Problemas de Álgebra Conmutativa

Sandra Aguado, Elena Flores, Leopoldo Herrera, Esther Huerta, Carmen Lebrijo,
María Merino, José Navarro, Belén Riballo, Miguel Vázquez

2003

Índice General

Capítulo 1

Problemas del capítulo de anillos

1. Demostrar que $\mathbb{C}[x,y]/(x) \simeq \mathbb{C}[y]$. Probar que $\mathbb{C}[x,y,z]/(y-x^2, y^3+z^3) \simeq \mathbb{C}[x,z]/(x^6+z^3)$.

   Resolución:

   a) Consideramos el morfismo epiyectivo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}[x,y] &\to \mathbb{C}[y] \\ p(x,y) &\to p(0,y) \end{aligned}$$

   Veamos que $\operatorname{Ker} f = (x)$.

   La inclusión $(x) \subseteq \operatorname{Ker} f$ es clara. Sea $p(x,y) \in \operatorname{Ker} f$. El sistema $x = 0, p(x,y) = 0$ tiene infinitas soluciones, luego ambos polinomios tienen factores comunes no constantes y concluimos $p(x,y) \in (x)$.

   El Teorema de Isomorfía asegura la existencia del isomorfismo buscado.

   b) Sea el morfismo:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}[x,y,z] &\to \mathbb{C}[x,z]/(x^6+y^3) \\ p(x,y,z) &\mapsto \overline{p(x,x^2,z)} \end{aligned}$$

   que cumple $(y-x^2, y^3+z^3) \subseteq \operatorname{Ker} f$, por lo que factoriza a través del cociente.

   De igual modo,

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{C}[x,z] &\to \mathbb{C}[x,y,z]/(y-x^2, y^3+z^3) \\ q(x,z) &\mapsto \overline{q(x,z)} \end{aligned}$$

   donde $(x^6+z^3) \subseteq \operatorname{Ker} f$ y factoriza a través del cociente.

   Es sencillo comprobar que son inversas:

$$\begin{gathered} g\circ f(\overline{p(x,y,z)}) = g(\overline{p(x,x^2,z)}) = \overline{p(x,x^2,z)} = \overline{p(x,y,z)} \\ f\circ g(\overline{q(x,z)}) = f(\overline{q(x,z)}) = \overline{q(x,z)} \end{gathered}$$

2. Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo de A. Los elementos de S son invertibles en A si y sólo si el morfismo de localización $\delta\colon A \to A_S$ es un isomorfismo.

   Resolución: Sean los elementos de S invertibles en A. Entonces

   -. δ inyectivo: $a/1 = 0 \Rightarrow \exists s \in S : s \cdot a = 0 \Rightarrow s^{-1} \cdot s \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$

   -. δ epiyectivo: dado a/s, vemos que $\delta(a \cdot s^{-1}) = \delta(a) \cdot \delta(s^{-1}) = (a/1) \cdot (s/1)^{-1} = (a/1) \cdot (1/s) = a/s$

   Recíprocamente, sea $\delta : A \to A_S$ isomorfismo. Dado $s \in S, \delta(s)$ es invertible en A_S, de inverso $1/s$, por tanto también s lo es en A.

3. *Propiedad Universal de la Localización:* Sea $f\colon A \to B$ un morfismo de anillos y $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Si $f(S)$ son elementos invertibles de B entonces existe un único morfismo $f_S\colon A_S \to B$ tal que f sea la composición de los morfismos $A \to A_S \overset{f_S}{\to} B$.

   Resolución:

   Si $f(s)$ es invertible en B para todo $s \in S$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon A_S &\to B \\ a/s &\mapsto f(a)f(s)^{-1} \end{aligned}$$

   no depende del representante a/s elegido. En efecto, si $a/s = b/t$, $\exists r \in S$ tal que $r(at - bs) = 0$; luego

$$f(r)(f(a)f(t) - f(b)f(s)) = 0$$

   y, por ser $f(r)$ invertible en B, tenemos que $f(a)f(t) - f(b)f(s) = 0$ y concluimos que $f(a)f(s)^{-1} = f(b)f(t)^{-1}$.

   Se comprueba fácilmente que esta aplicación ϕ es un morfismo de anillos, por serlo f. Además, si $a \in A$, entonces

$$f_S \circ \delta(a) = f_S(a/1) = f(a) \Rightarrow f_S = f$$

4. Probar que $(A_S)_{S'} = A_{S \cdot S'}$.

   Resolución: Definimos

$$\begin{aligned} f\colon A_S &\to A_{SS'} \\ a/1 &\mapsto a/1 \end{aligned}$$

   Por la Propiedad Universal de la Localización en anillos, existe un morfismo $f'\colon (A_S)_{S'} \to A_{SS'}$, pues los elementos de S' son invertibles en $A_{SS'}$.

   Del mismo modo construimos

$$\begin{aligned} g\colon A &\to (A_S)_{S'} \\ a &\mapsto (a/1)/(1/1) \end{aligned}$$

   de forma que existe un morfismo $g'\colon A_{SS'} \to (A_S)_{S'}$ que, como es sencillo comprobar, es el inverso de f'.

   Esto es, f' es un isomorfismo.

5. Probar que $k[x,y]/(xy-1) \simeq k[x]_{1,x,x^2,\dots}$.

   Resolución: Sea el morfismo de anillos:

$$\begin{aligned} f\colon k[x,y] &\to k[x]_{1,x,x^2,\dots} \\ y &\mapsto x^{-1} \\ p(x,y) &\mapsto p(x,x^{-1}) \end{aligned}$$

   Es claro que $(xy-1) \subseteq \operatorname{Ker} f$, luego la aplicación factoriza a través del cociente.

   Ahora definimos

$$\begin{aligned} g\colon k[x] &\to k[x,y]/(xy-1) \\ p(x) &\mapsto \overline{p(x)} \end{aligned}$$

   Como $g(x^n)$ invertible en $k[x,y]/(xy-1)$, (de inverso y^n), g factoriza a través de $k[x]_{1,x,x^2,\dots}$.

   Ambas aplicaciones son inversas; los dos anillos son isomorfos.

6. Probar que $\mathbb{C}[x]_{\mathbb{R}[x]-0} \simeq \mathbb{C}(x)$.

   Resolución: Definimos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}[x] &\to \mathbb{C}(x) \\ p(x) &\mapsto p(x)/1 \end{aligned}$$

   Como $f(\mathbb{R}[x]-0)$ es invertible en $\mathbb{C}(x)$, por la Propiedad Universal de la Localización, existe un morfismo $f_S\colon \mathbb{C}[x]_{\mathbb{R}[x]-0} \to \mathbb{C}(x)$.

   Veamos que es isomorfismo:

   -. f_S inyectiva: inmediato.

   -. f_S epiyectiva: Dado $\frac{p(x)}{r(x)+ir'(x)} \in \mathbb{C}(x)$, $r(x), r'(x) \in \mathbb{R}[x]-0$, tenemos que $\frac{p(x)}{r(x)+ir'(x)} = \frac{p(x)[r(x)-ir'(x)]}{r^2(x)+r'^2(x)} \in \mathbb{C}(x)_{\mathbb{R}[x]-0}$.

7. Probar que el morfismo de localización $\delta\colon A \to A_S$ es un isomorfismo si y sólo si $\delta^*\colon \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$ es un homeomorfismo. Pruébese que si $\operatorname{Spec} A_S = \operatorname{Spec} A_{S'}$ (en $\operatorname{Spec} A$) entonces $A_S = A_{S'}$.

   Resolución: Basta seguir el razonamiento:

   $\delta\colon A \to A_S$ isomorfismo $\Leftrightarrow \forall s \in S, s$ invertible en $A \Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \subseteq A$ ideal primo, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset \Leftrightarrow \delta^*\colon \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$ homeomorfismo.

   b)Veamos $\operatorname{Spec} A_S = \operatorname{Spec} A_{S'} \Leftrightarrow A_S = A_{S'}$.

   $\underline{\Leftarrow}$ | Obvio.

   $\underline{\Rightarrow}$ | Dada una función $s' \in S' \;\Rightarrow\; s'$ no se anula en ningún punto de $\operatorname{Spec} A_{S'} \Rightarrow s'$ no se anula en nigún punto de $\operatorname{Spec} A_S \;\Rightarrow s'/1$ es invertible en $A_S \;\Rightarrow A_S = (A_S)_{S'} = A_{S \cdot S'}$.

   De igual forma $A_{S'} = A_{S \cdot S'} = A_S$.

8. Probar que $A_{1+\mathfrak{m}_x} = A_x$.

   Resolución: Vamos a definir dos morfismos inversos.

   Sea

$$\begin{aligned} f\colon A &\to A_x \\ a &\mapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

   Como $f(1+\mathfrak{m}_x)$ invertibles en A_x (pues $\overline{1+m} = \bar{1}$ en $A/\mathfrak{m}_x$, cuando $m \in \mathfrak{m}_x$), por la Propiedad Universal de la Localización, existe $f_S\colon A_{1+\mathfrak{m}_x} \to A_x$, $f_S(\frac{a}{m}) \to \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{m}$.

   Definimos ahora

$$\begin{aligned} g\colon A &\to A_{1+\mathfrak{m}_x} \\ a &\mapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

   Veamos que, como en el caso anterior, $f(A - \mathfrak{p}_x)$ invertibles en $A_{1+\mathfrak{m}_x}$, y la aplicación factoriza a través de A_x.

   Como $A/\mathfrak{m}_x$ cuerpo, dado $b \in A - \mathfrak{m}_x$, existe $c \in A/\mathfrak{m}_x$: $\bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{1}$, i.e., $bc = n \in 1 + \mathfrak{m}_x$. Entonces $\frac{c}{n}$ es el inverso de b en $A_{1+\mathfrak{m}_x}$ (ver que $b\frac{c}{n} = \frac{bc}{n} = \frac{n}{n} = 1$).

   Por tanto, existe $g_S\colon A_x \to A_{1+\mathfrak{m}_x}$, inversa de f_S, con lo que $A_x \simeq A_{1+\mathfrak{m}_x}$.

   De otro modo: Basta probar que $\operatorname{Spec} A_x = \operatorname{Spec} A_{1+\mathfrak{m}_x}$. Tenemos que ver que los ideales primos de A que no cortan con $1 + \mathfrak{m}_x$ coinciden con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{m}_x$. Obviamente si un ideal primo está incluido en $\mathfrak{m}_x$, no corta con $1+\mathfrak{m}_x \subset A-\mathfrak{m}_x$. Nos falta ver que si un ideal primo $\mathfrak{p}$ no corta con $1 + \mathfrak{m}_x$ entonces $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_x$: si $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{m}_x$ entonces por ser $\mathfrak{m}_x$ maximal se cumple que $\mathfrak{p} + \mathfrak{m}_x = A$, luego existen $p \in \mathfrak{p}$ y $m \in \mathfrak{m}_x$ tales que $p + m = 1$, luego $p = 1 + (-m) \in 1 + \mathfrak{m}_x$ y $\mathfrak{p}$ corta con $1 + \mathfrak{m}_x$, contradicción.

9. Calcular $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\operatorname{Spec} (\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3))_x$.

   Resolución:

   a) Sabemos que $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ es homeomorfo al conjunto de ideales primos de $\mathbb{Z}$ que contienen a $6\mathbb{Z}$, esto es

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{y \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z} : 6\mathbb{Z} \subset \mathfrak{p}_y\} = \{2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}\}$$

   b) $\operatorname{Spec} (\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3))_x = (y^2 - x^3)_0 - (x)_0 = \{\bar{0}, (\overline{x-\alpha}, \overline{y-\beta}) : \beta^2 - \alpha^3 = 0, \alpha \neq 0\}$

10. Calcular $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

    Resolución: Consideremos el morfismo natural $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$ y la correspondiente aplicación continua inducida

$$\phi\colon \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

    Por la fórmula estudiada, la fibra de cada número primo p coincide con el espectro de $\mathbb{Z}[x]/p\mathbb{Z}[x]$. Ahora bien, tenemos que

$$\mathbb{Z}[x]/p\mathbb{Z}[x] \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$$

donde el isomorfismo transforma $q(x)$ en la reducción de $q(x)$ módulo p. Concluimos que los ideales de los puntos de la fibra de p son el ideal primo $p\mathbb{Z}[x]$ y los ideales maximales $(p, q(x))$, donde $q(x)$ es un polinomio cuya reducción módulo p sea irreducible en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$.

La fibra del punto genérico de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ coincide con $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x]$. De acuerdo con el Lema de Gauss, los ideales primos no nulos de $\mathbb{Q}[x]$ están generados por los polinomios irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ no constantes. Luego los ideales de los puntos de la fibra del punto genérico son el ideal 0 y los ideales primos $(p(x))$ donde $p(x)$ es un polinomio no constante irreducible en $\mathbb{Z}[x]$. Concluimos que $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x]$ es irreducible y de dimensión 2. Además, como los polinomios irreducibles constantes son, salvo el signo, los números primos, los ideales primos de $\mathbb{Z}[x]$ son:

-. Los ideales maximales $(p, q(x))$, donde p es un número primo y $q(x)$ es un polinomio cuya reducción módulo p sea irrreducible.

-. Los ideales primos $(p(x))$ generados por un polinomio $p(x)$ irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ (lo que incluye a los números primos).

-. El ideal primo 0.

11. Calcular $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x, y]$.

Resolución: Conocemos $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x] = \{(0), (x - a) : a \in \mathbb{R}, (x^2 + ax + b) \text{ irreducible}\}$.

A partir de ahora, diremos que el ideal primo $(x - a)$ es el punto $x = a$, y el ideal primo $(x^2 + ax + b)$ es el punto $x = \alpha$ (ó $x = \bar{\alpha}$), donde $\alpha, \bar{\alpha}$ son las raíces de $x^2 + ax + b$.

Consideramos el morfismo natural $\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}[x, y]$ y la aplicación continua inducida entre los espectros: $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x, y] \to \operatorname{Spec}\mathbb{R}[x]$.

Veamos las fibras de los puntos de $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x]$:

-. Punto $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Su fibra es $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x, y]/(x - a) \simeq \operatorname{Spec}\mathbb{R}[y]$, esto es, los puntos

$$x = a, y = b\ , b \in \mathbb{R}; \quad \text{la recta}\, x = a; \quad x = a, y = \alpha\, , \alpha \in \mathbb{C}$$

-. Punto $x = \alpha$ $\alpha \in \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$.

Su fibra es $\operatorname{Spec}[\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + ax + b) \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[x]/x^2 + ax + b)[y] \simeq \operatorname{Spec}\mathbb{R}(\alpha)[y] \simeq \operatorname{Spec}\mathbb{C}[y]$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de $x^2 + ax + b$.

Esto es, los puntos

$$x = \alpha, y = \beta$$

-. Punto genérico p_g (ideal primo 0).

Su fibra es $\operatorname{Spec}(R[x, y])_{p_g} = \operatorname{Spec}\mathbb{R}(x)[y]$.

Por el Lema de Gauss, los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}(x)[y]$ son los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x, y]$ de grado mayor o igual que 1 en la y (de otra forma serían invertibles en $\mathbb{R}(x)[y]$), además, claro, del punto genérico.

12. Si $\operatorname{Spec} A$ es la unión disjunta de dos abiertos U_1, U_2 probar que $U_1 = \operatorname{Spec} A_{U_1}$.

Resolución: Supongamos que $\operatorname{Spec} A$ desconecta, esto es, $\operatorname{Spec} A = U_1 \coprod U_2$. Tenemos así que U_1, U_2 son abiertos y cerrados, y que $\operatorname{Spec} A = (I)_0 \coprod (J)_0$, de donde $I + J = A$ (ningún ideal contiene a ambos ideales), i. e. $\exists a \in I, b \in J : a + b = 1$.

La igualdad $a+b=1$ implica $(a)_0 \cap (b)_0 = \emptyset$. Esto, además de $(I)_0 \subseteq (a)_0, (J)_0 \subseteq (b)_0$ nos dice que $(I)_0 = (a)_0, (J)_0 = (b)_0$.

Ahora, es inmediato ver $U_b = \operatorname{Spec} A_{U_b}$.

13. Sean $I, I' \subseteq A$ dos ideales. Probar que $(I)_0 = (I')_0$ si y sólo si $r(I) = r(I')$.

    Resolución:

    $\underline{\Rightarrow} \mid$ Sea $(I)_0 = (I')_0$. El enunciado es inmediato, teniendo en cuenta la definición

    $$r(I) = \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$$

    $\underline{\Leftarrow} \mid$ Sea ahora $r(I) = r(I')$. Como $r(I) = \{a \in A : a^n \in I \text{ para algún } \; n \in \mathbb{N}\}$ (definición equivalente a la anterior), razonamos:

    Supongamos $\exists x \in \operatorname{Spec} A : x \in (I)_0, x \notin (I')_0$ entonces $\exists f \in I' : f \notin \mathfrak{p}_x$ (i. e. f no se anula en x) mientras que $\forall g \in I, g \in \mathfrak{p}_x$ (i. e. todas las funciones de I se anulan en x).

    Si $r(I) = r(I')$, como $f \in r(I') \Rightarrow f \in r(I) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in I \Rightarrow f^n \in \mathfrak{p}_x$!!! Veamos de otro modo esta última implicación. Basta demostrar que dado un ideal I entonces $(I)_0 = (r(I))_0$. Como $I \subseteq r(I)$ tenemos que $(I)_0 \supseteq (r(I))_0$. Por último, si $I \subseteq \mathfrak{p}_x$, dado $f \in r(I)$ existe $n > 0$ de modo que $f^n \in I \subseteq \mathfrak{p}_x$, luego $f \in \mathfrak{p}_x$ y $r(I) \subseteq \mathfrak{p}_x$. En conclusión, $(I)_0 \subseteq (r(I))_0$ y hemos terminado.

14. Probar que los elementos de los ideales primos minimales de un anillo son divisores de cero (Pista: localícese en los ideales primos minimales).

    Resolución: Sea A un anillo y $\mathfrak{p}_x$ un ideal primo minimal.

    Localicemos en el punto x.

    El $\operatorname{Spec} A_x$ tiene un sólo punto, pues $\operatorname{Spec} A_x = \{y \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x\} = \{\mathfrak{p}_x\}$.

    Así:

    $0 \neq f \in \mathfrak{p}_x \Rightarrow f$ nilpotente en A_x (se anula en todos los puntos de $\operatorname{Spec} A_x$) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : f^n/1 = 0 \Rightarrow \exists s \in A - \mathfrak{p}_x : s \cdot f^n = 0 \Rightarrow f$ divisor de cero.

15. Probar que si $f \colon A \hookrightarrow B$ es un morfismo de anillos inyectivo entonces $f^* \colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es una aplicación continua densa.

    Resolución: Tenemos que probar que $\overline{\operatorname{Im} f^*} = \operatorname{Spec} A$.

    -. Veamos primero que los elementos minimales de $\operatorname{Spec} A$ pertenecen a $\operatorname{Im} f^*$.

    Sea $\mathfrak{p}_x$ minimal, $x \in \operatorname{Spec} A$, $f^{*-1}(x) = \operatorname{Spec} B_x \neq \emptyset$, siempre que $B_x \neq \emptyset$. Esto es así porque $f \colon A \hookrightarrow B$ inyectivo $\Rightarrow A_S \to B_S$ inyectivo, pues

    $$\frac{f(a)}{f(s)} = 0 \Rightarrow \exists s' \in S : f(s')f(a) = 0 \Rightarrow f(s'a) = 0 \Rightarrow s'a = 0 \Rightarrow \frac{a}{s} = 0$$

    Luego $x \in \operatorname{Im} f*$, para $\mathfrak{p}_x$ minimal.

    -. Probemos ahora que todo punto está en el cierre de algún elemento minimal.

Basta demostrar que todo ideal primo contiene un ideal primo minimal. Para ello aplicamos del modo clásico el Lema de Zorn:

Es suficiente ver que todo anillo local tiene algún primo minimal, pues localizando en el punto tendríamos que el ideal primo del punto contiene un minimal.

