Exámenes de Álgebra Conmutativa

Pedro Sancho

2003

Índice General

Capítulo 1

Examen de Álgebra II

Febrero-1999

Teoría:

1. Fórmula de la fibra.
2. Sea A un dominio de ideales principales. Demostrar que todo A-módulo finito generado libre de torsión es libre.

Problemas:

1. Sea $A \to A_S$ el morfismo de localización por el sistema multiplicativo S. Demostrar que es un isomorfismo si y sólo si el morfismo inducido en los espectros es isomorfismo.
2. Sea $M \subseteq \mathbb{Q}$ un $\mathbb{Z}$-módulo finito generado no nulo. Probar que M es como $\mathbb{Z}$-módulo isomorfo a $\mathbb{Z}$.
3. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo de matriz en la base estándar
$$T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
Clasificar T y calcular una base de Jordan.
4. Calcular
   (a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   (b) $A_S \otimes_A A_S$.
   (c) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q})$.

Capítulo 2

Examen de Álgebra II

Febrero-1999

Teoría:

1. Sea A un dominio de ideales principales. Demostrar que todo A-módulo finito generado libre de torsión es libre.

Problemas:

1. Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo lineal de un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que la condición necesaria y suficiente para que el endomorfismo $p(T)$ sea invertible es que $p(x)$ y $c_T(x)$ sean primos entre sí.

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo de matriz en la base estándar

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Clasificar T y calcular una base de Jordan.

3. Calcular

   (a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

   (b) $A_S \otimes_A A_S$.

   (c) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q})$.

Capítulo 3

Examen de Álgebra Conmutativa

Febrero de 2002

Teoría:

1. Demostrar el Lema de Nakayama.

2. Enunciar los teoremas de clasificación de los módulos finito generados sobre dominios de ideales principales.

Problemas:

1. Sea N un A-submódulo de M, e $I \subseteq A$ un ideal. Probar que $(M/N)/I \cdot (M/N)$ es un A-módulo isomorfo a $M/(IM + N)$.

2. Calcular una base de Jordan para el endomorfismo T del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^4$, cuya matriz en la base estándar es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Sean A y B dos anillos que contienen un cuerpo k (es decir, dos k-álgebras), $S \subset A$ y $S' \subset B$ sistemas multiplicativamente cerrados y $S \otimes S' = \{s \otimes s' \in A \otimes_k B \colon s \in S, s' \in S'\}$. Probar que

$$A_S \otimes_k B_{S'} = (A \otimes_k B)_{S \otimes S'}$$

Capítulo 4

Examen de Álgebra II

Mayo-1999

Teoría:

1. Construcción del producto tensorial de módulos.
2. Clasificación de los grupos abelianos finito generados.

Problemas:

1. Sea el morfismo de anillos $\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x]$, $p(x) \mapsto p(x)$. Calcular todas las fibras del morfismo inducido en los espectros. (Recuérdese que los polinomios irreducibles de $\mathbb{R}[x]$ son de grado dos o uno).
2. Sea A un anillo y $f \in A$. Probar que $A_f = A_{f^2}$.
3. Sea A un anillo íntegro, e $0 \neq I \subset A$ un ideal. Probar que si I es un A-módulo libre, entonces existe un $a \in A$, no nulo, de modo que $I = aA$.
4. Sea $A \to B$ un morfismo de anillos, M un A-módulo y N, P B-módulos. Probar que
$$(M \otimes_A N) \otimes_B P = M \otimes_A (N \otimes_B P)$$
5. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \colon E \to E$ un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal. Probar que si en E no existen subespacios vectoriales propios E' tales que $T(E') \subseteq E'$, entonces la dimensión de E es 1 ó 2.

Capítulo 5

Examen de Álgebra II

Junio-1999

Teoría:

1. Escribir cinco propiedades del producto tensorial.
2. Mostrar cuál es la forma de Jordan de la matriz de un $\mathbb{C}$-endomorfismo lineal, de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Problemas:

1. (a) Sean I_1 e I_2 dos ideales de A. Demostrar que $(I_1 \cdot I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$.

