Álgebra II

Grado en Matemáticas

Colección manuales uex - 00

00

ÁLGEBRA II

GRADO EN MATEMÁTICAS

MANUALES UEX

PEDRO SANCHO DE SALAS

ÁLGEBRA II

GRADO EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

2025

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

UNIÓN EUROPEA
FONDO EUROPEO DE DESARROLLO REGIONAL: UNA MANERA DE HACER EUROPA

GOBIERNO DE EXTREMADURA
Consejería de Empleo, Empresa e Innovación

Edita

Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C./ Caldereros, 2 - Planta 2ª - 10071 Cáceres (España)
Telf. 927 257 041 - Fax 927 257 046
publicac@unex.es
www.unex.es/ publicaciones

ISSN XXX
ISBN de méritos XXX

Índice general

Introducción

El presente texto está concebido por el autor como el manual de la asignatura cuatrimestral Álgebra II, del tercer curso del Grado de Matemáticas de la UEX. En esta asignatura estudiamos las variedades algebraicas. Estudiamos el espectro primo de un anillo, los anillos noetherianos, la descomposición primaria y la teoría de la dimensión en variedades algebraicas. Se supone que el estudiante tiene conocimientos sobre básicos la teoría de anillos, módulos, cocientes y productos tensoriales de álgebras y módulos. Se introducirán nuevas herramientas o conceptos: el espectro primo de un anillo, la localización y el lenguaje categorial.

El manual está divido en cuatro temas. En cada tema incluimos un cuestionario, una lista de problemas (con sus soluciones) y la biografía de un matemático relevante (en inglés).

Hagamos una breve descripción del contenido de la asignatura.

Simplificando y hablando de un modo algo pedante podríamos decir que el Álgebra es la ciencia que estudia los polinomios y sus raíces. En términos matemáticos algo más amplios, el Álgebra estudia los sistemas de ecuaciones algebraicas

$$\begin{array}{c} p_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array} \qquad (*)$$

y sus soluciones.

Profundicemos en lo que entendemos generalmente por sistemas de ecuaciones algebraicas. Tendemos a identificar los sistemas de ecuaciones con el conjunto de sus soluciones. Así, por ejemplo, si al sistema de ecuaciones anterior le añadimos la ecuación $p_1(x_1,\dots,x_n)=0$ decimos que tenemos el mismo sistema, o si le añadimos una ecuación que sea combinación $k[x_1,\dots,x_n]$-lineal de $p_1(x_1,\dots,x_n),\dots,p_r(x_1,\dots,x_n)$ decimos que tenemos el mismo sistema de ecuaciones algebraicas, porque las soluciones de ambos sistemas son las mismas. En conclusión, cuando consideramos el sistema de ecuaciones $(*)$ estamos considerando el ideal $(p_1,\dots,p_r)\subset k[x_1,\dots,x_n]$. Digamos por definición, que dar un sistema de ecuaciones algebraicas es dar un ideal del anillo de polinomios.

¿Las soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas determinan el sistema, es decir, el ideal? El conjunto de soluciones reales del sistema

$$x^2+y^2+1=0$$

es vacío, del cual, obviamente, no podríamos deducir que estábamos planteando la ecuación $x^2+y^2+1=0$. Ahora bien, si consideramos el conjunto de todas las soluciones complejas de este sistema, se cumple que el ideal de todos los polinomios de $\mathbb{C}[x,y]$ que se anulan en este conjunto coincide con el ideal (x^2+y^2+1). El teorema de los ceros de Hilbert dice que las soluciones complejas de un sistema de ecuaciones "casi" determinan el sistema. Expliquemos el "casi" de la sentencia anterior. Veamos el pequeño problema con el que nos encontramos. Los dos sistemas de ecuaciones distintos $x=0$ y $x^2=0$ ($(x^2)\underset{\neq}{\subset}(x)$) tienen las mismas soluciones. En general, dado un ideal $I\subset\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y $f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ tal que $f^m\in I$, las soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definido por I son las mismas que el definido por (I,f). Denotemos por $r(I)=\{f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$. El teorema de los ceros de Hilbert afirma que dos sistemas de ecuaciones algebraicas $I,J\subseteq\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ tienen el mismo conjunto de soluciones si y solo si $r(I)=r(J)$.

En el estudio de los sistemas de ecuaciones algebraicas hemos ampliado nuestro cuerpo de partida $\mathbb{R}$ a uno algebraicamente cerrado, $\mathbb{C}$. Si ampliamos aún más nuestro "marco" es decir, consideramos en vez de $\mathbb{C}$ cualquier anillo, se cumple que "las soluciones (sobre cualquier anillo) de un sistema de ecuaciones algebraicas I determinan el ideal I". Así por ejemplo, $x=0$ no tiene las mismas soluciones que $x^2=0$: sea $A=\mathbb{C}[z]/(z^2)$, entonces $\bar z\in A$ es una solución de $x^2=0$ y no es una solución de $x=0$.

Sea $I\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ un sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos (para cada anillo) el conjunto de soluciones de este sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos una función de este conjunto, es decir, una aplicación (para cada anillo A)

$$\{\text{Conjunto de soluciones sobre } A \text{ del sistema } I\}\xrightarrow{\phi_A} A$$

Existe un único $\overline{p(x_1,\dots,x_n)}\in k[x_1,\dots,x_n]/I$ de modo que $\phi_A((a_1,\dots,a_n))=p(a_1,\dots,a_n)$. Es decir, "el anillo de todas las funciones del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definido por I es $k[x_1,\dots,x_n]/I$". Este tipo de k-álgebras se denominan k-álgebras de tipo finito.

Dados dos sistemas de ecuaciones algebraicas $I\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$, $J\subseteq k[y_1,\dots,y_m]$ y una aplicación (para cada anillo A)

$$\{\text{Sol. con valores en } A \text{ del sistema } I\}\xrightarrow{\varphi_A}\{\text{Sol. con valores en } A \text{ del sistema } J\}$$

existe un único morfismo de k-álgebras $f\colon k[y_1,\dots,y_m]/J\to k[x_1,\dots,x_m]/I$, $f(\bar y_i)=\overline{f_i(x_1,\dots,x_n)}$ de modo que

$$\varphi_A(a_1,\dots,a_n)=(f_1(a_1,\dots,a_n),\dots,f_m(a_1,\dots,a_n)).$$[1]

La teoría (Geometría) que estudia los conjuntos de soluciones (sobre todo anillo) de un sistema de ecuaciones k-algebraicas y sus aplicaciones coincide con la teoría (Álgebra) que estudia las k-álgebras de tipo finito y sus morfismos de k-álgebras.

En la literatura matemática es más frecuente hablar del espectro primo del anillo $k[x_1,\dots,x_n]/I$ (es decir, $\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/I$, que es el conjunto de los ideales primos de $k[x_1,\dots,x_n]/I$) que considerar el funtor ϕ_A que asocia a cada anillo A las soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definido por I. Si $k \hookrightarrow K$ es una extensión de cuerpos, $(a_1,\dots,a_n)$ es una solución sobre K del sistema de ecuaciones definido por I y $\tau\colon K \simeq K$ es un isomorfismo de cuerpos sobre k, es fácil probar que $(\tau(a_1),\dots,\tau(a_n))$ es también una solución del sistema de ecuaciones. A cada solución $\alpha = (a_1,\dots,a_n) \in K^n$ del sistema de ecuaciones le podemos asignar el ideal primo $\mathfrak{p}_\alpha := \{\overline{p(x_1,\dots,x_n)} \in k[x_1,\dots,x_n]/I$ tales que $p(a_1,\dots,a_n) = 0\}$ y es fácil comprobar que a $(a_1,\dots,a_n)$ y $(\tau(a_1),\dots,\tau(a_n))$ les asignamos el mismo ideal primo. Se puede probar que si K es un cuerpo algebraicamente cerrado "suficientemente grande" (por ejemplo si $k = \mathbb{Q}$ podemos tomar $K = \mathbb{C}$), entonces el conjunto de soluciones sobre K del sistema de ecuaciones definido por I, módulo automorfismos de K, es igual a $\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/I$.

Consideremos un sistema de ecuaciones algebraicas $I \subset \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y sea X el conjunto de soluciones ¿Cómo podríamos definir la dimensión de X? Dada una variedad lineal afín V, sabemos que todas las cadenas irrefinables de inclusiones de subvariedades lineales $V_1 \underset{\neq}{\subset} V_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} V_m = V$ tienen el mismo número de eslabones y este número m se dice que es la dimensión de V. Consideremos en X la topología cuyos cerrados son los subconjuntos donde se anulan un número finito de polinomios $q_1,\dots,q_m \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$. Probamos que un cerrado $Y \subset X$ es irreducible si y solo si $\mathfrak{p}_Y = \{f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\colon f(y) = 0,\ \forall\, y \in Y\}$ es un ideal primo. Supongamos que X es irreducible. Se cumple que todas las cadenas irrefinables de inclusiones de cerrados irreducibles de X tienen el mismo número de eslabones y se dice que este número es la dimensión de X. Probamos que la dimensión de X coincide con el número de eslabones de las cadenas irrefinables de inclusiones de ideales primos de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$.

$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/r(I)$. los sistemas de ecuaciones I y $r(I)$ tienen el mismo conjunto de soluciones complejas. Un estudio fino de los sistemas de ecuaciones debe distinguir el sistema de ecuaciones $x = 0, y = 0$ del sistema de ecuaciones $x = 0, y^2 = 0$. El ideal (x,y) es el ideal de los polinomios $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ tales

[1]Quisiera hacer aquí un comentario marginal: Nos han aparecido en este curso de Geometría Algebraica conceptos como "espacio de soluciones" (de un sistema de ecuaciones algebraicas) y "aplicaciones' (algebraicas) entre los espacios de soluciones. En Álgebra Lineal aparecen los conceptos de espacio vectorial y las aplicaciones lineales. En Topología aparecen los conceptos de espacio topológico y las aplicaciones continuas. En Geometría Diferencial aparecen las variedades diferenciales y las aplicaciones diferenciales.

que $p(0,0)=0$ y $(x,y^2)=\{p(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]\colon p(0,0)=0$ y $\frac{p(x,y)}{\partial}=0\}$, (x,y^2) es el ideal de las funciones que se anulan en $(0,0)$ y cumplen ciertas condiciones infinitesimales en $(0,0)$. Dado un cerrado irreducible $C\subset\mathbb{C}^n$ y el ideal primo $\mathfrak{p}_C:=\{p(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\colon p(c)=0,\ \forall\, c\in C\}$, se dice que un ideal $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}_C$ primario si $\mathfrak{q}$ es el ideal de polinomios que se anulan en todos los puntos de C y cumplen ciertas condiciones infinitesamales a lo largo de C (hablo sin precisión). Probamos que dar un sistema de ecuaciones es equivalente a dar ciertos cerrados irreducibles C_i (de modo que $\cup_i C_i$ es el conjunto de soluciones complejas del sistema) y ciertas condiciones infinitesimales a lo largo de cada C_i. Con otras palabras, todo ideal es la intersección de ideales primarios.

Capítulo 1

Álgebras de tipo finito

1.1. Introducción

Como hemos comentado el objetivo principal de la Geometría Algebraica es el estudio del conjunto de soluciones de los sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} p_1(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \\ & \cdots & \\ p_r(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \end{array}$$

Un primer resultado afirma que si el sistema de ecuaciones estuviese formado por un número infinito de ecuaciones, entonces todas las ecuaciones salvo un número finito serían redundantes. Con otras palabras, para cada un ideal $I = (p_i(x_1,\dots,x_n))_{j\in J} \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ existen $j_1,\dots,j_r \in J$ tales que $I = (p_{j_1}(x_1,\dots,x_n),\dots,p_{j_r}(x_1,\dots,x_n))$. Los anillos cuyos ideales son finito generados se denominan noetherianos. Luego el anillo $k[x_1,\dots,x_n]$ es noetheriano.

Como probaremos, $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1(x_1,\dots,x_n),\dots,p_r(x_1,\dots,x_n))$, el anillo de funciones algebraicas del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones anterior, es noetheriano. Los anillos $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1(x_1,\dots,x_n),\dots,p_r(x_1,\dots,x_n))$ se denominan k-álgebras de tipo finito. Por tanto, las k-álgebras de tipo finito son anillos noetherianos.

Los anillos que aparecen usualmente en Geometría Algebraica y la Aritmética son noetherianos.

1.2. Módulos noetherianos

Las operaciones básicas como producto tensorial, cocientes etc., se realizan de un modo mucho más flexible y claro con los módulos que con los ideales, y muchos de los objetos usuales en Matemáticas tienen estructura de módulo. Será natural comenzar estudiando los módulos finito generados, cuyos submódulos sean finito generados, en vez de limitarnos simplemente a los anillos cuyos ideales son finito generados.

1. Definición : Un A-módulo M se dice que es un A-módulo noetheriano si todo submódulo suyo (propio o no) es finito generado.

2. Definición : Un A-módulo M se dice que es noetheriano si toda cadena ascendente de submódulos de M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

estabiliza, es decir existe $r >> 0$ de modo que $M_r = M_{r+1} = \cdots$.

3. Proposición : *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

Demostración. $\mathbf{def}^1 \Rightarrow \mathbf{def}^2$: Dada una cadena ascendente de submódulos de M, $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$, sea $M' = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} M_i \subseteq M$. Como M' es un submódulo de M, es finito generado. Escribamos $M' = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$, con $m_j \in M_{i_j}$. Si r es el máximo de todos los i_j, $M' = M_r$, luego $M_r = M_{r+1} = \cdots$.

$\mathbf{def}^2 \Rightarrow \mathbf{def}^1$: Sea $M' \subseteq M$. Sea $m_1 \in M'$ y consideremos el submódulo de M, $M_1 = \langle m_1 \rangle$. Si $M_1 \neq M'$, sea $m_2 \in M' \backslash M_1$. Consideremos el submódulo de M, $M_2 = \langle m_1, m_2 \rangle$. Repitiendo el proceso, obtenemos una cadena de inclusiones estrictas

$$\langle m_1 \rangle \subset \langle m_1, m_2 \rangle \subset \cdots$$

que ha de ser finita, porque por la segunda definición toda cadena estabiliza. Por tanto, existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $\langle m_1, \ldots, m_r \rangle = M'$.

□

4. Ejemplo : Los k-espacios vectoriales de dimensión finita son k-módulos noetherianos.

5. Teorema : *Sea M un A-módulo y $N \subset M$ un submódulo. M es un A-módulo noetheriano si y solo si N y M/N son módulos noetherianos.*

Demostración. Sea $\pi: M \to M/N, \pi(m) := \bar{m}$ el morfismo de paso al cociente.

$\Rightarrow$) Evidentemente N es noetheriano. Dado un submódulo $\bar{M} \subset M/N$, tenemos que $\pi^{-1}(\bar{M}) = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$. Por tanto, $\bar{M} = \langle \pi(m_1), \ldots, \pi(m_r) \rangle$.

$\Leftarrow$) Sea $M' \subset M$ un submódulo. $M' \cap N$ es finito generado porque es un submódulo de N, y $M'/M' \cap N$ es finito generado porque podemos considerarlo como submódulo de M/N, vía el morfismo inyectivo $M'/M' \cap N \hookrightarrow M/N$, $\bar{m} \mapsto \bar{m}$. Escribamos $M' \cap N =$

$\langle m_1,\dots,m_r\rangle$ y $M'/M'\cap N = \langle \bar{m}_{r+1},\dots,\bar{m}_n\rangle$, entonces $M' = \langle m_1,\dots,m_n\rangle$. En conclusión, M es un módulo noetheriano.

□

6. Ejercicio : Prueba que M y M' son módulos noetherianos si y solo si $M\oplus M'$ es noetheriano.

1.3. Anillos noetherianos

1. Definición : Se dice que un anillo A es noetheriano si como A-módulo es noetheriano, es decir si todo ideal es finito generado, o equivalentemente, si toda cadena ascendente de ideales estabiliza.

2. Ejemplo : Los cuerpos, los anillos de ideales principales, como $\mathbb{Z}$, $k[x]$, son noetherianos.

Un ejemplo de anillo no noetheriano, es el anillo de funciones diferenciales en la recta real: Sea I_n el ideal de las funciones que se anulan en $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}$. Tenemos que $I_1\subset I_2\subset\cdots\subset I_n\subset\cdots$ es una cadena ascendente estricta de ideales en el anillo, luego no estabiliza. Por tanto, el anillo no es noetheriano.

3. Ejercicio : Da un ejemplo de módulo finito generado que no sea noetheriano.

4. Proposición : *Si A es un anillo noetheriano, todo A-módulo finito generado es noetheriano.*

Demostración. Si A es noetheriano, A^n es un A-módulo noetheriano, por el ejercicio 1.2.6. Ahora bien, como todo módulo finito generado es cociente de un libre finito generado, concluimos que los módulos finito generados son noetherianos.

□

Por tanto, sobre los dominios de ideales principales todo módulo finito generado es noetheriano.

5. Proposición : *Sea A un anillo noetheriano. Todo A-módulo finito generado tiene una presentación por A-módulos libres finito generados.*

Demostración. Sea $M=\langle m_1,\dots,m_r\rangle$ un A-módulo finito generado. Consideremos el epimorfismo de A-módulos $A^r\to M$, $\pi(a_1,\dots,a_r):=a_1m_1+\cdots+a_rm_r$. $\operatorname{Ker}\pi$ es un submódulo de A^r, luego es finito generado. Escribamos, $\operatorname{Ker}\pi=\langle n_1,\dots,n_s\rangle$ y consideremos el epimorfismo $\pi'\colon A^s \to \operatorname{Ker}\pi$, $\pi'(a_1,\dots,a_s) := a_1n_1+\cdots+a_sn_s$. Sea $i\colon \operatorname{Ker}\pi \hookrightarrow A^r$ el morfismo de inclusión y $f := i\circ\pi'$ y consideremos los morfismos

$$\boxed{A^s \xrightarrow{f} A^r \xrightarrow{\pi} M}$$

Entonces, $\operatorname{Im} f = i(\pi'(A^s)) = \operatorname{Ker}\pi$ y $A^r/\operatorname{Im} f \simeq M$. Es decir, hemos construido una presentación por módulos libres finito generados de M.

□

1.3.1. k-álgebras de tipo finito

6. Teorema de la base de Hilbert: *Si A es un anillo noetheriano entonces $A[x]$ es un anillo noetheriano.*

Demostración. Sea $I \subset A[x]$ un ideal. Tenemos que ver que es finito generado:

Sea $J \subseteq A$ el conjunto formado por los coeficientes de máximo grado de los $p(x) \in I$. J es un ideal de A: Si $p(x) = a_0x^n+\cdots+a_n, q(x) = b_0x^m+\cdots+b_m \in I$, entonces $x^m p(x)+x^n q(x) = (a_0+b_0)x^{n+m}+\cdots \in I$, luego si $a_0, b_0 \in J$ entonces $a_0+b_0 \in J$.

Por ser A noetheriano, $J = (b_1,\dots,b_r)$ es finito generado. Así, existen $p_1,\dots,p_r \in I$ cuyos coeficientes de grado máximo son $b_1,\dots,b_r$, respectivamente. Además, multiplicando cada p_i por una potencia conveniente de x, podemos suponer que $\operatorname{gr} p_1 = \cdots = \operatorname{gr} p_r$. Escribamos $\operatorname{gr} p_i = m$, para todo i.

Queremos probar que

$$I = (p_1,\dots,p_r)_{A[x]} + I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}.$$

Dado $q(x) \in I$, tenemos que probar que $q(x) \in (p_1,\dots,p_r)_{A[x]} + I \cap \{A+Ax+\cdots+Ax^{m-1}\}$. Procedemos por inducción sobre el grado de $q(x)$. Si $\operatorname{gr}(q(x)) \le m$,entonces evidentemente $q(x) \in I \cap \{A+Ax+\cdots+Ax^{m-1}\} \subseteq (p_1,\dots,p_r)_{A[x]} + I \cap \{A+Ax+\cdots+Ax^{m-1}\}$. Si $\operatorname{gr}(q(x)) = n > m$, escribamos $q(x) = a_0x^n+\cdots+a_n$. Sean $\lambda_i \in A$ tales que $a_0 = \lambda_1b_1+\cdots+\lambda_rb_r$. Entonces. $q_1(x) := q(x) - \sum\limits_i \lambda_i x^{n-m} p_i \in I$ y $\operatorname{gr}(q_1(x)) < \operatorname{gr} q(x)$. Por inducción, $q_1(x) \in (p_1,\dots,p_r)_{A[x]} + I \cap \{A+Ax+\cdots+Ax^{m-1}\}$, luego $q(x)$ también.

$I \cap \{A+Ax+\cdots+Ax^{m-1}\}$ es un A-módulo finito generado ya que es submódulo de $\{A+Ax+\cdots+Ax^{m-1}\}$, que es un A-módulo noetheriano. En conclusión, si escribimos $I \cap \{A+Ax+\cdots+Ax^{m-1}\} = \langle q_1,\dots,q_s\rangle_A$, tenemos que $I = (p_1,\dots,p_r,q_1,\dots,q_s)$.

□

7. Definición: Dado un morfismo de anillos $f\colon A \to B$ se dice que B es una A-álgebra.

Con abuso de notación, al elemento $f(a)$ lo denotaremos muchas veces a. Observemos que si A es un cuerpo (y $B \neq 0$), entonces f es un morfismo inyectivo.

8. Ejemplo: Todo anillo A es de modo natural (y único) $\mathbb{Z}$-álgebra: $\mathbb{Z} \to A$, $n \mapsto n$, es el único morfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en A.

9. Ejemplo: $A[x_1,\dots,x_n]$ es una A-álgebra de modo natural: tenemos el morfismo de anillos $A \to A[x_1,\dots,x_n]$, $a \mapsto a$.

10. Ejemplo: $\mathbb{R}$ es de modo natural una $\mathbb{Q}$-álgebra. $\mathbb{C}$ es de modo natural una $\mathbb{R}$-álgebra.

11. Definición: Se dice que B es una A-álgebra de tipo finito si existen $\xi_1,\dots,\xi_r \in B$ que generen A-algebraicamente B, es decir, si el morfismo

$$A[x_1,\dots,x_r] \to B, \ \sum_{n_1,\dots,n_r} a_{n_1,\dots,n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} \mapsto \sum_{n_1,\dots,n_r} a_{n_1,\dots,n_r} \xi_1^{n_1} \cdots \xi_r^{n_r}$$

es epiyectivo.

12. Corolario: *Sea k un cuerpo. Toda k-álgebra de tipo finito es noetheriana.*

Demostración. Todo cuerpo es un anillo noetheriano, luego k es noetheriano. Por el teorema de la base de Hilbert $k[x_1]$ es noetheriano. De nuevo, por el teorema de la base de Hilbert, $k[x_1,x_2]$ es noetheriano. En conclusión $k[x_1,\dots,x_n]$ es noetheriano y todo cociente $k[x_1,\dots,x_n]/I$ también. Luego toda k-álgebra de tipo finito es noetheriana. □

13. Definición: Sean B y C dos A-álgebras. Diremos que un morfismo de anillos $\phi\colon B \to C$ es un morfismo de A-álgebras si $\phi(a) = a$ para todo $a \in A$.

Si $\phi\colon B \to C$ es un morfismo de A-álgebras, $a_{n_1,\dots,n_r} \in A$, $b_1,\dots,b_r \in B$, entonces $\phi(\sum_{n_1,\dots,n_r} a_{n_1,\dots,n_r} b_1^{n_1} \cdots b_r^{n_r}) = \sum_{n_1,\dots,n_r} a_{n_1,\dots,n_r} \phi(b_1)^{n_1} \cdots \phi(b_r)^{n_r}$.

1.4. Localización por un sistema multiplicativo

1. Definición: Sea A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto. Diremos que S es un sistema multiplicativo de A si cumple

1. $1 \in S$.
2. Si $s, s' \in S$ entonces $s \cdot s' \in S$.

2. Ejemplos : $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ es un sistema multiplicativo de $\mathbb{Z}$. Si A es un anillo íntegro, entonces $A\backslash\{0\}$ es un sistema multiplicativo.

Si $\mathfrak{p}_x \subset A$ es un ideal primo, entonces $A\backslash\mathfrak{p}_x$ es un sistema multiplicativo. Denotaremos $A_x = A_{A\backslash\mathfrak{p}_x}$.

Dado $a \in A$, $S = \{1, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$ es un sistema multiplicativo. Denotaremos $A_a = A_{\{1, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}}$.

Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo de A. Podemos definir en el conjunto $A \times S$ la siguiente relación de equivalencia:

$$(a,s) \sim (a',s') \iff \text{ existen } s_1, s_2 \in S \text{ tales que } (as_1, ss_1) = (a's_2, s's_2).$$

Denotaremos $\frac{a}{s}$ a la clase de equivalencia de (a,s).

3. Definición : Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo de A. La localización de A por S, A_S, es el conjunto

$$A_S := \left\{\frac{a}{s},\ \forall\, a \in A \text{ y } \forall s \in S\right\}$$

Observemos que $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ si y solo si existen $s_1, s_2 \in S$ tales que $as_1 = a's_2$ y $ss_1 = s's_2$. Luego, $\frac{a}{s} = \frac{as_1}{ss_1} = \frac{a's_2}{s's_2} = \frac{a'}{s'}$, donde las fracciones del medio tienen igual numerador y denominador. Ahora es fácil probar la siguiente afirmación:

> Sea B un conjunto. Dar una aplicación $A_S \to B$ es asignar a cada $\frac{a}{s} \in A_S$ un elemento $\varphi(a,s) \in B$ de modo que $\varphi(at, st) = \varphi(a,s)$ para todo $t \in S$.