Ordenamos los ideales primos por inclusión. Toda cadena tiene cota inferior, esto es, un ideal primo contenido en todos los ideales de la cadena. Esta cota inferior es la intersección de todos los ideales de la cadena. La intersección es ideal, y es primo: si $ab \in \bigcap \mathfrak{p}_n$ y $a \notin \bigcap \mathfrak{p}_n \Rightarrow \exists \mathfrak{p}_\nu : a \notin \mathfrak{p}_\nu$. Si $\mathfrak{p}_q \subset \mathfrak{p}_\nu$ entonces $a \notin \mathfrak{p}_q$. Así que $b \in \mathfrak{p}_q \ \forall \ \mathfrak{p}_q \subseteq \mathfrak{p}_\nu$, luego $b \in \bigcap \mathfrak{p}_n$.

Por tanto,
$$\forall y \in \operatorname{Spec} A,\ y \in \bar{x}, \text{para algún } x \in \operatorname{Im} f^*, \text{i. e.}, y \in \overline{\operatorname{Im} f^*}$$

Resolvamos el problema de otro modo: Sea $a \in A$ una función que se anule sobre $\operatorname{Im} f^*$. Se tiene que $a \in f^{-1}(\mathfrak{p}_y)$ para todo $y \in \operatorname{Spec} B$, luego $f(a) \in \mathfrak{p}_y$ para todo $y \in \operatorname{Spec} B$. Por tanto, existe un $n \in \mathbb{N}$ de modo que $f(a)^n = 0$. Como f es inyectiva, ha de verificarse que $a^n = 0$, es decir, que a es nilpotente. Por tanto, el cierre de $\operatorname{Im} f^*$, que son los ceros del ideal de todas las funciones que se anulan en $\operatorname{Im} f^*$, son los ceros de un ideal formado por funciones nilpotentes, luego coincide con $\operatorname{Spec} A$.

16. Sea I el núcleo del morfismo de anillos $f\colon A \to B$ y $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ el morfismo inducido en los espectros. Probar que $\overline{\operatorname{Im} f^*} = (I)_0$.

    Resolución: Consideremos los morfismos $A \to A/I \hookrightarrow B$. En espectros tenemos los morfismos $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A/I = (I)_0 \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$. El cierre de la imagen de $\operatorname{Spec} B$ en $\operatorname{Spec} A$, coincide con el cierre de la imagen de $\operatorname{Spec} B$ en $\operatorname{Spec} A/I = (I)_0$, que por el ejercicio anterior es igual a $\operatorname{Spec} A/I = (I)_0$.

17. Probar que la intersección de dos rectas paralelas $(ax+by+c)_0$, $(ax+by+c')_0$ $(c \neq c')$ es vacía.

    Resolución: Basta ver
    $$(ax + by + c)_0 \cap (ax + by + c')_0 = (ax + by + c, ax + by + c')_0 = (\mathbb{R}[x, y])_0 = \emptyset$$
    Para $(ax + by + c) + (ax + by + c') = \mathbb{R}[x, y]$ observar que
    $$\frac{1}{c - c'}(ax + by + c - (ax + by + c')) = 1$$

18. Dado $i\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$, calcular el morfismo $i^*\colon \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3) \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$, calcular las fibras de i^*.

19. Calcular el morfismo $f\colon \mathbb{C}[x, y]/(x - 1) \to \mathbb{C}[x, y]/(y - x^3)$ que en espectros aplica cada punto (cerrado) (α, β) de la cúbica $y = x^3$ en el punto de la recta $x = 1$ que se obtiene como corte de la recta que pasa por el origen y (α, β), con la recta $x = 1$.

Capítulo 2

Problemas del capítulo de módulos

1. Sea $I \subseteq A$ un ideal y M un A-módulo probar que $IM \underset{\text{def}}{=} \{m \in M : m = \sum a_i m_i,$ con $a_i \in I$ y $m_i \in M\}$ es un A-módulo.

   Si M' es otro A-módulo probar que $I(M \oplus M') = IM \oplus IM'$. Si M y M' son submódulos de un módulo N probar que $I(M + M') = IM + IM'$.

   Resolución:

   Probemos que $I \cdot M$ es un A-submódulo de M. Dados $m = \sum_i a_i m_i \in IM$ y $m' = \sum_j a'_j m'_j \in IM$ $(a_i, a'_j \in I)$, $m + m' = \sum_i a_i m_i + \sum_j a'_j m'_j \in IM$. Dados $a \in A$, $m = \sum_i a_i m_i \in IM$ $(a_i \in I$, para todo $i \in I)$, entonces $a \cdot m = \sum_i a a_i m_i \in IM$ porque $a a_i \in I$.

   Veamos que $I(M \oplus M') = IM \oplus IM'$.

$$\begin{aligned} I \cdot (M \oplus M') &= \{\sum_i a_i (m_i, m'_i); a_i \in I, m_i \in M, m'_i \in M'\} \\ &= \{\sum_i (a_i m_i, a_i m'_i); a_i \in I, m_i \in M, m'_i \in M'\} \end{aligned}$$

$$IM \oplus IM' = \{(\sum_i a_i m_i, \sum_j a'_j m'_j);\ \text{con } a_i, a'_j \in I,\ m_i \in M, m'_j \in M'\}$$

   Es obvio que $I(M \oplus M') \subseteq IM \oplus IM'$. Como $(\sum_i a_i m_i, \sum_j a'_j m'_j) = (\sum_i a_i m_i, 0) + (0, \sum_j a'_j m'_j)$, es claro también que $IM \oplus IM' \subseteq I(M \oplus M')$, con lo que concluimos

   Veamos $I(M + M') = IM + IM'$.

$$IM + IM' = \{\sum_i a_i m_i + \sum_j a'_j m'_j \in N,\ \text{con } a_i, a'_j \in I,\ \text{y } m_i \in M, m'_j \in M'\}$$

$$I(M + M') = \{\sum_i a_i (m_i + m'_i) \in N,\ \text{con } a_i \in I,\ \text{y } m_i \in M, m'_i \in M'\}$$

   Es obvio que $I(M+M') \subseteq IM+IM'$. Como $\sum_i a_i m_i + \sum_j a'_j m'_j = \sum_i a_i (m_i + 0) + \sum_j a'_j (0 + m'_j)$ es claro que $IM + IM' \subseteq I(M + M')$.

2. Sean $N \subseteq M$ y $N' \subseteq M'$ submódulos. Probar que $N \oplus N'$ es un submódulo de modo natural de $M \oplus M'$ y que $(M \oplus M')/(N \oplus N') = M/N \oplus M'/N'$.

   Resolución:

   Veamos que $N \oplus N'$ es submódulo de $M \oplus M'$. Para ello definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{ccc} N \oplus N' & \longrightarrow & M \oplus M' \\ (m,n) & \longmapsto & (m,n) \end{array}$$

   que claramente es un morfismo de A-módulos inyectivo. Luego $N \oplus N'$ es submódulo de $M \oplus M'$.

   Veamos ahora que $M \oplus M'/N \oplus N' = M/N \oplus M'/N'$. Consideremos el morfismo de A-módulos:

$$\begin{array}{ccc} M \oplus M' & \xrightarrow{f} & M/N \oplus M'/N' \\ (m,m') & \longmapsto & (\bar{m},\bar{m}') \end{array}$$

   El núcleo de f es el siguiente: $\operatorname{Ker} f = \{(m,m')\colon f(m,m') = 0\} = \{(m,m')\colon (\bar{m},\bar{m}') = (0,0)\} = \{(m,m')\colon m \in N \text{ y } m' \in N'\} = \{(m,m')\colon (m,m') \in N \oplus N'\} = N \oplus N'$

   Veamos que f es epiyectiva: dado $(\bar{m},\bar{m}') \in M/N \oplus M'/N'$, entonces $f(m,m') = (\bar{m},\bar{m}')$. Por el teorema de isomorfía:

$$(M \oplus M')/\operatorname{Ker} f = (M \oplus M')/(N \oplus N') \simeq \operatorname{Im} f = (M/N) \oplus (M'/N')$$

3. Si N, N' son submódulos de un módulo M probar que

$$(N + N')/N' = N/(N \cap N')$$

   Si denotamos por $\bar{N} = \{\bar{n} \in M/N'\colon n \in N\}$, probar que

$$(M/N')/\bar{N} = M/(N + N')$$

   Resolución:

   Veamos que:

$$(N + N')/N' = N/(N \cap N')$$

   Consideremos el morfismo

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\varphi} & (N + N')/N' \\ n & \longmapsto & \bar{n} \end{array}$$

   Este morfismo es la composición de

$$N \hookrightarrow N + N' \longrightarrow (N + N')/N'$$

   Esta aplicación es epiyectiva: Dado $\overline{n + n'}$, entonces $\varphi(n) = \bar{n} = \overline{n + n'}$. Veamos ahora cual es su núcleo: $\ker \varphi = \{n \in N \text{ tales que } n \in N'\} = \{n \in (N \cap N')\}$.Por el teorema de isomorfía:

$$(N + N')/N' \simeq N/(N \cap N')$$

Veamos que:

$$(M/N')/\bar{N} = M/(N+N')$$

Consideremos el morfismo

$$\begin{array}{ccc} M/N' & \xrightarrow{\varphi} & M/(N+N') \\ \bar{m} & \longmapsto & \bar{m} \end{array}$$

Este morfismo es obviamente epiyectivo. Veamos cual es su núcleo: $\ker\varphi = \{\bar{m} \in M/N'$ tales que $m \in N+N'\} = \{\overline{n+n'} \in M/N'$ con $n \in N$ y $n' \in N'\} = \{\bar{n} \in M/N'$ tal que $n \in N\} = \bar{N}$. Por el teorema de isomorfía

$$(M/N')/\bar{N} \simeq M/(N+N')$$

4. Sea $f: M \to M'$ un morfismo de A-módulos. Sean N_1, N_2 dos submódulos de M probar que $f(N_1+N_2) = f(N_1)+f(N_2)$ (denotamos por $f(N) = \{f(n) \in M'$, con $n \in N\})$. Sea I un ideal, probar que $f(I \cdot N_1) = I \cdot f(N_1)$.

   Resolución:

   Por ser f un morfismos de A-módulos sabemos que:$f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$. Para todo $m_1, m_2 \in M$. Y $f(a \cdot m_1) = a \cdot f(m_1)$. Para todo $m_1 \in M$ y $a \in A$.

   Veamos que $f(N_1+N_2) = f(N_1)+f(N_2)$.$f(N_1+N_2) = \{f(n)$ tal que $n \in N_1+N_2\} = \{f(n_1+n_2)$ tal que $n_1 \in N_1$ y $n_2 \in N_2\}$. Por ser f morfismo de módulos y n_1 y n_2 elementos de M, $f(N_1+N_2) = \{f(n_1)+f(n_2)$ tales que $n_1 \in N_1$ y $n_2 \in N_2\} = f(N_1)+f(N_2)$.

   Veamos que $f(I \cdot N_1) = I \cdot f(N_1)$: $f(I \cdot N_1) = \{f(\sum_{i\in I} a_i \cdot n_i)$ con $a_i \in I$ y $n_i \in N_1\}$. Por ser f morfismo de A-módulos , $a_i \in I \subseteq\ A$ y $n_i \in N_1 \subseteq M_1$, $f(I \cdot N_1) = \{\sum_{i\in I} a_i \cdot f(n_i)$ tal que $a_i \in I$ y $n_i \in N_1\} = I \cdot f(N_1)$.

5. Sea $f: M \to M'$ un morfismo de A-módulos y $m' = f(m)$. Probar que $f^{-1}(m') = m + \operatorname{Ker} f \underset{\text{def}}{=} \{m+n$ con $n \in \operatorname{Ker} f\}$. Sea N un submódulo de M, probar que $f^{-1}(f(N)) = N + \operatorname{Ker} f$.

   Resolución:

   Veamos que $f^{-1}(m') = m + \operatorname{Ker} f \underset{\text{def}}{=} \{m+n$ con $n \in \operatorname{Ker} f\}$: $n \in f^{-1}(m') \iff f(n) = m' = f(m) \iff f(n-m) = 0 \iff n - m \in \operatorname{Ker} f \iff n \in m + \operatorname{Ker} f$.

   Veamos que $f^{-1}(f(N)) = N + \operatorname{Ker} f$. Sabemos que $f^{-1}(f(N)) = \{m \in M$ tales que $f(m) \in f(N)\} = \{m \in M$ tales que $f(m) = f(n)$ para algún $n \in N\} = \{m \in M$ tales que $f(m) - f(n) = f(m-n) = 0$ para algún $n \in N\} = \{m \in M$ tales que $m - n \in \operatorname{Ker} f$ para algún $n \in N\} = \{m \in M$ tales que $m = n + k$ para $n \in N$ y $k \in \operatorname{Ker} f\} = \{n + k \in M,$ con $n \in N$ y $k \in Ker f\} = N + \operatorname{Ker} f$.

6. Probar la igualdad $\operatorname{Hom}_A(A/I, M) = \{m \in M : Im = 0\}$. Probar que $\operatorname{Hom}_A(A^n, M) = M \oplus \overset{n}{\ldots} \oplus M$.

   Resolución:

   Antes de demostrar las dos igualdades vamos a demostrar otra cosa que nos servirá para demostrarlas. Lo que vamos a demostrar es que el morfismo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \operatorname{Hom}_A(A, M) \\ m & \longmapsto & \cdot m \end{array}$$

donde $\cdot m$ es el siguiente morfismo

$$\begin{array}{lcl} \cdot m : A & \rightarrow & M \\ a & \mapsto & a \cdot m \end{array}$$

es un isomorfismo de A-módulos. Para ello veamos que f es un morfismo de A-módulos, que es inyectiva y que es epiyectiva:

-La aplicación f es morfismo de A-módulos:$-f(m+m') = \cdot(m+m') = (\cdot m) + (\cdot m') = f(m) + f(m')$ y $f(am) = \cdot(am) = a(\cdot m) = af(m)$

- El morfismo f es inyectivo: sea $m \in M$, tal que $f(m) = \cdot m = 0$, es decir, $am = 0, \forall a \in A$, en particular, si $a = 1, 1m = 0 \Rightarrow m = 0$.

-El morfismo f es epiyectivo: sea $g : A \longrightarrow M$ un morfismo de A-módulos. Consideramos $g(1) = m$, luego, $g(a) = g(a1) = ag(1) = am, \forall a \in A$, por tanto, $g = \cdot m = f(m)$.

Luego hemos demostrado que $M = \mathrm{Hom}_A(A, M)$. Empecemos ha demostrar ya las igualdades.

Veamos que $\mathrm{Hom}_A(A/I, M) = \{m \in M : Im = 0\}$. El conjunto de $\mathrm{Hom}_A(A/I, M)$ es el conjunto de morfismo de A-módulos que van de A/I a M,o dicho de otra forma, es el conjunto de morfismos de A-módulos que van de A a M y contienen a I en su núcleo, es decir, $f \in \mathrm{Hom}_A(A/I, M) \Leftrightarrow f : A \longrightarrow M$, y $I \subseteq \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ y $I \subseteq \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow$ (por la igualdad que hemos probado antes) $f = \cdot m$, con $m \in M$, tal que $\mathrm{Ker}(\cdot m) \supseteq I$.Una vez dicho esto definimos las siguientes asignaciones:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Hom}_A(A/I, M) & \longrightarrow & \{m \in M : I \cdot m = 0\} \\ \cdot m & \longmapsto & m \end{array}$$

y

$$\begin{array}{lcl} \{m \in M : I \cdot m = 0\} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A/I, M) \\ m & \longmapsto & \cdot m \end{array}$$

evidentemente están bien definidas y son inversa una de la otra, por tanto, $\mathrm{Hom}_A(A/I, M) = \{m \in M : I \cdot m = 0\}$.

Probemos la segunda igualdad. Denotemos $1_i = (0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0) \in A^n$. Consideremos el siguiente morfismo

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Hom}_A(A^n, M) & \overset{h}{\rightarrow} & (M \oplus \ldots \oplus M \\ f & \rightarrow & (f(1_1), ..., f(1_n)) \end{array}$$

Y consideremos el morfismo

$$\begin{array}{lcl} M \oplus \overset{n}{\ldots} \oplus M & \overset{h'}{\rightarrow} & \mathrm{Hom}_A(A^n, M) \\ (m_1, ..., m_n) & \rightarrow & g \end{array}$$

Donde g es el siguiente morfismo de A-módulos.

$$\begin{array}{lcl} A^n & \rightarrow & M \\ (a_1, ..., a_n) & \rightarrow & a_1 m_1 + ... + a_n m_n \end{array}$$

Como ambas asignaciones son inversas entre sí, concluimos.

De otro modo, por la propiedad universal de la suma directa $\mathrm{Hom}(A^n, M) = \prod^n \mathrm{Hom}_A(A, M) = M \oplus \overset{n}{\ldots} \oplus M$.

7. Calcular los siguientes $\mathbb{Z}$-módulos: $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})$, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Q})$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})$.

   Resolución:

   Dado $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ y $a \in \mathbb{Q}$, entonces $f(a) = f(n/n \cdot a) = n \cdot f(1/n \cdot a) \in \mathbb{Z}$, luego $f(a)$ es múltiplo de todo $n \in \mathbb{Z}$, por tanto $f(a) = 0$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = 0$.

   Dado $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})$ y $a \in \mathbb{Z}_n$, del mismo modo obtenemos que $f(a)$ es múltiplo de n^i, para todo $i \in \mathbb{N}$, luego $f(a) = 0$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}) = 0$.

   Los morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Q}$ están unívocamente determinados por sus valores sobre 1: $a \cdot f(1) = f(a) = f(b \cdot \frac{a}{b}) = b \cdot f(\frac{a}{b})$, luego $f(\frac{a}{b}) = b^{-1} \cdot a \cdot f(1)$. Dado $q \in \mathbb{Q}$, podemos definir el morfismo g, del siguiente modo $g(\frac{a}{b}) = b^{-1} \cdot a \cdot q$. En conclusión, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

   Dado un morfismo $f\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ componiendo con la proyección $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tenemos un morfismo $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. Tenemos pues una inclusión $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, como este último es nulo, obtenemos que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = 0$.

8. Probar que si un endomorfismo $f\colon M \to M$, cumple que $f^2 = f$ entonces $M = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

   Resolución:

   Veamos que $M = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$: sea $m \in M$, queremos probar que m es suma de un elemento de $\operatorname{Ker} f$ y un elemento de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$. Sea $m = m - f(m) + f(m)$, veamos que $m - f(m) \in \operatorname{Ker} f$: por ser f morfismo de A-módulos y $f = f^2$, $f(m - f(m)) = f(m) - f^2(m) = f(m) - f(m) = 0 \Rightarrow m - f(m) \in \operatorname{Ker} f$. Nos queda probar que $f(m) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$: $(f - \operatorname{Id})(f(m)) = f^2(m) - \operatorname{Id}(f(m)) = f(m) - f(m) = 0 \Rightarrow f(m) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

   Probemos ahora que $\operatorname{Ker} f \bigcap \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = 0$. Supongamos $m \in \operatorname{Ker} f \bigcap \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \Rightarrow m \in \operatorname{Ker} f$ y $m \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \Rightarrow f(m) = 0$ y $(f - \operatorname{Id})(m) = f(m) - \operatorname{Id}(m) = f(m) - m = 0 \Rightarrow f(m) = f(m) - m = 0 \Rightarrow -m = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f \bigcap \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = 0$. Luego, $M = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

9. Probar que el anulador del A-módulo A/I es I.

   Resolución:

   Veamos que $\operatorname{Anul}(A/I) = I$. Veamos las dos inclusiones:

   $\supseteq$) sea $b \in I, b \cdot \bar{a} = \overline{ba} = \bar{0}$ porque $ba \in I$. Por tanto, $b \in \operatorname{Anul}(A/I)$.

   $\subseteq$) sea $z \in \operatorname{Anul}(A/I) \Rightarrow z \cdot \bar{1} = \bar{z} = \bar{0} \Rightarrow z \in I$.

10. Probar que si M es un A-módulo libre no nulo entonces $\operatorname{Anul}(M) = 0$.

    Resolución:

    Como M es libre, entonces existe una base de $M, \{m_1, ..., m_n\}$. Dado $a \in \operatorname{Anul}(M)$ tenemos que $a \cdot m_1 = 0$, luego $a = 0$ y $\operatorname{Anul}(M) = 0$.

11. Sea el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \underset{0 \neq n \in \mathbb{Z}}{\oplus} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Probar que $\operatorname{Anul} M = (0)$ ¿Existe algún $m \in M$ de modo que $\operatorname{Anul}(\langle m \rangle) = 0$?

