}{p} \downarrow_{(p \rightarrow 0)} \log x$, ya que para $x = 0$ el

límite es $-\infty$ y para $x > 0$ por una parte el límite es la derivada en $p = 0$ de $h(p) = x^p$ y $h'(p) = x^p \log x$; y por otra la función $g(p) = \frac{x^p - 1}{p}$ es creciente, pues $g'(p) = \frac{px^p \log x - x^p + 1}{p^2} \geq 0$, ya que por (i) para $a = x^p$, $a \log a \geq a - 1$. ■

Ejercicio 10.11.88 Demostrar que si $\mu(\Omega) < \infty$ y $f \in L_\infty$, $f \neq 0$, entonces para $a_n = \int |f|^n d\mu$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \|f\|_\infty.$$

Sol. Se sigue del ejercicio 6.2.8, tomando límites en las desigualdades

$$\mu(\Omega)^{-\frac{1}{n+1}} \|f\|_{n+1} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \|f\|_\infty,$$

donde la segunda es por ser $\mu(\Omega) < \infty$, $|f| \leq \|f\|_\infty$ c.s., $f \in L_p$ para todo p y $\int |f|^{n+1} \leq \|f\|_\infty \int |f|^n$. La primera es consecuencia de la desigualdad de Holder para $p = (n+1)/n$ y $q = n+1$ su conjugado, aplicada a $|f|^n \in L_p$ y $1 \in L_q$, pues

$$a_n = \int |f|^n \leq \left(\int |f|^{n+1} d\mu \right)^{n/n+1} \mu(\Omega)^{1/q}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.89 Demostrar la desigualdad de Heisenberg para $f = f_1 + if_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con $f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f \in L_2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Solución.- Si $\|f'\|_2 = 0$, $f' = 0$ y f es constante, por tanto $f = 0$ por estar en L_2 y si $\|xf\|_2 = 0$, $f = 0$. Ahora si una de esas normas es infinito y la otra positiva el resultado es obvio y si $f', xf \in L_2$, entonces por Holder $xf f' \in L_1$ y $\int |xf f'| \leq \|xf\|_2 \|f'\|_2$. Ahora bien $|f|^2 = f_1^2 + f_2^2$, por tanto para $h = x|f|^2$, $h' = |f|^2 + 2x(f_1 f_1' + f_2 f_2') = |f|^2 + 2x \operatorname{Re}(\bar{f} f')$ e integrando

$$\begin{aligned} \int |f|^2 &= -2 \int x \operatorname{Re}(\bar{f} f') \leq 2 \int |x \operatorname{Re}(\bar{f} f')| \\ &\leq 2 \int |x f f'| \leq 2 \|xf\|_2 \|f'\|_2. \end{aligned}$$

pues $0 = h(\infty) - h(-\infty)$, ya que h' es integrable por tanto $\mu(A) = \int_A h'$ es una medida real finita y para cualesquiera sucesiones $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} 0 &\leq h(a_n) = \int_0^{a_n} h' dx \rightarrow \int_0^\infty h' dx = \alpha, \\ 0 &\leq -h(b_n) = \int_{b_n}^0 h' dx \rightarrow \int_{-\infty}^0 h' dx = -\beta, \end{aligned}$$

pues $h(0) = 0$; por tanto existen los límites

$$h(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \alpha \geq 0, \quad h(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \beta \leq 0,$$

y si $\alpha > 0$ consideramos $0 < r < \alpha$ y un a , tal que para $x \geq a$, $h(x) \geq r$, en cuyo caso

$$\infty > \int_a^\infty x^2 |f(x)|^2 dx \geq r \int_a^\infty x dx = \infty.$$

por tanto $\alpha = 0$. Idem para β . ■

Ejercicio 10.11.90 Demostrar que si $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $g \in L_p(\mathbb{R})$, entonces $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ está en L_p y

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Solución.- Para $p = 1$ está visto. Para $p = \infty$, como $m\{|g| > \|g\|_\infty\} = 0$, tenemos que $f * g(x)$ es finito pues el integrando es integrable ya que

$$\int |f(x-y)g(y)|dy \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty,$$

y se tiene que $|f * g(x)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$, por tanto $\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$. Para $1 < p < \infty$ consideremos su conjugado q y como por Fubini se tiene

$$\int \left[\int |f(x-y)||g(y)|^p dy \right] dx = \int \left[\int |f(x-y)||g(y)|^p dx \right] dy = \|f\|_1 \|g\|_p^p < \infty,$$

tendremos que c.s. $\int |f(x-y)||g(y)|^p dy$ es finita, por lo que $h_x(y) = |f(x-y)|^{1/p} |g(y)|$ está en L_p c.s. en x y como $k_x(y) = |f(x-y)|^{1/q}$ está en L_q para cada x , tendremos por Holder que c.s. en x

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|k_x\|_q \|h_x\|_p = \|f\|_1^{1/q} \left[\int |f(x-y)||g(y)|^p dy \right]^{1/p} < \infty,$$

de donde se sigue que el producto $f * g$ es finito c.s. en x y

$$\left[\int |f(x-y)||g(y)|dy \right]^p \leq \|f\|_1^{p/q} \int |f(x-y)||g(y)|^p dy$$

e integrando en x se tiene por la primera desigualdad

$$\int \left[\int |f(x-y)||g(y)|dy \right]^p dx \leq \|f\|_1^{p/q} \int \left[\int |f(x-y)||g(y)|^p dy \right] dx = \|f\|_1^p \|g\|_p^p,$$

de donde se sigue que $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. ■

Ejercicio 10.11.91 Demostrar que la esfera unidad de $L_1([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], m)$, no tiene puntos extremales y que en la de L_p , para $1 < p < \infty$, todos lo son.

Solución.- Sea $\|f\|_1 = 1$, por tanto $\int_{[0,1]} |f| dm = 1$ y consideremos $x \in (0, 1)$ tal que

$$\int_{[0,x]} |f| dm = \frac{1}{2} = \int_{[x,1]} |f| dm,$$

entonces $f = (g+h)/2$, para las funciones, $g = 2fI_{[0,x]}$ y $h = 2fI_{[x,1]}$, de la esfera unidad de L_1 .

Sea ahora $\|f\|_p = 1$ y supongamos que existen $0 < t < 1$ y $g, h \in L_p$, de norma 1, tales que $f = tg + (1-t)h$. Entonces por la convexidad en \mathbb{R} de $\phi(x) = x^p$

$$|f|^p \leq (t|g| + (1-t)|h|)^p \leq t|g|^p + (1-t)|h|^p,$$

siendo las integrales de los extremos iguales a 1, por tanto iguales las tres y las dos ultimas funciones son iguales c.s. Pero para reales $a, b \geq 0$

$$(ta + (1-t)b)^p = ta^p + (1-t)b^p \Leftrightarrow a = b$$

por tanto tenemos que $|g| = |h|$, c.s. y como las dos primeras funciones también son iguales c.s., tendremos $|f| = |g| = |h|$. Ahora como $f = tg + (1-t)h$, si $h(x) = g(x)$ entonces coinciden con $f(x)$ y si $h(x) = -g(x) \neq 0$, $f(x) = (2t-1)g(x)$ y como $|f(x)| = |g(x)| \neq 0$, $t = 1$, siendo $0 < t < 1$. Por lo tanto $f = g = h$, c.s. ■

Ejercicio 10.11.92 Demostrar que en un espacio de medida σ -finito $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, si g es medible tal que $fg \in L_1$ para toda $f \in L_p$, entonces $g \in L_q$, para q el conjugado de p .