Con mayor generalidad, dar una aplicación $A_S \times \overset{n}{\cdots} \times A_S \to B$ es asignar a cada elemento $(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_n}{s_n}) \in A_S \times \overset{n}{\cdots} \times A_S$ un elemento $\varphi(a_1, s_1, \dots, a_n, s_n) \in B$ de modo que cumple que $\varphi(t_1a_1, t_1s_1, \dots, t_na_n, t_ns_n) = \varphi(a_1, s_1, \dots, a_n, s_n)$ para todo $t_1, \dots, t_n \in S$.

Con la suma y producto ordinarios de fracciones (bien definidos)

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} := \frac{s'a + sa'}{ss'}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}$$

A_S es un anillo. El elemento unidad de A_S es la fracción $\frac{1}{1}$. Si $s \in S$ entonces la fracción $\frac{s}{1}$ es invertible, de inverso $\frac{1}{s}$. La fracción $\frac{0}{s} = \frac{0 \cdot s}{1 \cdot s} = \frac{0}{1}$ es el elemento nulo de A_S.

4. Definición : Al morfismo natural de anillos $A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ se le denomina morfismo de localización por S.

Denotaremos $\frac{a}{1} = a$, cuando no sea causa de confusión.

5. Definición: Si A es un anillo íntegro, obviamente $A_{A\setminus\{0\}}$ es un cuerpo y diremos que es el cuerpo de fracciones de A.

6. Ejemplos: 1. $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$,

2. $\mathbb{Q}(x) := \mathbb{Q}[x]_{\mathbb{Q}[x]\setminus\{0\}}$

3. $k(x) := k[x]_{k[x]\setminus\{0\}} = \{p(x)/q(x)\colon\ p(x), q(x) \in k[x], q(x) \neq 0\}$, o con mayor generalidad, el cuerpo de funciones racionales en n-variables con coeficientes en k,

$$k(x_1,\dots,x_n) := k[x_1,\dots,x_n]_{k[x_1,\dots,x_n]\setminus\{0\}} = \{\frac{p(x)}{q(x)} : 0 \neq q(x), p(x) \in k[x_1,\dots,x_n]\}$$

7. Proposición: *Sea A_S la localización de A por S. Entonces,*

1. *$\frac{a}{s} = 0$ si y solo si existe $s' \in S$ tal que $s' \cdot a = 0$ (en A).*

2. *$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ en A_S si y solo si existe un $t \in S$ de modo que $t\cdot(as' - a's) = 0$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) $0 = \frac{0}{1} = \frac{a}{s}$ luego existen $t, t' \in S$ tales que $t \cdot 0 = t' \cdot a$ (y $t \cdot 1 = t' \cdot s$), luego $t' \cdot a = 0$.

$\Leftarrow$) $\frac{a}{s} = \frac{as'}{ss'} = \frac{0}{ss'} = \frac{0}{1} = 0$.

2. $\Rightarrow$) $0 = \frac{a}{s} - \frac{a'}{s'} = \frac{as'-a's}{ss'}$, existe un $t \in S$ de modo que $t\cdot(as' - a's) = 0$, por el punto 1.

$\Leftarrow$) Si $t\cdot(as' - a's) = 0$, entonces $0 = \frac{as'-a's}{ss'} = \frac{a}{s} - \frac{a'}{s'}$, entonces $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$. □

8. Ejercicio: Sea A un anillo y $S \subseteq A$ un sistema multiplicativo. Entonces, $A_S = \{0\} \iff 0 \in S$.

9. Ejercicio: Sea A un anillo íntegro y $S \subseteq A\setminus\{0\}$ un sistema multiplicativo. Entonces, $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ en A_S si y solo si $as' - a's = 0$ (en A).

10. Ejercicio: Prueba que $(\mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}} = \mathbb{Q}[x]$.

Observemos que si $J \subset A_S$ es un ideal de A_S, entonces $I := \{a \in A : \frac{a}{1} \in J\}$ es un ideal de A y $J = I \cdot A_S$. Ahora es fácil probar la siguiente proposición.

11. Proposición: *Si A es un anillo noetheriano, entonces A_S es un anillo noetheriano.*

12. Proposición: *Sea A una k-álgebra de tipo finito y $a \in A$. Entonces, A_a es una k-álgebra de tipo finito.*

Demostración. Escribamos $A = k[\xi_1,\dots,\xi_n]$, entonces $A_a = A[\frac{1}{a}] = k[\xi_1,\dots,\xi_n,\frac{1}{a}]$. □

13. Ejercicio: Sea A un anillo y $a \in A$. Prueba que A_a es isomorfo a $A[x]/(ax-1)$.

Solución: La aplicación $A[x] \to A_a$, $p(x) \mapsto p(\frac{1}{a})$ es un morfismo de k-álgebras epiyectivo. Evidentemente, $ax-1$ está en el núcleo del morfismo, luego tenemos el epimorfismo $A[x]/(ax-1) \to A_a$, $\overline{p(x)} \mapsto p(\frac{1}{a})$. El morfismo $A_a \to A[x]/(ax-1)$, $\frac{b}{a^n} \mapsto \overline{bx^n}$ está bien definido y es el morfismo inverso.

1.4.1. Localización de módulos

Sea S un sistema multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo. Podemos definir en el conjunto $M \times S$ la siguiente relación de equivalencia:

$$(m,s) \sim (m',s') \iff \text{ existen } s_1, s_2 \in S \text{ tales que } (s_1 m, s_1 s) = (s_2 m', s_2 s').$$

Denotaremos $\frac{m}{s}$ a la clase de equivalencia de (m,s).

14. Definición: Sea S un sistema multiplicativo de un anillo A y M un A-módulo, denotaremos por M_S:

$$M_S = \{\frac{m}{s},\ \forall\, m \in M, s \in S\}$$

y diremos que M_S es la localización de M por el sistema multiplicativo S.

Recordemos que que $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ si y solo si existen $s_1, s_2 \in S$ tales que $(s_1 m, s_1 s) = (s_2 m', s_2 s')$. Para definir una aplicación $M_S \to X$, tenemos que asignar a cada $\frac{m}{s} \in M_S$ un elemento $\phi(m,s)$, de modo que $\phi(tm,ts) = \phi(m,s)$, para todo $t \in S$. Igualmente, para definir una aplicación $M_S \times N_S \to X$, tenemos que asignar a cada $(\frac{m}{s}, \frac{n}{s'}) \in M_S \times N_S$ un elemento $\phi(m,s,n,s')$, de modo que $\phi(tm,ts,t'n,t's') = \phi(m,s,n,s')$, para todo $t,t' \in S$.

Con las operaciones (bien definidas)

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} &:= \frac{s'm + sm'}{ss'} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} &:= \frac{am}{ss'} \end{aligned}$$

M_S tiene estructura de A_S-módulo. La aplicación canónica

$$M \to M_S,\ m \mapsto \frac{m}{1}$$

es un morfismo de A-módulos y diremos que es el morfismo de localización.

15. Ejercicio: Prueba que $\frac{m}{s} = 0$ si y solo sí existe un $t \in S$ de modo que $t \cdot m = 0$.

Todo morfismo $f: M \to N$ de A-módulos, induce la aplicación (bien definida)

$$f_S: M_S \to N_S, \ \frac{m}{s} \underset{\text{def}}{\mapsto} \frac{f(m)}{s},$$

que es morfismo de A_S-módulos.

16. Proposición: *Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Sean M y M' dos A-módulos. Entonces,*

$$(M \oplus M')_S = M_S \oplus M'_S$$

Demostración. Los morfismos de A_S-módulos $(M \oplus M')_S \to M_S \oplus M'_S$, $\frac{(m,m')}{s} \mapsto (\frac{m}{s}, \frac{m'}{s})$ y $M_S \oplus M'_S \to (M \oplus M')_S$, $(\frac{m}{s}, \frac{m'}{s'}) \mapsto \frac{(s'm, sm')}{ss'}$ son inversos entre sí. □

17. Ejemplo: Sea A un anillo íntegro y $\Sigma = A_{A\setminus\{0\}}$. Entonces,

$$(A^n)_{A\setminus\{0\}} = A_{A\setminus\{0\}} \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus A_{A\setminus\{0\}} = \Sigma^n.$$

18. Proposición: *Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Sea M un A-módulo y $N \subseteq M$ un submódulo. Entonces, N_S es un submódulo de M_S (es decir, el morfismo $N_S \to M_S$ es inyectivo) y tenemos un isomorfismo natural*

$$M_S/N_S \simeq (M/N)_S.$$

Demostración. El morfismo $N_S \to M_S$ es inyectivo: Dado $\frac{n}{s} \in N_S$, si $\frac{n}{s} = 0$ en M_S, existe un elemento $s' \in S$ de modo que $s' \cdot n = 0$ en M (luego en N), por tanto $\frac{n}{s} = 0$ en N_S.

Consideremos el epimorfismo de paso al cociente $M \to M/N$. Localizando por S tenemos el morfismo $M_S \to (M/N)_S$, $m/s \mapsto \bar{m}/s$ que es claramente epiyectivo. Calculemos el núcleo: si $\bar{m}/s = 0$ entonces existe un elemento $s' \in S$ tal que $s' \cdot \bar{m} = 0$, es decir, $s' \cdot m \in N$, es decir, existe $n \in N$ de modo que $s' \cdot m = n$, luego $m/s = n/ss' \in N_S$. Recíprocamente, dado $n/s \in N_S$, entonces $\bar{n}/s = 0/s = 0$. □

19. Ejercicio: Sea $I \subseteq A$ un ideal y $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Prueba que $I_S = I \cdot A_S$.

20. Proposición: *Dado un ideal primo $\mathfrak{p}_x \subset A$ y un A-módulo M, denotemos por M_x la localización de M por el sistema multiplicativo $A \setminus \mathfrak{p}_x$. Entonces,*

1. *$M = 0$ si y solo si $M_x = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{p}_x \subset A$.*
2. *Un morfismo de módulos $f: M \to N$ es un isomorfismo si y solo si el morfismo inducido $f_x: M_x \to N_x$, $f_x(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$ es isomorfismo para todo ideal maximal $\mathfrak{p}_x \subset A$.*

Demostración. a) $\Leftarrow$) Sea $m \in M$ no nulo y sea $\mathrm{Anul}(m) := \{a \in A : a \cdot m = 0\}$. Sea $\mathfrak{p}_x$ un ideal maximal que contenga a $\mathrm{Anul}(m)$, luego $\mathrm{Anul}(m) \cap (A \backslash \mathfrak{p}_x) = \emptyset$. Por hipótesis $\frac{m}{1} \in M_x = 0$, luego existe $s \in A \backslash \mathfrak{p}_x$ tal que $s \cdot m = 0$, es decir, $\mathrm{Anul}(m) \cap (A \backslash \mathfrak{p}_x)$ y hemos llegado a contradicción. En conclusión, $M = 0$.

b) $\Leftarrow$) Sea $m \in M$ no nulo. Supongamos que $f(m) = 0$. Sea $\mathfrak{p}_x$ un ideal maximal que contenga a $\mathrm{Anul}(m) := \{a \in A : a \cdot m\}$. Como $f_x(\frac{m}{1}) = \frac{f(m)}{1} = 0$, entonces $\frac{m}{1} = 0$ y existe $s \in A \backslash \mathfrak{p}_x$ tal que $0 = s \cdot m$, luego $s \in \mathrm{Anul}(m) \cap (A \backslash \mathfrak{p}_x) = \emptyset$, lo cual es contradictorio. Luego, f es inyectivo y podemos pensarlo como el morfismo de inclusión. Tenemos que $(N/M)_x = N_x/M_x = 0$, para todo ideal maximal $\mathfrak{p}_x$, luego $N/M = 0$ y $M = N$.

□

21. Proposición : *Sea A un anillo y $S \subset A$ un sistema multiplicativo y M un A-módulo. El morfismo $M \otimes_A A_S \to M_S$, $m \otimes \frac{a}{s} \mapsto \frac{am}{s}$ es un isomorfismo de A_S-módulos.*

Demostración. El morfismo inverso es $\frac{m}{s} \mapsto m \otimes \frac{1}{s}$.

□

1.5. Extensiones de cuerpos de tipo finito

1.5.1. Extensiones de cuerpos algebraicas

1. Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos. Se dice que $\dim_k \Sigma$ es el grado de la k-extensión Σ. Si $\dim_k \Sigma < \infty$ se dice que Σ es una k-extensión de cuerpos finita.

Si $\dim_k \Sigma = n$ y Σ' es una Σ extensión de cuerpos tal que $\dim_\Sigma \Sigma' = m$, entonces $\Sigma' = \overset{m}{\oplus} \Sigma = \overset{m}{\oplus} (\overset{n}{\oplus} k) = \overset{nm}{\oplus} k$, luego

$$\boxed{\dim_k \Sigma' = \dim_k \Sigma \cdot \dim_\Sigma \Sigma'}$$

2. Definiciones: Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos. Diremos que $\alpha \in \Sigma$ es k-algebraico si existe un polinomio $p(x) \in k[x]$ no nulo tal que $p(\alpha) = 0$. Diremos que Σ es una k-extensión algebraica si todo elemento de Σ es k-algebraico. Diremos que α es k-trascendente si no es k-algebraico.

3. Ejemplo: Consideremos la extensión de cuerpos $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Entonces, $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ es $\mathbb{Q}$-algebraico y $\pi \in \mathbb{C}$ es $\mathbb{Q}$-trascendente.

4. Proposición: *Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos. Entonces, $\alpha \in \Sigma$ es k-algebraico si y solo si* $\dim_k k(\alpha) < \infty$.

Demostración. $\Rightarrow$) Consideremos morfismo de anillos $\pi\colon k[x] \to k(\alpha)$, $\pi(p(x)) := p(\alpha)$. Tenemos que $\operatorname{Ker}\pi = (q(x))$ con $q(x)$ no nulo. Ademas, $q(x)$ es irreducible ya que $k[x]/(q(x))$ es íntegro ya que $k[x]/(q(x))$ se inyecta en $k(\alpha)$ que es íntegro. Por tanto, $k[x]/(q(x))$ es un cuerpo, que contiene a $\bar{x} = \alpha$, luego ha de coincidir con $k(\alpha)$. Por último, $\dim_k k(\alpha) = \dim_k k[x]/(q(x)) = \operatorname{gr}(q(x)) < \infty$.

$\Leftarrow$) Sea $\dim_k k(\alpha) = n < \infty$. Los $n+1$ elementos $1, \alpha, \dots, \alpha^n$ son k-linealmente independientes, luego existen $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in k$ (no todos nulos) tales $\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot \alpha + \cdots + \lambda_n \alpha^n = 0$. Por tanto, α es raíz del polinomio no nulo $\lambda_0 + \lambda_1 \cdot x + \cdots + \lambda_n x^n$.

□

5. Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma$, se define $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ como el mínimo subcuerpo de Σ que contiene a k, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y puede comprobarse que

$$k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left\{ \begin{array}{r} \dfrac{p(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \in \Sigma;\ \forall\, p(x_1, \dots, x_n), q(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] \\ \text{con } q(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0. \end{array} \right\}$$

Si $\Sigma = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se dice que Σ es una k-extensión de cuerpos de tipo finito.

6. Ejemplo: Sea $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ una k-álgebra de tipo finito íntegra. Entonces $A_{A-\{0\}} = k(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ y es una k-extensión de cuerpos de tipo finito.

7. Proposición : *Sea $k \hookrightarrow k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ una extensión de cuerpos de tipo finito. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *$k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ es una k-extensión algebraica.*
2. *$\xi_1, \dots, \xi_n$ son k-algebraicos.*
3. *$k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ es una k-extensión de cuerpos finita.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Es obvio.

2. $\Rightarrow$ 3. Consideremos la cadena de inclusiones

$$k \hookrightarrow k(\xi_1) \hookrightarrow k(\xi_1, \xi_2) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow k(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \hookrightarrow k(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Entonces,

$$\dim_k k(\xi_1, \dots, \xi_n) = \dim_k k(\xi_1) \cdot \dim_{k(\xi_1)} k(\xi_1, \xi_2) \cdots \dim_{k(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})} k(\xi_1, \dots, \xi_n) < \infty.$$

3. $\Rightarrow$ 1. Dado $\alpha \in k(\xi_1, \dots, \xi_n)$, tenemos que $\dim_k k(\alpha) \le \dim_k k(\xi_1, \dots, \xi_n) < \infty$, luego α es k-algebraico y $k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ es una k-extensión de cuerpos algebraica.

□

8. Corolario: *Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos. El conjunto de todos los elementos k-algebraicos de Σ es una k-subextensión de cuerpos de Σ.*

9. Proposición: *La composición de extensiones de cuerpos algebraicas es algebraica.*

Demostración. Consideremos dos extensiones algebraicas $k \hookrightarrow K$ y $K \hookrightarrow \Sigma$. Dado $\alpha \in \Sigma$, existe un polinomio no nulo $p(x) = a_0x^n + \cdots + a_n \in K[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Las extensiones de cuerpos $k \hookrightarrow k(a_0, \ldots, a_n)$ y $k(a_0, \ldots, a_n) \hookrightarrow k(a_0, \ldots, a_n, \alpha)$ son finitas, luego

$$\dim_k k(a_0, \ldots, a_n, \alpha) = \dim_k k(a_0, \ldots, a_n) \cdot \dim_{k(a_0,\ldots,a_n)} k(a_0, \ldots, a_n, \alpha) < \infty.$$

Por tanto, $k(a_0, \ldots, a_n, \alpha)$ es una k-extensión de cuerpos algebraica, α es k-algebraico y Σ es una k-extensión de cuerpos algebraica. □

10. Definición: Se dice que un cuerpo K es algebraicamente cerrado si todo polinomio con coeficientes en K descompone en factores simples, es decir, si todas las raíces del polinomio están en K. Se dice que una k-extensión algebraica de cuerpos K es el cierre algebraico de k, si K es un cuerpo algebraicamente cerrado.

11. Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado y $K \hookrightarrow \Sigma$ es una extensión de cuerpos algebraica, entonces $K = \Sigma$, ya que todo $\alpha \in \Sigma$ es raíz de un polinomio $p(x)$ con coeficientes en K y todas las raíces de $p(x)$ están en K.

12. Si $k \hookrightarrow K$ y $k \hookrightarrow K'$ son el cierre algebraico de k, sea $\mathfrak{m} \subset K \otimes_k K'$ un ideal maximal y $\Sigma = (K \otimes_k K')/\mathfrak{m}$. Entonces, $K \hookrightarrow \Sigma$ es una extensión algebraica, luego $K \simeq \Sigma$, e igualmente $K' \simeq \Sigma$. En conclusión, existe un isomorfismo de k-álgebras $K \simeq K'$.

13. El teorema fundamental del Álgebra afirma que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Dado un cuerpo k, puede probarse que el cierre algebraico de k es la k-extensión de cuerpos $k[x_p]_{p\in P}/(p(x_p))_{p\in P} \Big/ \mathfrak{m}$, donde P es el conjunto de polinomios mónicos irreducibles y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $k[x_p]_{p\in P}$.

14. Ejercicio: Prueba que $\mathbb{C}$ es el cierre algebraico de $\mathbb{R}$.

1.5.2. Grado de trascendencia de una k-extensión de cuerpos de tipo finito

15. Definición: Sea Σ una k-extensión de cuerpos. Diremos que $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Sigma$ son k-algebraicamente independientes cuando cualquier relación k-algebraica

$$\sum_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1 \ldots i_n} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n} = 0, \text{ con coeficientes } a_{i_1 \ldots i_n} \in k$$

implica que todos los coeficientes $a_{i_1\dots i_n}$ son nulos.

Los elementos $\xi_1,\dots,\xi_n \in \Sigma$ son k-algebraicamente independientes si y solo si el morfismo de k-álgebras

$$\begin{aligned} k[x_1,\dots,x_n] &\to \Sigma \\ p(x_1,\dots,x_n) &\mapsto p(\xi_1,\dots,\xi_n) \end{aligned}$$

es inyectivo, y en este caso el morfismo $k(x_1,\dots,x_n) \to k(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\frac{p(x_1,\dots,x_n)}{q(x_1,\dots,x_n)} \mapsto \frac{p(\xi_1,\dots,\xi_n)}{q(\xi_1,\dots,\xi_n)}$ es un isomorfismo.

16. Ejercicio: Sea Σ una k-extensión de cuerpos y $\xi_1,\dots,\xi_n \in \Sigma$ k-algebraicamente independientes. Dado $\alpha \in \Sigma$ se cumple que $\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha$ son k-algebraicamente independientes si y solo si α es $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-trascendente.

17. Definición: Sea $k \to \Sigma$ una extensión de cuerpos. Diremos que $\xi_1,\dots,\xi_n \in \Sigma$ forman una <u>base de trascendencia</u> de Σ sobre k, si son k-algebraicamente independientes y Σ es una $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-extensión algebraica.

18. Proposición: *Sea $k \to \Sigma$ una extensión de cuerpo, $\xi_1,\dots,\xi_n \in \Sigma$ y $\eta_1,\dots,\eta_m \in \Sigma$ dos bases de k-trascendencia de Σ. Entonces, $n = m$.*

Demostración. Probemos que Σ es una extensión algebraica de $k(\xi_1,\dots,\xi_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)$, dado $0 \le i \le n$, reordenando si es preciso los elementos η_j. Procedemos por inducción sobre i. Si $i = 0$ sabemos que $k(\eta_1,\dots,\eta_m) \hookrightarrow \Sigma$ es algebraica. Si $i \ge 1$, por hipótesis de inducción ξ_i es $k(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\eta_i,\dots,\eta_m)$-algebraico. Existe un polinomio no nulo de grado mínimo $p(x_1,\dots,x_i,y_i,\dots,y_m) \in k[x_1,\dots,x_i,y_i,\dots,y_m]$ tal que $p(\xi_1,\dots,\xi_i,\eta_i,\dots,\eta_m) = 0$. Como $\xi_1,\dots,\xi_i$ son algebraicamente independientes, alguna de las variables y_j (podemos suponer reordenando que $j = i$) aparece en el polinomio antes mencionado y $p(\xi_1,\dots,\xi_i,x,\eta_{i+1},\dots,\eta_m) \ne 0$. Por tanto, η_i es algebraico sobre $k(\xi_1,\dots,\xi_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)$ y se tienen las extensiones algebraicas

$$k(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m) \hookrightarrow k(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_i,\eta_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m) \hookrightarrow \Sigma$$

luego Σ es algebraico sobre $k(\xi_1,\dots,\xi_i,\eta_{i+1},\dots,\eta_m)$.

Ahora, si m fuera menor estricto que n, tendríamos que Σ es algebraico sobre $k(\xi_1,\dots,\xi_m)$, contra la hipótesis de que $\xi_1,\dots,\xi_m,\xi_{m+1}$ son k-algebraicamente independientes. Igualmente obtenemos que n no puede ser menor estricto m. □

19. Teorema: *Sea $k \hookrightarrow \Sigma = k(\xi_1,\dots,\xi_r)$ una extensión de cuerpos de tipo finito. Existen bases de trascendencia de Σ sobre k.*

Demostración. Sea n el número máximo de los elementos $\xi_1,\dots,\xi_n$ k-algebraicamente independientes. Reordenandolos, si fuera preciso, podemos suponer que $\xi_1,\dots,\xi_n$ son k-algebraicamente independientes y que $\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_i$ no son k-algebraicamente independientes para todo $i>n$. Por tanto, existe un polinomio no nulo $p(x_1,\dots,x_n,x_i)\in k[x_1,\dots,x_n,x_i]$ tal que $p(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_i)=0$. Como $\xi_1,\dots,\xi_n$ son algebraicamente independientes, la variable x_i ha de aparecer en el polinomio $p(x_1,\dots,x_n,x_i)$ y ξ_i es raíz de $p(\xi_1,\dots,\xi_n,x)\in k(\xi_1,\dots,\xi_n)[x]$. Por tanto, ξ_i es $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-algebraico, para todo $i>n$. Por 1.5.7, Σ es una extensión algebraica de $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$, luego $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ es una base de trascendencia de Σ sobre k.

□

20. Definición: El número de elementos de una base de trascendencia de una extensión de cuerpos $k\hookrightarrow\Sigma$ se dice que es el grado de trascendencia de Σ sobre k y se denota $\operatorname{gr}\operatorname{tr}_k\Sigma$.

21. Ejemplo: Sea k un cuerpo. El cuerpo de fracciones polinómicas en n variables $k(x_1,\dots,x_n)$ tiene grado de trascendencia n, porque las funciones $x_1,\dots,x_n$ forman claramente una base de trascendencia sobre k.

22. Ejemplo: Sea $p(x_1,\dots,x_n)$ un polinomio irreducible no constante con coeficientes en un cuerpo k. Sea $k(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ el cuerpo de fracciones de $k[x_1,\dots,x_n]/(p(x_1,\dots,x_n))$, que se denomina cuerpo de funciones racionales de la hipersuperficie definida por la ecuación $p(x_1,\dots,x_n)=0$. Se cumple que $k(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ tiene grado de trascendencia $n-1$ sobre k. En efecto, reordenando las variables, podemos suponer que el grado de $p(x_1,\dots,x_n)$ en x_n es ≥ 1; es fácil ver entonces que $\{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{n-1}\}$ es una base de trascendencia.

1.6. Cuestionario

1. ¿Es $\mathbb{Q}$ un $\mathbb{Z}$-módulo noetheriano?
2. ¿Es $\mathbb{Q}[x]$ un $\mathbb{Z}$-módulo noetheriano?¿Es $\mathbb{Q}[x]$ un anillo noetheriano?
3. ¿Es $\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$ un anillo noetheriano?
4. Sea $A\to B$ un morfismo de anillos. Si A es un anillo noetheriano y B, que es de modo natural un A módulo, resulta que es un A-módulo finito generado ¿es B un anillo noetheriano?
5. ¿Es el cociente de un anillo noetheriano por un ideal un anillo noetheriano?

6. Sea $M = \langle m_i \rangle_{i \in I}$ un A-módulo noetheriano. Prueba que existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que $M = \langle m_j \rangle_{j \in J}$.