    Resolución:

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \oplus ...$$

Sea $a \in \text{Anul}(M) \subseteq \mathbb{Z}$. Denotemos $1_m = \bar{1} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Tenemos que $a \cdot 1_m = \bar{a}$, luego a es múltiplo de m para todo m, por tanto, $a = 0$ y $\text{Anul}(M) = 0$.

Contestemos a la pregunta: Sea $m \in M, m = (m_i)_{i\in\mathbb{N}}, 0 = m_i \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ salvo un número finito de i. Sean $\{i\}$ tales que $0 \neq m_i \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ Luego el m.c.m. de los $\{i\}$ anula a m luego $\text{Anul}(m) \neq 0$.

12. Probar que si $M \simeq M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ entonces $\text{Anul}(M) = \bigcap\limits_i \text{Anul}(M_i)$. Calcular el ideal anulador del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

    Resolución:

$$\begin{aligned}
\text{Anul}(M) &= \{a \in A : am = 0, \forall m \in M\} \\
&= \{a \in A : a(m_1, ..., m_n) = 0, \forall (m_1, \dots, m_n) \in M_1 \oplus \dots \oplus M_n\} \\
&= \{a \in A : (am_1, ..., am_n) = 0, \forall (m_1, \dots, m_n) \in M_1 \oplus \dots \oplus M_n\} \\
&= \{a \in A : a \in \text{Anul}(M_1), ..., a \in \text{Anul}(M_n)\} = \{a \in A : a \in \bigcap_i \text{Anul}(M_i)\} \\
&= \bigcap_i \text{Anul}(M_i)
\end{aligned}$$

    Calculemos el ideal anulador de $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Por el apartado anterior:$\text{Anul}(M) = \text{Anul}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \bigcap \text{Anul}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \bigcap \text{Anul}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) = (3) \bigcap (6) \bigcap (15) = (30)$.

13. Sea $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Demostrar que $\text{Anul}(M_2) \supseteq \text{Anul}(M_1) \cdot \text{Anul}(M_3)$.

    Resolución:

$$0 \to M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \to 0$$

    Sean $m \in M_2$, $a_1 \in \text{Anul}(M_1)$ y $a_3 \in \text{Anul}(M_3)$ tenemos que $\pi(a_3 m) = a_3 \pi(m) = 0$, luego $a_3 m \in \text{Ker}\,\pi = \text{Im}\, i$. Sea $m' \in M_1$, tal que $i(m') = a_3 m$. Tenemos que $a_1 a_3 m = a_1 i(m') = i(a_1 m') = i(0) = 0$, luego $a_1 a_3 \in \text{Anul}(M_2)$ y $\text{Anul}(M_2) \supseteq \text{Anul}(M_1) \cdot \text{Anul}(M_3)$.

14. ¿Es $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ un $\mathbb{Z}$-módulo libre? ¿Es un $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-módulo libre? Definir un sistema generador de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

    Resolución:

    Respondamos a la primera pregunta: supongamos que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ fuera un $\mathbb{Z}$-módulo libre, entonces existiría una base $\{\bar{m}_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, tal que todo elemento de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ se puede poner de modo único como combinación lineal de los $\bar{m}_i$, sin embargo,

$$\begin{aligned}
4 \cdot m_i &= \bar{0} \\
0 \cdot \bar{m}_i &= \bar{0}
\end{aligned}$$

Luego $\bar{0}$, que pertenece a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, no se puede poner de modo único como combinación lineal de los $\bar{m}_i$, por tanto, $\{\bar{m}_i\}$, con $i \in I$ no es base.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si es libre como $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-módulo, una base sería, por ejemplo $\bar{1}$. Todo anillo A es un A-módulo libre de base el 1. Como sistema generador de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vale $\{\bar{1}\}$.

15. Sea $M = \{\frac{a}{2^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$. Probar que M es un $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Q}$ y que no es finito generado.

Resolución:

Veamos que M es un $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Q}$: Dados $\frac{a}{2^n} y \frac{b}{2^m} \in M$ entonces $\frac{a}{2^n} + \frac{b}{2^m} = \frac{2^m a + 2^n b}{2^{nm}} \in M$. Dado $\frac{a}{2^n} \in M$ y $b \in \mathbb{Z}$, entonces $b \cdot \frac{a}{2^n} = \frac{ba}{2^n} \in M$.

Veamos ahora que M no es finito generado. Suponemos que sí lo es y lleguemos a contradicción. Sea M generado por $\langle \frac{a_1}{2^n_1}, ..., \frac{a_r}{2^n_r} \rangle$. Veamos que existen elementos que no se pueden poner como combinación lineal de éstos. Por ejemplo $\frac{1}{2^{maxn_i+1}}$ con $i \in 1, .., r$. Luego hemos llegado a contradicción.

16. Probar que todo cociente de un módulo finito generado es finito generado. Probar que la suma de dos submódulos finito generados es finito generado.

Resolución:

Probemos lo primero: supongamos que M es finito generado, por tanto, $M = \langle m_1, ..., m_n \rangle$. Consideramos el cociente de M por N, M/N, y la aplicación de paso al cociente

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/N \\ m & \longmapsto & \bar{m} \end{array}$$

Dado $\bar{m} \in M/N \Rightarrow m = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i \Rightarrow \bar{m} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{m}_i \Rightarrow \{\bar{m}_1, ..., \bar{m}_n\}$ es un sistema de generadores de M/N, y por tanto, es finito generado.

Probemos lo segundo: sea M un A-módulo y N, N' dos submódulos de M finito generados, es decir, existen $\{n_1, ..., n_s\}$ y $\{n'_1, ..., n'_r\}$ sistemas de generadores de N y N' respectivamente. Por tanto, si $n \in N \Rightarrow n = \lambda_1 n_1 + ... + \lambda_s n_s$ y si $n' \in N' \Rightarrow n' = \lambda'_1 n'_1 + ... + \lambda'_r n'_r$. Dado $m = n + n' \in N + N'$ tenemos que $m = \lambda_1 n_1 + ... + \lambda_s n_s + \lambda'_1 n'_1 + ... + \lambda'_r n'_r$, luego $N + N'$ está generado por $\{n_1, ..., n_s, n'_1, ..., n'_r\} \Rightarrow N + N'$ es finito generado.

17. Sea $C(\mathbb{R})$ el anillo de todas las funciones reales continuas de variable real. Demostrar que el conjunto de las funciones reales continuas de variable real que se anulan en algún entorno del cero forman un ideal de $C(\mathbb{R})$, que no es finito generado.

Resolución:

Llamemos I al ideal mencionado y supongamos que es finito generado, $I = \langle f_1, ..., f_n \rangle$. Sea U_i el conjunto de puntos donde se anula f_i. Luego $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n$ con $\lambda_i \in C(\mathbb{R})$ se anula en $U_1 \cap ... \cap U_n \Rightarrow$ toda $f \in I$ se anularía al menos en $U_1 \cap ... \cap U_n$ entorno del cero.

Sea g otra función que se anula en $(-\epsilon, \epsilon)$ tal que $(-\epsilon, \epsilon)$ está incluido estrictamente en $U_1 \cap ... \cap U_n$ Luego hemos llegado a contradicción ya que $g \in I$ y no se anula en $U_1 \cap ... \cap U_n$.

18. Probar que todo $\mathbb{Z}$-submódulo finito generado de $\mathbb{Q}$ no nulo, es libre generado por un elemento. Probar que $\mathbb{Q} \not\simeq \mathbb{Z}$.

    Resolución:

    Supongamos que N es un $\mathbb{Z}$-submódulo finito generado de $\mathbb{Q}$, es decir $N =< n_1, ..., n_r >$. Ahora como N es submódulo de $\mathbb{Q} \Rightarrow N =< a_1/b_1, ..., a_r/b_r >$, es decir , $N = \mathbb{Z}a_1/b_1 + ... + \mathbb{Z}a_r/b_r$. En esta expresión cogemos los dos primeros sumandos, es decir, cogemos lo generado por $< a_1/b_1, a_2/b_2 >= \mathbb{Z}a_1/b_1 + \mathbb{Z}a_2/b_2 = \mathbb{Z}(b_2a_1 + b_1a_2)/(b_1b_2)$. Siguiendo este proceso con $< a_1/b_1, ..., a_r/b_r >= \mathbb{Z}a_1/b_1 + ... + \mathbb{Z}a_r/b_r = \mathbb{Z}p/q =< p/q >$. Hemos concluido que es libre generado por un elemento. Veamos que $\mathbb{Q}$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}$: Sabemos que $\mathbb{Q}$ no está generado como $\mathbb{Z}$-módulo por un elemento y que $\mathbb{Z}$ sí, por tanto, no pueden ser isomorfos.

19. Hallar una base (si existe) de $\mathbb{Z}[x]$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

    Resolución:

    Vamos a probar que $\{1, x, x^2, ...\}$ es base.

    $$\begin{array}{ccc} \phi : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} & \overset{\sim}{\to} & \mathbb{Z}[x] \\ (a_1, ..., a_n) & \to & a_1 1 + a_2 x + ... \\ (a_1, ..., a_n) & \leftarrow & a_1 1 + a_2 x + ... \end{array}$$

    Vamos a ver que estas asignaciones son inversas una de la otra:

    $$(a_1, ..., a_n) \to a_1 1 + a_2 x + ... \to (a_1, ..., a_n)$$

    Luego la composición de ambas asignaciones en este sentido es la identidad.

    $$a_1 1 + a_2 x + ... \to (a_1, ..., a_n) \to a_1 1 + a_2 x + ...$$

    La composición en este sentido también es la identidad. Luego es isomorfismo.

20. Probar que todo epimorfismo de un módulo en un libre tiene sección.

    Resolución:

    Sea M un módulo y L un módulo libre, y consideramos el siguiente epimorfismo:

    $$p \colon M \to L$$

    Supongamos que p es epiyectivo y L libre. Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de L y escribamos $e_i = p(m_i)$, con $m_i \in M$. Definiendo la sección $s(\sum_i a_ie_i) = \sum_i a_im_i$, hemos terminado. Veamos que s es efectivamente una sección de p: $p \circ s(\sum_i a_ie_i) = p(\sum_i a_im_i) = \sum_i a_ip(m_i)$, por ser $e_i = p(m_i)$ esto último es igual a $\sum_i a_ie_i \Rightarrow p \circ s = \mathrm{Id}$. Por tanto, s es sección.

21. Sea $i \colon N \hookrightarrow M$ un morfismo inyectivo de A-módulos. Si $r \colon M \to N$ es un retracto de i, es decir, $r \circ i = \mathrm{Id}$, probar que $M \simeq N \oplus \mathrm{Ker}\, r$ (defínase $N \oplus \mathrm{Ker}\, r \to M$, $(n, n') \mapsto i(n) + n'$).

    Sea $\pi \colon M \to M'$ un epimorfismo de módulos, de modo que exista una sección s de π, es decir, $\pi \circ s = \mathrm{Id}$. Probar que $M \simeq \mathrm{Ker}\, \pi \oplus M'$.

Resolución:

Veamos lo primero:

$$\begin{array}{rcl}\operatorname{Ker} r \oplus N & \to & M \\ (n', n) & \stackrel{def}{\to} & i(n) + n' \\ (m - i(r(m)), r(m)) & \stackrel{def}{\leftarrow} & m\end{array}$$

Veamos que $m - i(r(m)) \in \operatorname{Ker} r$: $r(m - i(r(m))) = r(m) - r\ i(r(m))) = r(m) - r(m) = 0$ Las dos asignaciones son una inversa de la otra, entonces: $M \simeq N \oplus \operatorname{Ker} r$.

Veamos lo segundo:

$$\begin{array}{rcl}M' \oplus \operatorname{Ker} \pi & \to & M \\ (m', n) & \stackrel{def}{\to} & s(m') + n \\ (\pi(m), m - s \circ \pi(m) & \stackrel{def}{\leftarrow} & m\end{array}$$

Tenemos que probar que $m-(s\circ\pi)(m)$ pertenece a $\operatorname{Ker} \pi$: $\pi(m-(s\circ\pi)(m)) = \pi(m)-\pi\circ s\circ\pi(m) = \pi(m) - \pi(m)$. Estas asignaciones son inversas entre si, luego son isomorfismos.

22. Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta de A módulos. Se dice que la sucesión exacta rompe si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "\pi"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde ϕ es un isomorfismo, $i(m') = (m', 0)$ y $\pi(m', m'') = m''$.

Probar que si $r\colon M \to M'$ es un retracto de f, i.e., $r \circ f = \operatorname{Id}$ entonces la sucesión exacta rompe. Probar que si $s\colon M'' \to M$ es una sección de g, i.e., $g \circ s = \operatorname{Id}$, entonces la sucesión exacta rompe.

Resolución:

Veamos lo primero, es decir, que si existe un retracto de f, entonces $M \simeq M' \oplus M''$.

Para ello, probemos primero que $M = \operatorname{Im} f \oplus \ker r$:-veamos que $M = \operatorname{Im} f + \ker r$: sea $m \in M$, veamos que $m - f(r(m)) \in \operatorname{Ker} r$, $r(m - f(r(m))) = r(m) - r(f(r(m)))$, ahora, por ser r retracto de f, $r \circ f = \operatorname{Id}$, luego $r(m) - r(f(r(m))) = r(m) - r(m) = 0 \Rightarrow m - f(r(m)) \in \operatorname{Ker} r \Rightarrow \exists b \in \operatorname{Ker} r : b = m - f(r(m)) \Rightarrow m = f(r(m)) + b \in \operatorname{Im} f + \ker r$. -Veamos que $\operatorname{Im} f \cap \ker r = 0$: sea $m \in \operatorname{Im} f \cap \ker r \Rightarrow m \in \operatorname{Im} f$ y $m \in \operatorname{Ker} r \Rightarrow m = f(m')$ y $r(m) = 0 \Rightarrow 0 = r(m) = r(f(m')) = \operatorname{Id}(m') = m' = 0 \Rightarrow m = f(m') = 0$. Luego tenemos que $M = \operatorname{Im} f \oplus \ker r$.

Ahora sabemos que f es inyectiva por hipótesis y que es epiyectiva sobre la imagen de f, luego $\operatorname{Im} f \simeq M'$, es decir, tenemos que $M = M' \oplus \ker r$ y lo que queriamos era que $M \simeq M' \oplus M''$, luego si vemos que $\operatorname{Ker} r \simeq M''$, habremos terminado: consideremos $\operatorname{Ker} r \xrightarrow{g} M''$ y veamos que es un isomorfismo. Inyectiva: sea $m \in \ker r : g(m) = 0$, veamos si $m = 0$. Tenemos que $m = f(m')$, porque $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Luego, $0 = r(m) = r(f(m')) = \operatorname{Id}(m') = m' = 0 \Rightarrow m = f(m') = f(0) = 0$. Epiyectiva: sea $m'' \in M''$. Como g es epiyectiva, $m'' = g(m) = g(m - f(r(m)))$ ($\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, luego $g(f(r(m))) = 0$). Y como hemos visto antes $m - f(r(m)) \in \operatorname{Ker} r$, luego es epiyectiva.

Por tanto, concluimos que $\operatorname{Ker} r \simeq M''$ y que $M \simeq M' \oplus M''$ y el diagrama es conmutativo y por tanto la sucesión rompe.

Pasemos a ver lo segundo. Par ver este apartado lo que haremos será lo siguiente: comprobaremos que si tenemos una sección de g, entonces tenemos un retracto de f y por el apartado anterior, sabremos que la sucesión rompe. Pues bien, veámoslo.

Tenemos $s : M'' \to M$ tal que $g \circ s = \text{Id}$. Veamos que $M' \xrightarrow{\bar{f}} M/\operatorname{Im} s$ es isomorfismo. Inyectiva: sea $m' \in M' : \bar{f}(m') = 0 \Leftrightarrow f(m') \in \operatorname{Im} s \Rightarrow f(m') = s(m'')$. Ahora $g(f(m')) = 0$, porque $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, y $g(f(m')) = g(s(m'')) = m'' = 0$, luego $f(m') = s(m'') = s(0) = 0$, y como f es inyectiva, $m' = 0$. Epiyectivo: sea $\bar{m} \in M/\operatorname{Im} s$, $\bar{m} = [m - s(g(m))]$, donde $m - s(g(m)) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Veámoslo, $g(m - s(g(m))) = g(m) - g(s(g(m))) = g(m) - g(m) = 0$. Luego $\bar{m} \in \operatorname{Im} \bar{f}, \bar{m} = f(m')$.

Por tanto, $\bar{f}$ es un isomorfismo. Ahora consideremos el inverso de $\bar{f}$, es $\phi : M/\operatorname{Im} s \to M'$. El retracto r que buscábamos es la composición $M \to M/\operatorname{Im} s \to M'$. Veamos que efectivamente es retracto de f: sea $m' \in M', r(f(m')) = \phi\overline{f(m')} = \phi(\bar{f}(m')) = m'$, luego $r \circ f = \text{Id}$ y por tanto $r = \phi \circ \bar{f}$ es, en verdad, un retracto de f.

Luego, hemos probado que si tenemos una sección de g, entonces tenemos un retracto de f, y sabíamos, por el apartado anterior, que si tenemos un retracto de f, la sucesión rompe.

23. Probar que $(\text{Anul}_A(M))_S = \text{Anul}_{A_S}(M_S)$, si M es finito generado.

Resolución:

$\text{Anul}_A(M) \subset A$, localizando, $(\text{Anul}_A(M))_S \subset A_S$. Por otra parte, $\text{Anul}_{A_S}(M_S) \subset A_S$. Veamos que $(\text{Anul}_A(M))_S = \text{Anul}_{A_S}(M_S)$.

$\subseteq$) Esta inclusión es obvia. Sea $a/s \in \text{Anul}_A(M))_S$ con $a \in \text{Anul}_A(M), s \in S$.

$a/s \cdot m/s' = am/ss' = 0/ss' = 0 \Rightarrow a/s \in \text{Anul}_{AS}(M_S)$.

$\supseteq$) Sea $a/s \in \text{Anul}_{AS}(M_S)$. $M = \langle m_1, ..., m_n \rangle_{A\text{-módulo}}$ luego M_S está generado como A_S-módulo por $\{m_1/1, ..., m_n/1\}$. $a/s \cdot m_i/1 = 0 \Rightarrow \exists s_i \in S : s_i a m_i = 0$. Sea $s' = s_1 ... s_n \Rightarrow s' a m_i = 0$ para todo $i \Rightarrow s'a \in \text{Anul}_A(M) \Rightarrow a/s = s'a/s's \in (\text{Anul}_A(M))_s$.

24. Sea $f \colon A \to B$ un morfismo de anillos. Sea $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Sabemos que B es de modo natural un A-módulo, por tanto, podemos definir B_S. Por otra parte, $f(S) \subset B$ es un sistema multiplicativo. Demostrar que $B_S = B_{f(S)}$.

Resolución:

Consideremos

$$\begin{array}{ccc} B_S & \xrightarrow{\phi} & B_{f(S)} \\ b/s & \to & b/f(s) \end{array}$$

Veamos que está bien definida: $b/s = b'/s' \Rightarrow \exists s'' \in S : s''(s'b - sb') = 0$, ahora como $s''(s'b - sb') = f(s'')(f(s')b - f(s)b') \Rightarrow b/f(s) = b'/f(s')$. Veamos que es morfismo de anillos: $\phi(b/s + b'/s') = \phi((s'b + sb')/ss') = (f(s')b + f(s)b')/f(s)f(s') = \phi(b/s) + \phi(b'/s'), \phi(b/s \cdot b'/s') = \phi((b \cdot b')/ss') = (b \cdot b')/f(ss') = (b \cdot b')/f(s)f(s') = b/f(s) \cdot b'/f(s') = \phi(b/s) \cdot \phi(b'/s')$ y $\phi(1) = \phi(1/1) = 1/f(1) = 1/1 = 1$. Veamos que es isomorfismo: -inyectiva: $b/f(s) = 0/1 \Rightarrow \exists f(s') : f(s')(b1 - 0) = 0$, ahora como $f(s')(b1 - 0) = s'b \Rightarrow s'b = 0 \Rightarrow b/s = 0$. -epiyectiva: $\forall b/f(s) \in B_{f(S)} \Rightarrow \exists x \in B_S$, tal que $\phi(x) = b/f(s)$, ese x es b/s.