Solución.- Para $p = \infty$ es obvio tomando $f = 1$. Para $p < \infty$ sabemos que existe $s'_n \in \mathcal{S}$, tal que $|s'_n| \leq |g|$ y $s'_n \rightarrow g$ y para $A_n \uparrow \Omega$, con $\mu(A_n) < \infty$, sea $s_n = s'_n I_{A_n} \in \tilde{\mathcal{S}} \subset L_q$ (tanto si $q = \infty$ como si $q < \infty$), tal que $|s_n| \leq |g|$ y $s_n \rightarrow g$. Ahora sea $T_n \in L_p^*$, $T_n(f) = \int f s_n \rightarrow T(f) = \int f g$ (por el TCD) para toda $f \in L_p$ y como estos funcionales están puntualmente acotados

$$|T_n(f)| \leq \int |f s_n| \leq \int |f g|, \quad \forall n,$$

se tiene por el Teorema de Banach-Steinhaus (ver Ash, pág.143) que están uniformemente acotados, $\sup |T_n| = k < \infty$, por tanto T es acotado pues $|T_n(f)| \leq \|T_n\| \|f\|_p \leq k \|f\|_p$ y

$$|T(f)| = \lim |T_n(f)| \leq k \|f\|_p,$$

se sigue que $T \in L_p^*$ y existe $g' \in L_q$ tal que $\int f g = T(f) = \int f g'$ para toda $f \in L_p$, en particular para $f = I_{B \cap A_n}$, se sigue que en cada A_n $g = g'$ c.s., por tanto en Ω . ■

Ejercicio 10.11.93 Sean $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrables.

(a) Demostrar que $|f|^2 + |g|^2$ es integrable.

(b) Demostrar que $h = |f|^r |g|^s$ es integrable para cualesquiera $r, s > 0$ tales que $r + s = 1$ y que

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1^r \|g\|_1^s.$$

Ind.- (a) $|f|^2 + |g|^2 \leq |f|^2 + |g|^2 \leq (|f| + |g|)^2$.

(b) Aplicar Holder a $p = 1/r, q = 1/s$. $|f|^r \in L_p$ y $|g|^s \in L_q$. ■

Ejercicio 10.11.94 Demostrar que en un espacio de medida finita, para todo $0 < s < r < \infty$, $L_r \subset L_s$ y que si $f_n, f \in L_r$,

$$\|f_n - f\|_r \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_s \rightarrow 0.$$

Ind.- Aplicar Holder a $p = r/s$, q su conjugado, $|f_n - f|^s \in L_p$ y $1 \in L_q$. ■

Ejercicio 10.11.95 Sea \mathcal{G} un grupo aditivo y $(\mathcal{G}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida invariante por traslaciones por la derecha, es decir tal que $\mu(A + a) = \mu(A)$ para cada medible A y cada $a \in \mathcal{G}$. Demostrar que para cada $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ medible y $a \in \mathcal{G}$.

$$\int_{\mathcal{G}} f(x) d\mu = \int_{\mathcal{G}} f(x - a) d\mu,$$

en el sentido de que si una integral existe también la otra y coinciden.

Ind.- Sígase la técnica habitual de funciones indicador, simples, TCM, etc. ■

Ejercicio 10.11.96 Consideremos la *función regla* de Riemann, $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \text{ es irracional,} \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in [0, 1] \text{ y } (p, q) = 1. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f es Borel medible.

(b) Demostrar que $C(f)$, los puntos de continuidad de f , son los irracionales de $[0, 1]$.

Demostración. (a) Sea $B \in \mathcal{B}([0, 1])$, entonces $f^{-1}(B)$ es unión disjunta de los Borelianos

$$f^{-1}(B \cap \{0\}), \quad f^{-1}(B \cap \{1\}), \quad f^{-1}(B \cap \{1/q : q \in \mathbb{N}\}),$$

pues el primero es vacío ó los irracionales, el segundo vacío ó $\{0\}$ y el tercero es unión (a lo sumo numerable) de conjuntos $f^{-1}(\{1/q\})$, los cuales son finitos pues para cada q a lo sumo hay un número finito de $p \in \mathbb{N}$, tales que $p/q \in [0, 1]$.

(b) Sea $x = p/q \in [0, 1]$ racional y $0 < \epsilon < 1/q$, entonces como para todo $\delta > 0$ existe un irracional $y \in (x - \delta, x + \delta)$, tendremos que $|f(x) - f(y)| = |f(x)| = 1/q > \epsilon$, por lo que f no es continua en x . Sea $x \in [0, 1]$ irracional y $0 < \epsilon$, entonces como hay un número finito de naturales $q \leq 1/\epsilon$ y para cada uno también un número finito de naturales p , tales que $p/q \in [0, 1]$, tendremos un conjunto finito de racionales $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, tales que $f(x_i) \geq \epsilon$, por tanto como x tiene un entorno que no contiene a ningún x_i , tendremos que en todo punto suyo y , $|f(x) - f(y)| = f(y) < \epsilon$. ■

Ejercicio 10.11.97 Demostrar que en \mathbb{R} tanto para μ la medida de Lebesgue como μ la medida de contar en los naturales se tiene para todo $a > 0$

$$\left(\int_0^a x d\mu \right)^2 = \int_0^a x^3 d\mu.$$

Demostración. Para μ la medida de Lebesgue es $\int_0^a x = a^2/2$ y $\int_0^a x^3 = a^4/4$. Para la medida de contar se demuestra por inducción que para $n = [a]$

$$(1 + \cdots + n)^2 = 1 + \cdots + n^3,$$

pues para $s_n = 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$, $z_n = s_n^2$ es la expresión de la izquierda y si denotamos con b_n la de la derecha

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= s_{n+1}^2 - s_n^2 = (s_{n+1} - s_n)(s_{n+1} + s_n) = (n+1)(2s_n + (n+1)) \\ &= (n+1)(n(n+1) + n+1) = (n+1)^3 = b_{n+1} - b_n, \end{aligned}$$

siendo $b_1 = z_1$ y si $b_n = z_n$, entonces $b_{n+1} = z_{n+1}$. ■

Ejercicio 10.11.98 Si denotamos con $p_1 \cdots p_k$ la envolvente convexa de los puntos p_i , demostrar que la medida n -dimensional de una pirámide $P = p_1 \cdots p_{n+1}$, definida por $n+1$ puntos $p_i \in \mathbb{R}^n$ (que no están en un hiperplano) es

$$m_n(P) = \frac{m_{n-1}(B) \cdot h}{n},$$

para la base $n-1$ -dimensional $B = p_1 \cdots p_n$, que está en un hiperplano a distancia h de p_{n+1} . Como consecuencia si denotamos con h_i la distancia de p_{i+1} al subespacio generado por p_1, \dots, p_i , demostrar que

$$m_n(P) = \frac{h_1 \cdots h_n}{n!}.$$

Demostración. Por una traslación y un giro podemos suponer que $p_{n+1} = 0$ y $B \subset \{x_n = h\}$, entonces para la sección $P_t = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in P\}$

$$m_n[P] = \int_0^h m_{n-1}[P_t] dt = m_{n-1}[B] \int_0^h \frac{t^{n-1}}{h^{n-1}} dt = \frac{m_{n-1}(B) \cdot h}{n}.$$

El resto por inducción. ■

Ejercicio 10.11.99 Dada una sucesión creciente de medidas $\mu_n \leq \mu_{n+1}$ y $\mu = \lim \mu_n$ en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) . Demostrar que si $E_n \in \mathcal{A}$ y $\mu_n(E_n) = 0$, entonces $\mu(\limsup E_n) = 0$.