   (b) Probar que los ideales $(y - x^2, x^2 + (y+1)^2 - 1)$, $(y - x^2, x^2 + (x^2+1)^2 - 1)$ de $k[x, y]$ son iguales.
2. Probar que los anillos $k[x, y]/(xy - 1)$ y $k[x]_{1,x,x^2,\dots}$ son isomorfos.
3. (a) Sea $N' \subset N$ un A-submódulo y $M = N/N'$. Probar que si $N \otimes_A N = 0$ entonces $M \otimes_A M = 0$.

   (b) Sea I un ideal de A, calcular $A/I \otimes_A A/I$.

   (c) Probar que si M es un A-módulo finito distinto de cero entonces $M \otimes_A M$ es distinto de cero.
4. Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $T : E \to E$ un endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal de E. Demostrar que si $c_T(x)$ es el polinomio característico de T considerado como endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal, entonces el polinomio característico de T considerado como endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal es $c_T(x) \cdot \overline{c_T(x)}$ (donde $\overline{c_T(x)}$ es el conjugado de $c_T(x)$).

Capítulo 6

Examen de Álgebra II

Febrero-2000

Teoría:

1. Lema de Nakayama.
2. Teoremas de descomposición para módulos sobre dominios de ideales principales.

Problemas:

1. Sea $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$ un morfismo inyectivo de anillos. Sea $x \in \operatorname{Spec} A$, tal que $\mathfrak{p}_x \subset A$ sea un ideal primo minimal. Sea $i^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ el morfismo inducido por i en los espectros. Probar que ${i^*}^{-1}(x) \neq \emptyset$. Probar que la imagen de i^* es densa en $\operatorname{Spec} A$.

2. Sea $f\colon M \to M'$ un morfismo de A-módulos. Sea $N \subseteq M'$ un submódulo. Probar existe un isomorfismo
$$M/f^{-1}(N) \simeq \operatorname{Im} f/(\operatorname{Im} f \cap N)$$

3. Sea G un grupo abeliano finito. Si para cada divisor n del orden de G existe un único subgrupo de G de orden n, probar que G es un grupo cíclico.

4. Calcular una base de Jordan del endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base estandar es
$$T \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sean M y M' A-módulos y $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal maximal. Probar
   (a) $(M \otimes_A M') \otimes_A A/\mathfrak{m} = (M \otimes_A A/\mathfrak{m}) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (M' \otimes_A A/\mathfrak{m})$.
   (b) Si A es local y M es finito generado, $M \otimes_A M = 0$ si y sólo si $M = 0$.
   (c) Si M es finito generado, $M \otimes_A M = 0$ si y sólo si $M = 0$.

Capítulo 7

Examen de Álgebra Conmutativa

Febrero-2001

Teoría:

1. Probar la fórmula de la fibra.

2. Probar el lema de Nakayama.

Problemas:

1. Sea A un anillo y $a \in A$. Probar que A_a es un anillo isomorfo a A_{a^2}.

2. Probar que $\mathbb{Z}[x]/(2x+3)$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo finito generado. (Pista: compruébese que $\bar{1}, \bar{x}, \ldots, \overline{x^n}$ no forma un sistema $\mathbb{Z}$-generador de $\mathbb{Z}[x]/(2x+3)$).

3. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal, cuya matriz en la base estandar de $\mathbb{R}^3$ es

$$T \equiv \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Calcular una base de Jordan de T.

4. Dado el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, calcular los divisores elementales de $M \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

Capítulo 8

Examen de Ampliación de Álgebra Conmutativa

Mayo-2001

Teoría:

1. Demostrar la existencia de descomposiciones primarias reducidas en anillos noetherianos.

2. Probar el teorema de los ceros de Hilbert.

Problemas:

1. Consideremos el anillo $k[[x]]$. Probar:

   (a) $s(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot x + \cdots \in k[[x]]$ es invertible si y sólo si $\lambda_0 \neq 0$.

   (b) Probar que si $0 \neq I \subseteq k[[x]]$ es un ideal entonces existe un $n \in \mathbb{N}$, de modo que $I = (x^n)$.