25. Sea $I \subseteq A$ un ideal y $\mathfrak{p}_x \subset A$ un ideal primo. Probar que $I_x = A_x$ si y sólo si $x \notin (I)_0$.

Resolución:

Consideremos la sucesiones exactas

$$\begin{array}{cccc} 0 \to & I \subset A & \to & A/I & \to 0 \\ 0 \to & I_x \to A_x & \to & (A/I)_x & \to 0 \end{array}$$

Luego $I_x = A_x \Leftrightarrow (A/I)_x = (A/I)_{A-p_x} = (A/I)_{\overline{A-p_x}} = 0 \Leftrightarrow 0 \in \overline{A-p_x} \Leftrightarrow (A-p_x) \cap I \neq \emptyset \Leftrightarrow I \not\subseteq p_x \Leftrightarrow x \in (I)_0$.

Veamos que $A_S = 0 \Leftrightarrow 0 \in S$:

$\Rightarrow)1/1 = 0 \Rightarrow \exists s \in S$ tal que $s \cdot 1 = 0$.

$\Leftarrow)a/s = 0$ porque $0 \cdot a = 0$, $(0 \in S)$.

26. Probar que $(I \cdot M)_S = I_S \cdot M_S = I \cdot M_S$.

Resolución:

Veamos primero quién es cada conjunto: $I \cdot M = \{\sum_j i_j m_j : i_j \in I, m_j \in M\}$.

$$(I \cdot M)_S = \sum_j (i_j m_j)/s : i_j \in I, m_j \in M \text{ y } s \in S\}$$

$$\begin{aligned} I_S \cdot M_S &= \{\sum_j (i_j/s_j)(m_j/s'_j) : i_j \in I, m_j \in M \text{ y } s_j, s'_j \in S\} \\ &= \{\sum_j (i_j m_j)/(s_j s'_j) : i_j \in I, m_j \in M \text{ y } s_j, s'_j \in S\} \\ &= \{\sum_j (a_j i_j m_j)/s : a_j, i_j \in I, m_j \in M \text{ y } s \in S\} \\ &= \{\sum_j (i'_j m_j)/s : i'_j \in I, m_j \in M \text{ y } s \in S\} \end{aligned}$$

Por último:

$$I \cdot M_S = \{\sum_j (i_j m_j)/s_j : i_j \in I, m_j \in M \text{ y } s_j \in S\} = \sum_j (i_j m_j)/s : i_j \in I, m_j \in M \text{ y } s \in S\}$$

Por tanto, es evidente que $(I \cdot M)_S = I_S \cdot M_S = I \cdot M_S$.

27. Sea A un anillo íntegro, e $I \neq 0$ un ideal. Probar que I es libre si y sólo si $I = aA$ $(a \neq 0)$.

Resolución:

$\Leftarrow$) Sea $I = aA$, tenemos el epimorfismo:

$$\begin{array}{ccc} A & \to & I = aA \\ b & \to & ab \end{array}$$

que es inyectivo, porque como A es íntegro, si $ab = 0 \Rightarrow b = 0$, luego $I \simeq A$.

$\Rightarrow$) Dados dos elementos $a_1, a_2 \in I$, entonces no son linealmente independientes ya que $a_2a_1 - a_1a_2 = 0$. Luego si I es libre está generado por un único elemento, luego $I = aA$.

28. Sea M un A-módulo finito generado y $S \subset A$ un sistema multiplicativo de A. Probar que si $M_S = 0$ entonces existe un $s \in S$ tal que $s \cdot m = 0$ para todo $m \in M$.

    Resolución:

    M es finito generado, por tanto, $M =< m_1, ..., m_n >$. $M_S = 0$, es decir, $\forall m \in M, \forall t \in S, m/t = 0 \Rightarrow \exists s' \in S : s'(m1 - t0) = 0 \Rightarrow s'm = 0$. Luego para $m_i, i = 1, ..., n, \exists s_i \in S : s_im_i = 0$. Si tomamos $s = s_1 \cdot ... \cdot s_n \in S$, tenemos que $sm_i = 0, \forall i = 1, ..., n$. Luego como los m_i generan a M, tenemos que $sm = 0, \forall m \in M$.

29. Sea $I \subseteq A$ un ideal y M un A-módulo finito generado. Probar que $IM = M \iff M_{1+I} = 0$.

    Resolución:

    $\Leftarrow$) Suponemos que $M_{1+I} = 0 \Rightarrow$ para cada $m \in M, \exists (1 + i) \in 1 + I$ tal que $(1 + i)m = 0 \Rightarrow m = -im$ para cada m. Luego $M = IM$.

    $\Rightarrow$) Localizando A y M por el sistema multiplicativo $1 + I$, podemos que los elementos de $1 + I$ son invertibles. Sea $\{m_1, \dots, m_r\}$ un sistema generador con el número mínimo de elementos posible. Supongamos que $r > 0$, es decir, que $M \neq 0$. Como $I \cdot M = M$ tenemos que

    $$m_1 = \sum_i a_i m_i \quad a_i \in I$$

    Luego $(1 - a_1)m_1 = \sum_{i>1} a_im_i$ y $m_1 = (1 - a_1)^{-1}(\sum_{i>1} a_im_i) \in \langle m_2, \dots, m_r\rangle$. Por tanto, $m_2, \dots, m_r$ generan M y llegamos a contradicción, al suponer que $M \neq 0$.

30. Probar que si un endomorfismo $T : M \to M$ de un A-módulo finito generado es epiyectivo entonces es un isomorfismo.

    Resolución:

    T dota a M de estructura de $k[x]$-módulo: $p(x) \cdot m := p(T)(m)$. T es epiyectivo si y sólo si $xM = M$, que equivale a, $(x)M = M$. Por el problema anterior, $M_{1+(x)} = 0$. Por lo tanto, existe un $p(x) = 1 + x \cdot q(x)$ que anula a M. Es decir, $(1 + xq(x)) \cdot m = 0$, para todo $m \in M$, que equivale a decir, que $m + T \circ q(T)(m) = 0$. Es decir, $-q(T)$ es el inverso de T. Luego T es un isomorfismo.

31. Demostrar que $\mathbb{Z}^n$ es un $\mathbb{Z}$-módulo isomorfo a $\mathbb{Z}^m$ si y sólo si $n = m$.

    Resolución:

    $\Leftarrow$) Esta implicación es obvia.

    $\Rightarrow$) Sea $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m$, consideramos el sistema multiplicativo $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, y localicemos por él.

    $$(\mathbb{Z}^n)_S \simeq (\mathbb{Z}^m)_S$$

$$(\mathbb{Z}_S)^n \simeq (\mathbb{Z}^n)_S$$
$$(\mathbb{Z}_S)^m = (\mathbb{Z}^m)_S$$

de todo esto $\Rightarrow \mathbb{Q}^n \simeq \mathbb{Q}^m$ como $\mathbb{Q}$-módulos $\Rightarrow$ por ser $\mathbb{Q}$ un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, $n = m$. (Porque sabíamos que los espacios vectoriales son isomorfos si tienen la misma dimensión).

32. Demostrar que A^n es un A-módulo isomorfo a A^m si y sólo si $n = m$.

Resolución:

Si fueran espacios vectoriales lo sabriamos por teoría de la dimensión.

Si $n = m$, es claro que A^n es isomorfo a A^m. Ahora, probemos que si A^n es isomorfo a A^m, entonces $n = m$: sea $\mathfrak{m} \subseteq A$, un ideal maximal. Como A^n es isomorfo a A^m, tenemos que

$$A^n/\mathfrak{m}A^n \simeq A^m/\mathfrak{m}A^m$$

Ahora, como $A^n = A \oplus \overset{n}{\dots} \oplus A$ y como $\mathfrak{m}A^n = \mathfrak{m}A \oplus \overset{n}{\dots} \oplus \mathfrak{m}A$, tenemos que

$$(A \oplus \overset{n}{\dots} \oplus A)/(\mathfrak{m}A \oplus \overset{n}{\dots} \oplus \mathfrak{m}A) = A/\mathfrak{m}A \oplus \overset{n}{\dots} \oplus A/\mathfrak{m}A$$

Por tanto, $(A/\mathfrak{m})^n = A^n/\mathfrak{m}A^n \simeq A^m/\mathfrak{m}A^m = (A/\mathfrak{m})^m$. Luego, $(A/\mathfrak{m})^n \simeq (A/\mathfrak{m})^m$ es un isomorfismo de $A/\mathfrak{m}$-módulos $\Rightarrow$ como $A/\mathfrak{m}$ es cuerpo $\Rightarrow$ $A/\mathfrak{m}$-módulo es igual a $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial, por tanto, por teoría de la dimensión de los espacios vectoriales, $n = m$.

33. Sea M un A-módulo finito generado. Probar que si $M \simeq M \oplus N$ entonces $N = 0$ ¿Es siempre cierto este resultado si M no es finito generado?

Resolución:

Sea $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal maximal.

$$M/\mathfrak{m}M \approx (M \oplus N)/M(M \oplus N) = M \oplus N/\mathfrak{m}M \oplus \mathfrak{m}N = M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N$$

Esto no puede ser por la teoría de la dimensión, luego $N/\mathfrak{m}N$ es 0. Concluiría que $N = 0$ si A fuese local y N fuera finito generado. Veamos que N es finito generado.

$$M \oplus N/M \oplus 0 = 0 \oplus N = N$$

N es isomorfo a un cociente de $M \oplus N \simeq M$. N es un cociente de un módulo finito generado luego es finito generado. El anillo no es necesariamente local pero podemos suponer que es local: Sea $x \in \operatorname{Spec} A$ (ideal primo), localicemos en x.

$M_x \simeq M_x \oplus N_x$ como A_x-módulos. Ahora es un anillo local de ideal maximal $m = p_x A_x$.

$$N_x/\mathfrak{m}N_x = 0 \Rightarrow \text{ (lema de Nakayama) } N_x = 0 \Rightarrow N = 0$$

Contestemos a la pregunta: no es siempre cierto. Veamos un ejemplo:

Sea $E = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}$ y $\{e_0, ..., e_n, ...\}$ una base. El morfismo

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E & \simeq & E \\ (e_i, 0) & \to & e_{2i} \\ (0, e_i) & \to & e_{2i+1} \end{array}$$

es un isomorfismo.

34. Sea $m_1, \ldots, m_s$ un sistema generador de un A-módulo libre A^n. Probar que $s \geq n$.

Resolución:

Si A fuese un cuerpo lo sabríamos por Álgebra Lineal. Sea $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal maximal. Por ejercicios anteriores sabemos que si $m_1, \ldots.., m_n$ es un sistema generador del A-módulo A^n, entonces $\bar{m}_1, \ldots.., \bar{m}_s$ es un sistema de generadores del $A/\mathfrak{m}$-módulo $A^n/\mathfrak{m}A^n$ (por ser $\mathfrak{m}$ maximal, entonces $A/\mathfrak{m}$ es cuerpo, por tanto, $A/\mathfrak{m}$-módulo es lo mismo que $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial).

Ahora, por un ejercicio anterior

$$(A^n/\mathfrak{m}A^n) = (A/\mathfrak{m})^n$$

y por teoría de la dimensión de espacios vectoriales, obtenemos que $s \geq n$.

35. Probar que todo sistema de n generadores de un módulo libre A^n es base.

Resolución:

Sea $\{m_1, ..., m_n\}$ un sistema de generadores. Tenemos pues la aplicación epiyectiva:

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\phi} & A^n \\ (a_1, ..., a_n) & \to & \sum_i a_i m_i \end{array}$$

Suponemos que no son base entonces $\operatorname{Ker}\phi \neq 0$. Y hemos llegado a contradicción porque dada la sucesión exacta:

$$0 \to \operatorname{Ker}\phi \hookrightarrow A^n \xrightarrow{\phi} A^n \to 0$$

por ser A^n libre, ϕ tiene sección, entonces $A^n = A^n \bigoplus \operatorname{Ker}\phi$, por tanto, $\operatorname{Ker}\phi = 0$.

36. Sean M y M' dos A-módulos de tipo finito. Sea $f \colon M \to M'$ un morfismo de A-módulos. Probar que si los morfismos $\bar{f}_x \colon M/\mathfrak{m}_x M \to M'/\mathfrak{m}_x M'$, $\bar{m} \mapsto \overline{f(m)}$ son epiyectivos, para todo punto cerrado $x \in \operatorname{Spec} A$, entonces el morfismo f es epiyectivo.

Resolución:

Un morfismo es epiyectivo si y sólo si lo es localmente. Podemos suponer que A es local de ideal maximal $\mathfrak{m}_x$. Sabemos que M' es finito generado, luego $M' = \langle m'_1, ..., m'_r\rangle$. Como $\bar{f}_x$ es epiyectiva, tenemos que $\{\bar{m}'_1 = \overline{f(m_1)}, ..., \bar{m}'_r = \overline{f(m_r)}\}$. Aplicando el lema de Nakayama, tenemos que $\{f(m_1), \ldots, f(m_r)\}$ generan M', por tanto, f es epiyectiva.

37. Demostrar que si existe un morfismo $A^m \hookrightarrow A^n$ inyectivo de A-módulos entonces $m \leq n$.

Resolución:

Las inyeciones no se mantienen al hacer cociente por un maximal. Sea $\mathfrak{p}_x \subset A$ un ideal primo minimal. Localizando tenemos la inyección

$$A_x^m \hookrightarrow A_x^n$$

y A_x es un anillo con solo ideal primo $\mathfrak{p}_x A_x$. Simplificando notaciones podemos suponer que A es un anillo con un único ideal primo. Los elementos del ideal primo $\mathfrak{p}_x$ son nilpotentes y los que no están en él son invertibles.

Dado un módulo M, definimos su torsión como $T(M) := \{m \in M$ tales que existe $a \in A$, no nulo, tal que $a \cdot m = 0\}$.

$T(A^m) = \mathfrak{p}_x \times \overset{m}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x$: si $(a_1, ..., a_n) \in T(A^m)$ entonces existe $a \in A (a \neq 0)$ tal que $a \cdot (a_1, ..., a_n) = (0, .., 0)$. Luego ningún a_i es invertible, luego $a_i \in \mathfrak{p}_x$ para todo $i \Rightarrow T(A^m) \subseteq \mathfrak{p}_x \times \overset{m}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x$. Si $(a_1, ..., a_m) \in \mathfrak{p}_x \times \overset{m}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x$ denotemos $a^\alpha := a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$. Sea α de modo que $a^\alpha \neq 0$ y que $a_1^{\alpha_1} \cdot \cdot a_i^{\alpha_i+1} \cdot a_n^{\alpha_n} = 0$ para cualquier i. Se cumple que $a^\alpha(a_1, ..., a_m) = (0, ..., 0)$. Entonces $\mathfrak{p}_x \times ... \times \mathfrak{p}_x \subseteq T(A^m)$.

Por tanto, $A^n \cap T(A^m) = A^n \cap (\mathfrak{p}_x \times \overset{m}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_x \times \overset{n}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x$ y si denotamos por φ la composición de los morfismos

$$A^n \hookrightarrow A^m \to A^m/\mathfrak{p}_x \times \overset{n}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x$$

tenemos que $\operatorname{Ker}\varphi = A^n \cap (\mathfrak{p}_x \times \overset{m}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_x \times \overset{n}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x$. En conclusión tenemos la inyección

$$(A/\mathfrak{p}_x)^n = A^n/\mathfrak{p}_x \times \overset{n}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x \hookrightarrow A^m/\mathfrak{p}_x \times \overset{m}{\cdots} \times \mathfrak{p}_x = (A/\mathfrak{p}_x)^m$$

Luego por la teoría de la dimensión $m \geq n$.

38. Demostrar que la longitud del $k[x]$-módulo $k[x]/(x^n)$ es n.

Resolución:

Para ver que la longitud de $k[x]/(x^n)$ es n, tenemos que dar una cadena de submódulos de él que sea irrefinable y ver que tiene n elementos. Consideremos la cadena siguiente:

$$0 \subset (\bar{x}^{n-1}) \subset (\bar{x}^{n-2}) \subset ... \subset (\bar{x}^0) = (\bar{1}) = k[x]/(x^n)$$

Veamos que es irrefinable, es decir, que $(\bar{x}^i)/(\bar{x}^{i+1})$ es simple:

$$\operatorname{Anul}((\bar{x}^i)/(\bar{x}^{i+1})) = (\bar{x})$$

Luego, $k[x]/\operatorname{Anul}((\bar{x}^i)/(\bar{x}^{i+1})) \simeq (\bar{x}^i)/(\bar{x}^{i+1}) \Rightarrow k[x]/(\bar{x}) \simeq (\bar{x}^i)/(\bar{x}^{i+1})$ y como $k[x]/(\bar{x}) \simeq k$,entonces deducimos que $(\bar{x}^i)/(\bar{x}^{i+1})$ es simple. Luego hemos encontrado una cadena de n elementos de $k[x]/(x^n)$ que es irrefinable y, por tanto, $k[x]/(x^n)$ tiene longitud n.

Capítulo 3

Problemas del capítulo de módulos sobre dominios de ideales principales

1. Sea A un dominio de ideales principales. Si $aA \cap bA = cA$, pruébese que c es el mínimo común múltiplo de a y b.

   Resolución:

   Como $c \in aA \cap bA = cA$, entonces c es múltiplo de a y b. Por otra parte, si m es múltiplo de a y b entonces $m \in aA \cap bA = cA$. Luego, $m \in cA$, es decir, m es múltiplo de c. En conclusión, c es el mínimo común múltiplo de a y b.

2. Sea A un dominio de ideales principales. Sean $a = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$, $b = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ con $n_i, m_j \geq 0$, p_i irreducibles y p_i primo con p_j, para $i \neq j$. Calcúlese el mínimo común múltiplo y máximo común divisor de de a y b.

   Resolución:

   1. Veamos que $m.c.m(a, b) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ con $\alpha_i = \text{máx}\{a_i, b_i\}$: Es claro que es múltiplo de a y b. Si c es múltiplo de a y b, entonces es múltiplo de $p_i^{n_i}$ y $p_i^{m_i}$, luego múltiplo de $p_i^{\alpha_i}$. Por tanto c es múltiplo de $m.c.m(a, b)$.

   2. Veamos que $m.c.d.(a, b) = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$, con $\beta_i = \text{mín}\{a_i, b_i\}$: Es claro que divide á a y á b. Si c divide á a y á b entonces $c = p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}$, con $\gamma_i \leq n_i$ y $\gamma_i \leq m_i$, luego c divide a $p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$.

3. Sean p y q números primos distintos. Calcular el número de grupos abelianos finitos desisomorfos de orden $p^2 q$.

   Resolución:

   Sea G el grupo abeliano considerado. Por el tercer teorema de descomposición

   $$G \simeq \mathbb{Z}/\phi_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\phi_n\mathbb{Z}$$

con $\phi_1|\phi_2|\dots|\phi_n$. Tenemos que $p^2q = \text{ord } G = \text{ord } \mathbb{Z}/\phi_1\mathbb{Z}\cdots \text{ ord } \mathbb{Z}/\phi_n\mathbb{Z} = \phi_1\cdots\phi_n$. Entonces $\phi_1 = p^2q$ ó $\phi_1 = pq$ y $\phi_2 = p$. Es decir, ó $G \simeq \mathbb{Z}/p^2q\mathbb{Z}$ ó $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4. Pruébese que un grupo abeliano finito que no sea cíclico contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para un cierto entero primo p.

   Sabemos que
$$G \simeq \bigoplus_{i,j} \mathbb{Z}/p_i^{n_{ij}}\mathbb{Z}$$
   Si para cada i solo existe un n_{ij}, escribiríamos
$$G = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r}\mathbb{Z})$$
   que es un grupo cíclico (contradicción). Luego
$$G \simeq \mathbb{Z}/p_1^{n_{11}}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_1^{n_{12}}\mathbb{Z} \oplus \cdots$$
   El subgrupo $(\overline{p_i^{n_{11}-1}}) \subseteq \mathbb{Z}/p_1^{n_{11}}\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$. Por tanto el subgrupo
$$(\overline{p_i^{n_{11}-1}}) \oplus (\overline{p_i^{n_{12}-1}}) \oplus 0 \subseteq G$$
   es isomorfo a $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$.

5. Sea G un grupo abeliano finito. Demostrar que G es cíclico si y sólo si para cada n divisor del orden de G, existe un único subgrupo de G de orden n.