Ind. Sea $B_n = \cup_{i=n}^{\infty} E_i$ y $B_n \downarrow B = \limsup E_n$. Entonces para $m \geq n$, $B_m \subset B_n$ y

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu_n(B_m) \leq \mu_n(B_n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu_n(E_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu_i(E_i) = 0 \\ 0 &= \mu_n(B_m) \Rightarrow \mu_n(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.11.100 Dadas dos sucesiones crecientes de medidas en un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , $\mu_n \leq \mu_{n+1}$, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ y las medidas $\mu = \lim \mu_n$ y $\lambda = \lim \lambda_n$ tales que μ es σ -finita y para todo n $\lambda_n \ll \mu_n$. Demostrar que $\lambda \ll \mu$ y que

$$\lim \frac{d\lambda_n}{d\mu_n} = \frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Ind. Lo primero es obvio. Ahora como $\mu_n \ll \mu$, sea $g_n = d\mu_n/d\mu$ y como para todo A

$$\int_A g_n d\mu = \mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A) = \int_A g_{n+1} d\mu \uparrow \mu(A),$$

tenemos por (2.4.27), pág.104, y ser μ σ -finita que existe g medible tal que $g_n \leq g_{n+1} \uparrow g$ c.s. (μ) . Ahora por el TCM $\mu(A) = \int_A g d\mu$, por tanto $g = 1$ c.s. (μ) . Ahora si llamamos $f_n = d\lambda_n/d\mu_n$, tendremos

$$\begin{aligned} \int_A f_n g_n d\mu &= \int_A f_n d\mu_n = \lambda_n(A) \leq \lambda_{n+1}(A) = \\ &= \int_A f_{n+1} d\mu_{n+1} = \int_A f_{n+1} g_{n+1} d\mu, \end{aligned}$$

por tanto $f_n g_n \leq f_{n+1} g_{n+1} \uparrow f$ c.s. (μ) y como $\lambda_n \uparrow \lambda$, por el TCM, $f = d\lambda/d\mu$, por tanto $f_n \rightarrow f$ c.s. (μ) . ■

Ejercicio 10.11.101 Demostrar que toda función convexa en un intervalo abierto real es continua.

Indicación. Obvio haciendo un dibujo, pues dados tres puntos del intervalo $a < x < b$ y los puntos correspondientes en la gráfica $A = (a, f(a))$, $X = (x, f(x))$ y $B = (b, f(b))$, tendremos por ser f convexa que X está bajo la recta AB y del mismo modo si $y \in (a, x) \cup (x, b)$, el punto correspondiente Y está entre el par de rectas pasando por X , AX y BX y tenemos que si $y \rightarrow x$, $Y \rightarrow X$. ■

Ejercicio 10.11.102 (a) Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que para todo $q \in \mathbb{Q}$, $q + A = A$. Demostrar que: (i) Si $r = m[[0, 1] \cap A]$, entonces para todo Boreliano B , $m[B \cap A] = r \cdot m[B]$. (ii) que $r = 0$ ó $r = 1$ y (iii) que $m[A] = 0$ ó $m[A^c] = 0$.

(b) Demostrar que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, con $m[B] > 0$, entonces casi seguro todo número real está en la unión $\cup_{r \in \mathbb{Q}} (B + r)$.

Ind. (a) La medida $\mu(B) = m[A \cap B]$, verifica

$$\mu(B + q) = m(A \cap (B + q)) = m((A + q) \cap (B + q)) = m(A \cap B) = \mu(B),$$

por tanto

$$\mu\left(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right] = \mu\left(0, \frac{1}{n}\right] = r \cdot \frac{1}{n},$$

pues $r = \mu(0, 1] = n \cdot \mu(0, 1/n]$ y por tanto

$$\mu\left(\frac{m}{n}, \frac{m+k}{n}\right] = \mu\left(0, \frac{k}{n}\right] = r \cdot \frac{k}{n},$$

de donde $\mu(a, b] = r \cdot m(a, b]$ para $a, b \in \mathbb{Q}$. Ahora para a real basta tomar una sucesión de racionales $a_n \downarrow a$, pues $(a_n, b]$ $\uparrow (a, b]$ y $\mu(a_n, b] \rightarrow \mu(a, b]$ y para $b \in \mathbb{R}$, basta tomar una sucesión de racionales $b_n \downarrow b$, pues $(a, b_n]$ $\downarrow (a, b]$. En definitiva se tiene que las medidas μ y $r \cdot m$ coinciden en los semiintervalos reales y por el teorema de extensión en todos los Borelianos, $\mu(B) = r \cdot m(B)$. Ahora bien $m(A) = \mu(A) = r \cdot m(A)$ y tenemos dos posibilidades:

(1) Si $m(A) \neq 0$, $r = 1$ y $\mu = m$, por tanto $m(A^c) = \mu(A^c) = m(A \cap A^c) = 0$.

(2) Si $m(A) = 0$, $\mu(B) = m(B \cap A) = 0$ y $r = 0$.

(b) Considérese el Boreliano $A = \cup_{r \in \mathbb{Q}} (B + r) = \mathbb{Q} + B$, el cual satisface $A + q = A$ para todo $q \in \mathbb{Q}$ y es tal que $m[A] \geq m[B] > 0$. Se sigue de (aiii) que $m(A^c) = 0$. ■

Ejercicio 10.11.103 Demostrar que para cualquier número real positivo $r > 0$ y $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medible e integrable

$$r \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 r^{f(x)} dx.$$

Ind. Aplicar la Desigualdad de Jensen, teniendo en cuenta que $\varphi(x) = r^x = e^{x \log r}$, es convexa. ■

Ejercicio 10.11.104 Calcular el área y el volumen de la pseudoesfera de radio R .

Ind. La tractriz¹¹ (fig.10.1) es la curva del plano que pasa por $(R, 0)$ y cuya tangente en cada punto corta al eje y en un punto que dista del anterior R y la pseudoesfera de radio R es la superficie de revolución alrededor del eje y , de la tractriz y de su imagen especular respecto del eje x .

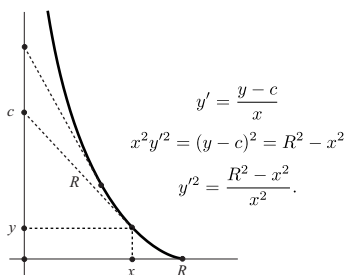


Figura 10.1. Tractriz

Por tanto la tractriz satisface $y'(x)^2 = (R^2 - x^2)/x^2$ y si consideramos la aplicación $F: B = (0, R) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, \theta) = (x \cos \theta, x \sin \theta, y(x))$, tendremos que $J[DF] = \sqrt{\det(A^t A)} = R$, pues

$$A^t A = \begin{pmatrix} \cos & \sin & y' \\ -x \sin & x \cos & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos & -x \sin \\ \sin & x \cos \\ y' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y'^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{x^2} & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

por tanto el área de media tractriz (la mitad superior), vale

$$\gamma_2 H_2[F(B)] = \int_B |J[DF]| dm_2 = 2\pi \int_{(0,R)} R dm_1 = 2\pi R^2,$$

por lo tanto el **área de la pseudoesfera de radio R** es $4\pi R^2$, (las dos partes), la misma que la de la esfera de radio R .

¹¹Ver la tractriz en los [Apuntes de Ecuaciones diferenciales](#)

Para el volumen denotaremos con $y = f(x)$ nuestra tractriz (para que no haya confusión), por tanto $f'(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}/x$, denotaremos con g su inversa y con E el volumen generado. Por tanto haciendo el cambio $x = g(y)$, tendremos que

$$\begin{aligned} m_3[E] &= \int_{(0,\infty)} m_2[E_y] dm_y = \int_{(0,\infty)} \pi g(y)^2 dm_y = \\ &= \pi \int_{(0,R)} x^2 f'(x) dm_x = \pi \int_{(0,R)} x \sqrt{R^2 - x^2} dm_x \\ &= -\frac{\pi}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{\pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

por lo tanto el volumen de la pseudoesfera de radio R es $2\pi R^3/3$ ¡la mitad del de la esfera de radio R ! ■