7. Sea Y un conjunto y $p_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, $\forall\, i \in Y$, un sistema de ecuaciones k-algebraico en n variables. Prueba que salvo un número finito de las ecuaciones todas las demás son redundantes.

8. Sea I un ideal de un anillo A y sea S un sistema multiplicativo de A. Prueba que I_S es un ideal del anillo de fracciones A_S.

9. ¿Es el cociente de una k-álgebra de tipo finito por un ideal una k-álgebra de tipo finito?

10. ¿Toda extensión finita de cuerpos es una extensión de tipo finito?¿Toda extensión de cuerpos de tipo finito es una extensión de cuerpos finita?

11. Da un ejemplo de extensión de cuerpos que no sea de tipo finito.

12. ¿Cuál es el grado de trascendencia de una extensión de cuerpos algebraica?

1.7. Biografía de Emmy Noether

NOETHER BIOGRAPHY

Emmy Noether's father, Max Noether, was a distinguished mathematician and a professor at Erlangen but he came from a family of wholesale hardware dealers. Her mother was Ida Amalia Kaufmann (1852-1915), from a wealthy Cologne family. Both Emmy's parents were of Jewish origin and the reader may be surprised at this since Noether is not a Jewish name. We should explain, therefore, how this came about and, at the same time, give some information on Emmy Noether's ancestors. Max Noether's paternal grandfather was Elias Samuel, the founder of a business in Bruchsal. Elias had nine children, one being a son Hertz Samuel. In 1809 the State of Baden made the Tolerance Edict which required Jews to adopt Germanic names. Elias Samuel chose the surname Nöther, becoming Elias Nöther, but also changed the given names of his children, giving Hertz the name Hermann. When he was eighteen years old, Hermann Nöther left his home town of Bruchsal and studied theology at the University of Mannheim. Then in 1837, together with his brother Joseph, he set up a wholesale business in iron hardware. Hermann Nöther and his wife Amalia had five children, the third of which was Max. The two children older than Max were Sarah (born 6 November 1839) and Emil. It is worth noting at this point that the Nöther iron-wholesaling business remained a family firm for exactly one hundred years, until the Nazis removed Jewish families from their own businesses in 1937. One other comment is necessary at this point. Although the family name was chosen to be Nöther by Max's grandfather, Max and his family always used the form Noether (except on Max's wedding certificate where the form Nöther appears).

Emmy was the eldest of her parents' four children, the three younger children being boys. Alfred Noether (1883-1918) studied chemistry and was awarded a doctorate from Erlangen in 1909. However, his career was short since he died nine years later. Fritz Noether (1884-1941) became an applied mathematician. However, as a Jew he was unable to work and left Germany in 1937. He was appointed as a professor at the University of Tomsk in the Soviet Union but accused of anti-Soviet acts he was sentenced to death and shot. He was found not guilty by the Supreme Court of the Soviet Union in 1988. Gustav Robert Noether (1889-1928) had bad health all his life. He was mentally handicapped, spent most of his life in an institution and died young. The first school that Emmy attended was on Fahrstrasse. Auguste Dick wrote:

Emmy did not appear exceptional as a child. Playing among her peers in the schoolyard on Fahrstrasse she probably was not especially noticeable - a near-sighted, plain-looking little girl, though not without charm. Her teachers and classmates knew Emmy as a clever, friendly, and likeable child. She had a slight lisp and was one of the few who attended classes in the Jewish religion.

After elementary school, Emmy Noether attended the Städtische Höhere Töchter Schule on Friedrichstrasse in Erlangen from 1889 until 1897. She had been born in the family home at Hauptstrasse 23 and lived there until, in the middle of her time at high school, in 1892, the family moved to a larger apartment at Nürnberger Strasse 32. At the high school she studied German, English, French, arithmetic and was given piano lessons. She loved dancing and looked forward to parties with children of her father's university colleagues. At this stage her aim was to become a language teacher and after further study of English and French she took the examinations of the State of Bavaria and, in 1900, became a certificated teacher of English and French in Bavarian girls schools. She was awarded the grade of "very good" in the examinations, the weakest part being her classroom teaching.

However Noether never became a language teacher. Instead she decided to take the difficult route for a woman of that time and study mathematics at university. Women were allowed to study at German universities unofficially and each professor had to give permission for his course. Noether obtained permission to sit in on courses at the University of Erlangen during 1900 to 1902. She was one of only two female students sitting in on courses at Erlangen and, in addition to mathematics courses, she continued her interest in languages being taught by the professor of Roman Studies and by an historian. At the same time she was preparing to take the examinations which allowed a student to enter any university. Having taken and passed this matriculation examination in Nürnberg on 14 July 1903, she went to the University of Göttingen. During 1903-04 she attended lectures by Karl Schwarzschild, Otto Blumenthal, David Hilbert, Felix Klein and Hermann Minkowski. Again she was not allowed to be a properly matriculated student but was only allowed to sit in on lectures. After one semester at Göttingen she returned to Erlangen.

At this point the rules were changed and women students were allowed to matriculate on an equal basis to the men. On 24 October 1904 Noether matriculated at Erlangen where she now studied only mathematics. In 1907 she was granted a doctorate after working under Paul Gordan. The oral examination took place on Friday 13 December and she was awarded the degree 'summa cum laude'. Hilbert's basis theorem of 1888 had given an existence result for finiteness of invariants in n variables. Gordan, however, took a constructive approach and looked at constructive methods to arrive at the same results. Noether's doctoral thesis followed this constructive approach of Gordan and listed systems of 331 covariant forms. Colin McLarty wrote that:

... her dissertation of 1908 with Gordan pursued a huge calculation that had stumped Gordan forty years before and which Noether could not complete either. So far as I know no one has ever completed it or even checked it as far as she went. It was old-fashioned at the time, a witness to the pleasant isolation of Erlangen, and made no use of Gordan's own work building on Hilbert's ideas.

Having completed her doctorate the normal progression to an academic post would have been the habilitation. However this route was not open to women so Noether remained at Erlangen, helping her father who, particularly because of his own disabilities, was grateful for his daughter's help. Noether also worked on her own research, in particular she was influenced by Ernst Fischer who had succeeded Gordan to the chair of mathematics when he retired in 1911. Noether wrote about Fischer's influence:

Above all I am indebted to Mr E Fischer from whom I received the decisive impulse to study abstract algebra from an arithmetical viewpoint, and this remained the governing idea for all my later work.

Fischer's influence took Noether towards Hilbert's abstract approach to the subject and away from the constructive approach of Gordan. Now this was very important to her development as a mathematician for Gordan, despite his remarkable achievements, had his limitations. Noether's father, Max Noether, said of Gordan:

Gordan was never able to do justice to the development of fundamental concepts; even in his lectures he completely avoided all basic definitions of a conceptual nature, even that of the limit.

Noether's reputation grew quickly as her publications appeared. In 1908 she was elected to the Circolo Matematico di Palermo, then in 1909 she was invited to become a member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung and in the same year she was invited to address the annual meeting of the Society in Salzburg. She gave the lecture Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln (On the theory of invariants for the forms of n variables). In 1913 she lectured in Vienna, again to a meeting of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Her lecture on this occasion was Über rationale Funktionenkörper (On fields of rational functions). While in Vienna she visited Franz Mertens and discussed mathematics with him. One of Merten's grandsons remembered Noether's visit:

... although a woman, [she] seemed to me like a Catholic chaplain from a rural parish - dressed in a black, almost ankle-length and rather nondescript, coat, a man's hat on her short hair ... and with a shoulder bag carried crosswise like those of the railway conductors of the imperial period, she was rather an odd figure.

During these years in Erlangen she advised two doctoral students who were both officially supervised by her father. These were Hans Falckenberg (doctorate 1911) and Fritz Seidelmann (doctorate 1916).

In 1915 Hilbert and Klein invited Noether to return to Göttingen. The reason for this was that Hilbert was working on physics, in particular on ideas on the theory of relativity close to those of Albert Einstein. He decided that he needed the help of an expert on invariant theory and, after discussions with Klein, they issued the invitation. Van der Waerden wrote:

She came and at once solved two important problems. First: How can one obtain all differential covariants of any vector or tensor field in a Riemannian space? ... The second problem Emmy investigated was a problem from special relativity. She proved: To every infinitesimal transformation of the Lorentz group there corresponds a Conservation Theorem.

This result in theoretical physics is sometimes referred to as Noether's Theorem, and proves a relationship between symmetries in physics and conservation principles. This basic result in the theory of relativity was praised by Einstein in a letter to Hilbert when he referred to Noether's penetrating mathematical thinking. Of course, she arrived in Göttingen during World War I. This was a time of extreme difficulty and she lived in poverty during these years and politically she became a radical socialist. However, they were extraordinarily rich years for her mathematically. Hermann Weyl, in wrote about Noether's political views:

During the wild times after the Revolution of 1918, she did not keep aloof from the political excitement, she sided more or less with the Social Democrats; without being actually in party life she participated intensely in the discussion of the political and social problems of the day. ... In later years Emmy Noether took no part in matters political. She always remained, however, a convinced pacifist, a stand which she held *very important and serious.*

Hilbert and Klein persuaded her to remain at Göttingen while they fought a battle to have her officially on the Faculty. In a long battle with the university authorities to allow Noether to obtain her habilitation there were many setbacks and it was not until 1919 that permission was granted and she was given the position of Privatdozent. During this time Hilbert had allowed Noether to lecture by advertising her courses under his own name. For example a course given in the winter semester of 1916-17 appears in the catalogue as:

Mathematical Physics Seminar: Professor Hilbert, with the assistance of Dr E Noether, Mondays from 4-6, no tuition.

At Göttingen, after 1919, Noether moved away from invariant theory to work on ideal theory, producing an abstract theory which helped develop ring theory into a major mathematical topic. Idealtheorie in Ringbereichen (1921) was of fundamental importance in the development of modern algebra. In this paper she gave the decomposition of ideals into intersections of primary ideals in any commutative ring with ascending chain condition. Emanuel Lasker (who became the world chess champion) had already proved this result for a polynomial ring over a field. Noether published Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlkorpern in 1924. In this paper she gave five conditions on a ring which allowed her to deduce that in such commutative rings every ideal is the unique product of prime ideals.

In the same year of 1924 B.L. van der Waerden came to Göttingen and spent a year studying with Noether. After returning to Amsterdam van der Waerden wrote his book Moderne Algebra in two volumes. The major part of the second volume consists of Noether's work. From 1927 onwards Noether collaborated with Helmut Hasse and Richard Brauer in work on non-commutative algebras. They wrote a beautiful paper joint paper Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren which was published in 1932. In addition to teaching and research, Noether helped edit Mathematische Annalen. Much of her work appears in papers written by colleagues and students, rather than under her own name.

Further recognition of her outstanding mathematical contributions came with invitations to address the International Congress of Mathematicians at Bologna in September 1928 and again at Zurich in September 1932. Her address to the 1932 Congress was entitled Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie. In 1932 she also received, jointly with Emil Artin, the Alfred Ackermann-Teubner Memorial Prize for the Advancement of Mathematical Knowledge. In April 1933 her mathematical achievements counted for nothing when the Nazis caused her dismissal from the University of Göttingen because she was Jewish. She received no pension or any other form of compensation but, nevertheless, she considered herself more fortunate than others. She wrote to Helmut Hasse on 10

May 1933:

Many thanks for your dear compassionate letter! I must say, though, that this thing is much less terrible for me than it is for many others. At least I have a small inheritance (I was never entitled to a pension anyway) which allows me to sit back for a while and see.

Weyl spoke about Noether's reaction to the dire events that were taking place around her in the address he gave at her funeral:

You did not believe in evil, indeed it never occurred to you that it could play a role in the affairs of man. This was never brought home to me more clearly than in the last summer we spent together in Göttingen, the stormy summer of 1933. In the midst of the terrible struggle, destruction and upheaval that was going on around us in all factions, in a sea of hate and violence, of fear and desperation and dejection - you went your own way, pondering the challenges of mathematics with the same industriousness as before. When you were not allowed to use the institute's lecture halls you gathered your students in your own home. Even those in their brown shirts were welcome; never for a second did you doubt their integrity. Without regard for your own fate, openhearted and without fear, always conciliatory, you went your own way. Many of us believed that an enmity had been unleashed in which there could be no pardon; but you remained untouched by it all.

She accepted a one-year visiting professorship at Bryn Mawr College in the USA and in October 1933 sailed to the United States on the ship Bremen to take up the appointment. She had hoped to delay accepting the invitation since she would have liked to have gone to Oxford in England but it soon became clear that she had to leave quickly. At Bryn Mawr she was made very welcome by Anna Johnson Pell Wheeler who was head of mathematics. Noether ran a seminar during the winter semester of 1933-34 for three students and one member of staff. They worked through the first volume of van der Waerden's Moderne Algebra. In February 1934 she began giving weekly lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton. In a letter to Hasse, dated 6 March 1934, she wrote:

I have started with representation modules, groups with operators ...; Princeton will receive its first algebraic treatment this winter, and a thorough one at that. My audience consists mostly of research fellows, besides Albert and Vandiver, but I'm beginning to realise that I must be careful; after all, they are essentially used to explicit computation and I have already driven a few of them away with my approach.

Noether returned to Germany in the summer of 1934. There see saw her brother Fritz for what would be the last time, and visited Artin in Hamburg before going on to Göttingen. In 1980 Artin's wife recalled Noether's visit:

Now the one thing I remember most vividly is the trip on the Hamburg Untergrund, which is the subway in Hamburg. We picked up Emmy at the Institute, and she *and Artin immediately started talking mathematics. At that time it was Idealtheorie, and they started talking about Ideal, Führer, and Gruppe, and Untergruppe, and the whole car suddenly started pricking up their ears. [Each of the German nouns has both mathematical and political meanings.] And I was frightened to death - I thought, my goodness, next thing's going to happen, somebody's going to arrest us. Of course, that was in 1934, and all. But Emmy was completely oblivious, and she talked very loudly and very excitedly, and got louder and louder, and all the time the "Führer" came out, and the "Ideal". She was very full of life, and she constantly talked very fast and very loud.*

She returned to the United States where her visiting professorship at Bryn Mawr had been extended for a further year. She continued her weekly lectures at Princeton where Richard Brauer had now arrived. After her lectures she enjoyed talking about mathematics with Weyl, Veblen and Brauer.

Noether's death was sudden and unexpected. In April 1935 doctors discovered that she had a tumour. Two days later they operated, finding further tumours which they believed to be benign and did not remove. The operation seemed a success and for three days her condition improved. However, on the fourth day she suddenly collapsed and developed a very high temperature. She died later that day.

Weyl in his Memorial Address said:

Her significance for algebra cannot be read entirely from her own papers, she had great stimulating power and many of her suggestions took shape only in the works of her pupils and co-workers.

Van der Waerden wrote:

For Emmy Noether, relationships among numbers, functions, and operations became transparent, amenable to generalisation, and productive only after they have been dissociated from any particular objects and have been reduced to general conceptual relationships.

Although she received little recognition in her lifetime considering the remarkable advances that she made, she has been honoured in many ways following her death. A crater on the moon is named for her. A street in her hometown is named for her and the school she attended is now named the Emmy Noether School. Various organisations name scholarships and lectures after Emmy Noether.

Article by: J J O'Connor and E F Robertson (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/)

1.8. Problemas

1. Sea M un A-módulo noetheriano. Prueba que todo endomorfismo de A-módulos epiyectivo $f : M \to M$ es un isomorfismo. (Indicación: Considera los submódulos $\operatorname{Ker} f^n$.)

2. Define una aplicación k-lineal epiyectiva $\overset{\mathbb{N}}{\oplus}\mathbb{Q} \to \overset{\mathbb{N}}{\oplus}\mathbb{Q}$ que no sea isomorfismo lineal.

3. Sean N y N_0 dos submódulos de un A-módulo M. Prueba que $N + N_0$ es un A-módulo noetheriano si y solo si N y N_0 son A-módulos noetherianos.

4. Sean N y N_0 dos submódulos de un A-módulo M tales que $N_0 \cap N = 0$. Prueba que M es un A-módulo noetheriano si y sólo si M/N y M/N_0 son A-módulos noetherianos.

5. Sea M un A-módulo noetheriano y N un A-módulo finito generado. Prueba que $\operatorname{Hom}_A(N, M)$ es un A-módulo noetheriano.

6. Sea M un A-módulo noetheriano e $I := \{a \in A : a \cdot m = 0, \forall m \in M\}$. Prueba que A/I es un anillo noetheriano.

7. Sea A un anillo noetheriano. Prueba que $\operatorname{rad}(A)^n = 0$ para algún exponente n. Si I es un ideal de A, prueba que $\operatorname{rad}(I)^n = I$ para algún exponente n.

8. ¿Es $\overset{\mathbb{N}}{\prod}\mathbb{Z}$ un anillo noetheriano?

9. Sea I el ideal de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ formado por las funciones infinitamente diferenciables de $\mathbb{R}^n$ que se anulan en algún entorno del punto $x = 0$. Demuestra que el ideal I no es finito generado y concluye que el anillo $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ no es noetheriano cuando $n \geq 1$.

10. Propiedad universal de la localización: Sea S un sistema multiplicativo del anillo A, $i : A \to A_S$ el morfismo de localización . Dado un morfismo de anillos $f : A \to B$, prueba que existe un morfismo (único) $g : A_S \to B$ tal que $f = g \circ i$ si y solo si $f(s)$ es invertible para todo $s \in S$.

11. Sean S y S' dos sistemas multiplicativos de un anillo A y denotemos $S \cdot S' = \{ss', \forall s \in S, \forall s' \in S'\}$. Prueba que $A_{S \cdot S'}$ es un anillo isomorfo a $(A_S)_{S'}$.

12. Sea $I \subset A$ un ideal, $S \subset A$ un sistema multiplicativo y M un A-módulo. Prueba que $(M/IM)_S \simeq M_S/I \cdot M_S$.

13. Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos y $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Sigma$ elementos k-algebraicamente independientes. Sea $\alpha \in \Sigma$. Prueba que $\xi_1, \dots, \xi_n, \alpha \in \Sigma$ son k-algebraicamente independientes si y solo si α es $k(\xi_1, \dots, \xi_n)$-trascendente.

14. Sean $k \hookrightarrow K$ y $K \hookrightarrow \Sigma$ dos extensiones de tipo finito. Prueba que

$$\operatorname{gr}\operatorname{tr}_k \Sigma = \operatorname{gr}\operatorname{tr}_k K + \operatorname{gr}\operatorname{tr}_K \Sigma.$$

15. Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos de tipo finito. Prueba que todo conjunto de elementos k-algebraicamente independientes de Σ forma parte de una base de trascendencia.

Capítulo 2

Espectro primo de un anillo

2.1. Introducción

Dado un sistema de ecuaciones k-algebraicas

$$\begin{array}{rcl} p_1(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \\ \cdots & = & 0 \\ p_r(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \end{array}$$

consideremos el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

En este capítulo trataremos de justificar que $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ es el anillo de funciones algebraicas del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones. Denotemos por X el conjunto de los ideales primos de $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1(x_1,\dots,x_n),\dots,p_n(x_1,\dots,x_n))$. Estudiaremos en qué sentido X puede identificarse con el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones anterior.

2.2. $\mathbf{Hom}_{A-alg}(A[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),B)$

1. Notación: Sean B y C dos A-álgebras. $\mathrm{Hom}_{A-alg}(B,C)$ denotará el conjunto de los morfismos de A-álgebras de B en C.

2. Proposición: *Las aplicaciones*

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{Hom}_{A-alg}(A[x_1,\dots,x_r],B) & = & B^r \\ & \phi & \longmapsto & (\phi(x_1),\dots,\phi(x_r)) \\ \phi_\alpha(p(x)) := p(\alpha) & \phi_\alpha & \longleftarrow & \alpha \end{array}$$

son inversas entre si.

3. Proposición: *Sea B una A-álgebra. Las asignaciones*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{A-alg}(A[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),B) & \longleftrightarrow & \{(b_1,\dots,b_n)\in B^n : \left\{\begin{array}{c} p_1(b_1,\dots,b_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(b_1,\dots,b_n)=0 \end{array}\right. \} \\ \phi & \longmapsto & (\phi(\bar{x}_1),\dots,\phi(\bar{x}_n)) \\ \tilde{\phi}(\overline{q(x_1,\dots,x_n)}):=q(b_1,\dots,b_n), \quad \tilde{\phi} & \longleftarrow & (b_1,\dots,b_n) \end{array}$$

son inversas entre sí.

4. Todo morfismo de k-álgebras

$$f\colon k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\to k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s),\ f(\bar{x}_i)=\overline{f_i(y_1,\dots,y_m)}$$

induce la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s),k) & \xrightarrow{f^*} & \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),k) \\ g & \mapsto & g\circ f \end{array}$$

Si $\beta_i=g(\bar{y}_i)$, entonces $(g\circ f)(\bar{x}_i)=g(\overline{f_i(y_1,\dots,y_m)})=f_i(\beta_1,\dots,\beta_m)$ y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s),k) & \xrightarrow{f^*} & \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),k) \\ \| & & \| \\ \left\{\text{Sol.} \begin{array}{c} q_1(y_1,\dots,y_m)=0 \\ \cdots \\ q_s(y_1,\dots,y_m)=0 \end{array}\right\} & \longrightarrow & \left\{\text{Sol.} \begin{array}{c} p_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\} \\ & & \\ (\beta_1,\dots,\beta_m) & \longmapsto & (f_1(\beta_1,\dots,\beta_m),\dots,f_n(\beta_1,\dots,\beta_m)) \end{array}$$

2.3. Funtor de soluciones de un sistema de ecuaciones

2.3.1. Categorías

Dar una categoría $\mathscr{C}$ es dar

1. Una familia de objetos.

2. Unos conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$, para cada par de objetos M,N de $\mathscr{C}$. Cada elemento $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ diremos que es un "morfismo de M en N" y lo denotaremos también $f: M \to N$.

3. Una aplicación

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,P) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,P), \ \ (f,g) \mapsto f \circ g$$

para cada terna M,N,P de objetos de $\mathscr{C}$. Satisfaciéndose

   a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

   b) Para cada objeto M de $\mathscr{C}$, existe un morfismo $\mathrm{Id}_M : M \to M$ de modo que $f \circ \mathrm{Id}_M = f$ e $\mathrm{Id}_M \circ g = g$ para todo morfismo $f : M \to N$ y $g : N \to M$.

Un morfismo $f: M \to N$ se dice que es un isomorfismo si existe $g: N \to M$ de modo que $f \circ g = \mathrm{Id}_N$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_M$.

1. Ejemplos: La categoría $\mathscr{C}_{Conj}$ de conjuntos, es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos entre los objetos son las aplicaciones de conjuntos.

La categoría de espacios topológicos es la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y los morfismos entre los objetos son los homeomorfismos.

La categoría de las variedades diferenciales es la categoría cuyos objetos son las variedades diferenciales y los morfismos los morfismos de variedades diferenciales.

La categoría de grupos es la categoría cuyos objetos son los grupos y los morfismos los morfismos de grupos.

La categoría de los k-espacios vectoriales es la categoría cuyos objetos son los k-espacios vectoriales y los morfismos las aplicaciones k-lineales.

La categoría de A-módulos, es la categoría cuyos objetos son los A-módulos y los morfismos entre los objetos son los morfismos de módulos.

La categoría de los anillos es la categoría cuyos objetos son los anillos y los morfismos son los morfismos de anillos.

Categoría de las k-álgebras: Sea k un cuerpo. La categoría de k-álgebras $\mathscr{C}_{k-alg}$ es la categoría cuyos objetos son las k-álgebras y los morfismos los morfismos de k-álgebras.

2.3.2. Funtores representables

2. Definición: Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos categorías. Dar un funtor covariante $F: \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}'$ es asignar a cada objeto M de $\mathscr{C}$ un objeto $F(M)$ de $\mathscr{C}'$, y cada morfismo $f: M \to N$ de

$\mathscr{C}$ un morfismo $F(f)\colon F(M) \to F(N)$ de $\mathscr{C}'$, de modo que se verifique que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ y $F(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{F(M)}$.

Análogamente se definen los funtores contravariantes $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}'$, que asignan a cada objeto M de $\mathscr{C}$ un objeto $F(M)$ de $\mathscr{C}'$, y a cada morfismo $f : M \to N$ de $\mathscr{C}$ un morfismo $F(f)\colon F(N) \to F(M)$ de $\mathscr{C}'$, de modo que verifica $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ y $F(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{F(M)}$.

3. Ejemplo: Sea $\mathscr{C}_{k-vect.}$ la categoría de k-espacios vectoriales. Podemos definir el siguiente funtor contravariante

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{k-vect.} &\rightsquigarrow \mathscr{C}_{k-vect} \\ E &\rightsquigarrow E^* \\ f &\rightsquigarrow f^* \end{aligned}$$

4. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y N un objeto de $\mathscr{C}$. Un morfismo $f : M \to M'$ induce la aplicación $f_* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M')$, $g \mapsto f_*(g) := f \circ g$. Sea $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,-)\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj}$ el funtor covariante de $\mathscr{C}$ en la categoría de los conjuntos definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,-)\colon \mathscr{C} &\rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj} \\ M &\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M) \\ f &\rightsquigarrow f_* \\ (f \circ g) &\rightsquigarrow (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \end{aligned}$$

5. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y N un objeto de $\mathscr{C}$. Un morfismo $f : M \to M'$ induce la aplicación $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M',N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$, $g \mapsto f^*(g) := g \circ f$. Sea $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,N)\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj}$ el funtor contravariante definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,N)\colon \mathscr{C} &\rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj} \\ M &\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N) \\ f &\rightsquigarrow f^* \\ (f \circ g) &\rightsquigarrow (f \circ g)^* = g^* \circ f^* \end{aligned}$$

6. Definición: Sean $F, F' : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}'$ dos funtores covariantes (o contravariantes). Dar un morfismo $\theta\colon F \to F'$, es dar para cada objeto M de la categoría $\mathscr{C}$ un morfismo $\theta_M : F(M) \to F'(M)$, de modo que para cada morfismo $f : M \to N$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_M"] & F(N) \arrow[d, "\theta_N"] \\ F'(M) \arrow[r, "F'(f)"] & F'(N) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Diremos que θ es un isomorfismo si los θ_M son isomorfismos, para todo objeto M de $\mathscr{C}$.