   Resolución:

   $\Rightarrow$) Si G es cíclico entonces $G \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Dado un subgrupo $G' \subseteq G$ entonces $r = \#G'|\#G = m$. Observemos que r anula a G'. Los elementos de $G \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ anulados por r son $\{\overline{\frac{m}{r}}, 2\overline{\frac{m}{r}}, \dots, \bar{m} = 0\} = \langle\overline{\frac{m}{r}}\rangle$. Por tanto $G' = \langle\overline{\frac{m}{r}}\rangle$.

   $\Leftarrow$) Sea G un grupo abeliano de orden m de modo que para cada r que divida a m contiene un único subgrupo de orden r. Veamos que G es cíclico. Sabemos
$$G \simeq \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_r^{n_r}\mathbb{Z}$$
   Quizás algún $p_i = p_j$. Supongamos que $p_1 = p_2$. Los subgrupos $\langle\overline{p_1^{n_1-1}}\rangle \oplus 0$ y $0 \oplus \langle\overline{p_2^{n_2-1}}\rangle \oplus 0$ son ambos de orden $p_1 = p_2$ y llegamos a contradicción. En conclusión, los p_i son distintos de los p_j, para $i \neq j$. Por el teorema chino de los restos
$$G \simeq \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r}\mathbb{Z}$$
   que es cíclico.

6. Sea G un subgrupo discreto del grupo aditivo de $\mathbb{R}^n$. Pruébese que existe un número natural $r \leq n$, tal que G está generado como $\mathbb{Z}$-módulo por r vectores linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

   Resolución:

Procedamos por inducción sobre n.

Si $n = 1$, sea $g \in G$, un vector de G no nulo de módulo mínimo. Dado $g' \in G$, existe $n \in G$, de modo que $g' = ng + \lambda g$, con $0 \leq \lambda < 1$. Luego, λg que pertenece a G, es de módulo menor que el de g, y ha de ser igual a cero. Es decir, $G = \langle g \rangle$.

Supongamos que el enunciado es cierto hasta $n - 1$. Sea $g \in G$, un vector de G no nulo de módulo mínimo. Sea H el plano normal a g. Consideremos la proyección $\pi \colon \mathbb{R}^n = \langle g \rangle \oplus H \to H$. Tenemos que $\pi(G)$ es un subgrupo discreto de H. Efectivamente, debemos probar que existe un entorno U de $0 \in H$ tal que $U \cap \pi(G) = 0$. Si no existiese dicho entorno, entonces existirá una sucesión de puntos $g_i \in G$, de modo que $\pi(g_i)$ convergen a 0. Tenemos que $g_i = \lambda_i g + h_i$, y podemos suponer que $|\lambda_i| \leq 2$ (sumando o restando ng). Ahora bien, $||g_i|| = |\lambda_i| + ||h_i||$ y como $||h_i||$ tiende a cero, encontramos vectores de módulo menor que el de g, contradicción.

En conclusión, por hipótesis de inducción tenemos que $\pi(G)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango $r < n - 1$ (generado por r-vectores $\mathbb{R}$-linealmente independientes). La sucesión exacta

$$0 \to (\mathbb{R} \cdot g) \cap G \to G \to \pi(G) \to 0$$

rompe, luego $G \simeq (\mathbb{R} \cdot g) \cap G \oplus \pi(G)$. Como $(\mathbb{R} \cdot g) \cap G$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R} \cdot g$, concluimos que es isomorfo a $\mathbb{Z} \cdot g$ y hemos concluido.

7. Clasifíquese el endomorfismo "multiplicar por x" sobre el espacio

$$E = k[x]/(x) \oplus k[x]/(x^3) \oplus k[x]/(x^5)$$

Resolución:

¡Está ya clasificado! Los divisores elementales son x^5, x^3, x.

8. Clasifíquense los endomorfismos nilpotentes de un espacio vectorial de dimensión 3. Problema análogo para espacios de dimensión 4 y 5. *Resolución:*

i). Sea $T \colon E \longrightarrow E$ donde dimensión E=3. $\exists n \in \mathbb{N}, T^n = 0 \Rightarrow T^n(e) = 0, \forall e \in E \Rightarrow x^n \cdot e = 0, \forall e \in E \Rightarrow \text{Anul}(E) = x^m$ donde $m \leq n$
Por el teorema de clasificación

$$E \simeq K[x]/(p_1(x)^{n_1}) \oplus \cdots \oplus K[x]/(p_r(x)^{n_r})$$

con $p_i(x)$ irreducibles.
$\text{Anul}(E) = m.c.m.(p_1(x)^{n_1}, \cdots, p_r(x)^{n_r} = x^m$.
Entonces $p_i(x)^{n_i} = x^{m_i}$.
Sea

$$E \simeq K[x]/(x)^{m_1} \oplus \cdots \oplus K[x]/(x)^{m_r}$$

Una base de $K[x]/(x^n)$ es $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}, \cdots, \overline{x^{n-1}}\}$ tenemos que $\dim K[x]/(x^n) = n$
$3 = \dim_k E = m_1 + \cdots + m_r$
Hay tres posibilidades, las demás son isomorfas a ellas:
1. $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^3)$
Consideremos la base: $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}\}$
La matriz de multiplicar por x en esta base es:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & k[x]/(x^3) \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x\cdot} \\ E & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & k[x]/(x^3) \end{array}$$

Y la matriz de T en la base $\{\varphi^{-1}(\overline{1}), \{\varphi^{-1}(\overline{x}), \{\varphi^{-1}(\overline{x^2})\}$ es: $T \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^2) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
Consideremos la base: $\{(\overline{1}, 0), (\overline{x}, 0), (0, \overline{1})\}$ de $\mathbf{K}[x]/(x^2) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
La matriz de multiplicar por x en esta base es:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Y la matriz de T en la base: $\{\varphi^{-1}(\overline{1}, 0), \{\varphi^{-1}(\overline{x}, 0), \{\varphi^{-1}(0, \overline{x^2})\}$ es:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$

Consideremos la base: $\{(\overline{1}, 0, 0), (0, \overline{1}, 0), (0, 0, \overline{1})\}$ de $\mathbf{K}[x]/(x^2) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
La matriz de multiplicar por x en esta base es:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Y la matriz de T en la base: $\{\varphi^{-1}(\overline{1}, 0, 0), \{\varphi^{-1}(\overline{x}, 0), \{\varphi^{-1}(0, \overline{x^2})\}$ es:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii).Sea $T \colon E \longrightarrow E$ donde dimensión E=4. $\exists n \in \mathbb{N}, T^n = 0 \Rightarrow T^n(e) = 0, \forall e \in E \Rightarrow x^n \cdot e = 0, \forall e \in E \Rightarrow \text{Anul}(E) = x^m$ donde $m \leq n$
Por el teorema de clasificación

$$E \simeq K[x]/(p_1(x)^{n_1}) \oplus \cdots \oplus K[x]/(p_r(x)^{n_r})$$

con $p_i(x)$ irreducibles.
$\text{Anul}(E) = m.c.m.(p_1(x)^{n_1}, \cdots, p_r(x)^{n_r}) = x^m$.

Entonces $p_i(x)^{n_i} = x^{m_i}$.
Sea

$$E \simeq K[x]/(x)^{m_1} \oplus \cdots \oplus K[x]/(x)^{m_r}$$

Una base de $K[x]/(x^n)$ es $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}, \cdots, \overline{x^{n-1}}\}$ tenemos que $\dim K[x]/(x^n) = n$
$4 = \dim_k E = m_1 + \cdots + m_r$
Hay cinco posibilidades, las demás son isomorfas a ellas:

1). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^4)$

Luego la base es: $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}, \overline{x^3}\}$
Y la matriz de T en esta base es:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^3) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$

Luego la base es: $\{(\overline{1}, 0), (\overline{x}, 0), (\overline{x^2}, 0), (0, \overline{1})\}$
La matriz de T en esta base es:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^2) \oplus \mathbf{K}[x]/(x^2)$
Luego, la base es: $\{(\overline{1}, 0), (0, \overline{1}), (\overline{x}, 0), (0, \overline{x})\}$
Y la matriz de T en esta base es:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^2) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
Luego, la base es: $\{(\overline{1}, 0, 0), (\overline{x}, 0, 0), (0, \overline{1}, 0), (0, 0, \overline{1})\}$
Y la matriz de T en esta base es:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5).$E \simeq \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
Luego la base es: $\{(\overline{1}, 0, 0, 0), (0, \overline{1}, 0, 0), (0, 0, \overline{1}, 0), (0, 0, 0, \overline{1})\}$

Y la matriz de T en esta base es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii). Sea $T\colon E \longrightarrow E$ donde dimensión E=5. $\exists n \in \mathbb{N}, T^n = 0 \Rightarrow T^n(e) = 0, \forall e \in E \Rightarrow x^n \cdot e = 0, \forall e \in E \Rightarrow \text{Anul}(E) = x^m$ donde $m \leq n$
Por el teorema de clasificación

$$E \simeq K[x]/(p_1(x)^{n_1}) \oplus \cdots \oplus K[x]/(p_r(x)^{n_r})$$

con p_i irreducibles.
$\text{Anul}(E) = m.c.m.(p_1(x)^{n_1}, \cdots, p_r(x)^{n_r} = x^m$.
Entonces $p_i(x)^{n_i} = x^{m_i}$.
Sea

$$E \simeq K[x]/(x)^{m_1} \oplus \cdots \oplus K[x]/(x)^{m_r}$$

Una base de $K[x]/(x^n)$ es $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}, \cdots, \overline{x^{n-1}}\}$ tenemos que $\dim K[x]/(x^n) = n$
$5 = \dim_k E = m_1 + \cdots + m_r$
Hay siete posibilidades, las demás son isomorfas a ellas:

1). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^5)$

Luego la base es: $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}, \overline{x^3}, \overline{x^4}\}$

Y la matriz de T en esta base es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^4) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
Luego la matriz de T es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^3) \oplus \mathbf{K}[x]/(x^2)$
Luego la matriz de T es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^3) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
Luego la matriz de T es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^2) \oplus \mathbf{K}[x]/(x^2) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
Luego la matriz de T es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x^2) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
Luego la matriz de T es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7). $E \simeq \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x) \oplus \mathbf{K}[x]/(x)$
Luego la matriz de T es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Clasifíquense los endomorfismos T de un espacio vectorial real E, que cumplan

   (a) Anulador de $T = (x-1)^2$, $\dim E = 5$.

   (b) Anulador de $T = (x^2+4)^2(x+8)^2$, $\dim E = 8$.

Resolución:

a) Sabemos que $E_T \simeq k[x]/(p_1(x)^{n_1}) \oplus \ldots \oplus k[x]/(p_r(x)^{n_r})$ y su anulador es $\mathrm{Anul}(T) = (x-1)^2 = \mathrm{m.c.m.}(p_1(x)^{n-1}, \ldots, p_r(x)^{n_r})$. Además sabemos que $\dim k[x]/(p(x)) = \mathrm{gr}(p(x))$. Luego

$$E_T \simeq k[x]/(x-1)^2 \oplus \overset{r}{\ldots} \oplus k[x]/(x-1)^2 \oplus k[x]/(x-1) \oplus \overset{s}{\ldots} \oplus k[x]/(x-1)$$

siendo $\dim(E_T) = 2r + s$ y $r \geq 1$. En nuestro caso $\dim E = 5$, luego ó $r = 1$ y $s = 3$, ó $r = 2$ y $s = 1$. Es decir,

$$E_T \simeq \begin{cases} k[x]/(x-1)^2 \oplus k[x]/(x-1) \oplus k[x]/(x-1) \oplus k[x]/(x-1) \\ \text{ó} \\ k[x]/(x-1)^2 \oplus k[x]/(x-1)^2 \oplus k[x]/(x-1) \end{cases}$$

b) Nos dicen que $\phi_1(x) = (x^2+4)^2 \cdot (x+8)^2$. Sabemos que

$$E \simeq k[x]/(\phi_1(x)) \oplus \ldots \oplus k[x]/(\phi_r(x))$$

En nuestro caso $E = k[x]/(x^2+4)^2(x+8)^2 \oplus k[x]/\phi_2(x) \oplus k[x]/\phi_3(x)$ Como $\dim E = 8$, entonces

$$\phi_2(x) = \begin{cases} (x^2+4) & (\phi_3(x) = 1) \\ (x+8)^2 & (\phi_3(x) = 1) \\ (x+8) & (\phi_3(x) = x+8) \end{cases}$$

Por tanto,

$$E = \begin{cases} k[x]/(x^2+4)^2(x+8)^2 \oplus k[x]/(x^2+4) \\ \\ k[x]/(x^2+4)^2(x+8)^2 \oplus k[x]/(x+8)^2 \\ \\ k[x]/(x^2+4)^2(x+8)^2 \oplus k[x]/(x+8) \oplus k[x]/(x+8) \end{cases}$$

10. Sea E el espacio vectorial real de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor que 6, y sea D el operador derivada sobre E. Clasifíquese el endomorfismo $T = D^2$.

Resolución:

Una base de E es $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. La matriz de $T = D^2$ es

$$T \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que $T^3 = D^6$ es nulo sobre los polinomios de grado menor que cinco, pero $T^2 = D^4$ no porque $T^2(x^5) = 120x$. Luego el anulador de T es x^3 y $\phi_1(x) = x^3$. Por tanto,

$$E = \begin{cases} \text{1. } \mathbb{R}[x]/(x^3) \oplus \mathbb{R}[x]/(x^3) \\ \text{ó} \\ \text{2. } \mathbb{R}[x]/(x^3) \oplus \mathbb{R}[x]/(x^2) \oplus \mathbb{R}[x]/(x) \\ \text{ó} \\ \text{3. } \mathbb{R}[x]/(x^3) \oplus \mathbb{R}[x]/(x) \oplus \mathbb{R}[x]/(x) \oplus \mathbb{R}[x]/(x) \end{cases}$$

Veamos cuál de estos tres es nuestro caso. Tenemos que $\dim \operatorname{Ker} T = 2$. En el caso primero es dos ($\operatorname{Ker} T = (\overline{x^2}) \oplus (\overline{x^2})$) en el segundo caso es tres ($\operatorname{Ker} T = (\overline{x^2}) \oplus (\overline{x}) \oplus (\overline{1})$) y en el tercer caso cuatro ($\operatorname{Ker} T = (\overline{x^2}) \oplus (\overline{1} \oplus (\overline{1} \oplus (\overline{1}))$. En conclusión, $E = \mathbb{R}[x]/(x^3) \oplus \mathbb{R}[x]/(x^3)$.

11. Sea A el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de todas las funciones reales a valores complejos infinitamente diferenciables. Se designa por D el operador derivada. Es claro que D es un endomorfismo $\mathbb{C}$ lineal de A.

(a) Probar la fórmula de conmutación

$$P(D)(e^{\alpha x}\cdot y) = e^{\alpha x}P(D+\alpha)y$$

para $y \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Probar que $\operatorname{Ker} D^{r+1} = \{$Polinomios de grado menor o gual que $r\}$. Calcular $\operatorname{Ker}(D-\alpha)^{r+1}$. Si $p(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_r)^{n_r}$, calcular $\operatorname{Ker} p(D)$.

(c) Resolver las ecuaciones diferenciales: $y'''' - 2y''' + 2y'' = 0$, $y'' + y = 0$.

Resolución:

a) Sea $D\colon E \to E$, $f \mapsto Df$. Queremos probar que $P(D)(e^{\alpha x}f) = e^{\alpha x}P(D+\alpha)f$.

$$D(e^{\alpha x}f) = \alpha e^{\alpha x}f + e^{\alpha x}Df = e^{\alpha x}(D+\alpha)f$$
$$D^2(e^{\alpha x}f) = D(D(e^{\alpha x}f)) = D(e^{\alpha x}(D+\alpha)f) = e^{\alpha x}(D+\alpha)(D+\alpha)f = e^{\alpha x}(D+\alpha)^2 f$$
$$\dots$$
$$D^n(e^{\alpha x}f) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^n f$$

Por linealidad tenemos $P(D)(e^{\alpha x}f) = e^{\alpha x}P(D+\alpha)f$.

b) 1- $\operatorname{Ker} D^{r+1} = \{$polinomios de grado menor o igual que r $\}$

$\subseteq$) Es claro que $\{p(x)\colon$ grado $(p(x))$ menor o igual que r$\} \subseteq \operatorname{Ker} D^{r+1}$: Si $p_r(x)$ es un polinomio de grado r entonces $Dp_r(x)$ es de grado $r-1$. Por tanto $D^{r+1}p_r(x) = 0$.

$\supseteq$) $D^{r+1}f(x) = 0$ entonces $D^r Df(x) = 0$. Por inducción sobre r tenemos que $Df(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que r-1.

$$f(x) = \int \text{(polinomios de grado menor o igual que r-1)}\, dx$$
$$= \text{(polinomios de grado menor o igual que r)}$$

2-Veamos que $\operatorname{Ker}(D-\alpha)^{r+1} = e^{\alpha x}\{$polinomios de grado menor o igual que r$\}$.

Tenemos que $f(x) \in \operatorname{Ker}(D-\alpha)^{r+1} \iff (D-\alpha)^{r+1}f(x) = 0 \iff 0 = (D-\alpha)^{r+1}(e^{\alpha x}e^{-\alpha x}f(x)) = e^{\alpha x}D^{r+1}(e^{-\alpha x}f(x)) \iff D^{r+1}(e^{-\alpha x}f(x)) = 0 \iff e^{-\alpha x}f(x) \in \{$ polinomios de grado menor o igual que r$\} \iff f(x) \in e^{\alpha x}\{$polinomios de grado menor o igual que r$\}$.

3- Si $p(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}\dots(x-\alpha_r)^{n_r}$.
$\operatorname{Ker} p(D) = \operatorname{Ker}(D-\alpha_1)^{n_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(D-\alpha_r)^{n_r} =$
$e^{\alpha_1 x}\{$ polinomios de grado menor o igual que $n_1\} \oplus \dots \oplus e^{\alpha_r x}\{$polinomios de grado menor o igual que $n_r\}$.

c) 1- Escribimos la ecuación en forma de polinomio:

$(D^4 - 2D^3 + 2D^2)y = 0$. Esto es :
$D^2(D^2 - 2D + 2)y = 0$ entonces $D^2(D-(1+i))(D-(1-i))y = 0$.

Las soluciones de este polinomio se calculan aplicando el núcleo:
$\mathrm{Ker}(D^4 - 2D^3 + 2D^2) = \mathrm{Ker}\, D^2 \oplus \mathrm{Ker}(D - (1+i)) \oplus \mathrm{Ker}(D - (1-i)) =$
$(b_o + b_1 x) + \lambda e^{(1+i)x} + \mu e^{(1-i)x}$.

Las soluciones son : $y = (b_0 + b_1 x) + \lambda e^{(1+i)x} + \mu e^{(1-i)x}$.

2- Escribimos la ecuación en forma de polinomio :
$(D^2 + 1)y = 0 \Rightarrow (D + i)(D - i)y = 0$.
Aplicamos el núcleo,$\mathrm{Ker}(D + i) \oplus \mathrm{Ker}(D - i) = \mathrm{Ker}(D^2 + 1) \Rightarrow \ Ker(D^2 + 1) = \lambda e^{ix} + \mu e^{-ix}$.

Las soluciones son: $y = \lambda e^{ix} + \mu e^{-ix}$.

12. Con las notaciones del ejercicio anterior sea la ecuación $P(D)y = z$, con $z \in A$. Supongamos que existe un polinomio $Q(x)$ primo con $P(x)$ de modo que $Q(D)z = 0$. Pruébese que existe un polinomio $R(x)$, de modo que $R(D)z$ es una solución particular de la ecuación dada. Resolver la ecuación $y^{(3} - y = x^5$.

Resolución:

1). Existen $\lambda(x), \mu(x)$ tal que $\lambda(x) \cdot P(x) + \mu(x) \cdot Q(x) = 1 \Rightarrow (\lambda(x) \cdot P(x) + \mu(x) \cdot Q(x)) \cdot z = 1 \cdot z = z$ $\Rightarrow z = \lambda(D) \cdot P(D) \cdot z + \mu(D) \cdot Q(D) \cdot z = P(D) \cdot \lambda(D) z \Rightarrow y = \lambda(D) \cdot z$ es una solución de la ecuación diferencial. Y ahora veamos cuáles son todas las soluciones: si y, y' son soluciones $\Rightarrow P(D) \cdot (y - y') = P(D) \cdot y - P(D) \cdot y' = z - z = 0 \Rightarrow y - y' \in \ker P(D)$
Luego todas las soluciones son de la forma: $y' = y + \ker P(D) =$ solución particular + solución homogénea.