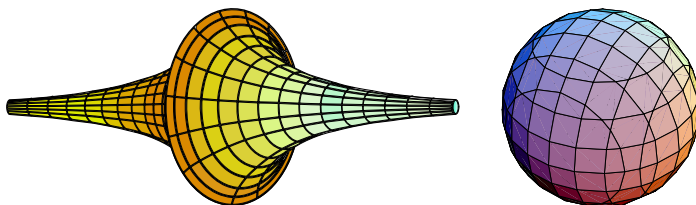


Figura 10.2. Pseudoesfera y Esfera de igual radio

Ejercicio 10.11.105 Demostrar que el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada, entre dos bases cuadradas de áreas A y B a una altura h es¹²

$$\frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}).$$

Ind. Si el vértice de la pirámide está a distancia r de la base pequeña $A = a^2$ y por tanto a $h+r$ de la base grande $B = b^2$, tendremos por semejanza que $(h+r)/b = r/a$, por lo que $r = ha/(b-a)$ y el volumen es

$$\frac{1}{3}((h+r)B - rA) = \frac{1}{3} \left(\frac{hbB}{b-a} - \frac{haA}{b-a} \right) = \frac{h}{3}(b^2 + a^2 + ab). \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.106 En \mathbb{R}^n consideremos el hipertetraedro T definido por $n+1$ puntos x_i elegidos del siguiente modo: x_1 cualquiera; x_2 a distancia π de x_1 ; x_3 a distancia π de la recta que contiene a x_1, x_2 ; x_4 a distancia π del plano que contiene a x_1, x_2, x_3 ; etc... Demostrar que el volumen n -dimensional de T es el volumen $2n$ -dimensional de la bola unidad de \mathbb{R}^{2n} .

Ind. Aplicar (10.11.98). ■

¹²Este problema es uno de los que se encuentran en el *Papiro de Moscú*, uno de los mas antiguos documentos egipcios (junto con el de Rhind) con problemas matemáticos (ver la introducción, pág.1).

Ejercicio 10.11.107 Consideremos en los Borelianos de la esfera unidad de \mathbb{R}^n , $S^{n-1} = \{x : \|x\|^2 = \sum x_i^2 = 1\}$, una medida ν y en $(0, \infty)$ la medida de Borel

$$\lambda(A) = \int_A \rho^{n-1} d\rho,$$

y para el homeomorfismo $G: (0, \infty) \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $G(\rho, y) = \rho y$, sea $\mu = G_*(\lambda \times \nu)$. Demostrar: (a) para $t > 0$, $\mu(tE) = t^n \mu(E)$ y (b) que μ es invariante por rotaciones si ν lo es.

Ind. (a) Como $\lambda(tA) = t^n \lambda(A)$ se tiene para $F = G^{-1}$,

$$\mu(tE) = \lambda \times \nu[F(tE)] = \int \lambda[F(tE)^y] d\nu = \int \lambda[tF(E)^y] d\nu = t^n \mu(E).$$

(b) Para cada rotación R y $t \in (0, \infty)$, $F[R(E)]_t = R[F(E)]_t$, por tanto si ν es invariante por R , también μ , pues

$$\mu[R(E)] = \int \nu[R[F(E)]_t] d\lambda,$$

la otra implicación es obvia. ■

Ejercicio 10.11.108 Sea $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ medible, tal que $f(x)$ y $xf(x)$ sean integrables. Demostrar que para $t \in [0, \infty)$

$$x(t) = \frac{\int_0^t f(x) dm}{\int_0^\infty f(x) dm} \geq y(t) = \frac{\int_0^t xf(x) dm}{\int_0^\infty xf(x) dm}.$$

y que la curva¹³ del plano $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ es continua y convexa.

Indicación.- La continuidad (uniforme) de $x(t)$ e $y(t)$ se sigue del ejercicio (2.4.25). La curva está en el cuadrado unidad, pues $x(t), y(t) \in [0, 1]$ y $\sigma(0) = (0, 0)$, $\sigma(1) = (1, 1)$, por tanto basta demostrar que es convexa, pues en tal caso estará por debajo del segmento que une esos dos puntos y por tanto se verificará la desigualdad pedida.

¹³Las funciones x e y tienen interpretación práctica. Por ejemplo en economía si $\mu[a, b] = \int_a^b f(x) dm$ es el número de personas de una población con renta entre a y b , entonces $\int_0^\infty f(x) dm$ es el número de personas de esa población, $\int_0^t xf(x) dm$ es la renta total que tienen las personas con renta menor o igual que t y $\int_0^\infty xf(x) dm$ es la renta total de la población, por tanto $x(t)$ representa el porcentaje de la población con renta menor o igual que t , e $y(t)$ representa el porcentaje de la renta total que tienen los que tienen renta menor o igual que t respecto de la renta de toda la población. Con esta interpretación es obvio que $y(t) \leq x(t)$, pues si hay n individuos con rentas $r_i \leq t$ y m con rentas $r_{n+j} \geq t$, entonces $\sum_{i=1}^n r_i/n \leq t \leq \sum_{j=1}^m r_{n+j}/m$, lo cual implica que $m \sum_{i=1}^n r_i \leq n \sum_{j=1}^m r_{n+j}$, es decir que $(n+m) \sum_{i=1}^n r_i \leq n \sum_{i=1}^{n+m} r_i$ y esto equivale a que $y(t) = (\sum_{i=1}^n r_i) / (\sum_{i=1}^{n+m} r_i) \leq n/(n+m) = x(t)$.

Sean $x(a) < x(b) < x(c)$, como x es monótona creciente eso implica que $a < b < c$, entonces $x(b) = \lambda x(a) + (1 - \lambda)x(c)$, obviamente para

$$\lambda = \frac{x(c) - x(b)}{x(c) - x(a)} = \frac{\int_b^c f(x) dm}{\int_a^c f(x) dm}$$

y basta ver que $y(b) \leq \lambda y(a) + (1 - \lambda)y(c)$, es decir $\lambda(y(c) - y(a)) \leq y(c) - y(b)$ o equivalentemente

$$\begin{aligned} \int_b^c f(r) \int_a^c s f(s) &\leq \int_a^c f(s) \int_b^c r f(r) \Leftrightarrow \\ \int_b^c f(r) \left(\int_a^b s f(s) + \int_b^c s f(s) \right) &\leq \left(\int_a^b f(s) + \int_b^c f(s) \right) \int_b^c r f(r) \Leftrightarrow \\ \int_b^c f(r) \int_a^b s f(s) &\leq \int_a^b f(s) \int_b^c r f(r) \Leftrightarrow \\ \int_{[b,c] \times [a,b]} f(r) s f(s) &\leq \int_{[b,c] \times [a,b]} f(s) r f(r) \end{aligned}$$

y esta última es obvia, pues $s \in [a, b]$ y $r \in [b, c]$, por tanto $s \leq r$. ■

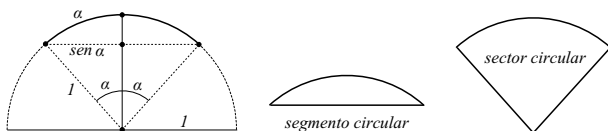


Figura 10.3. Arco, segmento y sector de la circunferencia.

Ejercicio 10.11.109 Calcular el centro de masa de un arco de circunferencia.

Ind. Consideremos $F: \theta \in I = (-\alpha, \alpha) \rightarrow F(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ y el arco $A = F(I)$ (ver fig.10.3, que está girada), entonces si $C(A) = (a, b)$ es su centro de masa, tendremos que

$$a = \frac{\int_A x dH_1}{H_1(A)} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{2\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad b = \frac{\int_A y dH_1}{H_1(A)} = 0. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.110 Calcular los centros de masa de (a) un segmento y (b) de un sector circular.