   (c) Probar que $k[[x]]$ es un anillo noetheriano.

2. Probar que $\mathbb{Z}[x]/(2x+3)$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo finito generado.

3. Sea $A = [\mathbb{C}[x,y,z]/(x^3) \cdot (x-1, y-2) \cdot (y,z)]_z$. Calcular la dimensión de Krull de A.

4. Calcular la multiplicidad de corte de $y^2 - x^3 = 0$ con cada recta $ax + by = 0$, en el origen. Calcular las asíntotas de $y^2 - x^3 = 0$.

Capítulo 9

Examen de Ampliación de Álgebra

Septiembre del 2001

Teoría:

1. Probar el teorema de la base de Hilbert.

2. Probar el Lema de de Normalización de Noether.

Problemas:

1. (a) Si A es un anillo noetheriano y $\operatorname{rad} A$ es el radical de A, probar que existe un $n \in \mathbb{N}$ de modo que $(\operatorname{rad} A)^n = 0$.

   (b) Si A es noetheriano y $S \subset A$ es un sistema multiplicativamente cerrado, probar que A_S es un anillo noetheriano.

   (c) Si A es un anillo que contiene sólo un número finito de elementos, probar que A es un anillo noetheriano.

2. Sea A un anillo noetheriano, de modo que $\operatorname{Spec} A$ es irreducible.

   (a) Probar que si $a \in A$ no es nilpotente y existe $b \in A$ de modo que $a \cdot b = 0$, entonces b es nilpotente.

   (b) Probar que si a no es nilpotente ni invertible, entonces el morfismo $A \to A_a$ no es finito.

3. Calcular la multiplicidad de intersección de las curvas planas proyectivas de ecuaciones afines $y^2 - x^3 = 0$, $y - x^2 = 0$ en cada uno de los puntos de la recta del infinito.

Capítulo 10

Examen de Álgebra Conmutativa

Junio-2001

Teoría:

1. Probar la fórmula de la fibra.
2. Enunciar los teoremas de clasificación de A-módulos finitos sobre dominios de ideales principales y aplicarlos a la clasificación de los grupos abelianos de orden finito.

Problemas:

1. Probar que en todo anillo existen ideales primos minimales.
2. Demostrar que $(A_f)_g = A_{f\cdot g}$.
3. Demostrar que no existen tres elementos $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{Q}^2$ de modo que sean $\mathbb{Z}$-linealmente independientes.
4. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal, cuya matriz en la base estandar de $\mathbb{R}^3$ es
$$T \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
Calcular una base de Jordan de T.
5. Sea $S \subset A$ un sistema multiplicativamente cerrado y M y N A-módulos. Demostrar que $M \otimes_A N_S = M_S \otimes_{A_S} N_S$.

Capítulo 11

Examen de Álgebra Conmutativa

Septiembre del 2001

Teoría:

1. Probar el lema de Nakayama.

2. Dar la clasificación de los grupos finitos abelianos.

Problemas:

1. Sea A un anillo íntegro y $a \in A$. Probar que $(a^n)/(a^{n+1})$ es un A-módulo isomorfo a $A/(a)$.

2. Probar que $\mathbb{C}(x) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(y)$ es un anillo isomorfo a $\mathbb{C}[x,y]_S$, donde $S = \{p(x) \cdot q(y)$, con $p(x) \in \mathbb{C}[x], q(y) \in \mathbb{C}[y]\}$. Calcular $\operatorname{Spec} \mathbb{C}(x) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(y)$.

3. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Calcular C tal que $CAC^{-1} = B$.

Capítulo 12

Examen de Ampliación de Álgebra Conmutativa

Febrero-2002

Teoría:

1. Probar el teorema de la base de Hilbert
2. Probar el lema de normalización de Noether.

Problemas:

1. Probar que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt[2]{5}] \subset \mathbb{R}$ es noetheriano.
2. ¿Es el ideal $(x^4, x^3y, y^2) \subset \mathbb{C}[X, y]$ un ideal primario? Calcular la descomposición primaria del ideal $(x^2) \cdot (x, y)^2 \subseteq \mathbb{C}[x, y]$.
3. Demostrar que $\dim \mathbb{Z}[x] = 2$.
4. Encontrar alguna cónica no singular, que corte a la curva afín plana $y^2 - x^3 = 0$ en sólo tres puntos (contando multiplicidades) del plano afín.