2). Resolvemos $y''' - y = x^4$ Sabemos que $D^5 \cdot x^4 = 0$
$D^3 - 1$ y D^5 son primos entre sí. ¿Existen $\lambda(x), \mu(x)$ tales que $\lambda(x) \cdot (x^3 - 1) + \mu(x) \cdot x^5 = 1$?
Dividiendo los polinomios tenemos que: $x^5 = x^2 \cdot (x^3 - 1) + x^2$ y $x^3 - 1 = x^2 \cdot x - 1$
Luego: $1 = (-1 - x^3) \cdot (x^3 - 1) + x \cdot x^5$
donde: $\lambda(x) = -1 - x^3$ y $\mu(x) = x$

Por tanto: $1 = (-1 - D^3) \cdot (D^3 - 1) + D \cdot D^5 \Rightarrow x^4 = (D^3 - 1) \cdot (-1 - D^3) \cdot x^4$
Solución particular: $y = (-1 - D^3) \cdot x^4 = -x^4 - 24 \cdot x$
Todas las soluciones: $-x^4 - 24 \cdot x + \ker(D^3 - 1) = -x^4 - 24 \cdot x + a \cdot e^x + b \cdot e^{\frac{-1+3i}{2}} + c \cdot e^x + b \cdot e^{\frac{-1-3i}{2}}, \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

13. Dada la ecuación diferencial $P(D)y = z$, escribamos $y = \frac{1}{P(D)} z$. Si $P(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}$, expresar y en términos de primitivas (reiteradas) de sumas de productos de funciones exponenciales y derivadas de z (úsese la descomposición de fracciones racionales en fracciones simples y la fórmula de conmutación). Resolver $y'' - y = senx$.

Resolución:

1) Dada $P(D)y = f(x) \Rightarrow y = \frac{f(x)}{(D-\alpha_1)^{n_1} \ldots (D-\alpha_r)^{n_r}} \Rightarrow y = (\sum\limits_{i,j} \frac{b_{ij}}{(D-\alpha_i)^j}) f(x)$.
En esta expresión : $\frac{1}{(D-\alpha)^n} f(x) = \frac{1}{(D-\alpha)^n} e^{\alpha x} e^{-\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{D^n} e^{-\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} \int \overset{n}{\ldots} \int e^{-\alpha x} f(x) dx$.

2) Escribimos la ecuación en forma de polinomio :
$(D^2-1)y=\sin x \Rightarrow y=\frac{1}{D^2-1}\sin x \Rightarrow y=\frac{\frac{1}{2}}{D-1}\sin x+\frac{\frac{1}{2}}{D+1}\sin x$.
Operamos: $\frac{\frac{1}{2}}{D-1}\sin x=\frac{\frac{1}{2}}{D-1}e^x e^{-x}\sin x=e^x\frac{\frac{1}{2}}{D}(e^{-x}\sin x)=e^x\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin x dx$.

Sabemos que : $\begin{cases} e^{ix}=\cos x+i\sin x \\ e^{-ix}=\cos x-i\sin x \end{cases}$
Restando estas dos expresiones tenemos :$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$

$\int e^{-x}\sin x dx=\int e^{-x}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}dx=\frac{1}{2}\int e^{(-1+i)x}+e^{(-1-i)x}=\frac{1}{2}[\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}+\frac{e^{(-1-i)x}}{-1-i}]$.

Sustituimos en la ecuación y nos queda :

$y=\frac{1}{2}e^x[\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}+\frac{e^{(-1-i)x}}{-1-i}]$.

14. Sea $Suc(\mathbb{C})=\{(a_n)\}$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las sucesiones de números complejos. Sea $\nabla\colon Suc(\mathbb{C})\to Suc(\mathbb{C})$ la aplicación $\mathbb{C}$-lineal definida por $\nabla(a_n)=(a'_n)$, donde $a'_n=a_{n+1}$. Sea $\Delta=\nabla-\mathrm{Id}$, el “operador diferencia”.

 (a) Probar las fórmulas de conmutación

$$P(\nabla)((\alpha^n)\cdot(a_n))=(\alpha^n)\cdot P(\alpha\nabla)(a_n)$$
$$P(\nabla-\alpha)((\alpha^n)\cdot(a_n))=(\alpha^n)\cdot P(\alpha\cdot\Delta)(a_n)$$

 (b) Demostrar que las sucesiones $\{(1),(n),\ldots,(n^r)\}$ son una base de $\operatorname{Ker}\Delta^{r+1}$. Calcular $\operatorname{Ker}(\nabla-\alpha)^r$.

 (c) Resolver la ecuación $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, con las condiciones iniciales $a_0=0, a_1=1$ (sucesión de Fibonacci).

Resolución:

a) 1) $\nabla((\alpha^n)(a_n))=\nabla((\alpha^n a_n))=(\alpha^{n+1}a_{n+1})=(\alpha^n)(\alpha a_{n+1})=(\alpha^n)(\alpha\nabla)(a_n)$

$\nabla^2((\alpha^n)(a_n))=\nabla(\nabla((\alpha^n)(a_n)))=\nabla((\alpha^n)(\alpha\nabla)(a_n))=(\alpha^n)(\alpha\nabla)(\alpha\nabla)(a_n)=(\alpha^n)(\alpha\nabla)^2(a_n)$
...
$\nabla^m((\alpha^n)(a_n))=(\alpha_n)(\alpha\nabla)^m(a_n)$

Si consideramos una combinación lineal de los endomorfismos ∇^i, esto ocurrirá para cada término. Concluimos: $P(\nabla)((\alpha^n)(a_n))=(\alpha^n)P(\alpha\nabla)(a_n)$

2) $P(\nabla-\alpha)((\alpha^n)(a_n))=(\alpha^n)P(\alpha\nabla-\alpha)(a_n)=(\alpha^n)P(\alpha(\nabla-Id))(a_n))=(\alpha^n)P(\alpha\Delta)(a_n)$

b) 1) Veamos que $\{(1),(n),\ldots,(n^r)\}$ es base.

Caso $r = 0$.
Si $\Delta(a_n) = 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 0$ (para todo n) $\Rightarrow a_n$ es constante, es decir, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_0$
$\operatorname{Ker}\Delta = \langle(1)\rangle_{\mathbb{C}}$.

Vamos a probar $\{(1), \ldots, (n)^r\} \subseteq \operatorname{Ker}\Delta^{r+1}$
Dado un polinomio de grado menor o igual que r, $p_r(n) = a_0 n^r + \ldots + a_r$
$\Delta(p_r(n)) = \Delta(a_0 n^r + a_1 n^{r-1} + \ldots + a_r) = \Delta(a_0 n^r) + \Delta(a_1 n^{r-1}) + \ldots + \Delta(a_r)$ Es un polinomio en n de grado menor que r.
$\Delta(n^s) = ((n+1)^s - n^s) = ((n^s + sn^{s-1} + \ldots + 1) - n^s)$ Es un polinomio en n de grado menor que s $\Rightarrow \Delta^{r+1}(p_r(n)) = (0) \Rightarrow \{(1), \ldots, (n)^r\} \subseteq \operatorname{Ker}\Delta^{r+1}$
Faltaría probar $\operatorname{Ker}\Delta^{r+1} \subseteq \{(1), \ldots, (n)^r\}$
Para ver la igualdad basta ver que $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}\Delta^{r+1} \leq r + 1 = \dim_{\mathbb{C}}\langle(1), (n), \ldots, (n)^r\rangle_{\mathbb{C}}$

$\operatorname{Ker}\Delta^{r+1} = (\Delta^{r+1})^{-1}(0) = \Delta^{-1}(\operatorname{Ker}\Delta^r)$
$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\Delta \longrightarrow \Delta^{-1}(\operatorname{Ker}\Delta^r) \longrightarrow \operatorname{Ker}\Delta^r \Rightarrow \Delta^{-1}(\operatorname{Ker}\Delta^r)/\operatorname{Ker}\Delta \subseteq \operatorname{Ker}\Delta^r$

$\dim \Delta^{-1}(\operatorname{Ker}\Delta^r) - \dim \operatorname{Ker}\Delta \leq \dim \Delta^r \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\Delta^{r+1} - 1 \leq r \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\Delta^{r+1} - 1 \leq r \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}\Delta^{r+1} \leq r + 1$

2) Supongamos que $\alpha \neq 0$

$0 = (\nabla - \alpha)^r(a_n) = (\nabla - \alpha)^r(\alpha^n)(\alpha^{-n})(a_n) = (\alpha^r)(\alpha\Delta)^r(\alpha^{-n})(a_n) \iff (\alpha^{-n})(a_n)$ es un polinomio en n de grado menor que r $\iff (a_n) \in \alpha^n \cdot \{$ polinomios en n de grado menor que $r\}$

c) $\nabla^2(a_n) = \nabla(a_n) + Id(a_n) \Rightarrow (\nabla^2 - \nabla - Id)(a_n) = 0$

Sabemos que dada la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ tiene como raíces $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ De esta forma tendríamos la ecuación $x^2 - x - 1 = (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2})$
$(\nabla^2 - \nabla - Id)(a_n) = 0 \Rightarrow (a_n) \in \operatorname{Ker}(\nabla^2 - \nabla - Id) = \operatorname{Ker}(\nabla - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \oplus \operatorname{Ker}(\nabla - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\lambda) + ((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\mu)$

Imponemos las condiciones iniciales para calcular λ y μ.

$a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\lambda + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\mu$

$0 = a_0 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0\lambda + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0\mu \Rightarrow 0 = \lambda + \mu$

$1 = a_1 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})\lambda + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})\mu$

Resolviendo estas tres igualdades obtenemos $\mu = -\sqrt{5}, \lambda = \sqrt{5}$.Sustituyendo en la ecuación obtenemos a_n.

15. Dada la ecuación inhomogénea $p(\nabla)(a_n) = (b_n)$, supóngase que existe un polinomio $q(x)$, primo con $p(x)$, tal que $q(\nabla)(b_n) = 0$. Pruébese que existe un polinomio $r(x)$ tal que $r(\nabla)(a_n)$ es una solución particular de la ecuación dada.

    Estúdiese el caso en que $p(x)$ y $q(x)$ no son primos entre sí. Resolver $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n$.

    Resolución:

    i) $\exists r(x), s(x)$ tal que $r(x)p(x) + s(x)q(x) = 1$ (por ser p,q primos entre sí) $\Rightarrow$ Id$(b_n) = [p(\nabla)r(\nabla) + s(\nabla)q(\nabla)](b_n)$, luego $(b_n) = p(\nabla)(r(\nabla)(b_n)))$, una solución es $r(\nabla)(b_n) = (a_n)$
    Cualquier otra solución se obtiene sumándole las de la homogénea.
    (a'_n) es otra solución de $p(\nabla)(a_n) = (b_n) \iff p(\nabla)(a_n - a'_n) = (b_n - b_n) \iff (a_n - a'_n) \in \operatorname{Ker} p(\nabla) \iff (a'_n) \in \operatorname{Ker} p(\nabla) + (a_n)$

    ii) $(\nabla^2 + 2\nabla - 8)(a_n) = (2^n)$

    $(\nabla - 2)(\nabla + 4)(a_n) = (2^n)$

    $(a_n) = \frac{1}{\nabla^2+2\nabla-8}(2^n) = (\frac{A}{\nabla-2} + \frac{B}{\nabla+4})(2^n) \Rightarrow B = -1/6, A = 1/6$

    $(a_n) = \frac{\frac{1}{6}}{\nabla-2}(2^n) + \frac{\frac{-1}{6}}{\nabla+4}(2^n)$

    $\frac{1}{6}\frac{1}{\nabla-2}(2^n) = (2^n)\frac{1}{6}\frac{1}{2\Delta}1 = (2^n)\frac{1}{12}n$

    $\frac{1}{\nabla+4}(2^n) = \frac{1}{\nabla+4}((-4)^n(-4)^{-n}2^n) = (-4)^n\frac{1}{-4\Delta}(-1)^n 2^{2n+1} = (-4)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k 2^{2k+1} = (-4)^{n-1}\cdot$
    $[\frac{2+2^{2n+1}}{1+4}]$.

    *Veamos el caso en que $p(x)$ y $q(x)$ no son primos entre si:

    Sea $d(x) = m.c.d.(p(x), q(x))$. Consideramos la ecuación $d(\nabla)p(\nabla)(a_n) = d(\nabla)(b_n) = (c_n)$. Ahora $\frac{q(\nabla)}{d(\nabla)}(c_n) = 0$ y $\frac{q(x)}{d(x)}$ es primo con $d(x)p(x)$.

    Por la primera parte del problema sabemos calcular todas las soluciones de la ecuación $d(\nabla)p(\nabla)(a_n) = (c_n)$. Entre todas éstas, que forman un espacio vectorial de dimensión finita, están incluidas las soluciones de la ecuación $p(\nabla)(a_n) = (b_n)$. El ver cuáles son, es resolver un sistema de ecuaciones lineales:

    Si (a'_n) es una solución particular de $d(\nabla)p(\nabla)(a_n) = (c_n)$ todas las soluciones de esta ecuación son
    $$(a'_n) + Ker\, d(\nabla)p(\nabla) = (a'_n) + Ker\, d(\nabla)^2 \oplus Ker\, \frac{p(\nabla)}{d(\nabla)}$$

    Busquemos entre éstas, aquéllas que verifiquen
    $$p(\nabla)[(a'_n) + Ker\, d(\nabla)^2 \oplus Ker\, \frac{p(\nabla)}{d(\nabla)}] = (b_n)$$
    $$(b_n) = p(\nabla)[(a'_n) + Ker\, d(\nabla)^2]$$

Si $(a'_n), \cdots, (a^r_n)$ son un suplementario de Ker $d(\nabla)$ en Ker $d(\nabla)^2$ buscamos $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tales que

$$p(\nabla)[(a'_n) + \sum \lambda_i(a^i_n)] = (b_n)$$

El cálculo de las λ_i es resolver este sistema de ecuaciones lineales en las λ_i.

Por último, resolvamos la ecuación $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n$.

Tenemos

$$(\nabla^2 + 2\nabla - 8)a_n = (2^n)$$

entonces $(\nabla - 2)^2(\nabla + 4)(a_n) = (0)$

$$Ker\,(\nabla - 2)^2(\nabla + 4) = \{(a + b_n)(2^n)\} \oplus \{c(-4)^n\}$$

$$(\nabla^2 + 2\nabla - 8)((a + b_n)(2^n) \oplus a(-4)^n) = (\nabla + 4)[2^n(2\nabla)(a + b_n)] =$$

$$= (\nabla + 4)((2^n)2b) = 4b(2^n) + 8b(2^n)$$

entonces $b = 1/12$. Las soluciones son

$$\{(a + 1/12n)(2^n) \oplus (c(-4)^n)\}$$

16. Probar que un grupo abeliano finito generado es cíclico si y sólo si tiene un único factor invariante.

Resolución:

Un grupo abeliano finito generado es un $\mathbb{Z}$- módulo finito generado. Sea $G = \mathbb{Z}/(\phi_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(\phi_n)$

ϕ_1 es múltiplo de ϕ_2, ϕ_2 es múltiplo de ϕ_3 y así sucesivamente.

$\Leftarrow$) Supongamos que G tiene un único factor invariante $\Rightarrow G = \mathbb{Z}/(\phi_1) =< \overline{1} >$, que es un grupo cíclico.

$\Rightarrow$) Supongamos que G es cíclico $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/(n)$ y $\#G = n$

Luego n es el anulador de G como $\mathbb{Z}$-módulo.

Por tanto, $G = \mathbb{Z}/(\phi_1)$

Y ya hemos probado que un grupo finito generado cíclico tiene un único factor invariante.

17. Clasificar sobre el cuerpo racional los endomorfismos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

(a) Clasifiquemos la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos su polinomio característico.

$$\begin{vmatrix} -1-x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0-x & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = x^4 - 7x^2 + 5$$

Polinomio cuyas raíces son todas distintas, pues es primo con su derivada. Por tanto,

$$E \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 7x^2 + 5)$$

b) Clasificamos ahora la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculemos su polinomio característico.

$$\begin{vmatrix} -1-x & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1-x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1-x \end{vmatrix} = x^2(x+2)^2$$

Por tanto, tenemos las siguientes posibilidades:

$i)$ $E = \mathbb{Q}[x]/(x^2) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x+2)^2$

$ii)E = \mathbb{Q}[x]/(x) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x+2)^2$

$iii)$ $E = \mathbb{Q}[x]/(x) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x+2) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x+2)$

$iv)$ $E = \mathbb{Q}[x]/(x^2) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x+2) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x+2)$

Calculamos la $\dim_{\mathbb{Q}} \ker x\cdot = \dim_{\mathbb{Q}} \ker T$ en los diferentes casos:

$i)\dim_{\mathbb{Q}}([\overline{x}] \oplus 0) = 1$

$ii)\dim_{\mathbb{Q}}([\overline{1}] \oplus [\overline{1}] \oplus 0) = 2$

$iii)\dim_{\mathbb{Q}}([\overline{1}] \oplus [\overline{1}] \oplus 0 \oplus 0) = 2$

$iv)\dim_{\mathbb{Q}}([\overline{x}] \oplus 0 \oplus 0) = 1$

Lo hacemos igual para $\ker_{\mathbb{Q}}(x+2)\cdot$:

$i)\dim_{\mathbb{Q}}(0 \oplus [\overline{x+2}] = 1$

$ii)\dim_{\mathbb{Q}}(0 \oplus 0 \oplus [\overline{x+2}] = 1$

$iii)\dim_{\mathbb{Q}}(0 \oplus 0 \oplus [\overline{1}] \oplus [\overline{1}]) = 2$

$iv)\dim_{\mathbb{Q}}(0 \oplus [\overline{1}] \oplus [\overline{1}] = 2$

Ahora vemos la dimensión de $\ker T$ y de $\ker(T+2)$; hallamos el rango de las correspondientes matrices y nos queda que $\dim \ker T = 2$ y $\dim \ker(T+2) = 2$.

Por tanto estamos en el caso $ii)$

$$E = \mathbb{Q}[x]/(x) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x+2)^2$$

18. Sea A un anillo euclídeo y (a_{ij}) una matriz con coeficientes $a_{ij} \in A$. Sustituyendo de modo conveniente y sucesivo la fila F_i por la fila $F_i + b_j F_j$, $i \neq j$, $b_j \in A$ $(i, j, b_j$ arbitrarios), demostrar que la matriz (a_{ij}) es triangulable. Si admitimos, además, las mismas transformaciones "elementales" con las columnas, demostrar que (a_{ij}) es diagonalizable. Resolver el sistema de ecuaciones diofánticas

$$7x + 5y = 1$$
$$5x + 3y = 3$$

19. Clasificar los $\mathbb{Z}$-módulos $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(7,5),(5,3)\rangle$ y $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(12,30,24),(4,8,6),(6,4,8)\rangle$.

a) Tenemos la sucesión exacta
$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\langle(7,5),(5,3)\rangle \to 0$

$(1,0) \mapsto (7,5)$
$(0,1) \mapsto (5,3)$

Por teoría sabemos que existe una base de cada $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ en la que φ "diagonaliza". Es decir $\varphi \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & o \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ entonces $M = \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z}$

Diagonalizamos φ mediante transformaciones elementales y llegamos a que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$

Por tanto, $M \simeq (\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

b) Tenemos la sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(12,30,24),(4,8,6),(6,4,8)\rangle \to 0$$

Diagonalizando: $\varphi \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ entonces $M = \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\lambda_3\mathbb{Z}$

Al igual que en el apartado anterior, haciendo transformaciones elementales llegamos a que $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -42$

Por tanto, $M \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

20. Mediante transformaciones elementales calcular los factores invariantes del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular una base de Jordan.

Resolución: Hay que considerar la matriz característica de las transformaciones fundamentales y diagonalizarla.

i) $\mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x] \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^3 \to 0$ es exacta.