Ind. Denotemos con C el segmento de circunferencia entre $-\alpha$ y α (ver fig.10.3) y con $A = C \cup T$ el sector circular entre $-\alpha$ y α , para T el triángulo isósceles correspondiente de ángulo 2α , entonces se tiene (haciendo el cambio $y = \cos t$)

considerando $(\operatorname{sen} \cos)' = \cos^2 - \operatorname{sen}^2 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2$)

$$m_2[T] = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha,$$

$$m_2[C] = 2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \int_0^\alpha \operatorname{sen}^2 t dt = \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha,$$

$$\int_C y dm_2 = 2 \int_{\cos \alpha}^1 y \sqrt{1-y^2} dy = -\frac{2}{3} (1-y^2)^{3/2} \Big|_{\cos \alpha}^1 = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \alpha$$

$$\int_T y dm_2 = 2 \int_0^{\cos \alpha} y^2 \tan \alpha dy = \frac{2}{3} \tan \alpha \cos^3 \alpha = \frac{2}{3} \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha,$$

(a) El centro de masa del segmento está a distancia del centro de la circunferencia

$$\frac{\int_C y dm_2}{m_2[C]} = \frac{2}{3} \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

(b) El centro de masa del sector está a distancia del centro de la circunferencia

$$\begin{aligned} \frac{\int_A y dm_2}{m_2[A]} &= \frac{\int_C y dm_2 + \int_T y dm_2}{m_2[C] + m_2[T]} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \alpha + \frac{2}{3} \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

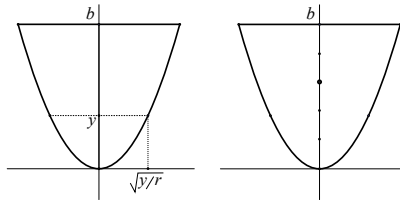


Figura 10.4. Centroide de un segmento de parábola.

Ejercicio 10.11.111 Calcular el centro de masa de un segmento de parábola, es decir de la región comprendida entre una parábola y un segmento perpendicular a su eje, a distancia b de su vértice.

Ind. Por comodidad consideramos la parábola con vértice en el origen y eje el y , por tanto de ecuación $y = rx^2$, con $r > 0$ estando el segmento en la recta $y = b$. Si denotamos con E el segmento de parábola, tendremos que por simetría el centro de masa está en el eje y a altura

$$\begin{aligned} \frac{\int_E y dm_2}{m_2[E]} &= \frac{\int_0^b \int y I_{E_y} dm dm}{\int_0^b I_{E_y} dm dm} = \frac{2 \int_0^b y \sqrt{\frac{y}{r}} dm}{2 \int_0^b \sqrt{\frac{y}{r}} dm} \\ &= \frac{\int_0^b y^{\frac{3}{2}} dm}{\int_0^b y^{\frac{1}{2}} dm} = \frac{b^{\frac{3}{2}+1}/(\frac{3}{2}+1)}{b^{\frac{1}{2}+1}/(\frac{1}{2}+1)} = \frac{3}{5} b. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.11.112 Calcular el centro de masa de la superficie de un casquete esférico.

Ind. Consideremos el casquete $F[B]$ de altura h en la esfera de radio 1, parametrizado por $F: (x, y) \in B = B[0, r] \rightarrow (x, y, z(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ (ver fig.10.5), siendo

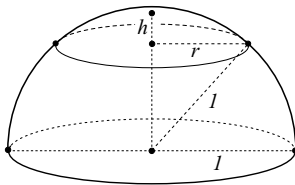


Figura 10.5. Casquete esférico.

$(1-h)^2 + r^2 = 1$, $r^2 = (2-h)h$ y $z(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$
entonces si $C(F[B]) = (a, b, c)$ es su centro de masa, tendremos que derivando $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + zz_x = 0$ e $y + zz_y = 0$, por tanto $z^2 + z^2 z_x^2 + z^2 z_y^2 = 1$ y

$$\begin{aligned} a &= \frac{\int_{F(B)} x \, dH_2}{H_2(F(B))} = 0, \\ b &= \frac{\int_{F(B)} y \, dH_2}{H_2(F(B))} = 0, \\ c &= \frac{\int_{F(B)} z \, dH_2}{H_2(F(B))} = \frac{\int_B z \circ F \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dH_2}{H_2(F(B))} \\ &= \frac{\int_B \sqrt{z^2 + z^2 z_x^2 + z^2 z_y^2} \, dH_2}{H_2(F(B))} = \frac{H_2(B)}{H_2(F(B))} \\ &= \frac{m_2(B)}{\gamma_2 H_2(F(B))} = \frac{\pi r^2}{2\pi h} = 1 - \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

donde el área $2\pi R h$ del casquete de la esfera de radio R y altura h , se vió en el ejercicio (5.5.6). ■

Ejercicio 10.11.113 Calcular el centro de masa del volumen de (a) un segmento esférico (b) un sector esférico.

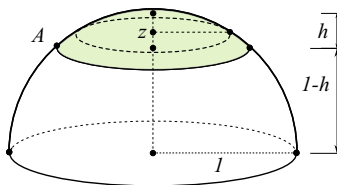


Figura 10.6. Segmento esférico.

Ind. (a) Consideremos el segmento esférico A , definido por un casquete de altura h en la esfera de radio 1 y cuyo paralelo es horizontal, entonces su centro de masa tiene distancia al centro de la esfera

$$\begin{aligned} \frac{\int_A z \, dm_3}{m_3[A]} &= \frac{\pi \int_{1-h}^1 z(1-z^2) \, dz}{\pi \int_{1-h}^1 (1-z^2) \, dz} = \frac{\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_{1-h}^1}{\left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{1-h}^1} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{(1-h)^2}{2} + \frac{(1-h)^4}{4}}{1 - \frac{1}{3} - (1-h) + \frac{(1-h)^3}{3}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1-2h+h^2}{2} + \frac{1-4h+6h^2-4h^3+h^4}{4}}{-\frac{1}{3} + h + \frac{1-3h+3h^2-h^3}{3}} \\ &= \frac{3-2h^2+6h^2-4h^3+h^4}{4} \cdot \frac{3}{3h^2-h^3} = \frac{3}{4} \frac{(2-h)^2}{3-h}. \end{aligned}$$

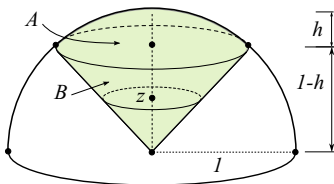


Figura 10.7. Sector esférico.

(b) Veamos ahora la distancia del centro de masa del sector E (definido por un casquete de altura h) al centro de la esfera, para $E = A \cup B$, siendo B el cono correspondiente, de altura $a = 1 - h$

$$\begin{aligned} \frac{\int_E z \, dm_3}{m_3[E]} &= \frac{\int_A z \, dm_3 + \int_B z \, dm_3}{m_3[A] + m_3[B]} \\ &= \frac{\pi \int_a^1 z(1-z^2) \, dz + \pi \int_0^a z \frac{1-a^2}{a^2} z^2 \, dz}{\pi \int_a^1 (1-z^2) \, dz + \pi \int_0^a \frac{1-a^2}{a^2} z^2 \, dz} \\ &= \frac{\left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_a^1 + \frac{1-a^2}{a^2} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^a}{\left[z - \frac{z^3}{3} \right]_a^1 + \frac{1-a^2}{a^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^a} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + (1-a^2) \frac{a^2}{4}}{1 - \frac{1}{3} - a + \frac{a^3}{3} + (1-a^2) \frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}}{1 - \frac{1}{3} - a + \frac{a}{3}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1-a^2}{2-2a} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1+a}{2} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{h}{2} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 10.11.114 Dada una función continua no negativa $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se considera la curva en el plano yz , $y = g(z)$ y la región del plano limitada por la curva, su simétrica respecto del eje z y las rectas $z = 0$ y $z = b$; y el cuerpo

de revolución que genera en torno al eje z . Demostrar que los centroides de la región plana, del cuerpo y de la superficie de este (para g diferenciable) están sobre el eje z a alturas respectivas

$$(1) \frac{\int_0^b zg(z) dm}{\int_0^b g(z) dm}, \quad (2) \frac{\int_0^b zg(z)^2 dm}{\int_0^b g(z)^2 dm}, \quad (3) \frac{\int_0^b zg(z)\sqrt{1+g'(z)^2} dm}{\int_0^b g(z)\sqrt{1+g'(z)^2} dm}$$