$\operatorname{Hom}(F,F')$ denotará los morfismos de F en F'. Dado un objeto M, denotemos $M^{\cdot} = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,-)$.

7. Teorema: *Sea $F\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj}$ un funtor covariante y $M,N \in \mathscr{C}$. Se cumple que*

1. $\operatorname{Hom}(M^{\cdot},F) = F(M)$.
2. $\operatorname{Hom}(M^{\cdot},M'^{\cdot}) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M',M)$, $f^* \longleftarrow\!\dashv f$.
3. $M^{\cdot} \simeq M'^{\cdot}$ *si y sólo si* $M \simeq M'$.

Demostración. 1. Todo morfismo $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,-) \xrightarrow{\theta} F$ queda determinado por $\theta_M(\mathrm{Id}_M) = x \in F(M)$: No es más que considerar, dado $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,M) \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "f_*"] & F(M) \arrow[d, "F(f)"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N) \arrow[r, "\theta_N"] & F(N) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Id}_M \arrow[r, mapsto, "\theta_M"] \arrow[d, mapsto, "f_*"] & x \arrow[d, mapsto, "F(f)"] \\ f \arrow[r, mapsto, dashed, "\theta_N"] & F(f)(x) \end{tikzcd}$$

2. Es consecuencia inmediata de 1.
3. Es consecuencia inmediata de 2.

□

Dado un objeto M, denotemos ${}^{\cdot}M = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,M)$. La proposición dual de la anterior es la siguiente.

8. Teorema: *Sea $F\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}_{Conj}$ un funtor contravariante y $M,N \in \mathscr{C}$. Se cumple que*

1. $\operatorname{Hom}({}^{\cdot}M,F) = F(M)$.
2. $\operatorname{Hom}({}^{\cdot}M,{}^{\cdot}N) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$, $f_* \longleftarrow\!\dashv f$.
3. ${}^{\cdot}M \simeq {}^{\cdot}N$ *si y sólo si* $M \simeq N$.

9. Definición: Si $F \simeq \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,M)$ (resp. $F \simeq \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,-)$) entonces se dice que F es un funtor contravariante (resp. covariante) representable y que M es el representante de F (el cual es único salvo isomorfismos, por 2.3.8 3.).

10. Ejemplo : En Matemáticas, cuando queremos expresar cuál es la propiedad universal de un objeto M (construido de cierto modo), lo que pretendemos es determinar $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,-)$ (ó $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,M)$). Pongamos un ejemplo:

Propiedad universal de la topología final de una aplicación: Sea X un espacio topológico, Y un conjunto e $f\colon X\to Y$ una aplicación de conjuntos. Existe una topología en Y de modo que

$$\mathrm{Hom}_{cont}(Y,Z)=\{g\in \mathrm{Aplic}(Y,Z)\colon g\circ f\in \mathrm{Hom}_{cont}(X,Z)\} \qquad (*)$$

para todo espacio topológico Z. En efecto, como puede comprobarse, es la topología de Y, cuyos abiertos son los subconjuntos $U\subset Y$ tales que $f^{-1}(U)$ es un abierto de X. Existe una única topología en Y cumpliendo $(*)$. En efecto, denotemos por Y' al conjunto Y dotado con otra topología cumpliendo $(*)$. Entonces, $\mathrm{Hom}_{cont}(Y,-)=\mathrm{Hom}_{cont}(Y',-)$, $g\mapsto g$ y el morfismo identidad $Y=Y'$ es un homeomorfismo por 2.3.8 3. La topología así definida en Y se denomina la topología final en Y de f.

Y con la topología final es el representante del funtor $F\colon \mathscr{C}_{Top}\to\mathscr{C}_{Conj}$ definido por

$$F(Z):=\{g\in \mathrm{Aplic}(Y,Z)\colon g\circ f\in \mathrm{Hom}_{cont}(X,Z)\}$$

y se dice que $(*)$ es la propiedad universal de la topología final en Y de la aplicación f.

2.3.3. Espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones

Consideremos un sistema de ecuaciones k-algebraicas

$$\begin{gathered} p_1(x_1,\dots,x_n)=0\\ \cdots\\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0\end{gathered}$$

Sea $\mathscr{C}_{k-alg}$ la categoría de k-álgebras y $\mathscr{C}_{Conj}$ la categoría de conjuntos. Definamos el funtor "espacio de soluciones del sistema de ecuaciones algebraica $p_1=\cdots=p_r=0$":

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0)\colon & \mathscr{C}_{k-alg} & \rightsquigarrow & \mathscr{C}_{Conj}\\ & A & \mapsto & \left\{\begin{array}{l}\text{Conjunto de soluciones con}\\ \text{valores en el anillo } A\\ \text{del sistema } p_1=\cdots=p_r=0\end{array}\right\}\end{array}$$

Al morfismo de k-álgebras $f\colon A\to B$, $\mathrm{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0)$ le asigna la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{l}\text{Conjunto de soluciones con}\\ \text{valores en el anillo } A\\ \text{del sistema } p_1=\cdots=p_r=0\end{array}\right\} & \to & \left\{\begin{array}{l}\text{Conjunto de soluciones con}\\ \text{valores en el anillo } B\\ \text{del sistema } p_1=\cdots=p_r=0\end{array}\right\}\\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (f(a_1),\dots,f(a_n))\end{array}$$

$\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0)$ es representable ya que el morfismo de funtores

$$\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0) \to \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r), -)$$

definido por $\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0)(A) \to \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r), A)$, $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ (donde $\phi_\alpha(\overline{p(x)}) := p(\alpha)$) sabemos que es biyectivo.

11. Ejemplo : La recta real es $\mathbb{R}$, la recta compleja es $\mathbb{C}$. Definamos el funtor sobre la categoría de k-álgebras $\mathrm{Recta}^{\cdot}$, como el funtor $\mathrm{Recta}^{\cdot}(A) := A$. Observemos que $\mathrm{Recta}^{\cdot} = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], -)$.

Sea

$$\begin{array}{c} p_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{array}$$

un sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos el funtor $\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0)$. Se cumple que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0), \mathrm{Recta}^{\cdot}) &= \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)) \\ &= k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) \end{aligned}$$

"$k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ es el anillo de todas las funciones universales del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas $p_1 = \cdots = p_r = 0$"

Explícitamente, dado $\overline{p(x_1,\dots x_n)} \in k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0) & \to & \mathrm{Recta}^{\cdot} \\ \mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0)(A) & \to & \mathrm{Recta}^{\cdot}(A) = A \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & p(a_1,\dots,a_n) \end{array}$$

12. Ejemplo : Sean dos sistemas de ecuaciones algebraicas

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} q_1(y_1,\dots,y_m) = 0 \\ \cdots \\ q_s(y_1,\dots,y_m) = 0 \end{array} \right.$$

Se cumple que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0), \mathrm{Esp}(q_1 = \cdots = q_s = 0)) \\ &\qquad = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s), k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)) \end{aligned}$$

Explícitamente, el morfismo de k-algebras

$$f : k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s) \to k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\ f(\bar{y}_i) = \overline{r_(x_1,\dots,x_n)},$$

define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0) & \xrightarrow{f^*} & \operatorname{Esp}(q_1=\cdots=q_s=0) \\ \operatorname{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0)(A) & \to & \operatorname{Esp}(q_1=\cdots=q_s=0)(A) \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (b_1=r_1(a_1,\dots,a_n),\dots,b_m=r_m(a_1,\dots,a_n)) \end{array}$$

13. Teorema: *"Dos sistemas de ecuaciones algebraicas (con las mismas variables) tienen el mismo conjunto de soluciones (para todo anillo) si y sólo si los ideales generados por los polinomios de las ecuaciones de cada sistema coinciden" Con mayor precisión, sean*

$$\left\{\begin{array}{l} p_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ q_s(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right.$$

dos sistemas de ecuaciones algebraicas. Se cumple que

$$\operatorname{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0)=\operatorname{Esp}(q_1=\cdots=q_s=0) \iff (p_1,\cdots,p_r)=(q_1,\dots,q_s)$$

Demostración. Decir que $\operatorname{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0)=\operatorname{Esp}(q_1=\cdots=q_s=0)$ quiere decir que el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0) & \to & \operatorname{Esp}(q_1=\cdots=q_s=0) \\ \operatorname{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0)(A) & \to & \operatorname{Esp}(q_1=\cdots=q_s=0)(A) \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (a_1,\dots,a_n) \end{array}$$

está bien definido y es un isomorfismo. Es decir, el morfismo

$$k[x_1,\dots,x_n]/(q_1,\dots,q_s)\to k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),\ \bar{x}_i\mapsto\bar{x}_i,$$

está bien definido y es un isomorfismo. Ahora bien, este morfismo está bien definido si aplica los $\bar{q}_i$ al cero, es decir $(q_1,\dots,q_s)\subseteq(p_1,\dots,p_r)$. El morfismo inverso para que exista ha de estar definido por $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\to k[x_1,\dots,x_n]/(q_1,\dots,q_s)$, $\bar{x}_i\mapsto\bar{x}_i$. De nuevo este morfismo está bien definido si y sólo si $(p_1,\dots,p_r)\subseteq(q_1,\dots,q_s)$.

En conclusión,

$$\operatorname{Esp}(p_1=\cdots=p_r=0)=\operatorname{Esp}(q_1=\cdots=q_s=0) \iff (p_1,\cdots,p_r)=(q_1,\dots,q_s)$$

□

2.3.4. Espacio de un anillo de funciones

Hemos probado que el anillo de funciones universales de $\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0)$ es la k-álgebra $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ y que

$$\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),-).$$

También denotaremos a $\mathrm{Esp}(p_1 = \cdots = p_r = 0)$ por $\mathrm{Esp}\, k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ (y lo leeremos, espacio de anillo de funciones $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$). En general:

14. Definición: Sea A una k-álgebra. Definiremos

$$\mathrm{Esp}\, A = \mathrm{Hom}_{k-alg}(A,-)$$

y diremos que $\mathrm{Esp}\, A$ es el espacio de anillo de funciones A.

Todo morfismo de k-álgebras $f\colon A \to B$, define el morfismo $f^*\colon \mathrm{Esp}\, B \to \mathrm{Esp}\, A$, $f^*(g) = g \circ f$.

15. Proposición: $\mathrm{Hom}(\mathrm{Esp}\, A, \mathrm{Recta}^{\cdot}) = A$.

Demostración. $\mathrm{Hom}(\mathrm{Esp}\, A, \mathrm{Recta}^{\cdot}) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], A) = A$. Explícitamente, $a \in A$, define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Esp}\, A & \to & \mathrm{Recta}^{\cdot} \\ \mathrm{Hom}_{k-alg}(A,B) = \mathrm{Esp}\, A(B) & \to & B = \mathrm{Recta}^{\cdot}(B) \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

□

16. Notación: Diremos que $x \in \mathrm{Esp}\, A(B) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(A,B)$ es un punto de $\mathrm{Esp}\, A$ (con valores en B). Dado $a \in A$ y $x \in \mathrm{Esp}\, A(B)$, denotaremos $a(x) = x(a)$.

17. Proposición: *Una función $a \in A$ es nula si y sólo si $a(x) = 0$ para todo punto de* $\mathrm{Esp}\, A$.

Sea $I \subset A$ un ideal. Recordemos la propiedad universal del cociente:

$$\mathrm{Hom}_{Anillos}(A/I, B) = \{f \in \mathrm{Hom}_{Anillos}(A,B), \text{ tales que } f(I) = 0\}$$

18. Proposición: *"*$\mathrm{Esp}\, A/I$ *se identifica con los puntos de* $\mathrm{Esp}\, A$ *donde se anulan todas las funciones del ideal I"*

Demostración. El epimorfismo natural $A \to A/I$ define la inyección $\operatorname{Esp} A/I \hookrightarrow \operatorname{Esp} A$. Tenemos que probar que

$$\operatorname{Esp} A/I(B) = \{x \in \operatorname{Esp} A(B), \text{ tales que } i(x) = 0, \text{ para todo } i \in I\}$$

que es la propiedad universal del cociente por un ideal recién enunciada.

□

19. Proposición: *Se cumple que* $\operatorname{Esp} A \times \operatorname{Esp} B = \operatorname{Esp}(A \otimes_k B)$.

Demostración. Tenemos que probar, para toda k-álgebra C, que

$$(\operatorname{Esp} A \times \operatorname{Esp} B)(C) = \operatorname{Esp}(A \otimes_k B)(C)$$

lo cual es la propiedad universal del producto tensorial de k-álgebras □

Como

$$\begin{aligned} &\operatorname{Esp}(p_1(x) = \cdots = p_r(x) = 0) \times \operatorname{Esp}(q_1(y) = \cdots = q_s(y) = 0) \\ &= \operatorname{Esp}(p_1(x) = \cdots = p_r(x) = q_1(y) = \cdots = q_s(y) = 0), \end{aligned}$$

entonces

$$k[x,y]/(p_i(x), q_j(y)) = k[x]/(p_i(x)) \otimes_k k[y]/(q_j(y))$$

Dados dos morfismo de funtores $f : F_1 \to F$, $g : F_2 \to F$ se define el producto fibrado $F_1 \times_F F_2$, como sigue

$$(F_1 \times_F F_2)(A) := F_1(A) \times_{F(A)} F_2(A) = \{(x_1, x_2) \in F_1(A) \times F_2(A) \text{ tales que } f_A(x_1) = g_A(x_2)\}$$

20. Proposición: *Sean $C \to A$ y $C \to B$ dos morfismos de k-álgebras. Tenemos pues los morfismos* $\operatorname{Esp} A \to \operatorname{Esp} C$ *y* $\operatorname{Esp} B \to \operatorname{Esp} C$. *Se cumple que*

$$\operatorname{Esp} A \times_{\operatorname{Esp} C} \operatorname{Esp} B = \operatorname{Esp}(A \otimes_C B)$$

Demostración. Tenemos que probar que

$$\operatorname{Esp} A(D) \times_{\operatorname{Esp} C(D)} \operatorname{Esp} B(D) = \operatorname{Esp}(A \otimes_C B)(D)$$

para toda k-álgebra D. En efecto, tenemos la igualdad

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{k-alg}(A \otimes_C B, D) & = & \operatorname{Hom}_{k-alg}(A, D) \times_{\operatorname{Hom}_{k-alg}(C,D)} \operatorname{Hom}_{k-alg}(B, D) \\ f & \longmapsto & (f_1, f_2) \qquad f_1(a) := f(a \otimes 1), f_2(b) := f(1 \otimes b) \\ F(a \otimes b) := f_1(a) \cdot f_2(b), \quad F & \longleftarrow & (f_1, f_2) \end{array}$$

□

2.4. Espectro racional de una k-álgebra

1. Definición: Sea A una k-álgebra. Diremos que un ideal $\mathfrak{m} \subset A$ es racional si $A/\mathfrak{m} \simeq k$ como k-álgebras. Llamaremos espectro k-racional de A y lo denotaremos $\operatorname{Spec}_{rac} A$, al conjunto de los ideales (maximales) racionales de A, es decir,

$$\operatorname{Spec}_{rac} A := \{\text{Ideales maximales } \mathfrak{m} \subset A \text{ tales que } A/\mathfrak{m} = k\}.$$

2. Notación: Dado un ideal racional $\mathfrak{m}_y \subset A$, denotaremos al morfismo de k-álgebras de paso al cociente $A \to A/\mathfrak{m}_y = k$, $a \mapsto \bar{a}$ por y, es decir, $y(a) := \bar{a} \in k$. También denotaremos $a(y) := y(a) = \bar{a}$.

3. Proposición: *Sea A una k-álgebra. Entonces,* $\operatorname{Spec}_{rac} A = \operatorname{Hom}_{k-alg}(A, k)$.

Demostración. Las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k) & \longleftrightarrow & \operatorname{Spec}_{rac} A \\ \phi & \longmapsto & \operatorname{Ker}\phi \\ y & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{m}_y \end{array}$$

son inversas entre sí. □

4. Ejemplo: $\operatorname{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n] = \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n],k) = k^n$. Explícitamente, a cada $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in k^n$ le corresponde el ideal racional $(x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n)$ de $k[x_1,\dots,x_n]$ y el morfismo de k-álgebras $k[x_1,\dots,x_n] \to k$, $p(x_1,\dots,x_n) \mapsto p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

5. Proposición: *Tenemos las igualdades*

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) = & \left\{ \alpha \in k^n : \begin{array}{c} p_1(\alpha)=0 \\ \cdots \\ p_r(\alpha)=0 \end{array} \right\} & = \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),k) \\ (\overline{x_1-\alpha_1},\dots,\overline{x_n-\alpha_n}) \longleftarrow\!\shortmid & (\alpha_1,\dots,\alpha_n) & \longmapsto \phi_\alpha \qquad (\phi_\alpha(\overline{p(x)}) := p(\alpha)). \end{array}$$

Demostración. Las aplicaciones definidas son biyectivas como consecuencia de las proposiciones 2.4.3 y 2.2.3

□

6. Cada morfismo de k-álgebras $f: A \to B$ induce la aplicación

$$f^*\colon \mathrm{Spec}_{rac} B \to \mathrm{Spec}_{rac} A,\ \ f^*(\mathfrak{m}) := f^{-1}(\mathfrak{m}).$$

Tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}_{rac} B \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Spec}_{rac} A \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_{k-alg}(B,k) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{k-alg}(A,k) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, g \arrow[r, mapsto] & f^{-1}(\mathrm{Ker}\, g) = \mathrm{Ker}(g \circ f) \\ g \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & f^*(g) := g \circ f \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

7. Será usual que el ideal racional $(\overline{x_1-\alpha_1}, \dots, \overline{x_n-\alpha_n})$ de $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ (con $p_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \cdots = p_r(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0$) lo denotemos $\mathfrak{m}_\alpha$ (con $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$), y cuando lo pensemos como elemento del conjunto $\mathrm{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ lo denotaremos por α.

Sea $f: k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) \to k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s)$ un morfismo de k-álgebras, entonces $f(\bar{x}_i) = \overline{f_i(y_1,\dots,y_m)}$, para ciertos polinomios $f_i(y_1,\dots,y_n)$. Sea

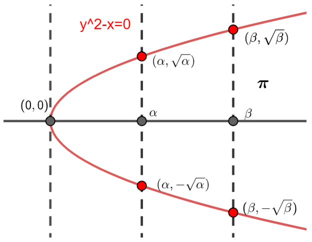
$$\beta\colon k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s) \to k, \overline{p(y)} \mapsto p(\beta)$$

un morfismo de k-álgebras. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\beta)"'] & k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s) \arrow[d, "\beta"] \\ & k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{p(x_1,\dots,x_n)} \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \overline{p(f_1(y),\dots,f_m(y))} \arrow[d, mapsto] \\ & p(f_1(\beta),\dots,f_m(\beta)) \end{tikzcd}$$

Luego el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}_{rac} k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) \arrow[d, equal] \\ \left\{ \text{Sol.} \begin{array}{c} q_1(y_1,\dots,y_m) = 0 \\ \cdots \\ q_s(y_1,\dots,y_m) = 0 \end{array} \right\} \arrow[r] & \left\{ \text{Sol.} \begin{array}{c} p_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{array} \right\} \\ (\beta_1,\dots,\beta_m) \arrow[r, mapsto] & (f_1(\beta_1,\dots,\beta_m),\dots,f_n(\beta_1,\dots,\beta_m)) \end{tikzcd}$$



8. Ejemplo : Consideremos el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}[x,y]/(y^2-x),\ p(x) \mapsto \overline{p(x)}.$$

Entonces, $\operatorname{Spec}_{rac} \mathbb{R}[x,y]/(y^2-x) \xrightarrow{\pi} \operatorname{Spec}_{rac} \mathbb{R}[x]$, $(\alpha,\beta) \overset{\pi}{\mapsto} \alpha$ es el morfismo inducido entre los espectros racionales.

9. Ejemplo : Sea X un espacio compacto T_2 y $C(X)$ el anillo de funciones reales continuas definidas sobre X. Dado un punto $p \in X$, el ideal $\mathfrak{m}_p$ de funciones que se anulan en p es un ideal racional, porque $C(X)/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{R}$, $\bar{f} \mapsto f(p)$. Además, $\mathfrak{m}_p \neq \mathfrak{m}_q$ si $p \neq q$, porque X es un espacio topológico normal y las funciones continuas separan cerrados disjuntos, por el lema de Urysohn.

Dado un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset C(X)$, si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_p$ para todo $p \in X$, entonces para cada $p \in X$ existe una función $f_p \in \mathfrak{m}$ que no se anula en p, luego tampoco en un entorno U_p de p. Como X es compacto, un número finito $U_{p_1},\dots,U_{p_n}$ recubren X. Por tanto, $f := f_{p_1}^2 + \cdots + f_{p_n}^2$ no se anula en ningún punto de X, luego es invertible y $f \in \mathfrak{m}$, contradicción. Hemos probado que todo ideal maximal es racional y que la aplicación

$$X =\!=\!= \operatorname{Spec}_{rac} C(X),\ p \mapsto \mathfrak{m}_p$$

es una biyección.

10. Si A es una k-álgebra, entonces $A = \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x],A)$ y cada $a \in A$ induce una aplicación (que seguimos denotando por a) en los espectros racionales

$$\operatorname{Spec}_{rac} A \xrightarrow{a} \operatorname{Spec}_{rac} k[x] = k,\ y \mapsto a(y) := \bar{a} \in A/\mathfrak{m}_y.$$

Si $A = k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ y $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\alpha$ (con $\alpha \in k^n$ tal que $p_1(\alpha) = \cdots = p_r(\alpha) = 0$), entonces $\overline{p(x)} = p(\alpha) \in (k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r))/\mathfrak{m}_\alpha = k$ y tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}_{rac} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) &\xrightarrow{\overline{p(x_1,\dots,x_n)}} k \\ \alpha &\longmapsto p(\alpha). \end{aligned}$$

11. Proposición : *Sean A y B dos k-álgebras, entonces*

$$\operatorname{Spec}_{rac}(A \times_k B) = \operatorname{Spec}_{rac} A \coprod \operatorname{Spec}_{rac} B.$$

Demostración. Dado un morfismo de anillos $f\colon A \times B \to k$ tenemos que $0 = f(0,0) = f((1,0)\cdot(0,1)) = f(1,0)\cdot f(0,1)$, entonces $f(1,0) = 0$ o $f(0,1) = 0$. En el primer caso f se anula sobre $A\times 0$, es decir, factoriza vía el cociente $(A\times B)/(A\times 0)=B$, en el segundo caso f se anula en $0\times B$, es decir, factoriza vía el cociente $(A\times B)/(0\times B)=A$. Luego

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}_{rac}(A\times_k B) &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(A\times_k B,k)=\operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k)\coprod \operatorname{Hom}_{k-alg}(B,k)\\ &= \operatorname{Spec}_{rac}A\coprod \operatorname{Spec}_{rac}B.\end{aligned}$$

□

12. Ejercicio: Dado $(a,b)\in A\times B$, prueba que

$$\begin{aligned}(a,b)(\alpha)=a(\alpha),\ \ \forall \alpha\in \operatorname{Spec}_{rac}A\subset \operatorname{Spec}_{rac}(A\times B).\\ (a,b)(\beta)=b(\beta),\ \ \forall \beta\in \operatorname{Spec}_{rac}B\subset \operatorname{Spec}_{rac}(A\times B).\end{aligned}$$

13. Proposición: *Sean A y B dos k-álgebras, entonces*

$$\operatorname{Spec}_{rac}(A\otimes_k B)=\operatorname{Spec}_{rac}A\times \operatorname{Spec}_{rac}B.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}_{rac}(A\otimes_k B) &= \operatorname{Hom}_{k-alg}(A\otimes_k B,k)=\operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k)\times \operatorname{Hom}_{k-alg}(B,k)\\ &= \operatorname{Spec}_{rac}A\times \operatorname{Spec}_{rac}B.\end{aligned}$$

□

14. Ejercicio: Dado $a\otimes b\in A\otimes_k B$, prueba que

$$(a\otimes b)(\alpha,\beta)=a(\alpha)\cdot b(\beta),\ \ \forall (\alpha,\beta)\in \operatorname{Spec}_{rac}A\times \operatorname{Spec}_{rac}B=\operatorname{Spec}_{rac}(A\otimes_k B).$$

15. El morfismo de k-álgebras $i\colon A\to A\otimes_k B$, $i(a):=a\otimes 1$, induce en los espectros racionales la aplicación

$$\operatorname{Spec}_{rac}A\times \operatorname{Spec}_{rac}B=\operatorname{Spec}_{rac}(A\otimes B)\to \operatorname{Spec}_{rac}A,\ (\alpha,\beta)\mapsto \alpha.$$

En efecto, $(\phi_1,\phi_2)\in \operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k)\times \operatorname{Hom}_{k-alg}(B,k)$ se corresponde con el morfismo de k-álgebras $\phi\colon A\otimes_k B\to k$, $\phi(a\otimes b)=\phi_1(a)\cdot\phi_2(b)$ y la composición $A\xrightarrow{i} A\otimes_k B\xrightarrow{\phi} k$, es la asignación $a\mapsto a\otimes 1\mapsto \phi_1(a)\cdot\phi_2(1)=\phi_1(a)$, es decir, es el morphismo ϕ_1. Es decir, i induce la aplicación

$$\begin{array}{ccccc}\operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k)\times \operatorname{Hom}_{k-alg}(B,k) & = & \operatorname{Hom}_{k-alg}(A\otimes_k B,k) & \xrightarrow{i^*} & \operatorname{Hom}_{k-alg}(A,k)\\ (\phi_1,\phi_2) & = & \phi & \mapsto & \phi_1\end{array}$$

16. El morfismo de k-álgebras $m\colon A\otimes_k A\to A$, $m(a\otimes a'):=aa'$, induce en los espectros racionales la aplicación

$$\operatorname{Spec}_{rac} A\to \operatorname{Spec}_{rac}(A\otimes_k A)=\operatorname{Spec}_{rac} A\times \operatorname{Spec}_{rac} A,\ \alpha \overset{m^*}{\mapsto} (\alpha,\alpha).$$

En efecto, sean $i_1\colon A\to A\otimes_k A$, $i_1(a)=a\otimes 1$ y $i_2\colon A\to A\otimes_k A$, $i_2(a)=1\otimes a$. Observemos que $m\circ i_1=\mathrm{Id}=m\circ i_2$. Si denotamos $m^*(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)$, entonces $\alpha=i_1^*(m^*(\alpha))=\alpha_1$ y $\alpha=i_2^*(m^*(\alpha))=\alpha_2$.