La matriz del polinomio característico es: $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 \\ -1 & -1 & x-3 \end{pmatrix}$,mediante transformaciones la matriz diagonalizada quedará : $\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & p_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & p_3(x) \end{pmatrix}$

Por tanto $\mathbb{R}^3_T = \mathbb{R}[x]/(p_1(x)) \oplus \mathbb{R}[x]/(p_2(x)) \oplus \mathbb{R}[x]/(p_3(x))$

$$T \equiv \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 \\ -1 & -1 & x-3 \end{pmatrix} \overset{F_1'=F_1+xF_3}{\equiv} \begin{pmatrix} 0 & 1-x & x^2-3x \\ 0 & x-1 & -2 \\ -1 & -1 & x-3 \end{pmatrix} \overset{F_1\leftrightarrow F_3}{\equiv} \begin{pmatrix} -1 & -1 & x-3 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 1-x & x^2-3x \end{pmatrix}$$

$$T \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 1-x & x^2-3x \end{pmatrix} \overset{C_2\leftrightarrow C_3}{\equiv} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x-1 \\ 0 & x^2-3x & 1-x \end{pmatrix} \equiv$$

$$\overset{C_3'=C_3+\frac{1-x}{2}C_2}{\equiv} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & x^2-3x & \frac{1}{2}(x-1)^2(2-x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x-1)^2(2-x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3_T \simeq \mathbb{R}[x]/(-1) \oplus \mathbb{R}[x]/(2) \oplus \mathbb{R}[x]/(x-1)^2(x-2)$
$\simeq \mathbb{R}[x]/(x-1)^2(x-2)$
$\simeq \mathbb{R}[x]/(x-1)^2 \oplus \mathbb{R}[x]/(x-2)$

ii) Una base de este espacio vectorial es: $\{(\overline{1},0), (\overline{x-1},0), (0,\overline{1})\}$

La matriz de $T \equiv x\cdot \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Hay que buscar $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $e_1 \in \operatorname{Ker}(T-\operatorname{Id})^2 - \operatorname{Ker}(T-\operatorname{Id})$, $e_2 = (T-\operatorname{Id})(e_1)$ y $e_3 \in \operatorname{Ker}(T-2\operatorname{Id})$

$\mathbb{R}^3_T \simeq \mathbb{R}[x]/(x-1)^2 \oplus \mathbb{R}[x]/(x-2)$
$e_1 \longleftrightarrow (\overline{1},0)$
$e_2 \longleftrightarrow (\overline{x-1},0)$
$e_3 \longleftrightarrow (0,\overline{1})$

$$[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - Id]^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = (1,1,-1)$$

$e_2 = (T-\operatorname{Id})(e_1) = (-2,2,0)$.

$$[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\operatorname{Id}] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = (1,-2,1)$$

21. Probar que si el polinomio característico de un endomorfismo lineal tiene todas sus raíces distintas entonces sólo existe un factor invariante (no invertible) y éste coincide con el polinomio característico.

Resolución:

Sabemos por teoría que: $C_T(x) = \phi_1(x) \cdot \ldots \cdot \phi_s(x)$ tal que $\phi_s/\phi_{s-1}/\ldots/\phi_1$
Si $C_T(x)$ no tiene raíces múltiples $\Rightarrow C_T(x) = \phi_1(x)$ y los $\phi_i(x) = 1$ para $i > 1$

22. Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo lineal de un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que la condición necesaria y suficiente para que el endomorfismo $p(T)$ sea invertible es que $p(x)$ y $c_T(x)$ sean primos entre sí.

Resolución:

$\Rightarrow$) Supongamos que $p(x)$ y $c_T(x)$ no son primos entre sí.

Entonces existe $q(x) \in K[x]$ de grado mayor que cero que divide a $p(x)$, $c_T(x)$. Por tanto $q(x)$ no es primo con el polinomio anulador $phi_1(x)$. Luego existe $\overline{q}(x)$ de grado mayor que cero que divide a $q(x)$, $\phi_1(x)$, con lo cual $\overline{q}(x)$ divide a $p(x)$, $\phi_1(x)$.

Veamos que $\operatorname{Ker} \overline{q}(T) \neq 0$:

$\phi_1(x) = \overline{q}(x) \cdot \overline{q}(x)'$, $\operatorname{Ker} \phi_1(T) = E$. Entonces $(\overline{q}(T) \cdot \overline{q}(T)') \cdot E = 0$ y $\overline{q}(T)$ anula a $q(T)'E$. Ahora bien, $q(T)'E \neq 0$, porque $q(x)'$ no es múltiplo del anulador. En conclusión, $0 \neq q(T)'E \subseteq \operatorname{Ker} \overline{q}(T)$.

Como $\operatorname{Ker} \overline{q}(T) \neq 0$ entonces $\operatorname{Ker} p(T) \supseteq \operatorname{Ker} \overline{q}(T) \neq 0$.
Comprobemos esta inclusión: $p(x) = \overline{q}(x) \cdot \overline{p}(x) = \overline{p}(x) \cdot \overline{q}(x)$. Si $e \in \operatorname{Ker} \overline{q}(T) \Rightarrow p(T)(e) = \overline{p}(T) \cdot \overline{q}(T)(e) = 0$ (porque $\overline{q}(T)(e) = 0$)$\Rightarrow e \in \operatorname{Ker} q(T)$.

Por tanto, $p(T)$ tiene núcleo, luego no es isomorfismo y no es invertible y hemos llegado a contradicción.

$\Leftarrow$) $p(x)$, $c_T(x)$ son primos entre sí, entonces existe $\lambda(x), \mu(x) \in K[x]$ de modo que $\lambda(x)p(x) + \mu(x)c_T(x) = 1$,

$\lambda(T)p(T) + \mu(T)c_T(T) = Id$, $(c_T(T) = 0)$, luego el inverso de $p(T)$ es $\lambda(T)$. Por lo tanto $p(T)$ es invertible.

23. Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo lineal de un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $E' \subseteq E$ un subespacio estable por T. Denotemos $\bar{T}\colon E/E' \to E/E'$, $\bar{T}(\bar{e}) = \overline{T(e)}$, el endomorfismo inducido por T en E/E'. Probar que

$$c_T(x) = c_{T_{|E'}}(x) \cdot c_{\bar{T}}(x)$$

Sea $e_1 \ldots e_r$ una base de E' y $e_1 \ldots e_r \ldots e_n$ base de $E \Rightarrow \overline{e_{r+1}} \ldots \overline{e_n}$ es una base de

$$E|E' = (Ke_1 \oplus \ldots \oplus Ke_n)/(Ke_1 \oplus \ldots \oplus Ke_r \oplus 0 \ldots)$$

Escribamos las matrices de estos endomorfismos

$$\begin{aligned}
&T_{|E'}(e_i) = T(e_i) = \sum_{j\leq r} a_{ij}e_j,\ i \leq r\\
&T(e_i) = \sum a_{ij}e_j\\
&\overline{T}(\overline{e_k}) = \sum_{j>r} a_{kj}\overline{e_j},\ k > r
\end{aligned}$$

Matriz de $T|E' \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{r,1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1,r} & \dots & a_{rr}\end{pmatrix}$

Matriz de $\overline{T} \equiv \begin{pmatrix} a_{r+1,r+1} & \dots & a_{n,r+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{r+1,n} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$

Matriz de $T \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{r,1} & a_{r+1,1} & \dots & a_{n1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1,r} & \dots & a_{rr} & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{n,r+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a_{r+1,n} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$

$\chi_T(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & \dots & -a_{r1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{1r} & \dots & x-a_{rr}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-a_{r+1,r+1} & \dots & -a_{n,r+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{r+1,n} & \dots & x-a_{n,n}\end{vmatrix} = \chi_{T|E'}\chi_{\overline{T}}(x)$

24. Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n y T un endomorfismo de E. Sea $c_T(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ la descomposición en factores lineales del polinomio característico de T. Pruébese que si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces

$$c_{p(T)}(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - p(\alpha_i))$$

En particular, se tiene que $\mathrm{tr}(p(T)) = \sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i)$, $\det(p(T)) = \prod_{i=1}^{n} p(\alpha_i)$.

Resolución:

Nuestro espacio vectorial es de la forma :$E_T \simeq \bigoplus_{i,j} \frac{\mathbf{K}[x]}{(x-\alpha_i)^{n_{ij}}}$
Por hipótesis $c_T(x) = \prod_{i,j}(x-\alpha_i)^{n_{ij}} = (x-\alpha_1)^{n_1}\dots(x-\alpha_r)^{n_r}$

¿Cuál es el polinomio característico de $p(x)\cdot : \bigoplus_{i,j} \frac{\mathbf{K}[x]}{(x-\alpha_i)^{n_{ij}}} \longrightarrow \bigoplus_{i,j} \frac{\mathbf{K}[x]}{(x-\alpha_i)^{n_{ij}}}$?

¿Cuál es el polinomio característico de $p(x)\cdot\colon \frac{\mathbf{K}[x]}{(x-\alpha)^n} \longrightarrow \frac{\mathbf{K}[x]}{(x-\alpha)^n}$?

Base de $\mathbf{K}[x]/((x-\alpha)^n)$ es $\{\bar{1}, \overline{x-\alpha}, \ldots, \overline{(x-\alpha)}^{n-1}\}$

Escribamos $p(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + \ldots + a_m(x-\alpha)^m; a_0 = p(\alpha)$. La matriz de $p(x)\cdot$ es

$$p(x)\cdot \equiv \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & o \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$$

$c_{p(x)}(x) = (x-a_0)^n = (x-p(\alpha))^n$.

Por tanto, en general $c_{p(T)}(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-p(\alpha_i))$.

25. Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal de E. Demostrar que si $c_T(x)$ es el polinomio característico de T considerado como endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal, entonces el polinomio característico de T considerado como endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal es $c_T(x)\cdot\overline{c_T(x)}$ (donde $\overline{c_T(x)}$ es el conjugado de $c_T(x)$).

Resolución:

1). Sea $E \xrightarrow{T} E$ un endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal entonces:

$$E = \mathbb{C}[x]/(x-\alpha_1)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[x]/(x-\alpha_r)^{n_r}$$

Ahora bien, $\mathbb{C}[x]/(x-\alpha)^n \simeq \mathbb{R}[x]/(x-\alpha)^n(x-\bar{\alpha})^n$ como $\mathbb{R}[x]$-módulos si $\alpha \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, y

$$\mathbb{C}[x]/(x-\alpha)^n \simeq \mathbb{R}[x]/(x-\alpha)^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x-\alpha)^n \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}) = \mathbb{R}[x]/(x-\alpha)^n \oplus \mathbb{R}[x]/(x-\alpha)^n$$

si $\alpha \in \mathbb{R}$. En cualquier caso, tenemos que el polinomio característico de T como $\mathbb{C}$-aplicación lineal es

$$c_{_T}(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_r)^{n_r}$$

El polinomio característico de T como aplicación $\mathbb{R}$-lineal, $c_{_T}^{\mathbb{R}}(x)$, es

$$c_{_T}^{\mathbb{R}}(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}\cdot(x-\bar{\alpha}_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_r)^{n_r}\cdot(x-\bar{\alpha}_r)^{n_r} = c_T(x)\cdot\overline{c_T(x)}$$

De otro modo: a. Sea $E \xrightarrow{T} E$ un endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal entonces:

$$E = \mathbb{C}[x]/(x-\alpha_1)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[x]/(x-\alpha_r)^{n_r}$$

Sea la matriz de Jordan de T como endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal

$$T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \alpha_1 & & \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} \alpha_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_r & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \alpha_r & & \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_j = a_j + ib_j$.
Hallamos el polinomio característico de T:

$$c_T(x) = (x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_r)^{n_r} = \prod_{j=1}^{r} (x - (a_j + ib_j))^{n_j}$$

y su conjugado,

$$\overline{c_T(x)} = (x-\overline{\alpha}_1)^{n_1} \cdots (x-\overline{\alpha}_r)^{n_r} = \prod_{j=1}^{r} (x - (a_j - ib_j))^{n_j}$$

Por tanto, $c_T(x) \cdot \overline{c_T(x)} = \prod_{j=1}^{r} ((x-a_j)^2 + {b_j}^2)^{n_j}$.

b). Sea la matriz de Jordan de T como endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal.

$$T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ (1) & (\alpha_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & (1) & (\alpha_1) & & \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & (1) & (\alpha_1) \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} (\alpha_r) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ (1) & (\alpha_r) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & (1) & (\alpha_r) & & \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & (1) & (\alpha_r) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_j = a_j + ib_j$

$$(\alpha_j) = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}, (1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $c_T(x) = \prod_{j=1}^{r} ((x-a_j)^2 + {b_j}^2)^{n_j}$.

26. (a) Sea $X' = AX$ un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales, siendo A una matriz cuadrada de coeficientes constantes. Probar que $e^{At} \cdot C$ son las soluciones del sistema, siendo C una matriz columna de constantes.

(b) Sea $X' = AX + B(t)$ un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Calcular una solución del sistema.

Resolución:

(a) Es una comprobación inmediata: $D(e^{At} \cdot C) = (e^{At} \cdot C)' = Ae^{At} \cdot C$. Y es solución si y sólo si $(e^{-At}Y)' = 0$, si y sólo si $e^{-At}Y = C$ con C constante e $Y = e^{At}C$.

(b) Tenemos que $(D - A)X = B(t)$. $B(t) = (D - A)e^{At}e^{-At}X = e^{At}D(e^{-At}X)$, luego $X = e^{At}\int e^{-At}B(t)$.

27. Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= x - 3y + 3z \\ \tfrac{dy}{dt} &= -2x - 6y + 13z \\ \tfrac{dz}{dt} &= -x - 4y + 8z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 3x - y \\ \tfrac{dy}{dt} &= x + y \\ \tfrac{dy}{dt} &= 3x + 5z - 3u \\ \tfrac{du}{dt} &= 4x - y + 3z - u \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= -11x - 4y \\ \tfrac{dy}{dt} &= 15x + 6y \end{aligned}$$

Resolución:

Resolvamos el sistema

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= x - 3y + 3z \\ \tfrac{dy}{dt} &= -2x - 6y + 13z \\ \tfrac{dz}{dt} &= -x - 4y + 8z \end{aligned}$$

Es decir, el sistema $X' = AX$, con

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son $X = e^{At}C$, con C cualquier columna de constantes. Calculemos e^{At}:

Para ello calculemos una base de Jordan de A. El polinomio característico de A es $(x-1)^3$. El rango de $A - \mathrm{Id}$ es uno. Por tanto, $\mathbb{R}^3_A = \mathbb{R}[x]/(x-1)^3$ y una base de Jordan de A es $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (A - \mathrm{Id})(e_1) = (0,-2,-1)$ y $e_3 = (A - \mathrm{Id})^2(e_1) = (3,1,1)$. Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

y

$$X = e^{At}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{Jt} \cdot C'$$

Con $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id} + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Luego $J^n = (\mathrm{Id} + N)^n = \mathrm{Id} + \binom{n}{1}N + \binom{n}{2}N^2$ y obtenemos

$$e^{Jt} = e^t \,\mathrm{Id} + te^t N + \frac{t^2}{2} e^t N^2 = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} + t & t & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusión,

$$X = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 + \frac{3(t^2+t)}{2} & 3t & 3 \\ -2 + \frac{t^2+t}{2} & -2 + t & 1 \\ -t + \frac{t^2+t}{2} & -1 + t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix}$$

28. Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado n. Probar que la ecuación diferencial $P(D)y = f(t)$ es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales de n variables.

Resolución:

Denominemos $x_1 = y$, $x_2 = y'$,..., $x_n = y^{n-1)}$. La ecuación diferencial $P(D)y = f(t)$ es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots \\ x_n' = f(t) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} \end{array}$$

donde $P(x) = \sum\limits_i a_i x^i$.

29. (a) Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado n. Sean $s_1(x), \dots, s_n(x)$ soluciones, linealmente independientes, de la ecuación diferencial $P(D)y = 0$. Probar que si $c_1(x), \dots, c_n(x)$ cumplen las ecuaciones

$$\begin{array}{l} c_1(x)' s_1(x) + \ldots + c_n(x)' s_n(x) = 0 \\ \dots \\ c_1(x)' s_1(x)^{n-2)} + \ldots + c_n(x)' s_n(x)^{n-2)} = 0 \\ c_1(x)' s_1(x)^{n-1)} + \ldots + c_n(x)' s_n(x)^{n-1)} = f(x) \end{array}$$

entonces $c_1(x)s_1(x) + \ldots + c_n(x)s_n(x)$ es una solución particular de $P(D)y = f(x)$.

(b) Pruébese este resultado como caso particular de 26 (b).

Resolución:

(a) Comprobémoslo. Observemos que $D(\sum\limits_i c_i \cdot s_i) = \sum\limits_i (c_i' s_i + c_i s_i') = \sum\limits_i c_i s_i'$. Derivando de nuevo, $D^2(\sum\limits_i c_i \cdot s_i) = \sum\limits_i (c_i' s_i' + c_i s_i'') = \sum\limits_i c_i s_i''$. Así sucesivamente hasta $n-1$-veces, $D^{n-1}(\sum\limits_i c_i \cdot s_i) =$

$\sum\limits_i (c_i' s_i^{n-2)} + c_i s_i^{n-1)}) = \sum\limits_i c_i s_i^{n-1)}$ y $D^n(\sum\limits_i c_i \cdot s_i) = \sum\limits_i (c_i' s_i^{n-1)} + c_i s_i^{n)}) = f(x) + \sum\limits_i c_i s_i''$. Por lo tanto,

$$P(D)(\sum_i c_i \cdot s_i) = f(x) + \sum_i c_i P(D) s_i = f(x) + 0$$

(b) La resolución de la ecuación diferencial $P(D)y = f(t)$, equivale a la resolución (o simplemente el cálculo de x_1) del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} &x_1' = x_2 \\ &x_2' = x_3 \\ &\dots \\ &x_n' = f(t) - \sum_{i=0}^{n-2} a_i x_{i+1} \end{aligned}$$

donde $P(x) = \sum\limits_i a_i x^i$. Es decir, al sistema $X' = AX + B(t)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Según la resolución de 26 (b), $X = e^{At} \cdot C(t)$, de modo que $C(t) = \int e^{-At} B(t)$, es decir, $e^{At} C(t)' = B(t)$. Ahora bien,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ s_1' & \dots & s_n' \\ \vdots & & \vdots \\ s_1^{n-1)} & \dots & s_n^{n-1)} \end{pmatrix}$$

donde los s_i son las soluciones de la ecuación $P(D)y = 0$, como se deduce de resolver el sistema diferencial $X' = AX$, es decir, la ecuación homogénea $P(D)y = 0$. Con todo, deducimos que $C(t)$, ha de verificar el sistema considerado.

30. Sea A una matriz con coeficientes en $k[D]$. Probar que mediante las transformaciones elementales, el problema de resolver los sistemas $AX(t) = Y(t)$, se reduce al problema de resolver ecuaciones $P(D)f(t) = h(t)$.

    Resolución:

    Mediante transformaciones elementales conseguimos “diagonalizar” A . En tal situación el problema es obvio.

31. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} &x'' - x + y' = e^t \\ &x'' + 2x' + x + y'' = e^t \end{aligned}$$

Resolución:

Vamos a ”jugar”con las filas e intentar triangular:

$$(D^2-1)x + Dy = e^t$$

$$(D^2+2D+1)x + D^2y = e^t$$

Sea $\begin{pmatrix} D^2-1 & D & e^t \\ D^2+2D+1 & D^2 & e^t \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} D^2-1 & D & e^t \\ -D^3+D^2+3D+1 & 0 & e^t-De^t \end{pmatrix}$

Nos queda:

$$(D^2-1)x + Dy = e^t$$

$$(-D^3+D^2+3D+1)x = e^t - De^t = 0$$

Luego: $x = \ker(-D^3+D^2+3D+1) = \ker(-D+1) \oplus \ker(D-(1+\sqrt{2})) \oplus \ker(D-(1-\sqrt{2}))$
Por tanto: $x = ae^{-t} + be^{(1+\sqrt{2})t} + ce^{(1-\sqrt{2})t}$, $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$

Sustituimos en la primera ecuación:

$Dy = e^t - (D^2-1)[a\cdot e^{-t} + b\cdot e^{(1+\sqrt{2})t} + c\cdot e^{(1-\sqrt{2})t}]$
Ahora integramos para sacar el valor de y: $y = e^t + b'\cdot e^{(1+\sqrt{2})\cdot t} + c'e^{(1-\sqrt{2})\cdot t} + d'$

Capítulo 4

Problemas del capítulo del producto tensorial y módulos proyectivos e inyectivos

1. Sea L un A-módulo libre de base $\{e_i\}_{i\in I}$, y sea L' un A-módulo libre de base $\{e'_j\}_{j\in J}$. Probar que el A-módulo $L\otimes L'$ es libre y una base es $\{e_i\otimes e'_j\}_{i\in I, j\in J}$.