Ind. (1) Para B la región plana tendremos, por simetría, que el centro de masa está en el eje z a altura

$$\frac{\int_E z dm_2}{m_2[B]} = \frac{\int_0^b z m_1(B_z) dm_1}{\int_0^b m_1(B_z) dm_1} = \frac{\int_0^b z 2g(z) dm}{\int_0^b 2g(z) dm}.$$

(2) Para E el cuerpo de revolución tendremos, por simetría, que el centro de masa está en el eje z a altura

$$\frac{\int_E z dm_3}{m_3[E]} = \frac{\int_0^b z m_2(E_z) dm}{\int_0^b m_2(E_z) dm} = \frac{\int_0^b z \pi g(z)^2 dm}{\int_0^b \pi g(z)^2 dm} = \frac{\int_0^b zg(z)^2 dm}{\int_0^b g(z)^2 dm}.$$

(3) Para la superficie sea $S = F(A)$, para $F: A = [0, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(z, \theta) = (g(z) \cos \theta, g(z) \sin \theta, z)$, para la que $J(DF) = g\sqrt{1+g'^2}$, entonces el centro de masa está en el eje z a altura

$$\frac{\int_S z dH_2}{H_2(S)} = \frac{\int_A z[F]J(DF) dm_2}{\int_A J(DF) dm_2} = \frac{2\pi \int_0^b zg(z)\sqrt{1+g'(z)^2} dm_1}{2\pi \int_0^b g(z)\sqrt{1+g'(z)^2} dm_1}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.115 Encontrar las curvas $x = g(y)$, con $g(b) > 0$ para todo $b > 0$, del plano xy , tal que el centroide de la región plana limitada por la curva, su simétrica respecto del eje y y las rectas $y = 0$ e $y = b$ está a altura $\lambda \cdot b$, para $\lambda \in (0, 1)$ constante.

Ind. Sea B dicha región, entonces por el ejercicio (10.11.114), tendremos que para todo $b > 0$

$$\lambda b \int_0^b g(z) = \int_0^b zg(z),$$

y derivando en b ,

$$\lambda \int_0^b g(z) + \lambda b g(b) = b g(b), \quad \text{es decir}$$

$$\lambda \int_0^b g(z) = (1 - \lambda) b g(b), \quad \text{y derivando}$$

$$\lambda g(b) = (1 - \lambda) g(b) + (1 - \lambda) b g'(b), \quad \text{es decir}$$

$$(2\lambda - 1) g(b) = (1 - \lambda) b g'(b),$$

y para $q = (1 - \lambda)/(2\lambda - 1)$, nuestra curva es solución de la ecuación diferencial en el plano xy , $1/y = qx'(y)/x(y)$, es decir $(\log y)' = (q \log x(y))'$ y por tanto $\log(y/x(y)^q)$ es constante, y la solución es $y = kx^q$, para $k > 0$. Observemos que dado q , $\lambda = \frac{q+1}{2q+1}$, y que tanto para $q > 0$ como para $q < -1$, $\lambda \in (0, 1)$. Además para $q = \Phi$, $1/\lambda = \Phi$ (Φ la *proporción áurea*, i.e. la solución positiva de $x^2 - x - 1 = 0$). \blacksquare

Ejercicio 10.11.116 Encontrar las curvas $y = g(z)$, con $g(b) > 0$ para todo $b > 0$, del plano yz , que generen un cuerpo de revolución en torno al eje z , cuyo tronco entre 0 y b , para todo $b > 0$, tenga el centro de masa a altura $\lambda \cdot b$, para $\lambda \in (0, 1)$ constante.

Ind. Sea E dicho tronco. Entonces por el ejercicio (10.11.114), tendremos que para todo $b > 0$

$$\lambda b \int_0^b g(z)^2 dz = \int_0^b z g(z)^2 dz,$$

y derivando en b ,

$$\lambda \int_0^b g(z)^2 dz + \lambda b g(b)^2 = b g(b)^2, \quad \text{es decir}$$

$$\lambda \int_0^b g(z)^2 dz = (1 - \lambda) b g(b)^2, \quad \text{y derivando}$$

$$\lambda g(b)^2 = (1 - \lambda) g(b)^2 + (1 - \lambda) b 2 g(b) g'(b), \quad \text{es decir}$$

$$(2\lambda - 1) g(b) = (2 - 2\lambda) b g'(b),$$

y para $p = (2 - 2\lambda)/(2\lambda - 1)$, nuestra curva es solución de la ecuación diferencial en el plano yz , $(p \log y - \log z)' = 0$, es decir las curvas $z = k y^p$. Obsérvese que p es racional sii $\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{p+2}{p+1} \right)$ es racional. Observemos que para $p = 2\Phi$, $1/\lambda = \Phi$. ■

Ejercicio 10.11.117 Calcular el centro de masa de un cono de base circular y de altura c .

Ind. En términos del ejercicio (10.11.114), tendremos que $y = g(z)$ es una recta, que pasa por $(0, c)$, de pendiente $-c/R$, para R el radio del círculo de la base, es decir $z = -yc/R + c$, por tanto $g(z) = (c - z)R/c$ y el centro está a altura (haciendo el cambio $t = c - z$)

$$\frac{\int_0^c z g^2(z) dz}{\int_0^c g^2(z) dz} = \frac{\int_0^c z (c - z)^2 dz}{\int_0^c (c - z)^2 dz} = \frac{\int_0^c (c - t) t^2 dt}{\int_0^c t^2 dt} = c - \frac{\int_0^c t^3 dt}{\int_0^c t^2 dt} = c - \frac{c^4/4}{c^3/3} = c/4. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 10.11.118 Calcular la altura del centro de masa de un cono de base un Boreliano plano E con $0 < m_2(E) < \infty$ y de altura c .

Ind. Sea C el cono. Con una traslación horizontal podemos considerar que su vértice es $(0, 0, c)$, entonces

$$\begin{aligned} C &= \{ \lambda(x, y, 0) + (1 - \lambda)(0, 0, c) : \lambda \in [0, 1], (x, y) \in E \} \\ &= \{ (\lambda x, \lambda y, (1 - \lambda)c) : \lambda \in [0, 1], (x, y) \in E \}. \end{aligned}$$

por tanto para cada $z \in (0, c)$ y $\lambda = (c - z)/c$, es decir tal que $(1 - \lambda)c = z$,

$$C_z = \{ (\lambda x, \lambda y) : (x, y) \in E \} = \lambda E,$$

por tanto la altura de su centroide es

$$\frac{\int_0^c z m_2(E_z) dz}{\int_0^c m_2(E_z) dz} = \frac{\int_0^c z (c - z)^2 m_2(E_z) dz}{\int_0^c (c - z)^2 dz} = \frac{c}{4}.$$

siendo esta última cuenta la misma que la del ejercicio (10.11.117). ■

Ejercicio 10.11.119 Tenemos una caja con bolas blancas y negras. Si extraemos dos al azar, la probabilidad de que sean blancas es $1/2$. ¿Cuántas bolas hay de cada, si sabemos (1) que hay 10 o menos bolas, (2) que hay más de 10 y menos de 100?

Solución.- Sean n el número de blancas, m el de negras y $N = n + m$ el número total de bolas. El número de posibles parejas de blancas es $n(n-1)/2$ y el total de parejas es $N(N-1)/2$, por tanto

$$\frac{n(n-1)}{N(N-1)} = \frac{1}{2},$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} 2n(n-1) &= (n+m)(n-1+m) = n(n-1) + 2nm - m + m^2 \\ n^2 - n &= m^2 - m + 2nm, \quad (n-m)(n+m-1) = 2nm \end{aligned}$$

de donde que $n > m$ y por tanto $n = m + a$, de donde

$$a(2m + a - 1) = 2(m + a)m, \quad 2ma + a(a - 1) = 2m^2 + 2am, \quad m^2 = \frac{a(a - 1)}{2}.$$

Ahora bien los únicos valores de a entre 1 y 50, para los que $a(a-1)/2$ es un cuadrado son:

$a = 2$, para la que $m = 1$, $n = 3$ y $N = 4$,

$a = 9$, para la que $m = 6$, $n = 15$ y $N = 21$ y

$a = 50$, para la que $m = 35$, $n = 85$ y $N = 120$.