Capítulo 13

Examen de Ampliación de Álgebra Conmutativa

Junio-2002

Teoría:

1. Demostrar la existencia de descomposiciones primarias reducidas en anillos noetherianos.
2. Probar el teorema de los ceros de Hilbert.

Problemas:

1. Consideremos el anillo $k[[x]]$. Probar:
   (a) $s(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot x + \cdots \in k[[x]]$ es invertible si y sólo si $\lambda_0 \neq 0$.
   (b) Probar que si $0 \neq I \subseteq k[[x]]$ es un ideal entonces existe un $n \in \mathbb{N}$, de modo que $I = (x^n)$.
   (c) Probar que $k[[x]]$ es un anillo noetheriano.
2. Probar que $\mathbb{Z}[x]/(2x+3)$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo finito generado.
3. Calcular la multiplicidad de corte de $y^2 - x^3 = 0$ con cada recta $ax + by = 0$, en el origen. Calcular las asíntotas de $y^2 - x^3 = 0$.

Capítulo 14

Examen de Álgebra Conmutativa

Setiembre-2002

Teoría:

1. Probar la fórmula de la fibra.

Problemas:

1. Sea $\mathbb{Z}[\frac{2}{3}] := \{a_n \cdot (\frac{2}{3})^n + \ldots + a_1 \cdot (\frac{2}{3}) + a_0 \in \mathbb{Q}$, con $a_i \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ variables$\}$. Probar que $\mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}[x]/(3x-2)$.

2. Demostrar que $A_S \otimes_A M = M_S$.

3. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal, cuya matriz en la base estándar de $\mathbb{R}^3$ es

$$T \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Calcular una base de Jordan de T.

Capítulo 15

Examen de Ampliación de Álgebra Conmutativa

Septiembre-2002

Teoría:

1. Demostrar la existencia de descomposiciones primarias reducidas en anillos noetherianos.

2. Probar el teorema de los ceros de Hilbert.

Problemas:

1. Sea A un anillo noetheriano reducido, es decir, sin nilpotentes. Demostrar que en la descomposición primaria del cero no hay componentes sumergidas.

2. Probar que $\mathbb{C}(x)$ no es una $\mathbb{C}$-álgebra de tipo finito.

3. Calcular la multiplicidad de corte de $y^2 - x^2 + x^3 = 0$ con cada recta $ax + by = 0$, en el origen. Calcular las asíntotas de $y^2 - x^2 + x^3 = 0$.

Capítulo 16

Examen de Álgebra Conmutativa

Febrero-2003

Teoría del tema cuarto:

1. Construcción del producto tensorial de A-módulos.
2. Definición de módulo plano. Demostrar que los módulos libres son planos.

Problemas del primer cuatrimestre:

1. Probar que $\mathbb{Z}[x]_{\mathbb{Z}[x]-\{0\}} = \mathbb{Q}(x)$.
2. Sea G un grupo abeliano de orden n y m un divisor de n. Probar que existe algún subgrupo de G de orden m.
3. Clasificar el endomorfismo lineal de $\mathbb{R}^3$ de matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ en la base estándar. Dar una base de Jordan.
4. (a) Sean M y M' dos A-módulos y $N \subseteq M$ un submódulo. Denotemos por $\overline{N \otimes_A M'} := \langle n \otimes m' \in M \otimes M' \mid n \in N, m' \in M' \rangle$. Probar que
   $$(M/N) \otimes_A M' = (M \otimes_A M')/\overline{N \otimes_A M'}$$
   (b) Probar que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.
5. Calcular
   (a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   (b) $A_S \otimes_A A_S$.
   (c) $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q})$.