2.5. Espectro primo de un anillo

1. Definición: Se llama espectro primo de un anillo A al conjunto $\operatorname{Spec} A$ de sus ideales primos.

2. Ejemplos: $\operatorname{Spec}\mathbb{R}=\{(0)\}$, $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}=\{(0),(p)$, para todo número primo $p\}$, $\operatorname{Spec} k[x]=\{(0),(p(x)$ para todo polinomio mónico irreducible $p(x)\}$.

3. Notaciones: Un ideal primo $\mathfrak{p}_z\subset A$ lo denotaremos por z cuando lo consideremos como elemento de $\operatorname{Spec} A$.

Llamaremos funciones a los elementos del anillo A y puntos a los elementos de $\operatorname{Spec} A$. Diremos que una función $a\in A$ se anula en un punto $x\in \operatorname{Spec} A$ cuando $a\in \mathfrak{p}_x$, es decir, cuando $0=\bar a\in A/\mathfrak{p}_x$ (suele denotarse $a(x):=\bar a\in A/\mathfrak{p}_x$).

4. Ejercicio: Prueba que una función $f\in A$ es invertible si y sólo si no se anula en ningún punto de $\operatorname{Spec} A$. Prueba que $p(x,y)\in k[x,y]$ se anula en el ideal primo racional $\mathfrak{m}_{\alpha,\beta}=(x-\alpha,y-\beta)\subset k[x,y]$ si y sólo si $p(\alpha,\beta)=0$.

Como $\mathfrak{p}_z$ es un ideal primo se cumple:

1. La función 0 se anula en todos los puntos $z\in \operatorname{Spec} A$.
2. Si dos funciones se anulan en un punto z, su suma también.
3. Si una función se anula en un punto z, sus múltiplos también.
4. Si un producto de funciones se anula en un punto z, algún factor se anula en z.

5. Definición: Sea A un anillo. Si $f\in A$, llamaremos *ceros* de la función f al subconjunto $(f)_0\subset \operatorname{Spec} A$ formado por todos los puntos donde se anule f. Llamaremos ceros de un ideal $I\subseteq A$ al subconjunto de $\operatorname{Spec} A$ formado por los puntos donde se anulen todas las funciones de I y lo denotaremos $(I)_0$, es decir,

$$(I)_0=\bigcap_{f\in I}(f)_0=\left\{\begin{array}{r}\text{Ideales primos } \mathfrak{p}_x\subset A\\ \text{tales que } I\subseteq \mathfrak{p}_x\end{array}\right\}$$

6. Proposición: *Se cumplen las siguientes igualdades:*

1. $(0)_0 = \operatorname{Spec} A$ *y* $(A)_0 = \emptyset$.

2. $(\sum_{j\in J} I_j)_0 = \bigcap_{j\in J} (I_j)_0$.

3. $(\bigcap_{j=1}^{n} I_j)_0 = \bigcup_{j=1}^{n} (I_j)_0$.

Demostración. Todas las igualdades son de demostración inmediata, salvo quizás la 3. Para ésta, basta probar que $(I_1 \cap I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$. Veámoslo:

Obviamente, $(I_1 \cap I_2)_0 \supseteq (I_1)_0 \cup (I_2)_0$. Veamos la otra inclusión: Sea $x \in (I_1 \cap I_2)_0$. Si $x \notin (I_1)_0$ y $x \notin (I_2)_0$, entonces existe $f_1 \in I_1$ y $f_2 \in I_2$ que no se anulan en x, luego $f_1 \cdot f_2$ no se anula en x. Pero como $f_1 \cdot f_2 \in I_1 \cap I_2$ llegamos a contradicción con que $x \in (I_1 \cap I_2)_0$. Por tanto, $x \in (I_1)_0 \cup (I_2)_0$ y $(I_1 \cap I_2)_0 \subseteq (I_1)_0 \cup (I_2)_0$.

□

7. Ejercicio: Demuestra que $(I_1 \cdot I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$, donde denotamos por $I_1 \cdot I_2 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I_1, b_i \in I_2, n \in \mathbb{N}\}$.

8. Definición: Llamamos topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$, a la topología sobre $\operatorname{Spec} A$ cuyos cerrados son los ceros de los ideales de A.

La proposición anterior nos dice que la topología de Zariski es efectivamente una topología.

9. Ejercicio: Determinar los puntos y la topología de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Dado un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ y un cerrado $C = (I)_0$, si $x \notin C$ existe $f \in I \subseteq A$ que no se anula en x, "las funciones de A separan puntos de cerrados en $\operatorname{Spec} A$".

Dada una inclusión $I_1 \subseteq I_2$ de ideales se tiene que $(I_1)_0 \supseteq (I_2)_0$. Dado un cerrado C se verifica que $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C: Obviamente $C \subseteq (I)_0$. Por otra parte $C = (J)_0$ para algún ideal $J \subseteq A$. Tenemos que las funciones de J se anulan en C, luego $J \subseteq I$. Por tanto, $C = (J)_0 \supseteq (I)_0$. Hemos concluido.

Si bien, $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C, pueden existir ideales $J \underset{\neq}{\subset} I$ tales que $C = (I)_0 = (J)_0$. Por ejemplo, $(4)_0 = (2)_0 \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Dado un subconjunto Y de $\operatorname{Spec} A$, denotamos por $\bar{Y}$ el cierre de Y en $\operatorname{Spec} A$.

10. Proposición: *Dado* $x \in \operatorname{Spec} A$ *su cierre es* $\bar{x} = (\mathfrak{p}_x)_0$. *En particular,* $\operatorname{Spec} A$ *es un espacio topológico* T_0 *(puntos distintos tienen cierres distintos) y un punto* x *es cerrado si y sólo si* $\mathfrak{p}_x$ *es un ideal maximal.*

Demostración. El cierre de x, $\bar{x}$, será de la forma $\bar{x} = (I)_0$, para cierto ideal $I \subset A$. Obviamente, como $x \in \bar{x}$, tenemos que $I \subseteq \mathfrak{p}_x$. Por tanto, $(\mathfrak{p}_x)_0 \subseteq (I)_0$. Ahora bien, $(I)_0$ es el menor cerrado que contiene a x y $x \in (\mathfrak{p}_x)_0$, luego $(\mathfrak{p}_x)_0 = (I)_0 = \bar{x}$.

□

11. Ejemplo : Los ideales primos de $k[x]$ son los ideales $(p(x))$, con $p(x)$ primo o irreducible y el ideal (0). Si $k = \mathbb{C}$, los ideales primos de $\mathbb{C}[x]$ son $\mathfrak{m}_\alpha = (x-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y (0). Así que los ideales primos maximales de $\mathbb{C}[x]$ se corresponden con los puntos de una recta afín. De aquí que se siga la notación $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x] = \mathbb{A}_1(\mathbb{C})$. En resumen

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x] = \begin{cases} \text{Puntos cerrados: } \alpha \equiv (x-\alpha), \text{ con } \alpha \in \mathbb{C}. \\ \text{Punto “genérico”: } g \equiv (0). \end{cases}$$

En general, si k es un cuerpo, diremos que $\operatorname{Spec} k[x]$ es la recta afín sobre k.

Dado un ideal $((x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_r)^{n_r}) \subset \mathbb{C}[x]$, entonces $((x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_r)^{n_r}))_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$.Por tanto, los cerrados de la topología de Zariski de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]$, a parte del vacío y el total, son los conjuntos finitos de puntos cerrados (de la recta afín).

12. Definición : Diremos que un espacio topológico es irreducible cuando no pueda descomponerse como unión de dos cerrados estrictamente menores. Llamaremos componentes irreducibles de un espacio topológico a los subespacios irreducibles maximales de X, es decir, los subespacios irreducibles no contenidos estrictamente en otro subespacio irreducible.

El cierre de un subespacio irreducible es irreducible, en particular las componentes irreducibles de un espacio son cerradas. Cada punto $x \in X$ es subespacio irreducible, luego su cierre $\bar{x}$ es un cerrado irreducible de X. Como consecuencia del lema de Zorn, todo irreducible está incluido en alguna componente irreducible. X es unión de sus componentes irreducibles.

13. Proposición : *Cada cerrado irreducible del espectro de un anillo es el cierre de un único punto, llamado punto genérico de tal cerrado. En particular, las componentes irreducibles de* $\operatorname{Spec} A$ *son los cierres de los puntos definidos por los ideales primos minimales de A.*

Demostración. Sea C un cerrado irreducible. Sabemos que $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C.

Basta ver que I es primo, porque si $I = \mathfrak{p}_x$ entonces $(I)_0 = \bar{x}$. Si $f \cdot g \in I$, es decir, $f \cdot g$ se anula en C, entonces

$$C = C \cap (fg)_0 = C \cap ((f)_0 \cup (g)_0)) = (C \cap (f)_0) \cup (C \cap (g)_0)$$

luego, o bien f se anula en C, o bien g, porque C es irreducible. Es decir, o bien $f \in I$, o bien $g \in I$.

$C = \bar{x}$ es una componente irreducible si y sólo si no está incluido estrictamente en otro cerrado irreducible $C' = \bar{y}$, es decir, si y sólo si $\mathfrak{p}_y \not\subseteq \mathfrak{p}_x$, es decir, si y sólo si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo minimal.

□

14. Teorema: *El espectro primo de un anillo es un espacio topológico compacto.*

Demostración. Sea $C_j = (I_j)_0$ una familia arbitraria de cerrados de $\operatorname{Spec} A$. Si $\underset{j}{\cap} C_j = \emptyset$ entonces

$$\emptyset = \underset{j}{\cap}(I_j)_0 = (\sum_j I_j)_0$$

Por tanto, $\sum_j I_j = A$. Luego $1 = f_1 + \cdots + f_n$ para ciertas $f_1 \in I_{j_1}, \ldots, f_n \in I_{j_n}$. Luego, de nuevo $I_{j_1} + \cdots + I_{j_n} = A$ y

$$(I_{j_1})_0 \cap \cdots \cap (I_{j_n})_0 = \emptyset$$

es decir, $C_{j_1} \cap \cdots \cap C_{j_n} = \emptyset$ y $\operatorname{Spec} A$ es compacto.

□

2.5.1. Espectro primo de un anillo noetheriano

15. Definición: Se dice que un espacio topológico es noetheriano si toda cadena descendente de cerrados estabiliza.

16. Proposición: 1. *Todo espacio topológico noetheriano es compacto.*

2. *Todo subespacio de un espacio topológico noetheriano es noetheriano.*

3. *Todo espacio topológico noetheriano es unión de un número finito de cerrados irreducibles.*

Demostración. Probemos solo 3. Sea X el espacio topológico noetheriano. Supongamos que X no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, X no es irreducible, luego es unión de dos cerrados propios, $X = C_1 \cup C_2$. C_1 y C_2 no pueden ser los dos a la vez unión de un número finito de cerrados irreducibles. Digamos que C_1 no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, C_1 no es un cerrado irreducible, luego es unión de dos cerrados propios $C_1 = C_{11} \cup C_{12}$. C_{11} y C_{12} no pueden ser los dos a la vez unión de un número finito de cerrados irreducibles. Digamos que C_{11} no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, C_{11} no es un cerrado irreducible, luego es unión de dos cerrados propios $C_{11} = C_{111} \cup C_{112}$. Así sucesivamente, vamos construyendo la cadena descendente de inclusiones estrictas

$$C_1 \supset C_{11} \supset C_{111} \supset \cdots$$

lo que contradice la noetherianidad de X. En conclusión, X es unión de un número finito de cerrados irreducibles.

□

17. Proposición: *Si A es un anillo noetheriano, entonces* $\operatorname{Spec} A$ *es un espacio topológico noetheriano. En particular,* $\operatorname{Spec} A$ *es unión de un número finito de componentes irreducibles y el número de ideales primos minimales de A es finito*

Demostración. Sea $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq \cdots$ una cadena descendente de cerrados. Sean I_i los ideales de funciones que se anulan en C_i. Luego $(I_i)_0 = C_i$ y tenemos la cadena

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

Cadena que estabiliza por ser A noetheriano. Es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $I_m = I_{m+1} = \cdots$. Luego, $C_m = C_{m+1} = \cdots$.

□

Sea A un anillo noetheriano, $I \subset A$ un ideal y $\mathfrak{p}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{x_n}$ los ideales primos mínimos conteniendo a I (que se corresponden con los ideales primos minimales de A/I), entonces

$$(I)_0 = (p_{x_1})_0 \cup \ldots \cup (p_{x_n})_0 = \bar{x}_1 \cup \ldots \cup \bar{x}_n.$$

2.5.2. Espectro primo y soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas

18. Teorema: *Consideremos un sistema de ecuaciones k-algebraicas*

$$\begin{array}{rcl} p_1(x_1,\ldots,x_n) & = & 0 \\ \cdots & = & 0 \\ p_r(x_1,\ldots,x_n) & = & 0 \end{array}$$

y sea k' una k-extensión de cuerpos algebraicamente cerrada y de grado de trascendencia mayor o igual que n. Dadas $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in k'^n$, diremos que $\alpha \sim \beta$ si existe $\tau \in Aut_{k-alg} k'$, tal que

$$\tau(\alpha) := (\tau(\alpha_1), \ldots, \tau(\alpha_n)) = \beta.$$

Se cumple que

$$\begin{array}{rcl} \{\alpha \in k'^n : p_1(\alpha) = \cdots = p_r(\alpha) = 0\}\Big/ \sim & = & \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) \\ [\alpha] & \longmapsto & \mathfrak{p}_\alpha := \{\bar{p} \in k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r) \colon p(\alpha) = 0\} \end{array}$$

Demostración. Demos la asignación inversa.

Dado un ideal primo $\mathfrak{p}_y \subset A$, sea $k(y) := (A/\mathfrak{p}_y)_y$ el cuerpo residual de y. Existe un morfismo $i\colon k(y) \hookrightarrow k'$ porque el cierre algebraico de $k(y)$ es igual al cierre algebraico de un cuerpo de funciones racionales en s variables, con $s = \operatorname{gr}\operatorname{tr}_k k(y) \leq n$ y k' es igual al cierre algebraico de un cuerpo de funciones racionales en $m \geq n$ variables.

Veamos que dado otro morfismo $j\colon k(y) \to k'$ entonces existe $\tau \in Aut_{k-alg} k'$ tal que $i = \tau \circ j$. Pensemos i como una inclusión y sea $z_1,\dots,z_s \in k'$ una base de k-trascendencia de $k(y)$. Componiendo j con un automorfismo τ' de k' podemos suponer que $z'_l := j(z_l)$ es igual a z_l, para todo $1 \leq l \leq s$. En efecto, sean $z_{s+1},\dots,z_m \in k'$ y $z'_{s+1},\dots,z'_m \in k'$ de modo que $z_1,\dots,z_m$ y $z'_1,\dots,z'_m$ sean bases de k-trascendencia de k'. Sea ahora $\sigma\colon k(z'_1,\dots,z'_m) \to k(z_1,\dots,z_m)$ el morfismo definido por $\sigma(z'_l) = z_l$, para todo l. Por toma de cierres algebraicos, el morfismo σ extiende al automorfismo $\tau'\colon k' \to k'$ buscado. Sea $h\colon k(y)(z_{s+1},\dots,z_m) \to k'$ el morfismo definido por $h = j$ sobre $k(y)$ y $h(z_t) = z_t$, para todo $0 < t \leq m - s$. Hemos obtenido el cierre algebraico de $k(y)(z_{s+1},\dots,z_m)$ vía la inclusión natural en k' y vía h. Por tanto existe un morfismo $\tau\colon k' \to k'$ tal que $\tau \circ h$ es la inclusión natural. En particular, $\tau \circ j$ es el morfismo de inclusión natural i de $k(y)$ en k'.

Denotemos por $\pi\colon A \to k(y)$ el morfismo natural, y sea $f = i \circ \pi\colon A \to k'$. A $\mathfrak{p}_y$ le asignamos $[(f(\bar{x}_1),\dots,f(\bar{x}_m))]$.

Ambas asignaciones son inversas entre sí.

□

19. Sea A una k-álgebra. Dados dos cuerpos K y K' y $x \in Esp A(K)$ y $x' \in Esp A(K')$ diremos que $x \sim x'$ si existe un cuerpo Σ y morfismos $i\colon K \hookrightarrow \Sigma$ e $i'\colon K' \hookrightarrow \Sigma$ tales que $i \circ x = i' \circ x'$. Si $x'' \in Esp A(K'')$ cumple que $x'' \sim x'$, es decir, existen morfismos $\tilde{i}'\colon K' \hookrightarrow \Sigma'$ y $i''\colon K'' \hookrightarrow \Sigma'$ tales que $\tilde{i}' \circ x' = i'' \circ x''$, y definimos $\Sigma'' = (\Sigma \otimes_{K'} \Sigma')/\mathfrak{m}$ (donde $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $\Sigma \otimes_{K'} \Sigma'$), entonces tenemos morfismos naturales $j\colon K \to \Sigma''$, $j(\lambda) := \overline{i(\lambda) \otimes 1}$, $j'\colon K' \to \Sigma''$, $j'(\lambda) := \overline{i'(\lambda) \otimes 1} = \overline{1 \otimes \tilde{i}'(\lambda)}$ y $j''\colon K'' \to \Sigma''$, $j''(\lambda) := \overline{1 \otimes i''(\lambda)}$ de modo que $j \circ x = j' \circ x' = j'' \circ x''$, luego $x \sim x''$.

Dado un punto $y \in \operatorname{Spec} A$, sea $k(y) := (A/\mathfrak{p}_y)_y$ el cuerpo residual de y y denotemos por $\tilde{y} \in Esp A(k(y))$ el morfismo natural $\tilde{y}\colon A \to k(y)$, $\tilde{y}(a) := \frac{a(y)}{1}$.

20. Proposición: *La aplicación* $\operatorname{Spec} A \to \coprod_{k\text{-ext. } K} Esp A(K)\Big/\sim$, $y \mapsto [\tilde{y}]$ *es biyectiva.*

Demostración. Dado $x \in EspA(K)$, si denotamos $\mathfrak{p}_z = \operatorname{Ker} x$, entonces $[\tilde{z}] = [x]$. Es fácil comprobar que $[x] \mapsto \operatorname{Ker} x$ es la asignación inversa. □

2.6. Morfismo inducido en espectros por un morfismo de anillos

Sea $j\colon A \to B$ un morfismo de anillos. Si J es un ideal de B, entonces $j^{-1}(J) := \{a \in A : j(a) \in J\}$ es un ideal de A. Es fácil comprobar que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de B entonces $j^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A. Obtenemos así una aplicación natural

$$j^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A, \quad j^*(\mathfrak{p}) := j^{-1}(\mathfrak{p})$$

1. Teorema: *La aplicación inducida en los espectros por cualquier morfismo de anillos es continua.*

Demostración. Consideremos los morfismos

$$A \xrightarrow{\ j\ } B$$
$$\operatorname{Spec} A \xleftarrow[j^*]{} \operatorname{Spec} B$$

Sea $(I)_0 \subset \operatorname{Spec} A$ un cerrado. Entonces

$$\begin{aligned} j^{*-1}((I)_0) &= \{x \in \operatorname{Spec} B : j^*(x) \in (I)_0\} = \{x \in \operatorname{Spec} B : j^{-1}(\mathfrak{p}_x) \supseteq I\} \\ &= \{x \in \operatorname{Spec} B : \mathfrak{p}_x \supseteq j(I)\} = ((j(I)))_0 \end{aligned}$$

y concluimos que j^* es continua.

□

2.6.1. Espectro de un cociente

2. Teorema: *Sea I un ideal de A. Consideremos los morfismos naturales*

$$A \xrightarrow{\ \pi\ } A/I, \qquad a \stackrel{\pi}{\longmapsto} \bar{a}$$
$$\operatorname{Spec} A \xleftarrow[\pi^*]{} \operatorname{Spec} A/I$$

Se cumple que π^* es un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} A/I$ *con su imagen, que es el cerrado $(I)_0$. Con concisión, $(I)_0 = \operatorname{Spec} A/I$.*

Demostración. Los ideales primos de A/I se corresponden con los ideales primos de A que contienen a I. Explícitamente,

$$\begin{Bmatrix}\text{Ideales primos de } A\\ \text{que contienen a } I\end{Bmatrix} = \{\text{Ideales primos de } A/I\}$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto \pi(\mathfrak{p})$$

$$\pi^{-1}(\mathfrak{p}') \longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{p}'$$

que es justamente el morfismo

$$\operatorname{Spec} A \supseteq (I)_0 \overset{\pi^*}{=\!=\!=} \operatorname{Spec} A/I$$

Lo que demuestra la biyección buscada. Sabemos que π^* es continua, para ver que la biyección es un homeomorfismo, nos falta probar que π^* es cerrada. Igualmente, los ideales primos de A/I que contienen a un ideal J, se corresponden con los ideales primos de A que contienen a $\pi^{-1}(J)$. Es decir, $\pi^*((J)_0) = (\pi^{-1}(J))_0$. Por tanto, π^* es cerrada.

□

3. Corolario: $\operatorname{Spec}(A \times B) = (\operatorname{Spec} A)\coprod(\operatorname{Spec} B)$.

Demostración. Consideremos en el anillo $A \times B$ los ideales $I = A \times 0$, $J = 0 \times B$. Como $I+J = A\times B$ y $I\cap J = 0$, tomando ceros tenemos $(I)_0\cap(J)_0 = \emptyset$ y $(I)_0\cup(J)_0 = \operatorname{Spec}(A\times B)$. Es decir, $\operatorname{Spec}(A \times B) = (I)_0 \coprod (J)_0$.

Para concluir basta observar que, de acuerdo con el teorema anterior,

$$\begin{aligned}(I)_0 &= \operatorname{Spec}(A \times B)/I = \operatorname{Spec} B\\ (J)_0 &= \operatorname{Spec}(A \times B)/J = \operatorname{Spec} A\end{aligned}$$

□

Explícitamente, los ideales primos de $A \times B$ son de la forma $\mathfrak{p} \times B$ o $A \times \mathfrak{q}$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A y $\mathfrak{q}$ es un ideal primo de B.

4. Ejercicio: Sean X e Y espacios topológicos y consideremos el espacio topológico $X \coprod Y$. Demuestra que

$$C(X \coprod Y) = C(X) \times C(Y)$$

Justifica la frase "$A \times B$ es el anillo de funciones de $\operatorname{Spec} A \coprod \operatorname{Spec} B$".

2.6.2. Espectro de una localización

Nuestro primer objetivo es mostrar que el proceso algebraico de división se va a corresponder con el proceso topológico de localización.

Dado un morfismo de anillos $j\colon A \to B$, cuando no cause confusión, seguiremos las siguientes notaciones: dado un ideal J de B, escribiremos $j^{-1}(J) = J \cap A$, dado un ideal I de A escribiremos $(j(I)) = j(I) \cdot B = I \cdot B$.

5. Teorema : *Consideremos el morfismo $j\colon A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$, de localización por S. La aplicación inducida $j^*\colon \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$ establece un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} A_S$ con su imagen, que está formada por los puntos de $\operatorname{Spec} A$ donde no se anula ninguna función de S:*

$$\operatorname{Spec} A_S \underset{j^*}{=} \{\textit{ideales primos de } A \textit{ que no cortan a } S\}.$$

Demostración. Las asignaciones

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec} A_S & = & \{\text{Ideales primos de } A \text{ que no cortan a } S\} \subseteq \operatorname{Spec} A \\
\mathfrak{p}' & \xmapsto{\quad j^* \quad} & \mathfrak{p}' \cap A \\
\mathfrak{p} \cdot A_S & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{p}
\end{array}$$

están bien definidas y son inversas entre sí, sin más que comprobar:

1. Si $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo de A_S entonces $\mathfrak{p}' \cap A$ es un ideal primo de A que no corta con S y $(\mathfrak{p}' \cap A) \cdot A_S = \mathfrak{p}'$.

2. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A que no corta con S entonces $\mathfrak{p} \cdot A_S$ es un ideal primo de A_S y $(\mathfrak{p} \cdot A_S) \cap A = \mathfrak{p}$.

Para ver que esta biyección es un homeomorfismo basta observar que $j^*((\frac{a}{s})_0) = j^*((\frac{a}{1})_0) = (a)_0 \cap \operatorname{Im} j^*$. □

6. Ejercicio : Prueba que $\operatorname{Spec} A_{SS'} = \operatorname{Spec} A_S \cap \operatorname{Spec} A_{S'}$.

7. Proposición : *Sean $S, S' \subset A$ dos sistemas multiplicativos. Entonces,* $\operatorname{Spec} A_S = \operatorname{Spec} A_{S'}$ *si y solo si $A_S = A_{SS'} = A_{S'}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Los elementos de S' son invertible en $A_{S'}$, es decir, no se anulan en ningún punto de $\operatorname{Spec} A_{S'}$, luego no se anulan en ningún punto de $\operatorname{Spec} A_S$, es decir, son invertibles en A_S, luego $A_S = (A_S)_{S'} = A_{SS'}$. Igualmente, $A_{S'} = A_{SS'}$.