Por lo tanto la respuesta a la primera pregunta es $N = 4$ y a la segunda es $N = 21$. ■

Índice alfabético

- (Ω, \mathcal{A}) , 6
 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, 15
 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, 65
 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$, 65
 $A_n \downarrow A$, 11
 $A_n \uparrow A$, 11
 DF_x , 211
 $F_*\mu$, 130
 $Hf(x)$, 194
 $J(T)$, 207
 L_2 , 188
 L_p , 246
 M_i , 110
 $P_f(x, r)$, 193
 S_∞ , 323
 Ω , 5
 $\alpha(C)$, 6
 α_P , 110
 β_P , 110
 δ_x , 15
 $\inf \emptyset$, 21, 22, 44
 $\int_\Omega h d\mu$, 87
 $\int_a^b f(x) dx$, 111
 $\lambda \ll \mu$, 172
 λ^+ , 165
 $\lambda_1 \perp \lambda_2$, 165, 183
 $\limsup A_n, \liminf A_n$, 11
 $|P|$, 111
 $|\lambda|$, 165
 $|\mu|$, 169
 $\mu_1 \times \mu_2$, 125
 $\mu_1 \times \mu_2$, 352
 $\|T\|$, 254
 $\|\mu\|$, 170
 $\|f\|_\infty$, 240
 $\|f\|'_\infty$, 333
 $\|f\|_p$, 239
 π_s , 354
 π_{JI} , 355
 $\sigma_x = \langle \cdot, x \rangle$, 287
 $\sigma(C)$, 6
 $\sup \emptyset$, 22, 44, 88
 c_0 , 305
 $d(A)$, 22
 $d(\emptyset)^p$, 22
 $d\lambda/d\mu$, 178
 m_i , 110
 v_F , 198
 $x \perp y$, 284
 \mathcal{A} , 5
 $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$, 121
 $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$, 121
 \mathcal{A}_B , 56
 \mathcal{A}_I , 354
 \mathcal{A}_T , 354
 $\mathcal{B}(\Omega)$, 6
 $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$, 335
 $\mathcal{C}_c(\mathcal{X})$, 328
 \mathcal{E}' , 256
 \mathcal{E}^* , 256
 \mathcal{E}^{**} , 256
 $\mathcal{F}(A)$, 79
 $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, 31
 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, 37
 \mathcal{L}_1 , 87
 $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbb{K})$, 87
 $\mathcal{L}_1[\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K}]$, 87
 \mathcal{L}_∞ , 240
 $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathbb{K})$, 240
 \mathcal{L}_p , 239
 $\mathcal{L}_p(T)$, 301
 $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, 239
 \mathcal{L}_{loc} , 193
 $\mathcal{M}(C)$, 12
 \mathcal{M}_T^+ , 341
 \mathcal{N} , 240

- \mathcal{N}^* , **240**
- S , **79, 250**
- \tilde{S} , **250**
- \mathcal{T}_L , **361**
- \mathcal{X}_I , **354**
- λ^- , **165**

- abierto relativamente compacto, **326**
- absoluta continuidad
 - de medidas, **90, 172**
- Agnesi, M.C.(1718–1799), **236**
- álgebra de Banach, **313**
- anillo, **5, 409**
- aplicación
 - cerrada, **297**
 - de clase 1, **211**
 - de clase ∞ , **211**
 - de clase m , **211**
 - diferenciable, **211**
 - medible, **76**
- aplicación lineal tangente, **211**
- Axioma
 - de Arquímedes, **3**
 - de eleccion, **65, 73**

- base
 - de un cilindro medible, **153**
 - de un espacio topológico, **7**
 - ortonormal, **288**
- Bernoulli, D.(1700–1782), **319**
- borelianos, **6**

- c.s., **59**
- carácter, **312**
- carga, **55**
- casi seguro, **59**
- centro
 - de masa, **142, 226**
- centroide, **142, 226**
- cilindro, **153, 354**
 - medible, **354**
 - producto finito, **153**
- clase
 - elemental, **13, 378**
 - monótona, **11**
- coeficientes
 - de Fourier, **284**
- compactificación
 - de Alexandrov, **327**
 - por un punto, **327**
- compleción, **251**
- complemento ortogonal, **284**
- condición
 - de consistencia, **355**
 - de Dini, **320**
- conjunto
 - L —abierto, **361**
 - μ^* —medible, **23**
 - convexo, **286**
 - de Cantor, **9**
 - de primera categoría, **297**
 - de segunda categoría, **297**
 - denso en ningún lado, **297**
 - Lebesgue medible, **31**
 - de \mathbb{R}^n , **37**
 - localmente nulo, **240**
 - medible, **6**
 - nulo, **58**
 - negativo, **162**
 - nulo, **162**
 - positivo, **162**
- convergencia
 - casi seguro (c.s.), **267**
 - casi uniforme, **267**
 - en \mathcal{L}_p , **267**
 - en medida, **267**
- coordenadas
 - esféricas, **220**
 - hiperesféricas, **222**
 - polares, **219**
- cubo
 - semicerrado a la derecha, **32**
 - unidad, **32**
- curva
 - de Agnesi, **228, 398**
- curvas de Julia, **70**

- delta de Dirac, **15**
- densidad, **221, 371**
- derivada de Radon–Nikodym, **178**
- descomposición
 - de Hahn, **162**
 - de Jordan, **165, 187**
- desigualdad
 - de Bessel, **285**
 - de Cauchy–Schwarz, **244, 282**
 - de Hölder, **243**
 - de Jensen, **406**
 - de Minkowsky, **244**
 - de Tchebycheff, **103, 268**

- isoperimétrica, **292**
- diámetro de A , $d(A)$, **22**
- difeomorfismo, **212**
- diferencia simétrica de conjuntos, **58**
- dimensión
 - aritmética, **69**
 - de Hausdorff, **68**
 - de Krull, **69**
 - de recubrimientos, **69**
 - de retículos, **69**
 - graduada, **69**
 - inductiva, **68**
- dimensión
 - de Hausdorff, **44**
- Dirichlet, G.L. (1805–1859), **319**
- distancia, **22**
- dual topológico, **256**
- ecuación
 - del calor, **322**
- encoge suavemente, **196**
- espacio
 - completo, **15**
 - de Banach, **296**
 - de Hilbert, **282**
 - de medida, **15**
 - de Schwartz, S_∞ , **323**
 - HLC, **325**
 - métrico, **22**
 - medible, **6**
 - producto, **121**
 - normado cociente, **336**
 - prehilbertiano, **281**
 - reflexivo, **257**
 - topológico
 - separable, **69**
 - topológico
 - Hausdorff, **325**
 - localmente compacto, **15, 325**
 - polaco, **354**
- esquinas del rectángulo, **33**
- Euclides (300 AC), **1**
- exponentes conjugados, **242**
- familia
 - de funciones dirigida superiormente, **345**
- Fatou, Pierre, **69**
- forma
 - de volumen, **221**
- Fourier, J.(1768–1830), **319**
- fractales, **70**
- función
 - λ -integrable, **166**
 - absolutamente continua, **188, 198, 235**
 - de Cantor, **83**
 - de distribución
 - en \mathbb{R} , **27**
 - en \mathbb{R}^n , **33**
 - de un número finito de variables, **355**
 - de variación acotada, **198**
 - en J , **198**
 - esencialmente acotada, **240**
 - factorial, **102**
 - Gamma, **102**
 - integrable, **87**
 - compleja, **87**
 - Lebesgue medible, **76**
 - localmente integrable, **193**
 - maximal de Hardy–Littlewood, **194**
 - medible, **76**
 - que se anula en $-\infty$, **198**
 - que se anula en el ∞ , **335**
 - Riemann integrable, **111**
 - semicontinua
 - inferiormente, **328**
 - superiormente, **328**
 - simple, **79**
- Funcion Normal, **109**
- funcional
 - de Radón, **349**
 - positivo, **347**
 - lineal multiplicativo, **314**
- funciones medibles
 - equivalentes, **246**
- grupo
 - localmente Euclídeo, **368**
- grupo topológico, **357**
 - localmente compacto, **357**
- Hipótesis ergódica
 - de Boltzman, **273**
 - de Maxwell–Boltzman, **279**
- HLC, **325**
- identidad