   Resolución: Sea $1_i\in A^{(I)}$ el elemento con todo ceros y un 1 en el lugar i. De igual modo en $A^{(J)}$, de forma que $\{1_i\}$, $\{1_j\}$ son, pues, bases de $A^{(I)}, A^(J)$.

   Obviamente, $\phi\colon A^{(I)}\to L \quad \phi(1_i)=e_i$ es isomorfismo,, así como $\phi'\colon A^{(J)}\to L' \quad \phi'(1_j)=e'_j$

   Los isomorfismos obvios
   $$A^{(I\times J)}=A^{(I)}\otimes A^{(J)}\overset{\phi\otimes\phi'}{\simeq} L\otimes_A L'$$
   prueban lo buscado, pues la base $\{1_{(i,j)}\}$ de $A^{(I\times J)}$ ($1_{(i,j)}\in A^{(I\times J)}$ es elemento que tiene todo ceros y un uno en el lugar (i,j)) se aplica en los elementos $\{1_i\otimes 1_j\}$ de $A^{(I)}\otimes A^{(J)}$.

2. Probar que $M\otimes_A A[x]=M[x]$.

   Resolución:

   Tenemos que $A[x]$ es libre: $A[x]=A\oplus Ax\oplus Ax^2\oplus\dots$

   Como el producto tensorial conmuta con las sumas directas:
   $$M\otimes_A(\bigoplus_{i=1}^n Ax^i)=\bigoplus_{i=1}^n(M\otimes_A Ax^i)=\bigoplus_{i=1}^n Mx^i=M[x]$$

   Explícitamente, el morfismo es:
   $$\begin{aligned}M\otimes_A A[x]&\to M[x]\\ m\otimes\Sigma a_ix^i&\to\Sigma a_imx^i\end{aligned}$$

3. Probar que $\mathbb{R}[x]/(p(x)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[x]/(p(x))$.

   Resolución: Directamente,

$$\mathbb{R}[x]/(p(x)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (\mathbb{R}[x]/(p(x)) \otimes_{\mathbb{R}[x]} \mathbb{R}[x]) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(p(x)) \otimes_{\mathbb{R}[x]} \mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x]/(p(x))$$

4. Probar que $(A[x_1, \ldots, x_n]/I) \otimes_A B = B[x_1, \ldots, x_n]/I \cdot B[x_1, \ldots, x_n]$.

   Resolución: Del mismo modo que en el ejercicio anterior,

$$(A[x_1, ...x_n]/I) \otimes_{A[x_1,...x_n]} A[x_1, ...x_n] \otimes_A B = (A[x_1, ...x_n]/I) \otimes_{A[x_1,..,x_n]} B[x_1, .., x_n]$$

   Terminando,

$$(A[x_1, ...x_n]/I) \otimes_{A[x_1,..,x_n]} B[x_1, .., x_n] = B[x_1, ..., x_n]/(I \cdot B[x_1, ..., x_n])$$

5. (a) Sea $N' \subset N$ un A-submódulo y $M = N/N'$. Probar que si $N \otimes_A N = 0$ entonces $M \otimes_A M = 0$.
   (b) Sea I un ideal de A, calcular $A/I \otimes_A A/I$.
   (c) Probar que si M es un A-módulo finito distinto de cero entonces $M \otimes_A M$ es distinto de cero.

   Resolución:

   a) Tenemos el morfismo natural epiyectivo

$$\begin{aligned} N \otimes_A N &\to M \otimes_A M \\ n \otimes n' &\to \bar{n} \otimes \bar{n'} \end{aligned}$$

   Luego $N \otimes N = 0 \Rightarrow M \otimes M = 0$.
   b) $A/I \otimes A/I = (A/I)/(I \cdot (A/I)) = (A/I)/0 = A/I$
   Explícitamente,

$$\begin{aligned} A/I \otimes A/I &\to A/I \\ \bar{a} \otimes \bar{b} &\to \bar{ab} \end{aligned}$$

   c) Si $M =< m_1 >$ es claro, por el apartado b).
   Tratemos de reducirnos a esa situación.
   Sea $=\neq M =< m_1, ..., m_n >$ de forma que $\{m_1, ..., m_n\}$ es un sistema generador mínimo.
   Luego $M/ < m_2, .., m_n >\simeq< \bar{m_1} >\simeq A/Anul(\bar{m_1})$ Por tanto,

$$M/ < m_1, ..., m_n > \otimes M/ < m_2, ..., m_n >\simeq A/I \otimes A/I \simeq A/I \neq 0$$

   y como $m \otimes M$ se epiyecta en el primer miembro de la igualdad, concluimos $M \otimes M \neq 0$.

6. Probar que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

   Resolución: Dado $\overline{\frac{n}{m}} \otimes \overline{\frac{n'}{m'}} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tenemos que

$$\overline{\frac{n}{m}} \otimes \overline{\frac{n'}{m'}} = \overline{\frac{m'}{m'}\frac{n}{m}} \otimes \overline{\frac{n'}{m'}} = \overline{\frac{1}{m'}\frac{n}{m}} \otimes \overline{m'\frac{n'}{m'}} = 0$$

   Luego, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

7. Sea $A \to B$ un morfismo de anillos, M un A-módulo y N, P B-módulos. Probar que

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P = M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

   Resolución:

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P = (M_B \otimes_B N) \otimes_B P = M_B \otimes_B (N \otimes_B P) = M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

8. Definir un morfismo natural $M^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Demostrar que si N es un módulo de tipo finito y libre entonces $M^* \otimes_A N^* = Bil_A(M, N; A)$.

   *Resolución:*Definimos

$$\begin{aligned} M^* \otimes N &\to Hom_A(M, N) \\ \omega \otimes n &\to f : \quad f(m) = w(m) \cdot n \end{aligned}$$

   Si $N = A$, entonces

$$M^* = M^* \otimes A \simeq Hom_A(M, A)$$

   Si $N = A^n$, igualmente

$$M^* \otimes A^n = \bigoplus^n (M^* \otimes A) = \prod^n Hom_A(M, A) = Homa_A(M^*, A^n)$$

   b) Si N es un A-módulo finito generado y libre, $M^* \otimes N^* = Bil(M, N; A)$

   Directamente,

$$Bil(M, N; A) = Hom_A(M, Hom(N, A)) = Hom(M, N^*) = M^* \otimes N^*$$

9. Si $M_1, \ldots, M_n$ son A-módulos libres finito generados probar que

$$M_1^* \otimes_A \cdots \otimes_A M_n^* = Multil_A(M_1, \ldots, M_n; A)$$

   Resolución: Sabemos que si M es libre y finito generado, entonces M^* también es libre y finito generado.

   Por tanto, como $M^* \otimes N = Hom(M, N)$ cuando N es libre, tenemos:

$$\begin{aligned} M_1^* \otimes (M_2^* \otimes \cdots \otimes M_n^*) &= Hom(M_1, M_2^* \otimes \cdots \otimes M_n^*) = Hom(M_1, Hom(M_2, M_3^* \otimes \cdots \otimes M_n^*)) \\ &= Hom(M_1, Hom(M_2, Hom(M_3, \ldots Hom(M_{n-1}, M_n^*) \\ &= Hom(M_1, Hom(M_2, Hom(M_3, \ldots Hom(M_n, A) = Mult(M_1, \ldots, M_n; A) \end{aligned}$$

10. Probar que si $\operatorname{Spec} A = U_1 \coprod U_2$, y M es un A-módulo, entonces $M = M_{U_1} \times M_{U_2}$.

Resolución: Sabemos que $A = A_{U_1} \times A_2$, luego

$$M = M \otimes_A A = M \otimes_A (A_{U_1} \times A_{U_2}) = M \otimes_A A_{U_1} \times M \otimes_A A_{U_2} = M_{U_1} \times M_{U_2}$$

11. Sea $A \to B$ un morfismo de anillos. Sean M y M' dos B-módulos, en particular son A-módulos. Sea el A-submódulo de $M \otimes_A M'$, $N = \langle bm \otimes m' - m \otimes bm' \mid m \in M, m' \in M', b \in B \rangle$. Probar que existe un isomorfismo de B-módulos

$$(M \otimes_A M')/N \simeq M \otimes_B M'$$

Resolución: El morfismo $M \otimes_A M' \to M \otimes_B M'$, $m \otimes m' \mapsto m \otimes m'$ está bien definido porque $\otimes_B$ por ser B-bilineal en particular es A-bilineal. Además, N se aplica en el cero, luego tenemos un morfismo natural $(M \otimes_A M')/N \to M \otimes_B M'$.

Demos el morfismo inverso. En primer lugar observemos que $(M \otimes_A M')/N$ es un B-módulo: Dado $b \in B$, la aplicación $(M \otimes_A M') \xrightarrow{b\cdot} (M \otimes_A M')$, $m \otimes n \mapsto bm \otimes n$, está bien definida y aplica N en N. Luego define la aplicación $(M \otimes_A M')/N \xrightarrow{b\cdot} (M \otimes_A M')/N$, $\overline{m \otimes n} \mapsto \overline{bm \otimes n} = \overline{m \otimes bn}$. En conclusión, si definimos para cada $b \in B$, $b \cdot \overline{m \otimes n} := \overline{bm \otimes n} = \overline{m \otimes bn}$, dotaremos a $M \otimes_A M')/N$ de estructura de B-módulo.

La aplicación $M \otimes_B M' \to (M \otimes_A M')/N$, $m \otimes m' \mapsto \overline{m \otimes m'}$, está bien definida, porque $\overline{(bm + n) \otimes m'} = b\overline{m \otimes m'} + \overline{n \otimes m'}$ y $\overline{m \otimes bm' + m''} = b\overline{m \otimes m'} + \overline{m \otimes m''}$.

Ambas asignaciones son inversas entre sí.

12. Probar que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-álgebra.

Resolución: Sabemos que, como $\mathbb{R}$-álgebras,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x]/(x^2+1) &\simeq \mathbb{C} \\ \bar{x} &\to i \\ p(\bar{x}) &\to p(i) \end{aligned}$$

usando esto, y el ejercicio 3, tenemos:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[x]/((x+i)(x-i)) = \mathbb{C}[x]/(x+i) \times \mathbb{C}[x](x-i) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ c \otimes c' &\to (c' \cdot \bar{c}, c' \cdot c) \end{aligned}$$

13. Calcular $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}-\text{álg.}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Resolución:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}-\text{álg.}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}-\text{álg.}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \mathbb{C}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}-\text{álg.}}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \mathbb{C}) \stackrel{*}{=} \{\pi_1, \pi_2$$

donde π_1, π_2 se corresponden con las dos proyecciones naturales. En conclusión, los automorfismos de $\mathbb{R}$-álgebras de $\mathbb{C}$ son la identidad y la conjugación.

(*) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Anillos}}(B_1 \times B_2, C) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Anillos}}(B_1, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Anillos}}(B_2, C)$, si C es íntegro: Dado un morfismo de anillos $f\colon B_1 \times B_2 \to C$, tenemos que $0 = f((0,0)) = f((1,0)\cdot(0,1)) = f((1,0))\cdot f((0,1))$. Por tanto, $f((1,0)) = 0$ ó $f((0,1)) = 0$. Si $f((1,0)) = 0$ entonces $f((b,0)) = f((b,0)\cdot(1,0)) = 0$. En conclusión, f se anula en $B_1 \times 0$ o en $0 \times B_2$, es decir, factoriza a través de $(B_1 \times B_2)/(B_1 \times 0) = B_2$ o través de $(B_1 \times B_2)/(0 \times B_2) = B_1$ y se concluye.

14. Sea A íntegro y M un A-módulo finito generado. Probar que existe un abierto $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ no vacío tal que M_U es un A_U-módulo libre.

    Resolución: Observemos que si un módulo finito generado $N = \langle n_1, \ldots, n_r\rangle$, al localizar en el punto genérico está generado por unos cuantos elementos $m_1, \ldots, m_s$ entonces al localizar por cierta $0 \neq a \in A$ también estará generado por estos elementos: En efecto, $n_i = \sum \frac{a_{ij}}{b_{ij}} m_j$ en $N_{A-\{0\}}$. Luego, si localizamos N por $b = \prod b_{ij}$, tenemos que N_b está generado por $m_1, \ldots, m_s$.

    Observemos que si N es un módulo finito generado y $\{n_i\}$ son un sistema generador que al localizar en el punto genérico es base, entonces el sistema generador es una base (no puede haber relaciones si al localizar no las hay).

    En conclusión, sea $m_1, \ldots, m_r$ elementos de M tales que al localizar en el punto genérico formen un base del localizado de M. Localizando por una función f podemos suponer que M_f está generado por estos elementos. Por la última observación, han de formar una base de M_f.

15. Sea A un anillo íntegro y M un A-módulo plano. Probar que $T(M) = 0$.

    Resolución: Dado $a \in A$, consideramos

$$\begin{aligned} A &\hookrightarrow A \\ b &\to b \cdot a \end{aligned}$$

    inyectiva por ser A íntegro. Entonces

$$\begin{aligned} A \otimes_A M &\hookrightarrow A \otimes_A M \\ b \otimes m &\to b \otimes am \end{aligned}$$

    inyectiva, lo que significa que a no anula a ningún elemento $0 \neq m \in M$.

    Como esto es para todo $0 \neq a \in A$, concluimos que $T(M) = 0$.

    Este razonamiento indica, en general, que si en un A-módulo plano M, un elemento $a \in A$ no es divisor de cero, entonces no anula a ningún elemento de M.

16. Probar que si M y N son A-módulos planos, también lo es $M \otimes_A N$. Probar que si B es una A-álgebra plana y M es un B-módulo plano, entonces M es un A-módulo plano.

    Resolución: Basta ver que, dada una inyección entre dos A-módulos, $P \hookrightarrow P'$ tenemos

$$P \hookrightarrow P' \Rightarrow P \otimes_A M \hookrightarrow P' \otimes_A M \Rightarrow (P \otimes_A M) \otimes_A N \hookrightarrow (P' \otimes_A M) \otimes_A N$$

    siendo el último miembro igual a $P \otimes_A (M \otimes_A N) \hookrightarrow P' \otimes_A (M \otimes_A N)$ y concluimos $M \otimes_A N$ es A-módulo plano.

17. Probar que $k[x,y]/(x)$ no es un $k[x,y]$-módulo plano. Sea $k[x] \to k[x,y]/(y^2-x)$ el morfismo natural, probar que $k[x,y]/(y^2-x)$ es una $k[x]$-álgebra plana.

    Resolución: Consideremos la sucesión exacta

    $$0 \to k[x,y] \xrightarrow{x\cdot} k[x,y] \to k[x,y]/(x) \to 0$$

    Si tensorializamos por $\otimes_{k[x,y]} k[x,y]/(x)$, obtenemos

    $$0 \to k[x,y]/(x) \xrightarrow{x\cdot} k[x,y]/(x) \to k[x,y]/(x) \to 0$$

    que no es exacta

18. Sea A un dominio de ideales principales y M un A-módulo libre de torsión. Probar que M es unión de módulos libres finito generados.

    Resolución: Todo módulo es la unión de sus submódulos finito generados. Los submódulos de un módulo libre de torsión son libres de torsión. Por tanto, M es unión de módulos finito generados libres de torsión. Ahora bien, sobre dominios de ideales principales los módulos finito generados libres de torsión son libres, luego hemos terminado.

19. Sea A un anillo local y P un A-módulo proyectivo. Probar que P es un A-módulo libre.

    Resolución: Si consideramos un epimorfismo de un libre en P, entonces el epimorfismo tiene sección y tenemos que P es sumando directo de un libre. Escribamos $L = P \oplus Q$, L libre. Consideremos una base de L, $\{e_i\}_{i\in I}$.

    Sea $J \subset I$ y $L_J \subseteq P$ un módulo libre (si existe) de modo que L/L_J sea libre y $\{\bar{e}_j\}_{j\in J}$ sea una base de L/L_J. Consideremos el conjunto X de tales L_J, donde diremos que $L_J \leq L_{J'}$ si $L_J \subset L_{J'}$ y $J' \subset J$. Dada una cadena de libres L_{J_k} de X, la unión $L' = \bigcup\limits_k L_{J_k}$, verifica que L/L' es libre de base $\{\bar{e}_l\}_{l\in K}$, $K = \bigcap\limits_k J_k$. Por tanto, $P = \langle e_k\rangle_{k\in K}$ es un suplementario de L' y éste último es isomorfo a cualquier suplementario de P, por ejemplo $\langle e_q\rangle_{q\in I-K}$. En conclusión, L' pertenece a X. Por el lema de Zorn existe un elemento maximal L en X. Haciendo cociente por L, podemos suponer que $L = 0$. Argumentando igual en Q podemos suponer lo mismo en Q. Ahora bien, dado e_i, tenemos que $e_i = p_i + q_i$, con $p_i \in P$ y $q_i \in Q$. Entonces en $L/\mathfrak{m}L$ o bien $\bar{p}_i \neq 0$ en tal caso $A \cdot p_i$ es un submódulo libre de P, de modo que $L/A\cdot p_i$ es libre de base $\{e_j\}_{j\neq i}$, o bien $\bar{q}_i \neq 0$ en tal caso $A \cdot q_i$ es un submódulo libre de Q, de modo que $L/A\cdot q_i$ es libre de base $\{e_j\}_{j\neq i}$. Hemos llegado a contradicción, salvo que $P = 0$ y $Q = 0$ luego de partida P es libre.

20. Probar que existe un isomorfismo $\mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)), k) \simeq k[x]/(p(x))$, de $k[x]/(p(x))$-módulos. Probar que $k[x]/(p(x))$ es un $k[x]/(p(x))$-módulo inyectivo. Dar una nueva demostración del tercer teorema de descomposición de los $k[x]$-módulos finitos.

    Resolución: $\mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)), k)$ es un $k[x]$-módulo de anulador $(p(x))$. Efectivamente, dado $f \in \mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)), k)$, tenemos que $(p(x)\cdot f)(\overline{q(x)}) := f(\overline{p(x)\cdot q(x)}) = f(\overline{0}) = 0$. Dada $h(x)$ tal que $0 \neq \overline{h(x)} \in k[x]/(p(x))$, sea $w \in \mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)), k)$, tal que $w(\overline{h(x)}) = 1$. Tenemos que $h(x)\cdot w \neq 0$ pues $(h(x)w)(\bar{1}) = w(\overline{h(x)}) \neq 0$.

    La dimensión como k-espacio vectorial de $\mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)), k)$, es la misma que la de $k[x]/(p(x))$. Por lo tanto, por dimensiones y la clasificación de un módulo por los factores invariantes tenemos que $\mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)), k) \simeq k[x]/(p(x))$.

$\mathrm{Hom}_k(N,k) = \mathrm{Hom}_{k[x]/p(x)}(N, \mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)),k))$. Como $\mathrm{Hom}_k(-,k)$ es un funtor exacto, entonces $\mathrm{Hom}_{k[x]/p(x)}(-, \mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)),k))$ es un funtor exacto y $\mathrm{Hom}_k(k[x]/(p(x)),k)$ es un $k[x]$-módulo inyectivo.

Dado un $k[x]$-módulo finito generado de torsión M, de anulador $p(x)$ existe un elemento $m \in M$ de anulador $k[x]/(p(x))$ (al lector). Tenemos la sucesión exacta de $k[x]/(p(x))$-módulos

$$0 \to \langle m \rangle \to M \to M/\langle m \rangle \to 0$$

Como $\langle m \rangle \simeq k[x]/(p(x))$ y $k[x]/(p(x))$ es un $k[x]/(p(x))$-módulo inyectivo la sucesión exacta rompe. Luego $M \simeq k[x]/(p(x)) \oplus M'$. Argumentando ahora con M' y así sucesivamente obtenemos (con el teorema chino de los restos si es necesario) el tercer teorema de descomposición de los $k[x]$-módulos finitos.