$\Leftarrow$) Los elementos de S' son invertibles en $A_{S'}$, luego son invertibles en A_S, luego no se anulan en ningún punto de $\operatorname{Spec} A_S$, luego $\operatorname{Spec} A_S \subseteq \operatorname{Spec} A_{S'}$. Igualmente, $\operatorname{Spec} A_{S'} \subseteq \operatorname{Spec} A_S$.

□

8. Notaciones: Sea A un anillo. Si $f \in A$, denotaremos A_f la localización de A por el sistema multiplicativo $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$. Si x es un punto de $\operatorname{Spec} A$, denotaremos por A_x la localización de A por el sistema multiplicativo $S = A \setminus \mathfrak{p}_x$.

Dado $f \in A$, denotaremos $U_f = \operatorname{Spec} A \setminus (f)_0$ y diremos que es un abierto básico. Observemos que el conjunto de los abiertos básicos $\{U_f\}_{f \in A}$ es una base de abiertos de la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$, porque el conjunto de los cerrados básicos $\{(f)_0\}_{f \in A}$ es es una base de cerrados de la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$.

9. Corolario: *El espectro de A_f es igual a* $\operatorname{Spec} A \setminus (f)_0$*:*

$$\operatorname{Spec} A_f = U_f.$$

Demostración. Por el teorema anterior, $\operatorname{Spec} A_f$ se corresponde con los ideales primos $\mathfrak{p}_x$ de A que no cortan con $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$. Que equivale a decir que $\operatorname{Spec} A_f$ se corresponde con los ideales primos $\mathfrak{p}_x$ de A que no contienen a f, es decir, U_f. □

10. Notación: Dado un abierto $U \subseteq \operatorname{Spec} A$, denotaremos $A_U := A_S$, donde $S := \{a \in A : a(x) \neq 0,\ \forall x \in U\}$.

11. Corolario: *Se cumple que $A_f = A_{U_f}$.*

Demostración. Sea $S = \{a \in A : a(x) \neq 0\ \forall x \in U_f\}$. Evidentemente, $f \in S$ y toda $s \in S$ es invertible en A_f (porque no se anulan en ningún punto de $\operatorname{Spec} A_f = U_f$). Luego, $A_f = (A_f)_S = A_S =: A_{U_f}$. □

12. Ejercicio: Sea $C(\mathbb{R}^n)$ el anillo de funciones reales continuas sobre $\mathbb{R}^n$. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $C(U)$ el anillo de funciones reales continuas sobre U y S el sistema multiplicativo formado por las funciones que no se anulan en ningún punto de U. Prueba que existe un isomorfismo natural $C(\mathbb{R}^n)_S = C(U)$. (Pista: Sea d la función distancia. Dada $h \in C(U)$, $s(x) = \frac{d(x, U^c)}{1 + h^2(x)}$ no se anula en U, s y $f = h \cdot s$ son restricción de funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ y $h = \frac{f}{s}$).

13. Proposición: *Si* Spec$A = U \coprod V$*, donde* U *y* V *son abiertos de* Spec$A$*, entonces el morfismo*

$$A \to A_U \times A_V,\ a \mapsto (\frac{a}{1}, \frac{a}{1})$$

es un isomorfismo de anillos.

En particular, un anillo A *es producto directo de dos anillos si y solo si* Spec$A$ *no es conexo.*

Demostración. $U = \operatorname{Spec} A_U$: Evidentemente $U \subseteq \operatorname{Spec} A_U$, porque estamos localizando por funciones que no se anulan en ningún punto de U. Sea $x \in V$ y sea I_U el ideal de funciones que se anula en el cerrado U. Como $(\mathfrak{p}_x + I_U)_0 = (\mathfrak{p}_x)_0 \cap x(I_U)_0 = U = \bar{x} \cap U \subset V \cap U =$, entonces $\mathfrak{p}_x + I_U = A$ y existen $f_1 \in \mathfrak{p}_x$ y $f_2 \in I_U$ tales que $f_1 + f_2 = 1$. Como f_2 se anula en todo los puntos de U, entonces f_1 no se anulan en ningún punto de U y sí se anula en x. Por tanto, $x \notin \operatorname{Spec} A_U$ y $U = \operatorname{Spec} A_U$.

Si $x \in U$, entonces como $\operatorname{Spec} A_x$ es conexo (pues todo cerrado contiene al único punto cerrado, x) entonces $U \cap \operatorname{Spec} A_x = \operatorname{Spec} A_x$ y $V \cap \operatorname{Spec} A_x = \emptyset$. Por tanto, $(A_U)_x = A_x$ (porque $\operatorname{Spec}(A_U)_x = \operatorname{Spec} A_U \cap \operatorname{Spec} A_x = \operatorname{Spec} A_x$) y $(A_V)_x = 0$ (porque $\operatorname{Spec}(A_V)_x = \operatorname{Spec} A_V \cap \operatorname{Spec} A_x = V \cap \operatorname{Spec} A_x = \emptyset$). En consecuencia, para todo $x \in U$, tenemos que $A_x = (A_U \times A_V)_x$. Igualmente, para todo $x \in V$, $A_x = (A_U \times A_V)_x$. Luego, el morfismo $A \to A_U \times A_V$ es isomorfismo.

Por último, si $A = A_1 \times A_2$, entonces $(1,0)\cdot(0,1) = (0,0)$ y $(1,0)+(0,1) = (1,1)$. Por tanto, $\operatorname{Spec} A = ((1,0))_0 \coprod ((0,1))_0$, luego no es conexo.

□

14. Proposición: *Los ideales primos de* A_x *se corresponden con los ideales primos de* A *contenidos en* $\mathfrak{p}_x$*. En particular,* A_x *tiene un único ideal maximal, que es* $\mathfrak{p}_x \cdot A_x$*.*

Demostración. $\operatorname{Spec} A_x$ se corresponde con los ideales primos de A que no cortan con $A \backslash \mathfrak{p}_x$. Es decir, con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}_x$. □

15. Definición: Los anillos con un único ideal maximal se les denomina anillos locales.

"Podemos decir que el anillo de funciones que consideramos en $U_f = \operatorname{Spec} A_f$ es A_f. Si S es el sistema multiplicativo de las funciones de A que no se anulan en ningún punto de U_f, el lector puede probar que $A_f = A_S$. Como es de desear, estamos diciendo que las funciones de U_f, son los cocientes a/b de funciones de Spec$A$, donde b es una función que no se anula en ningún punto de U_f. Dado un punto x, es usual no querer fijar la atención en un entorno dado de x, sino considerar un entorno lo suficientemente pequeño, luego las funciones que no se anulan en x pasan a ser invertibles y consideraremos por tanto el anillo A_x. Así pues, A_x recoge el concepto impreciso de funciones en un entorno suficientemente pequeño de x".

16. Definición: Dado un anillo A, llamaremos radical de A al ideal formado por el conjunto de los elementos nilpotentes de A, es decir, si denotamos por $\operatorname{rad} A$ al radical de A, entonces

$$\operatorname{rad} A = \{a \in A : a^n = 0, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dados $a, b \in A$, si $a^n = 0$ y $b^m = 0$ entonces por la fórmula del binomio de Newton $(a+b)^{n+m} = 0$. Ahora es fácil demostrar que el radical de un anillo es un ideal.

17. Corolario: *El radical de un anillo coincide con la intersección de todos los ideales primos del anillo:*

$$\operatorname{rad} A = \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x.$$

Es decir, una función es nilpotente si y solo si se anula en todo punto del espectro.

Demostración. Si $f \in A$ es nilpotente, i.e., $f^n = 0$ para un $n \in \mathbb{N}$, entonces f ha de pertenecer a todo ideal primo de A. Luego $\operatorname{rad} A \subseteq \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$.

Sea ahora $f \in \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$. Por el corolario 2.6.9, $\operatorname{Spec} A_f = \emptyset$. Por tanto, $A_f = 0$, es decir, $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$. Luego existe un $f^n \in \{1, f, f^2, \dots\}$, de modo que $f^n \cdot 1 = 0$. Entonces, f es nilpotente. En conclusión $\operatorname{rad} A \supseteq \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$ y hemos terminado. □

Observemos que $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{rad} A)$.

18. Definición: Se dice que un anillo A es reducido si $\operatorname{rad} A = 0$.

Dado un anillo A se cumple que $A/\operatorname{rad} A$ es reducido: dado $\bar{a} \in (A/\operatorname{rad} A)$ si $\bar{a}^n = 0$, entonces $a^n \in \operatorname{rad} A$, luego $a \in \operatorname{rad} A$ y $\bar{a} = 0$.

19. Definición: Dado un ideal $I \subseteq A$, llamaremos radical de I, y lo denotaremos $r(I)$, a

$$r(I) := \{a \in A : a^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

20. Proposición: *Se cumple que* $r(I) = \bigcap_{x \in (I)_0} \mathfrak{p}_x$.

Demostración. $a \in r(I) \iff$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I \iff$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{a}^n = 0 \in A/I \iff \bar{a} \in \bigcap_{y \in \operatorname{Spec} A/I} \mathfrak{p}_y \iff a \in \bigcap_{x \in (I)_0} \mathfrak{p}_x$.

□

21. Corolario: *Sean $I, J \subset A$ dos ideales. Entonces,*

$$(I)_0 = (J)_0 \iff r(I) = r(J).$$

Demostración. $\Rightarrow$) $r(I) = \bigcap_{x \in (I)_0} \mathfrak{p}_x = \bigcap_{x \in (J)_0} \mathfrak{p}_x = r(J)$.

$\Leftarrow$) $(I)_0 = (r(I))_0 = (r(J))_0 = (J)_0$.

□

Se dice que un ideal $I \subset A$ es radical si $r(I) = I$. Por el corolario anterior, tenemos la biyección

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Cerrados de } \operatorname{Spec} A\} & = & \{\text{Ideales radicales de } C\} \\ C & \longmapsto & I_C = \bigcap_{x \in C} \mathfrak{p}_x \\ (I)_0 & \longleftarrow\!\shortmid & I \end{array}$$

22. Proposición: *Sea A un anillo noetheriano e $I \underset{\neq}{\subset} A$ un ideal radical. Sean $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ los ideales primos mínimos conteniendo a I (que se corresponden con los ideales primos mínimos de A/I), entonces*

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n.$$

Demostración. Por ser I radical coincide con la intersección de todos los ideales primos que lo contienen, que coincide con la intersección de los ideales primos mínimos conteniendo a I.

□

2.6.3. Fórmula de la fibra

Dado un morfismo de anillos $j\colon A \to B$ y un sistema multiplicativo S en A, escribiremos $B_{j(S)} = B_S$. Igualmente, dado un ideal primo $\mathfrak{p}_x$ de A, escribiremos $B_{j(A \setminus \mathfrak{p}_x)} = B_x$.

23. Fórmula de la fibra : *Sea $j\colon A \to B$ un morfismo de anillos y consideremos el morfismo inducido $j^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. Dado un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ se verifica*

$$j^{*-1}(x) = \operatorname{Spec}(B_x/\mathfrak{p}_x \cdot B_x).$$

Si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo minimal se verifica $j^{*-1}(x) = \operatorname{Spec} B_x$.
Si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo maximal se verifica $j^{*-1}(x) = \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{p}_x \cdot B)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} j^{*-1}(x) &= \{y \in \operatorname{Spec} B : j^{-1}(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x\} \\ &= \{y \in \operatorname{Spec} B : j^{-1}(\mathfrak{p}_y) \subseteq \mathfrak{p}_x \text{ y } \mathfrak{p}_x \subseteq j^{-1}(\mathfrak{p}_y)\} \qquad (*) \\ &= \{y \in \operatorname{Spec} B : j^{-1}(\mathfrak{p}_y) \cap (A \backslash \mathfrak{p}_x) = \emptyset \text{ y } \mathfrak{p}_x \subseteq j^{-1}(\mathfrak{p}_y)\} \\ &= \{y \in \operatorname{Spec} B : \mathfrak{p}_y \cap j((A \backslash \mathfrak{p}_x)) = \emptyset \text{ y } j(\mathfrak{p}_x) \subseteq \mathfrak{p}_y\} \\ &= \{y \in \operatorname{Spec} B_x : j(\mathfrak{p}_x) \subseteq \mathfrak{p}_y\} = \operatorname{Spec}(B_x/\mathfrak{p}_x \cdot B_x). \end{aligned}$$

Las dos afirmaciones siguientes de la proposición, se deducen de que en $(*)$ podemos prescindir de una de las dos condiciones, en la primera afirmación de la segunda condición y en la segunda afirmación de la primera condición.

□

Observemos que las fibras pueden ser vacías, pues si un anillo $C = 0$ entonces $\operatorname{Spec} C = \emptyset$.

24. Ejemplo : Calculemos $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]$ usando la fórmula de la fibra. Consideremos el morfismo $i : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x,y], p(x) \mapsto p(x)$ y sea $i^* : \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y] \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$ el morfismo inducido en los espectros. Cada punto de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]$ está en la fibra de un único punto de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$, así que vamos a calcular tales fibras.

Los ideales primos de $\mathbb{C}[x]$ son el ideal (0) y los ideales maximales $\mathfrak{m}_\alpha = (x-\alpha)$. Según la fórmula de la fibra

$$i^{*-1}(\alpha) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]/\mathfrak{m}_\alpha \mathbb{C}[x,y] = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]/(x-\alpha).$$

Ahora bien, $\mathbb{C}[x,y]/(x-\alpha) \simeq \mathbb{C}[y]$, $x \mapsto \alpha, y \mapsto y$. Luego,

$$i^{*-1}(\alpha) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[y] = \{(0), (y-\beta)\ \forall \beta \in \mathbb{C}\}$$

que se corresponden con los ideales primos de $\mathbb{C}[x,y]$, $\{(x-\alpha), (x-\alpha, y-\beta)\ \forall \beta \in \mathbb{C}\}$.

Solo nos falta calcular la fibra de $(0) = \mathfrak{p}_g$

$$i^{*-1}(g) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]_{\mathbb{C}[x]-\backslash(0)} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}(x)[y]$$

Los ideales primos no nulos de $\mathbb{C}(x)[y]$ están generados por un polinomio irreducible con coeficientes en $\mathbb{C}(x)$ de grado mayor o igual que 1 en y. Por el lema de Gauss se corresponden con los polinomios $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ irreducibles de grado mayor o igual que 1 en y. Por tanto, $i^{*-1}(g)$ está formado por los ideales primos $(p(x,y))$, (0) (donde $p(x,y)$ es un polinomio irreducible de grado mayor o igual que 1 en y)

En resumen, los puntos de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y] \underset{\text{Not}}{=} \mathbb{A}_2(\mathbb{C})$ son

1. Los puntos cerrados (α,β), es decir, los ideales primos $(x-\alpha, y-\beta)$.
2. Los puntos genéricos de las “curvas” irreducibles $(p(x,y))_0$, es decir, los ideales primos $(p(x,y))$, $p(x,y)$ irreducible.
3. El punto genérico del plano afín $(0)_0 = \mathbb{A}_2(\mathbb{C})$, es decir, el ideal primo (0).

25. Ejemplo : Calculemos $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(q(x,y))$. Consideremos la descomposición en producto de polinomios irreducibles $q(x,y) = q_1(x,y)^{n_1}\cdots q_r(x,y)^{n_r}$, que no difieran en factores constantes. Tenemos que

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(q(x,y)) = (q(x,y))_0 = \bigcup_{i=1}^{r}(q_i(x,y))_0$$

que son:

1. Los ideales maximales $(\overline{x-\alpha},\overline{y-\beta})$ tales que $(q(x,y))\subseteq(x-\alpha,y-\beta)$. Es decir, con otras notaciones, los puntos (α,β) tales que $q(\alpha,\beta)=0$.
2. Los puntos genéricos de las curvas irreducibles $(q_i(x,y))_0$, es decir, los ideales primos $(\overline{q_i(x,y)})$.

26. Proposición: *Sea $f\colon A\hookrightarrow B$ un morfismo inyectivo de anillos. Entonces, la imagen del morfismo $f^*\colon \operatorname{Spec}B\to\operatorname{Spec}A$ es densa.*

Demostración. Sea $x\in\operatorname{Spec}A$ el punto genérico de una componente irreducible de $\operatorname{Spec}A$ (es decir, $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo minimal de A). Por la fórmula de la fibra $f^{*-1}(x) = \operatorname{Spec}B_x \neq \emptyset$, porque $B_x\neq 0$, ya que $1\neq 0$ en B_x. En conclusión, $x\in\operatorname{Im}f^*$ y $\overline{\operatorname{Im}f^*} = \operatorname{Spec}A$. □

27. Proposición : *Sea $f\colon A\to B$ un morfismo de anillos y $f^*\colon\operatorname{Spec}B\to\operatorname{Spec}A$ la aplicación inducida en los espectros. Sea $J\subset B$ un ideal, entonces*

$$\overline{f^*((J)_0)} = (f^{-1}(J))_0.$$

Demostración. Consideremos los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/f^{-1}(J) \arrow[r] & B/J \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}A & & \operatorname{Spec}B \arrow[ll, "f^*"'] \\ (f^{-1}(J))_0 = \operatorname{Spec}A/(J\cap A) \arrow[u, hook] & & \operatorname{Spec}B/J = (J)_0 \arrow[ll, "f^*_{|(J)_0}"] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Como el morfismo $A/f^{-1}(J)\hookrightarrow B/J$ es inyectivo, entonces $\overline{f^*((J)_0)} = (f^{-1}(J))_0$.

□

2.7. Cuestionario

1. Calcula el espectro racional de la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2+1)$. Calcula el espectro racional de la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1,x-y)$.

2. Sea $A=k[x,y]$ e $I=(x+y,(x^2+y^2-1)^2)\subset k[x,y]$. Calcula $(I)_0\cap \operatorname{Spec}_{rac} A$.

3. Sea A un anillo íntegro. Calcula las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec} A$.

4. ¿Tiene $\operatorname{Spec} A$ tantos cerrados irreducibles como puntos?¿Tiene $\operatorname{Spec} A$ tantas componentes irreducibles como ideales primos minimales hay en A? Si A es noetheriano ¿$\operatorname{Spec} A$ es unión de un número infinito de componentes irreducibles distintas?

5. ¿Es la intersección de ideales radicales un ideal radical?

6. Sea $I\subset A$ un ideal. Prueba que $r(r(I))=r(I)$.

7. Sea I un ideal de un anillo noetheriano. Prueba que $I=r(I)$ si y sólo si I es intersección de un número finito de ideales primos.

8. Consideremos el morfismo de anillos $i\colon \mathbb{C}[x]\hookrightarrow \mathbb{C}[x,y]/(xy-1)$, $i(p(x)):=\overline{p(x)}$ y la aplicación i^* inducida en los espectros. Calcula un punto $z\in \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]$ tal que $i^{*-1}(z)=\emptyset$.

2.8. Biografía de Zariski

ZARISKI BIOGRAPHY

Oscar Zariski's father was Bezalel Zaritsky and his mother Hannah Zaritsky. Oscar, born into this Jewish family, was named Ascher Zaritsky by his parents. We will comment below on how his name came to be changed to the now familiar version of Oscar Zariski.

Oscar's mother was the one who ensured that her young son had a good education. A tutor was provided for Oscar from the time he was seven years old and Oscar, under the guidance of the tutor, showed remarkable aptitude for the Russian language and for arithmetic. When the fighting associated with World War I reached Belarus, Oscar's family fled to Chernigov in the Ukraine. It was the first of several moves forced on him by political problems.

Unable to enter the faculty of mathematics at the University of Kiev as all the places were full, he chose philosophy instead. He was a student of philosophy at Kiev from 1918 to 1920. However he was able to pursue his mathematical interests and studied algebra and number theory in addition to philosophy. However Zariski had carried out his studies through a period of turmoil in Kiev.

In January 1918 Ukraine had become an independent state with Kiev as its capital. In the following month minor uprisings by workers in Kiev were suppressed but Red Army troops entered Kiev to give support to the workers. Kiev was then occupied by the Germans, but with the end of the war in November 1918, an independent Ukraine was declared again in Kiev. In November 1919 Kiev was briefly taken by the White armies, soon after to be replaced by the Red Army. There then followed the Russian-Polish War and, in May 1920, the Polish army captured Kiev but were forced out in a counterattack. Life for Zariski was just too difficult in this city so devastated by war, so he decided to go to Italy to continue his studies.

In Rome Zariski came under the influence of the great algebraic geometers Castelnuovo, Enriques and Severi. He obtained a doctorate from Rome in 1924 for a doctoral thesis on a topic related to Galois theory which was proposed to him by Castelnuovo. Zariski married in 1924; having met his future wife Yole Cagli in Rome they returned to Zariski's home town of Kobin to marry. Returning to Rome he remained there as a fellow of the International Education Board until 1927.

It was while Zariski was in Rome that Enriques suggested that Ascher Zaritsky, as he was then called, change his name to the Italian sounding Oscar Zariski. This was the name which he used on his first publication which was a joint paper with Enriques. Zariski wrote of how his mathematical interests differed from those of his supervisors Castelnuovo and Enriques:

However, even during my Rome period, my algebraic tendencies were showing and were clearly perceived by Castelnuovo who once told me: "You are here with us but are not one of us."This was said not in reproach but good naturedly, for Castelnuovo himself told me time and time again that the methods of the Italian geometric school had done all they could do, had reached a dead end, and were inadequate for further progress in the field of algebraic geometry.

Zariski had gone to Italy to escape the problems in Belarus and the Ukraine. However, the political situation in Italy began to deteriorate rapidly. In October 1922 Mussolini organized the Fascist "March on Rome" and he was asked to form a government. For 18 months he ran the country in reasonably democratic way but, during the years 1925 to 1927, he removed the right of free speech, and removed opposition parties and trade unions. The Fascist hatred of Jews made life for Zariski, because of his Jewish background, particularly difficult.

Helped by Lefschetz, he escaped from the political problems of Italy in 1927 and went to the United States. There he taught at Johns Hopkins University, being a Johnston Scholar until 1929 when he joined the Faculty. He became a full professor at Johns Hopkins in 1937.

Castelnuovo and Severi had encouraged Zariski to view Lefschetz's topological methods as being the road ahead for algebraic geometry, so between 1927 and 1937 Zariski frequently visited Lefschetz at Princeton. Zariski wrote :

I owe a great deal to [Lefschetz] for his inspiring guidance and encouragement.

During this period Zariski wrote Algebraic Surfaces which was published in 1935. He explained how writing this monograph changed the direction of his work:

At that time (1935) modern algebra had already come to life (through the work of Emmy Noether and the important treatise of BL van der Waerden), but while it was being applied to some aspects of the foundations of algebraic geometry by van der Waerden ... the deeper aspects of birational algebraic geometry ... were largely, or even entirely, virgin territory as far as algebraic exploration was concerned. In [Algebraic Surfaces] I tried my best to present the underlying ideas of the ingenious geometric methods and proofs with which the Italian geometers were handling these deeper aspects of the whole theory of surfaces ... I began to feel distinctly unhappy about the rigour of the original proofs (without losing in the least my admiration for the imaginative geometric spirit that permeated these proofs); I became convinced that the whole structure must be done over again by purely algebraic methods.

At Johns Hopkins University between 1939 and 1940 Zariski carried out his project of applying modern algebra to the foundations of algebraic geometry. He worked on the theory of normal varieties, local uniformisation and the reduction of singularities of algebraic varieties.

An important year for Zariski was 1945 which he spent in São Paolo. There he gave a lecture course three days each week which was attended by André Weil and nobody else. Both Zariski and Weil learnt much in discussions, often arguments, about the material that Zariski was presenting. After spending the year 1946-47 at the University of Illinois, Zariski was appointed to a chair at Harvard where he was to remain until he retired in 1969. From the late 1970s he suffered from Alzheimer's disease and his last few years were difficult ones as his health failed.

In 1981 Zariski was awarded the Steele Prize by the American Mathematical Society for the cumulative influence of his total mathematical research. The citation for the prize summarised Zariski's contributions to mathematics throughout his life:

After beginning his work in Italy in 1924 very much in the style of Ïtalian algebraic geometry,"Zariski realised that the whole subject needed proper foundations. Thus in the period 1927 to 1937 he turned first to topological questions and then in 1937 he began to lay the commutative algebraic foundations of his subject. His topological work concentrated mainly on the fundamental group; many of the ideas he pioneered were in-

novations in topology as well as algebraic geometry and have developed independently in the two fields since then.

In 1937 Zariski completely reoriented his research and began to introduce ideas from abstract algebra into algebraic geometry. Indeed, together with BL van der Waerden and André Weil, he completely reworked the foundations of the subject without the use of topological or analytic methods. His use of the notions of integral independence, valuation rings, and regular local rings, in algebraic geometry proved particularly fruitful and led him to such high points as the resolution of singularities for threefolds in characteristic 0 in 1944, the clarification of the notion of simple point in 1947, and the theory of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields. The theory of equisingularity and saturation begun by Zariski in 1965 has also been of great influence and importance.

All of Zariski's work has served as a basis for the present flowering of algebraic geometry and the current school uses his work and ideas in the modern development of the subject.

Zariski's most famous book is Commutative Algebra, a two volume work written jointly with P Samuel. The first volume appeared in 1958, the second in 1960.

The American Mathematical Society played a large role in Zariski's life and he contributed greatly to the Society over many years. He was vice president of the Society between 1960 and 1961 and president of the Society from 1969 to 1970.

Zariski played an important role in mathematical publishing after his appointment as a full professor. He was an editor of the American Mathematical Journal from 1937 to 1941, served as a member of the editorial committee of the Transactions of the American Mathematical Society from 1941 to 1947, and also served on the editorial boards of the Annals of Mathematics and the American Journal of Mathematics.