- de Parseval, **288**
 - igualdad de polarización, **283**
 - indicador de A , I_A , **79**
 - inmersión, **213**
 - integral
 - de Daniell, **360**
 - de Riemann, **111**
 - impropia, **113**
 - de una función medible, **87**
 - de una función simple, **85**
 - fraccional, **229**, **401**
 - respecto de una
 - carga, **166**
 - medida, **87**
 - medida compleja, **180**
 - interpretación geométrica
 - de $J(T)$, **211**
 - del determinante, **209**
 - isometría, **256**
 - isomorfismo, **256**

 - Julia, Gaston, **69**

 - l.c.s., **240**
 - límite superior (inferior) de A_n , **11**
 - Lagrange, **319**
 - LaPlace, **319**
 - Legendre, **319**
 - Lema
 - Borel–Cantelli, **334**
 - de Fatou, **98**
 - de Urysohn, **328**
 - de Zorn, **288**, **347**
 - Ley
 - del paralelogramo, **283**
 - localmente casi seguro, **240**
 - longitud
 - de una curva, **50**
 - de una poligonal, **50**

 - Mandelbrot, Benoit, **70**
 - matriz
 - Jacobiana, **212**
 - medida, **14**
 - aditiva, **15**
 - compleja, **168**
 - regular, **332**
 - concentrada en un conjunto, **183**
 - cuasi-regular, **330**
 - de contar, **15**
 - de Haar, **15**, **357**
 - de Hausdorff, **16**, **68**, **210**
 - de subvariedades, **211**, **216**, **218**
 - en \mathbb{R}^n , **44**
 - p-dimensional, **43**
 - de Lebesgue, **15**
 - en \mathbb{R} , **31**
 - de Lebesgue–Stieltjes, **15**
 - en \mathbb{R} , **27**
 - en \mathbb{R}^n , **33**
 - de Radon, **350**
 - de transición, **126**
 - delta de Dirac, **15**
 - exterior, **20**
 - de Hausdorff, **22**
 - métrica, **40**
 - imagen, **107**, **130**, **272**, **387**
 - producto, **125**
 - real, **165**, **168**
 - regular, **62**, **331**
 - exterior, **62**, **330**
 - interior, **62**, **330**
 - semifinita, **19**, **64**
 - σ -finita, **15**
- medidas singulares, **165**, **183**
-
- núcleo de Fejer, **311**
- norma, **282**, **294**
-
- operaciones en $\overline{\mathbb{R}}$
 - producto y cociente, **77**
 - suma y orden, **55**
- ortogonalidad, **284**
- ortonormal, **284**
-
- Papiro de Moscú, **1**, **435**
- Pappus, **226**
- parametrización, **213**
- Parseval (identidad de), **288**
- parte positiva (negativa)
 - de una carga, **165**
 - de una función, **76**
- partición
 - finita de un intervalo, **110**
- polinomio trigonométrico, **302**
- Principio
 - de la acotación uniforme, **297**
 - de los buenos conjuntos, **7**, **12**, **63**, **123**, **126**
- probabilidad, **15**

- producto
 de convolución, **149**, **160**, **306**,
 308, **314**, **324**
 de medidas, **317**
 de medidas
 cuasi-regulares, **352**
 finito de medibles, **121**, **354**
 interior, **281**
 proporción áurea, Φ , **441**, **442**
 punto recurrente, **274**
- rectángulo, **31**
 semicerrado a la derecha, **31**
 restricción de una medida, **56**
 restricción densidad en un punto, **372**
 retículo vectorial, **359**
- segundo axioma de numerabilidad, **7**
 semi-intervalos, **31**
 semi-rectángulo, **31**
 semicubo, **32**
 unidad, **32**
 seminorma, **294**
 σ -álgebra, **5**
 de Baire, **361**
 de Borel, **6**
 producto, **121**
 no numerable, **354**
 numerable, **153**
 σ -compacto, **325**
 simetrización de Steiner, **231**
 soporte
 de una función, **327**
 de una medida, **345**
 subespacio invariante por traslaciones,
 312
 subvariedad diferenciable, **213**
 sucesión f_n de Cauchy
 casi seguro, **267**
 casi unif., **267**
 en medida, **267**
- Teoría Ergódica, **274**
 Teorema
 clásico de la medida producto,
 124, **129**
 de aditividad, **94**, **98**
 de aproximación, **58**
 de Baire, **54**, **296**
 de Banach–Steinhaus, **297**
 de caracterización, **112**
 de convergencia de Vitali, **270**
 de descomposición
 de Hahn, **163**
 de Jordan, **165**
 de Lebesgue, **184**
 de extensión
 de Caratheodory, **23**
 de Hahn, **25**
 de extensión
 de Caratheodory, **125**
 de Hahn, **125**, **128**, **151**
 de Kolmogorov I, **356**
 de Kolmogorov II, **356**
 de Fejer, **320**
 de Fubini, **131**, **138**, **219**, **220**
 clásico, **134**
 de Hahn–Banach, **257**, **294**
 complejo, **294**
 de Inversion, **309**
 de la aplicación abierta, **297**
 de la clase monótona, **12**, **127**,
 202
 de la convergencia
 dominada, **98**, **100**, **101**, **111**,
 117, **180**, **181**, **251**, **270**, **275**,
 306, **345**
 monótona, **93**, **94**, **97**, **98**, **132**,
 174, **217**, **261**, **272**, **388**
 de la medida producto, **126**
 de la proyección, **286**
 de Lebesgue, **204**
 de Lusin, **333**
 de ortonormalización de Gram–
 Schmidt, **288**
 de Pappus, **142**
 de Particiones de la unidad, **330**
 de Pitágoras, **284**
 de Plancherel, **310**, **313**
 de punto fijo de Kakutani, **357**
 de Radon–Nikodym, **187**, **188**, **204**
 I, **174**
 II, **176**
 III, **177**
 de Recurrencia de Poincare, **274**
 de representación
 de Daniell–Stone, **362**
 de Riesz, **357**
 de Riesz I, **337**
 de Riesz II, **343**

- polar de una medida, **178, 180**
 - de Riesz, **287**
 - de Riesz–Fischer, **286**
 - de Unicidad, **309**
 - de Vitali–Hahn–Saks, **296**
 - del cambio de variable, **218**
 - del gráfico cerrado, **298**
 - Ergódico
 - maximal, **272**
 - puntual, **273**
 - fundamental del cálculo, **75, 116, 187, 205**
- tractriz, **434**
- transformación
 - conservando la medida, **272**
 - ergódica, **273**
- transformada
 - de Fourier, **160**
 - en L_1 , **306**
 - en $L_1(T)$, **304**
 - en $L_2(T)$, **303**
 - de Fourier–Stieltjes, **315**
- valor promedio de f en la bola $B(x, r)$, **193**
- variables aleatorias, **76**
- variación
 - de una carga, **165**
 - de una función, **198**
 - en un intervalo, **198**
 - de una medida compleja, **169**
 - total de una medida compleja, **170**