After going to the United States in 1927 Zariski spent considerable periods lecturing at other universities both in the United States and in other countries. We have already mentioned that he was a visiting professor at São Paulo in 1945 and a visiting professor at the University of Illinois in 1946-47. Before that, in 1936, he had lectured at the University of Moscow. Later, he lectured at Kyoto (1956), the Institut des Hautes Études Scientifique (1961 and again 1967), and the University of Cambridge (1972).

He was awarded many honours for his work in addition to the Steele Prize described above. He was awarded the Cole Prize in Algebra from the American Mathematical Society in 1944 for four papers on algebraic varieties, two published in the American Journal of Mathematics in 1939 and 1940, and the other two in the Annals of Mathematics also one in 1939 and the second in 1940. He was awarded the National Medal of Science in 1965.

Many academies and societies have honoured him by electing him to membership, including the U.S. National Academy of Sciences (1944), the American Academy of Arts and Sciences (1948), the American Philosophical Society (1951), the Brazilian Academy of Sciences (1958), and the Accademia Nazionale dei Lincei (1958).

Article by: J J O'Connor and E F Robertson (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/).

2.9. Problemas

1. Prueba que "los puntos de $\operatorname{Esp} A_S$ se identifican con los puntos de $\operatorname{Esp} A$ donde todas las $s \in S$ son invertibles".

2. Sea $S^1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \colon \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$ y consideremos la aplicación $\pi \colon S^1 \to \mathbb{R}$, donde $\pi(p) \in \mathbb{R}$ es el número real tal que la recta que pasa por $(2,2)$ y p pasa por $(\pi(p), 0)$. Calcula un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $f \colon \mathbb{R}[x] \to (\mathbb{R}[x,y]/(x^2 + y^2 - 1))_{y-2}$ tal que la aplicación inducida entre los espectros racionales sea igual a π.

3. Sea A una k-álgebra, $I \subset A$ un ideal y denotemos $(I)_0^{rac} := (I)_0 \cap \operatorname{Spec}_{rac} A$. Prueba que

   a) $(0)_0^{rac} = \operatorname{Spec}_{rac} A$ y $(A)_0^{rac} = \emptyset$.
   b) $(\sum_{j \in J} I_j)_0^{rac} = \bigcap_{j \in J} (I_j)_0^{rac}$.
   c) $(I_1 \cap I_2)_0^{rac} = (I_1)_0^{rac} \cup (I_2)_0^{rac}$.
   d) $(I)_0^{rac} = \operatorname{Spec}_{rac}(A/I)$.

4. Da un ejemplo de $\mathbb{R}$-álgebra cuyo espectro racional se identifique con dos puntos unidos disjuntamente con la intersección de un plano con un cono.

5. Sea A una k-álgebra y $S \subset A$ un sistema multiplicativo. Prueba que $\operatorname{Spec}_{rac} A_S = \{z \in \operatorname{Spec}_{rac} A \colon s(z) \neq 0 \ \forall s \in S\}$..

6. Sean X un espacio topológico compactos Hausdorff y $C(X)$ su $\mathbb{R}$-álgebra de funciones reales continuas. Consideremos $\operatorname{Spec}_{rac} C(X)$ como subespacio topológico de $\operatorname{Spec} C(X)$. Prueba

   a) La aplicación $X \to \operatorname{Spec}_{rac} C(X)$, $p \mapsto \mathfrak{m}_p := \{f \in C(X) \colon f(p) = 0\}$ es un homeomorfismo.
   b) Sea Y otro espacio topológico compacto Hausdorff. La aplicación
   $$\operatorname{Hom}_{\text{cont.}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}-\text{alg}}(C(Y), C(X)),\ \phi \mapsto \phi^* \text{ (donde } \phi^*(f) := f \circ \phi).$$
   es biyectiva.

c) Sea $Y \subset X$ un subespacio cerrado e $I = \{f \in C(X) \colon f_{|Y} = 0\}$. $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}-rac} C(X)/I$ es homeomorfo a Y.

7. Prueba que un anillo A es el producto directo de dos anillos (no nulos) si y solo si $\operatorname{Spec} A$ no es conexo.

8. Demuestra que $A = \mathbb{Q}[x, x_1, \dots, x_n, \dots]/((x-n)x_n)_{\{n\in\mathbb{N}\}}$ es localmente noetheriano pero no es noetheriano.

9. Lema de Nakayama: Sea $\mathcal{O}$ un anillo local (i.e., con un único ideal maximal $\mathfrak{m}$) y M un $\mathcal{O}$-módulo finito generado. Prueba que $\mathfrak{m} \cdot M = M$ si y solo si $M = 0$. Prueba que $m_1, \dots, m_n$ generan M si y sólo si $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n$ generan el $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$-espacio vectorial $M/\mathfrak{m} \cdot M$.

10. Sea $C(X)$ el anillo de las funciones reales continuas sobre un espacio topológico métrico (X, d) y sea x un punto de X no aislado. Consideremos el ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $C(X)$ formado por las funciones que se anulan en x. Sea $\mathcal{O}$ el anillo de gérmenes en x de funciones reales continuas.

    a) Prueba que $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x^2$. (Indicación: Si $f \in \mathfrak{m}_x$, entonces $f = \sup(f,0) - \sup(-f,0)$ y $\sqrt{\sup(f,0)}$, $\sqrt{\sup(-f,0)} \in \mathfrak{m}_x$).
    b) Prueba que el anillo $C(X)$ no es noetheriano.
    c) Prueba que $C(X)_x \to \mathcal{O}$, $\frac{f}{g} \mapsto [f] \cdot [g]^{-1}$ es un isomorfismo de anillos.

11. Sea $\mathfrak{m}_{or}$ el ideal maximal de $C^\infty(\mathbb{R})$ formado por las funciones que se anulan en el punto 0. Prueba que $\mathcal{O} = C^\infty(\mathbb{R})_{or}$ es el anillo de gérmenes de funciones diferenciables en el punto 0. Sea I el ideal de $\mathcal{O}$ formado por los gérmenes cuya serie de Taylor en 0 es nula. Prueba que $xI = I$ y concluye que el anillo $\mathcal{O}$ no es noetheriano.

12. Sean $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{Spec} A$ e $I \subset A$ un ideal.

    a) Si $I \subseteq \mathfrak{p}_{x_1} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{x_n}$, prueba que $I \subseteq \mathfrak{p}_{x_i}$, para algún i.
    b) Sea $S = A \setminus \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \mathfrak{p}_{x_i}$. Prueba que $\operatorname{Spec} A_S = \overset{n}{\underset{i}{\cup}} \operatorname{Spec} A_{x_i}$. Por tanto, A_S es un anillo semilocal[1] de ideales maximales $\mathfrak{p}_{x_i} \cdot A_S$ (con $\mathfrak{p}_{x_i}$ no incluido en $\mathfrak{p}_{x_j}$, para ningún $j \neq i$).

13. Prueba que si $\operatorname{Spec} A$ es unión disjunta de dos abiertos U y V, entonces estos abiertos son básicos.

[1]Un anillo se dice que es semilocal si solo tiene un número finito de ideales maximales.

14. Prueba que un anillo A es íntegro si y solo si es reducido y $\operatorname{Spec} A$ es irreducible.

15. Calcula $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$.

Capítulo 3

Variedades algebraicas

3.1. Introducción

El conjunto X de soluciones de un sistema de ecuaciones $\mathbb{C}$-algebraicas

$$\begin{array}{rcl} p_1(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \\ & \cdots & \\ p_r(x_1,\dots,x_n) & = & 0 \end{array}$$

es esencialmente equivalente al estudio de su anillo de funciones algebraicas $A = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ (junto con $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$).

La cadena de cerrados irreducibles

$$\{\text{punto } p\} \subset \{\text{Curva irred. } C\} \subset \{\text{Superficie irred. } S\} \subset \cdots \text{ de } X$$

se corresponde con la cadena de ideales primos

$$\mathfrak{p}_p \supset \mathfrak{p}_C \supset \mathfrak{p}_S \supset \cdots, \text{ de } A$$

donde $\mathfrak{p}_p = \{\overline{p(x)} \in A : p(p) = 0\}$, $\mathfrak{p}_C = \{\overline{p(x)} \in A : p(q) = 0, \forall\, q \in C\}$ y $\mathfrak{p}_S = \{\overline{p(x)} \in A : p(q) = 0, \forall\, q \in S\}$. Definiremos la dimensión de Krull de A como el número de eslabones de la cadena de inclusiones más larga de ideales primos. El resultado principal será teorema de normalización de Noether, que nos dice que (cuando A es íntegro) existe un morfismo $\pi\colon X \to \mathbb{A}^s$ de fibras finitas, es decir, en términos de los anillos, existe un morfismo finito inyectivo $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_s] \hookrightarrow A$. Probaremos que el grado de trascendencia de $A_{A\setminus 0}$ es igual al dimensión de Krull de A y el teorema de los ceros de Krull, que afirma que los ceros de toda $f \in A$, ni nula ni invertible, es es un hisuperficie de codimensión 1 de $\operatorname{Spec} A$. Probaremos también el teorema de los ceros de Hilbert que dice que los cerrados de X están determinados por los puntos cerrados que contiene y que éstos últimos son racionales, etc.

3.2. Morfismos finitos

1. Definición: Un morfismo de anillos $f: A \to B$ se dice que es finito si B es un A-módulo finito generado, con la estructura natural de A-módulo que define f en B ($a \cdot b := f(a) \cdot b$). En este caso, también se dice que B es una A-álgebra finita.

2. Ejemplos: Por definición, una extensión de cuerpos $k \hookrightarrow K$ es finita si y solo si el morfismo $k \hookrightarrow K$ es finito.

El morfismo de anillos $A \to A[x]/(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$ es finito, ya que $\bar{1}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{n-1}$ es una base del A-módulo $A[x]/(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$.

3. Proposición: *La composición de morfismos finitos es finito.*

Demostración. Sean $A \overset{\text{finito}}{\longrightarrow} B \overset{\text{finito}}{\longrightarrow} C$. Es decir, $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$ y $C = Bc_1 + \cdots + Bc_m$. Luego,

$$C = (Ab_1 + \cdots + Ab_n)c_1 + \cdots + (Ab_1 + \cdots + Ab_n)c_m = \sum_{i=1,j=1}^{n,m} Ab_i c_j$$

En conclusión, $A \to C$ es un morfismo finito.

□

4. Los morfismos finitos son estables por cambio de anillo base: *Si $A \to B$ es un morfismo de anillos finito y $A \to C$ un morfismo de anillos, entonces el morfismo de anillos $C = A \otimes_A C \to B \otimes_A C$ es finito.*

Demostración. Basta que probemos que si M es un A-módulo finito generado, entonces $M \otimes_A C$ es un C-módulo finito generado. En efecto, si el A-módulo M está generado por $m_1, \ldots, m_n$, entonces el C-módulo $M \otimes_A C$ está generado por $m_1 \otimes 1, \ldots, m_n \otimes 1$.

□

5. Corolario: *Si $A \to B$ es un morfismo finito, entonces $A_S \to B_S$ y $A/I \to B/I \cdot B$ son morfismos finitos*

6. Definición: Sea $A \to B$ un morfismo de anillos. Se dice que $b \in B$ es entero sobre A si verifica una relación del tipo

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad \text{con } a_i \in A$$

7. El teorema de Hamilton-Cayley para los endomorfismos de espacios vectoriales de dimensión finita también es cierto para los endomorfismos de módulos. Con precisión, sea $M = \langle m_1,\dots,m_r\rangle$ un A-módulo finito generado, $f\colon M\to M$, $f(m_i)=\sum_j a_{ij}m_j$ un endomorfismo de A-módulos; si $p_c(x) = |x\cdot \mathrm{Id}-(a_{ij})|$ es el polinomio característico de la matriz (a_{ij}), entonces $p_c(f)=0$. Basta que probemos que $p_c((a_{ij}))=0$. Consideremos la matriz (x_{ij}) de coeficientes variables y el polinomio característico de esta matriz $P_c(x) = |x\cdot\mathrm{Id}-(x_{ij})|$. $P_c(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}[x_{ij}]\subset\mathbb{Q}(x_{ij})$. Por el teorema de Hamilton-Cayley $P_c((x_{ij}))=0$. Por tanto, tomando $x_{ij}=a_{ij}$, es decir, considerando el morfismo $M_n(\mathbb{Z}[x_{ij}]_{0<i,j\le r})\to M_n(A)$, $(q_{rs}(x_{ij}))\mapsto(q_{rs}(a_{ij}))$, obtendremos que $0=P_c((x_{ij}))\mapsto p_c((a_{ij}))=0$.

8. Proposición: *Sean $f\colon A\to B$ un morfismo de anillos y $b\in B$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *b es entero sobre A.*
2. *El morfismo de anillos $A\to A[b]=\{p(b)\in B,\ \forall\, p(x)\in A[x]\}$ es finito.*
3. *b pertenece a una A-subálgebra finita de B.*

Demostración. 1. ⇒ 2. Sea $p(x)$ un polinomio mónico de grado n con coeficientes en A que anula a b. Entonces $A[b]$ es un cociente de $A[x]/(p(x))$. Como $A[x]/(p(x))$ es un A-módulo generado por $\bar 1,\dots,\bar x^{n-1}$, entonces es finito generado y $A[b]$ también.

2. ⇒ 3. En efecto, $b\in A[b]$.

3. ⇒ 1. Sea $C\subseteq B$ una A-subálgebra finita tal que $b\in C$. Consideremos el endomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\cdot b} & C \\ c & \longmapsto & c\cdot b \end{array}$$

Si (a_{ij}) es una matriz asociada a $\cdot b$ en un sistema generador del A-módulo C, entonces el polinomio característico de (a_{ij}) anula a $\cdot b$, luego anula a b, luego b es entero sobre A.

□

9. Ejemplo: Si α es una raíz n-ésima de la unidad, entonces $\mathbb{Q}\hookrightarrow\mathbb{Q}[\alpha]$ es un morfismo finito.

10. Ejemplo: El morfismo $\operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2-x^2+x^3)\to\operatorname{Spec} k[x]$ definido por $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha$ es un morfismo finito.

11. Proposición: *Sea $f: A \to B$ un morfismo de anillos. El conjunto de elementos de B enteros sobre A forman una A-subálgebra de B.*

Demostración. Sean $b_1, b_2 \in B$ enteros sobre A. Tenemos que $A \to A[b_1]$ es un morfismo finito, y $A[b_1] \to A[b_1, b_2]$ es un morfismo finito porque si b_2 verifica una relación entera con coeficientes en A, en particular la verifica con coeficientes en $A[b_1]$. Por tanto, por la proposición 3.2.3, $A \to A[b_1, b_2]$ es un morfismo finito. Por la proposición 3.2.8, todo elemento $p(b_1, b_2) \in A[b_1, b_2] \in B$, con $p(x, y) \in A[x, y]$, es entero sobre A. □

12. Definiciones: Se dice que un morfismo de anillos $A \to B$ es entero si todo elemento de B es entero sobre A, es decir, si B es unión de A-subálgebras finitas.

Llamaremos cierre entero de A en B al subanillo de B formado por todos los elementos de B enteros sobre A.

Diremos que un anillo íntegro A es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones Σ, si todo elemento de Σ entero sobre A pertenece a A. También se dice que A es un anillo normal.

Dejamos que el lector pruebe que el cierre entero de un anillo íntegro en su cuerpo de fracciones es un anillo íntegramente cerrado.

13. Ejercicio: Demostrar que $\mathbb{Z}$ es un anillo íntegramente cerrado en $\mathbb{Q}$.

3.2.1. Teorema de ascenso

14. Proposición: *Toda k-álgebra finita e íntegra es cuerpo.*

Demostración. Sea A una k-álgebra finita íntegra. Dado $a \in A$ no nula, la homotecia $A \xrightarrow{\cdot a} A$, $b \mapsto b \cdot a$ es inyectiva, por ser A íntegra. Por tanto, por dimensiones, es isomorfismo. Luego a es invertible y A es cuerpo. □

15. Proposición: *El espectro de una k-álgebra finita es un número finito de puntos cerrados.*

Demostración. Las k-álgebras finitas son anillos noetherianos luego tienen un número finito de ideales primos minimales. Si hacemos cociente por un ideal primo minimal obtenemos una k-álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo por la proposición anterior. Por tanto, los ideales primos minimales son maximales y hemos concluido. □

16. Proposición: *Si $f: A \hookrightarrow B$ es un morfismo finito e inyectivo, entonces la aplicación inducida $f^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es epiyectiva.*

Demostración. Dado $x \in \operatorname{Spec} A$, el morfismo $A_x \to B_x$ es finito e inyectivo. Por el lema de Nakayama, $\mathfrak{p}_x B_x \neq B_x$, luego $\operatorname{Spec} B_x/\mathfrak{p}_x B_x \neq \emptyset$. Es decir, la fibra de x es no vacía, luego f^* es epiyectivo. □

17. Teorema : *Sea $f\colon A \to B$ un morfismo de anillos finito. La aplicación inducida en los espectros $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es una aplicación cerrada de fibras espacios topológicos finitos discretos.*

Demostración. Sea $C = (J)_0$ un cerrado de $\operatorname{Spec} B$. Debemos demostrar que $f^*(C)$ es un cerrado de $\operatorname{Spec} A$. Consideremos los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/f^{-1}(J) \arrow[r] & B/J \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A & & \operatorname{Spec} B \arrow[ll, "f^*"'] \\ f^{-1}(J)_0 = \operatorname{Spec} A/f^{-1}(J) \arrow[u, hook] & & \operatorname{Spec} B/J = C \arrow[u, hook] \arrow[ll, "f^*_{|C}"] \end{tikzcd}$$

Como $A/f^{-1}(J) \hookrightarrow B/J$ es un morfismo finito inyectivo, por 3.2.16 $f^*{}_{|C}$ es epiyectiva y $f^*(C) = (f^{-1}(J))_0$.

La fibra de un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ es $f^{*-1}(x) = \operatorname{Spec} B_x/\mathfrak{p}_x B_x$. Observemos que si $f^{*-1}(x) \neq \emptyset$ entonces $B_x/\mathfrak{p}_x B_x$ es una $A_x/\mathfrak{p}_x A_x$-álgebra finita. Por la proposición 3.2.15, concluimos que $f^{*-1}(x)$ es un espacio topológico finito discreto. □

18. Ejercicio : Sea $f\colon A \hookrightarrow B$ un morfismo de anillos finito e inyectivo, $(J)_0 \subset \operatorname{Spec} B$ un cerrado y $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ el morfismo inducido en espectros. Prueba que $f^*((J)_0) = (f^{-1}(J))_0$.

19. Ejercicio : Prueba que la inclusión natural $k[x] \hookrightarrow k[x,y]/(xy-1)$ no es un morfismo finito.

20. Teorema del ascenso : *Sea $f\colon A \to B$ un morfismo finito. Sean $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_{x'} \subset A$ y $\mathfrak{p}_y \subset B$ ideales primos, de modo que $f^{-1}(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x$. Existe un ideal primo $\mathfrak{p}_{y'} \subset B$, de modo que $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_{y'}$ y $f^{-1}(\mathfrak{p}_{y'}) = \mathfrak{p}_{x'}$.*

Demostración. El morfismo $A/\mathfrak{p}_x \to B/\mathfrak{p}_y$ es finito e inyectivo, luego epiyectivo entre espectros (3.2.16); es decir, $f^*\colon (\mathfrak{p}_y)_0 \to (\mathfrak{p}_x)_0$ es epiyectivo y existe $y' \in (\mathfrak{p}_y)_0$ tal que $f^*(y') = x'$. □

21. Definición: Llamaremos dimensión de Krull de un anillo A, al supremo del número de eslabones de las cadenas de inclusiones de ideales primos de A, o equivalentemente, al supremo del número de eslabones de las cadenas de inclusiones de cerrados irreducibles de $\operatorname{Spec} A$. Denotaremos la dimensión (de Krull) de A por $\dim A$. Llamaremos dimensión de $\operatorname{Spec} A$ a la dimensión de Krull de A y la denotaremos $\dim \operatorname{Spec} A$.

22. Ejercicio: Demuestra que la dimensión de Krull de los anillos $\mathbb{Z}$ y $k[x]$ es uno y la de $\mathbb{C}[x, y]$ dos.

23. Corolario: *Si $f: A \hookrightarrow B$ es un morfismo finito inyectivo, entonces* $\dim A = \dim B$.

Demostración. Dada una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ de B, $f^{-1}(\mathfrak{p}_1) \subset f^{-1}(\mathfrak{p}_2) \subset \cdots \subset f^{-1}(\mathfrak{p}_n)$ es una cadena de ideales primos estricta de A, pues las fibras del morfismo inducido por f son discretas, por 3.2.17. Por tanto, $\dim B \leq \dim A$.

Sea ahora una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ de A. Sea $\mathfrak{p}_1$ un ideal primo de B, tal que $f^{-1}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{q}_1$ (existe por 3.2.16). Por el teorema del ascenso, existe $\mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{p}_1$ tal que $f^{-1}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{q}_2$. Así sucesivamente, obtendremos una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ de B (de antimagen por f, la cadena de A). Por tanto, $\dim A \leq \dim B$, luego $\dim A = \dim B$. □

3.3. Lema de Normalización de Noether. Teorema de los ceros de Hilbert

1. Definición: Diremos que $\operatorname{Spec} A$ es una variedad algebraica afín sobre un cuerpo k, si A es una k-álgebra de tipo finito. Los cerrados de las variedades algebraicas los llamaremos subvariedades algebraicas.

Si A y B son k-álgebras de tipo finito y $f: A \to B$ es un morfismo de k-álgebras, diremos que el morfismo inducido $f^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es un morfismo de variedades algebraicas.

2. Lema de normalización de Noether: *Sea $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ una k-álgebra de tipo finito. Supongamos que k tiene un número infinito de elementos*[1]. *Existe un morfismo finito e inyectivo*

$$k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow A$$

"Toda variedad algebraica afín se proyecta con fibras finitas en un espacio afín".

[1] Esta hipótesis no es necesaria, sólo la imponemos para que la demostración del lema sea algo más sencilla.

Demostración. Vamos a hacerlo por inducción sobre n. Para $n=0$, no hay nada que decir. Supongamos que el teorema es cierto hasta $n-1$.

Si los $\{\xi_i\}$ son algebraicamente independientes entre sí, entonces $k[\xi_1,\dots,\xi_n] = k[x_1,\dots,x_n]$. Podemos suponer que existe $p(x_1,\dots,x_n) \in k[x_1,\dots,x_n]$, no nulo, tal que $p(\xi_1,\dots,\xi_n)=0$.

Escribamos $p(x_1,\dots,x_n)=p_s(x_1,\dots,x_n)+p_{s-1}(x_1,\dots,x_n)+\dots+p_0(x_1,\dots,x_n)$ como suma de polinomios $p_i(x_1,\dots,x_n)$ homogéneos de grado i. Sean $x_i = x_i' + \lambda_i x_n$, entonces

$$\begin{aligned}&p(x_1'+\lambda_1 x_n,\dots,x_{n-1}'+\lambda_{n-1}x_n,x_n) = p_s(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},1)x_n^s + \\ &\text{polinomio en } x_1',\dots,x_{n-1}',x_n \text{ de grado en } x_n \text{ menor que } s\end{aligned}$$

Así pues, si elegimos $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in k$ de modo que $p_s(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},1) \neq 0$, tendremos que ξ_n es entero sobre $k[\xi_1',\dots,\xi_{n-1}']$, con $\xi_i' = \xi_i - \lambda_i \xi_n$. Por tanto, la composición

$$k[x_1,\dots,x_r] \underset{\text{Hip.ind.}}{\overset{\text{finito}}{\hookrightarrow}} k[\xi_1',\dots,\xi_{n-1}'] \overset{\text{finito}}{\hookrightarrow} k[\xi_1',\dots,\xi_{n-1}',\xi_n] = k[\xi_1,\dots,\xi_{n-1},\xi_n]$$

es un morfismo finito. □

3. Observación : En la demostración hemos probado que si $\xi_1,\dots,\xi_n$ no son algebraicamente independientes, entonces $r<n$.

4. Forma débil del teorema los ceros de Hilbert : *Sea A una k-álgebra de tipo finito y $\mathfrak{m}$ un ideal maximal. Entonces $A/\mathfrak{m}$ es una extensión finita de k. En particular, si k es algebraicamente cerrado, entonces $k = A/\mathfrak{m}$: "Todo punto cerrado de una variedad algebraica afín sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es racional".*

Demostración. Obviamente $A/\mathfrak{m}$ es una k-álgebra de tipo finito sobre k. Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito inyectivo

$$k[x_1,\dots,x_r] \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$$

Por tanto, $k[x_1,\dots,x_r]$ ha de tener dimensión cero, luego $r=0$ y concluimos. □

5. Ejercicio : Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y

$$\begin{aligned} p_1(x_1,\dots,x_n) &= 0 \\ &\cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n) &= 0 \end{aligned}$$

un sistema de ecuaciones k-algebraicas. Prueba que el sistema no tiene ninguna solución (en k) si y solo si $1 \in (p_1(x_1,\dots,x_n),\dots,p_r(x_1,\dots,x_n))$.

6. Ejercicio : Sean $X = \operatorname{Spec} A$ y $Y = \operatorname{Spec} B$ dos variedades algebraicas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Definamos $X \times_k Y := \operatorname{Spec} A \otimes_k B$. Prueba que el conjunto de los puntos cerrados de $X \times_k Y$ es igual al producto cartesiano del conjunto de los puntos cerrados de X y del conjunto de los puntos cerrados de Y.

7. Proposición : *Si $f^* : X = \operatorname{Spec} B \to Y = \operatorname{Spec} A$ es un morfismo entre variedades algebraicas afines, entonces la imagen de un punto cerrado es un punto cerrado.*

Demostración. Si x es un punto cerrado de X e y es su imagen por f^*, entonces $A/\mathfrak{p}_y \to B/\mathfrak{m}_x$ es inyectivo. Por el teorema de los ceros de Hilbert, $B/\mathfrak{m}_x$ es una extensión finita de k, por tanto $A/\mathfrak{p}_y$ es una k-álgebra finita e íntegra, luego es un cuerpo; es decir, y es un punto cerrado. □

8. Corolario : *Los puntos cerrados de un abierto de una variedad algebraica son puntos cerrados en la variedad algebraica.*

Demostración. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ la variedad algebraica. Todo abierto es unión de abiertos básicos, luego basta probar el enunciado para un abierto básico $U_a \subset X$. Ahora bien, como A es una k-álgebra de tipo finito entonces $A_a = A[\frac{1}{a}]$ es una k-álgebra de tipo finito. Luego $U_a = \operatorname{Spec} A_a$ es una variedad algebraica. Se concluye por la proposición anterior aplicada a la inclusión $U_a \hookrightarrow X$. □

9. Definición : Diremos que $X = \operatorname{Spec} A$ es íntegra si A es un anillo íntegro. Diremos que $X = \operatorname{Spec} A$ es reducida si A es un anillo reducido.

10. Forma fuerte del teorema de los ceros de Hilbert: *Sea A una k-álgebra de tipo finito. Si $f \in A$ pertenece a todo ideal maximal, entonces es nilpotente. En particular, si $X = \operatorname{Spec} A$ es una variedad algebraica reducida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces una función es nula si y sólo si se anula en todos los puntos racionales.*

Demostración. Por el corolario anterior, los ideales maximales de A_f, se corresponden con los ideales maximales de A que no contienen a f. Por tanto, si f pertenece a todo ideal maximal, entonces el espectro maximal de A_f es vacío, luego $A_f = 0$ y por tanto f es nilpotente. □

11. Corolario : *Dos subconjuntos cerrados de una variedad algebraica afín son iguales si y sólo si contienen los mismos puntos cerrados.*

Demostración. Una función se anula sobre todos los puntos de un cerrado de una variedad algebraica si y sólo si se anula sobre todos los puntos cerrados del cerrado, por el corolario anterior. Como todo cerrado son los ceros del ideal de todas las funciones que se anulan sobre él, hemos terminado. □

3.4. Teoría de la dimensión en variedades algebraicas

1. Teorema: *La dimensión de Krull de $k[x_1,\dots,x_n]$ es n.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre n. El caso $n=1$ es obvio.

Sea

$$0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$$

una cadena de ideales primos de $k[x_1,\dots,x_n]$. Sea $p \in \mathfrak{p}_1$, no nulo e irreducible. Como $k[x_1,\dots,x_n]$ es un dominio de factorización única, el ideal (p) es un ideal primo. Si $(p) \neq \mathfrak{p}_1$, lo añadimos a la cadena anterior, con lo que podemos suponer que $(p)=\mathfrak{p}_1$. Por el lema de normalización de Noether y la observación 3.3.3, existe un morfismo finito inyectivo $k[x_1,\dots,x_r] \hookrightarrow k[x_1,\dots,x_n]/(p)$, con $r<n$. Por inducción sobre n, la dimensión de Krull de $k[x_1,\dots,x_r]$ es r, luego las cadenas de ideales primos en $k[x_1,\dots,x_n]/(p)$ son de longitud menor o igual que $r \leq n-1$. Haciendo cociente por (p), la cadena anterior define una cadena de ideales primos

$$\bar{0} \subset \bar{\mathfrak{p}}_2 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_m$$

luego $m-1 \leq n-1$ y $\dim k[x_1,\dots,x_n] \leq n$. Por otra parte,

$$0 \subset (x_1) \subset (x_1,x_2) \subset \cdots \subset (x_1,\dots,x_n)$$

es una cadena de longitud n, luego $\dim k[x_1,\dots,x_n] \geq n$. En conclusión $k[x_1,\dots,x_n]$ tiene dimensión de Krull n. □

2. Teorema: *Sea A una k-álgebra de tipo finito íntegra. La dimensión de Krull de A coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de fracciones.*

Demostración. Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito inyectivo $k[x_1,\dots,x_n] \hookrightarrow A$, que induce un morfismo finito entre sus cuerpos de fracciones (pruébese)

$$k(x_1,\dots,x_n) \hookrightarrow \Sigma$$

Luego

$$\dim A \overset{3.2.23}{=} \dim k[x_1,\dots,x_n] = n = \operatorname{gr}\operatorname{tr} k(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{gr}\operatorname{tr}\Sigma.$$

$\square$

Observemos que $\dim A = \dim A_{\text{red}}$. Por tanto, la dimensión de una variedad irreducible $\operatorname{Spec} A$ coincide con la dimensión de $\operatorname{Spec} A_{\text{red}}$, que es una variedad algebraica íntegra. En general, toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles y la dimensión de la variedad es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.

Observemos que $\dim A = \dim A_{\text{red}}$. Por tanto, la dimensión de una variedad irreducible $\operatorname{Spec} A$ coincide con la dimensión de $\operatorname{Spec} A_{\text{red}}$, que es una variedad algebraica íntegra. En general, toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles y la dimensión de la variedad es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.

3. Proposición : *Sean $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ y $X \times_k Y := \operatorname{Spec} A \otimes_k B$ variedades algebraicas. Se cumple que*

$$\dim(X \times_k Y) = \dim X + \dim Y$$

Demostración. Sean $f\colon k[x_1,\dots,x_n] \hookrightarrow A$, $g\colon k[y_1,\dots,y_m] \hookrightarrow B$ morfismos finitos inyectivos, entonces $k[x_1,\dots,x_n] \otimes k[y_1,\dots,y_m] \to A \otimes B$, $p(x) \otimes q(y) \mapsto f(p(x)) \otimes g(q(y))$ es un morfismo inyectivo finito y

$$\dim X + dimY = n + m = \dim X \times Y.$$

$\square$

4. Ejercicio : Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas. Sea $C \subset X$ un cerrado. Demuestra que

$$\dim C \geq \dim \overline{f(C)}$$

Solución: Podemos suponer que C es irreducible. Denotemos $X = \operatorname{Spec} B$, $C = (\mathfrak{p})_0 = \operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}$, $Y = \operatorname{Spec} A$ y $\phi\colon A \to B$ el morfismo de k-álgebras tal que $\phi^* = f$. Entonces, el morfismo $A/\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \hookrightarrow B/\mathfrak{p}$ es inyectivo y $\overline{f(C)} = (\phi^{-1}(\mathfrak{p}))_0 = \operatorname{Spec} A/\phi^{-1}(\mathfrak{p})$. El cuerpo de fracciones de $A/\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ está incluido en el cuerpo de fracciones de $B/\mathfrak{p}$, luego el grado de trascendencia del primero es menor o igual que el del segundo y $\dim \overline{f(C)} \leq \dim C$.

5. Teorema del ideal principal de Krull : *Sea $X = \operatorname{Spec} A$ una variedad algebraica íntegra. Sea $f \in A$, no nula ni invertible. Entonces*

$$\dim (f)_0 = \dim X - 1$$

Es más, todas las componentes irreducibles de $(f)_0$ son de dimensión $\dim X - 1$.

Demostración. Si $X = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]$ y descomponemos $f = p_1\cdot\ldots\cdot p_s$ en producto de irreducibles, tenemos que $(f)_0 = \cup(p_i)_0$. Basta probar que $\dim(p_i)_0 = n-1$. Ahora bien, el grado de trascendencia del cuerpo de funciones de $k[x_1,\dots,x_n]/(p_i)$ es $n-1$, luego $\dim(p_i)_0 = n-1$.

Escribamos $(f)_0 = C_1\cup\cdots\cup C_s$ como unión de componentes irreducibles. Sea $y\in C_1-(C_2\cup\cdots\cup C_s)$ un punto cerrado. Sea $U_a = \operatorname{Spec} A_a$ un abierto básico que contenga a y disjunto con los C_i, para $i>1$. Por 3.4.2, $\dim X = \dim U_a$ y $\dim C_1 = \dim C_1\cap U_a$. Ahora bien, $C_1\cap U_a$ coincide con los ceros de f en U_a. En conclusión, sustituyendo X por U_a, podemos suponer que $(f)_0 = C_1$.

Por el lema de normalización de Noether sabemos que existe un morfismo finito $k[x_1,\dots,x_n]\hookrightarrow A$. La inclusión $i\colon k[x_1,\dots,x_n][f]\hookrightarrow A$ es un morfismo finito inyectivo. Además, $i^{*-1}((f)_0) = (f)_0$, por tanto la dimensión de $(f)_0$ en $\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n][f]$ es la misma que la de $(f)_0$ en $\operatorname{Spec} A$. Por tanto, podemos suponer que $A = k[x_1,\dots,x_n][f]$.

Sea $p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$ un polinomio irreducible tal que $p(x_1,\dots,x_n,f)=0$. El epimorfismo

$$k[x_1,\dots,x_{n+1}]/(p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}))\to k[x_1,\dots,x_n][f],\ \bar{x}_{n+1}\mapsto f$$

es un isomorfismo, porque $k[x_1,\dots,x_{n+1}]/(p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}))$ es un anillo de dimensión n, íntegro y si hubiese núcleo la dimensión de $k[x_1,\dots,x_n][f]$ sería menor que n.

En conclusión $A = k[x_1,\dots,x_{n+1}]/(p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}))$ y $f = x_{n+1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\dim(f)_0 &= \dim A/(f) = \dim k[x_1,\dots,x_{n+1}]/(p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}),x_{n+1})\\ &= \dim k[x_1,\dots,x_n]/(p(x_1,\dots,x_n,0)) = n-1\end{aligned}$$

□

6. Definición: Una cadena de cerrados irreducibles diremos que es maximal si no está incluida en ninguna otra mayor.

7. Corolario: *Todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles de una variedad algebraica irreducible tienen la misma longitud, que es la dimensión de Krull de la variedad.*

Demostración. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ la variedad algebraica irreducible. Podemos suponer que la variedad algebraica es íntegra ya que $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A_{\text{red}}$. Demostraremos el corolario por inducción sobre la dimensión de Krull.

Sea $X\supset X_1\supset\cdots\supset X_m$ una cadena de cerrados irreducibles maximal. Sea $f\in A$ una función no nula que se anule en X_1. Si $(f)_0 = Y_1\cup\cdots\cup Y_r$ es la descomposición de $(f)_0$ en cerrados irreducibles, X_1 es una de las componentes de la descomposición. Por el teorema anterior $\dim X_1 = \dim X - 1$, luego por inducción sobre la dimensión $m-1 = \dim X_1 = \dim X - 1$, y por tanto $m = \dim X$. □

8. Definición : Se dice que una variedad algebraica es catenaria si todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles con extremos cualesquiera prefijados tienen la misma longitud.

9. Corolario : *Las variedades algebraicas son catenarias.*

Demostración. Sean $Y \supset Y'$ cerrados irreducibles de una variedad algebraica X. Toda cadena maximal de extremos Y e Y' induce, adjuntando una cadena maximal de Y', una cadena maximal de Y, luego tiene longitud $\dim Y - \dim Y'$, por el corolario anterior. □

10. Proposición : *Si* $X = \operatorname{Spec} A$ *es una variedad algebraica irreducible y* $x \in X$ *un punto cerrado, entonces* $\dim X = \dim A_x$.

Demostración. La dimensión de Krull de A_x coincide con la máxima longitud de las cadenas de cerrados irreducibles de X que pasan por x. Ahora bien, todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles tienen longitud $\dim X$. □

11. Proposición : *Sea* $X = \operatorname{Spec} A$ *una variedad algebraica irreducible de dimensión* n *e* $Y \subset X$ *una subvariedad algebraica irreducible de dimensión* m*. El número mínimo* r *para el cual existen* r *funciones* $f_1, \dots f_r$ *de* X *tales que una de las componentes irreducibles de* $(f_1, \dots, f_r)_0$ *sea* Y *es* $r = n - m$ *(puede imponerse además que todas las componentes sean de dimensión* m*).*

Demostración. Es fácil probar, aplicando recurrentemente el teorema del ideal principal de Krull, que todas las componentes irreducibles de $(f_1, \dots, f_r)_0$ tienen dimensión mayor o igual que $n - r$. Por tanto, tenemos que probar sólo la existencia de tales funciones para $r = n - m$.

Sea f_1 una función que se anule en todo Y y no en X. Escribamos $(f_1)_0 = \cup_i C_i$, donde C_i son cerrados irreducibles de dimensión $n-1$. Sea f_2 una función que se anule en todo Y y no se anule en todo C_i, para cada i. Existe tal función: sea g_i que se anule en Y y en todos los C_j para $j \neq i$, y no se anule en todo C_i, entonces $f_2 = \sum_i g_i$. Tenemos que $(f_1, f_2)_0$ es unión de cerrados irreducibles de dimensión $n-2$ y $(f_1, f_2)_0$ contiene a Y. Siguiendo de este modo obtenemos las funciones $f_1, \dots, f_r$ requeridas. □

12. Corolario : *Sea* X *una variedad algebraica irreducible de dimensión* n *y* $x \in X$ *un punto cerrado. El número mínimo de funciones* $f_1, \dots, f_r$ *tales que* $(f_1, \dots, f_r)_0 \cap U = \{x\}$*, en algún entorno abierto* U *de* x*, es* $r = n$*.*

13. Ejercicio: Sea $f: X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas irreducibles. Sea $y \in f(X)$ un punto cerrado. Demuéstrese que

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim \overline{f(X)}$$

Solución: Tomando en vez de Y un abierto básico que contenga a $f(x)$, podemos suponer que existen $g_1, \dots, g_n$ funciones de Y tales que $(g_1, \dots, g_n)_0 = \{f(x)\}$ y $n = \dim Y$. Entonces, $f^{-1}(y) = \dim(g_1 \circ f, \dots, g_n \circ f)_0$ y por el teorema del ideal principal de Krull $\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - n = \dim X - \dim Y$.

3.5. Cuestionario

1. ¿Es $k \to k[x]$ un morfismo de anillos finito?
2. ¿Es $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ un morfismo de anillos finito?
3. ¿Es $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x,y]/(x^2+y^2-1)$, $p(x) \mapsto \overline{p(x)}$ un morfismo de anillos finito?
4. Prueba que un morfismo de anillos $A \to B \times C$ es finito si y solo si $A \to B$ y $A \to C$ lo son.
5. Prueba que si $A \to B$ es un morfismo finito, entonces existen $b_1, \dots, b_n \in B$ tales que $B = A[b_1, \dots, b_n]$.
6. Prueba que $k[x]$ es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.

3.6. Biografía de Hilbert

HILBERT BIOGRAPHY

David Hilbert's father, Otto Hilbert, was the son of a judge who was a high ranking Privy Councillor. Otto was a county judge who had married Maria Therese Erdtmann, the daughter of Karl Erdtmann, a Königsberg merchant. Maria was fascinated by philosophy, astronomy and prime numbers. Otto Hilbert had a brother who was a lawyer and another who was the director of a Gymnasium. After Otto was promoted to become a senior judge, he and Maria moved to 13 Kirchenstrasse in Königsberg and this was the home in which David spent much of his childhood. He had a strict upbringing by his father who was a man who lived his life to a standard pattern, always walking the same way every day and only leaving Königsberg once a year for the annual family holiday. David was his parents' first child and only son. He was six years old when his sister Elsie was born.

The usual age for someone to begin schooling was six but David did not enter his first school, the Royal Friedrichskolleg, until he was eight years old. It is almost certain that his mother taught him at home until he was eight. The Friedrichskolleg, also known as the Collegium Fridericianum, had a junior section which David attended for two years before entering the gymnasium of the Friedrichskolleg in 1872. Although this was reputed to be the best school in Königsberg, the emphasis was on Latin and Greek with mathematics considered as less important. Science was not taught at all in the Friedrichskolleg. The main approach to learning was having pupils memorise large amounts of material, something David was not particularly good at. Perhaps surprisingly for someone who was to make a gigantic impact on mathematics, he did not shine at school. In later life he described himself as a "dull and sill" boy at the Friedrichskolleg. Although doubtless there is modesty in these words, nevertheless they probably reflect Hilbert's own feeling about his school days. In September 1879 he transferred from the Friedrichskolleg to the Wilhelm Gymnasium where he spent his final year of schooling. Here there was more emphasis on mathematics and the teachers encouraged original thinking in a way that had not happened at the Friedrichskolleg. Hilbert was much happier and his performance in all his subjects improved. He received the top grade for mathematics and his final report stated:

"*For mathematics he always showed a very lively interest and a penetrating understanding: he mastered all the material taught in the school in a very pleasing manner and was able to apply it with sureness and ingenuity.*"

After graduating from the Wilhelm Gymnasium, he entered the University of Königsberg in the autumn of 1880. In his first semester he took courses on integral calculus, the theory of determinants and the curvature of surfaces. Then following the tradition in Germany at this time, in the second semester he went to Heidelberg where he attended lectures by Lazarus Fuchs. Returning to Königsberg for the start of session 1881-82, Hilbert attended lectures on number theory and the theory of functions by Heinrich Weber. In the spring of 1882, Hermann Minkowski returned to Königsberg after studying in Berlin. Hilbert and Minkowski, who was also a doctoral student, soon became close friends and they were to strongly influence each others mathematical progress. Ferdinand von Lindemann was appointed to Königsberg to succeed Heinrich Weber in 1883 and Adolf Hurwitz was appointed as an extraordinary professor there in the spring of 1884. Hurwitz and Hilbert became close friends, another friendship which was important factor in Hilbert's mathematical development, while Lindemann became Hilbert's thesis advisor. He received his oral examination on 11 December 1884 for his thesis entitled Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen. Lindemann had suggested that Hilbert study invariant properties of certain algebraic forms and Hilbert showed great originality in devising an approach that Lindemann had not envisaged. Minkowski, after reading the thesis, wrote to Hilbert:

"*I studied your work with great interest and rejoiced over all the processes which the poor invariants had to pass through before they manage to disappear. I would not have supposed that such a good mathematical theorem could have been obtained in Königsberg.*"

On 7 February 1885 he defended two propositions in a public disputation. One of Hilbert's chosen propositions was on physics, the other on philosophy. This was the final stage of his doctorate, which was then duly awarded. He spent the month following the award of his doctorate taking, and passing, the Staatsexamen so that he was qualified to teach in a Gymnasium, and he also attended Lindemann's geometry course on Plücker's line geometry and Lie's sphere geometry, and he also attended Hurwitz's lectures on modular functions. Hurwitz suggested that Hilbert make a research visit to Leipzig to speak with Felix Klein. Taking this advice, he went to Leipzig and attended Klein's lectures. He also got to know Georg Pick and Eduard Study. Klein suggested that both Hilbert and Study should visit Erlangen and discuss their research with Paul Gordan who was the leading expert on invariant theory. However, the visit did not take place at that time. Klein then told both Study and Hilbert that they should visit Paris. They both went in early 1886, Hilbert at the end of March. Klein had given them instructions as to which of the Paris mathematicians they should visit and they did as he told them, alternately writing to Klein about their experiences. One of the first mathematicians they visited was Henri Poincaré who returned their visit a few days later. The two young visitors read their letters to Klein out loud to each other so that they would not both tell him the same things. He replied to each in turn, making clear that he was treating them equally. In Paris, Camille Jordan gave a dinner for Hilbert and Study to which George-Henri Halphen, Amédée Mannheim and Gaston Darboux were invited. On this occasion the French mathematicians all spoke German out of politeness to their German guests who complained to Klein afterwards that the mathematical conversation had been very superficial. They were also disappointed with their meeting with Pierre Bonnet who they felt was too old for mathematical discussions. The mathematician with whom they seemed to get on best was Charles Hermite. Although they considered him very old (he was 64), he was "extraordinarily friendly and hospitable" and discussed the big problems of invariant theory. Since they had found their visit especially useful, they returned to Hermite's home for a second visit a few days later. It is clear that Hilbert's thoughts were entirely on mathematics during his time in Paris and he wrote nothing of any sightseeing. Towards the end of his visit he suffered an illness and was probably homesick. Certainly by the spring of 1886 he was in good spirits as he returned to Germany. On his way back to Königsberg he visited Göttingen, where Klein was about to take up the chair, where he met Hermann Amandus Schwarz. Telling Schwarz that he was next going to Berlin, Hilbert was advised to expect a cold reception by Leopold Kronecker. However, Hilbert described his welcome in Berlin as very friendly.

From Berlin, Hilbert continued back to Königsberg where he prepared to submit his habilitation paper on invariant theory. He also had to give an inaugural lecture in the main auditorium of the Albertina and, from the two options offered by Hilbert, he was asked to deliver the lecture The most general periodic functions. Klein had told Hilbert that Königsberg may not be a good place for him to habilitate but Hilbert was happy to do so. He wrote to Klein:

"*I am content and full of joy to have decided myself for Königsberg. The constant association with Professor Lindemann and, above all, with Hurwitz is not less interesting than it is advantageous to myself and stimulating. The bad part about Königsberg being so far away from things I hope I will be able to overcome by making some trips again next year, and perhaps then I will get to meet Herr Gordan.*"

He was a member of staff at Königsberg from 1886 to 1895, being a Privatdozent until 1892, then as Extraordinary Professor for one year before being appointed a full professor in 1893. The tour that he spoke about after habilitating at Königsberg happened in 1888:

"*... he set off in March 1888 on a tour of several leading mathematical centres in Germany, including Berlin, Leipzig, and Göttingen. During the course of a month, he spoke with some twenty mathematicians from whom he gained a stimulating overview of current research interests throughout the country.*"

In Berlin he met Kronecker and Weierstrass who presented the young Hilbert with two rather different views of the future. Next, in Leipzig, he finally met Paul Gordan:

"*... the two hit it off splendidly, as both loved nothing more than to talk about mathematics.*

Hilbert spent eight days in Göttingen before returning to Königsberg. He married his second cousin, Käthe Jerosch, on 12 October 1892; they had one son Franz Hilbert born on 11 August 1893.

In 1892 Schwarz moved from Göttingen to Berlin to occupy Weierstrass's chair and Klein wanted to offer Hilbert the vacant Göttingen chair. However Klein failed to persuade his colleagues and Heinrich Weber was appointed to the chair. Klein was probably not too unhappy when Weber moved to a chair at Strasbourg three years later since on this occasion he was successful in his aim of appointing Hilbert. So, in 1895, Hilbert was appointed to the chair of mathematics at the University of Göttingen, where he continued to teach for the rest of his career.

Hilbert's eminent position in the world of mathematics after 1900 meant that other institutions would have liked to tempt him to leave Göttingen and, in 1902, the University of Berlin offered Hilbert Fuchs's chair. Hilbert turned down the Berlin chair, but only after he had used the offer to bargain with Göttingen and persuade them to set up a new chair to bring his friend Minkowski to Göttingen.

As we saw above, Hilbert's first work was on invariant theory and, in 1888, he proved his famous Basis Theorem. Twenty years earlier Gordan had proved the finite basis theorem for binary forms using a highly computational approach. Attempts to generalise Gordan's work to systems with more than two variables failed since the computational difficulties were too great. Hilbert himself tried at first to follow Gordan's approach but soon realised that a new line of attack was necessary. He discovered a completely new approach which proved the finite basis theorem for any number of variables but in an entirely abstract way. Although he proved that a finite basis existed his methods did not construct such a basis.

Hilbert submitted a paper proving the finite basis theorem to Mathematische Annalen. However Gordan was the expert on invariant theory for Mathematische Annalen and he found Hilbert's revolutionary approach difficult to appreciate. He refereed the paper and sent his comments to Klein:

"*The problem lies not with the form ... but rather much deeper. Hilbert has scorned to present his thoughts following formal rules, he thinks it suffices that no one contradict his proof ... he is content to think that the importance and correctness of his propositions suffice. ... for a comprehensive work for the 'Annalen' this is insufficient.*"

However, Hilbert had learnt through his friend Hurwitz about Gordan's letter to Klein and Hilbert wrote himself to Klein in forceful terms.

"*... I am not prepared to alter or delete anything, and regarding this paper, I say with all modesty, that this is my last word so long as no definite and irrefutable objection against my reasoning is raised.*"

At the time Klein received these two letters from Hilbert and Gordan, Hilbert was an assistant lecturer while Gordan was the recognised leading world expert on invariant theory and also a close friend of Klein's. However Klein recognised the importance of Hilbert's work and assured him that it would appear in the Annalen without any changes whatsoever, as indeed it did.

Hilbert expanded on his methods in a later paper, again submitted to the Mathematische Annalen and Klein, after reading the manuscript, wrote to Hilbert saying:

"*I do not doubt that this is the most important work on general algebra that the 'Annalen' has ever published.*"

In 1893 while still at Königsberg Hilbert began a work Zahlbericht on algebraic number theory. The German Mathematical Society requested this major report three years after the Society was created in 1890. The Zahlbericht (1897) is a brilliant synthesis of the work of Kummer, Kronecker and Dedekind but also contains a wealth of Hilbert's own ideas. The ideas of the present day subject of "Class field theory" are all contained in this work. Rowe describes this work as:

"... not really a Bericht in the conventional sense of the word, but rather a piece of original research revealing that Hilbert was no mere specialist, however gifted. ... he not only synthesized the results of prior investigations ... but also fashioned new concepts that shaped the course of research on algebraic number theory for many years to come."

Hilbert's work in geometry had the greatest influence in that area after Euclid. A systematic study of the axioms of Euclidean geometry led Hilbert to propose 21 such axioms and he analysed their significance. He published Grundlagen der Geometrie in 1899 putting geometry in a formal axiomatic setting. The book continued to appear in new editions and was a major influence in promoting the axiomatic approach to mathematics which has been one of the major characteristics of the subject throughout the 20th century.

Hilbert's famous 23 Paris problems challenged (and still today challenge) mathematicians to solve fundamental questions. Hilbert's famous speech The Problems of Mathematics was delivered to the Second International Congress of Mathematicians in Paris. It was a speech full of optimism for mathematics in the coming century and he felt that open problems were the sign of vitality in the subject:

"The great importance of definite problems for the progress of mathematical science in general ... is undeniable. ... [for] as long as a branch of knowledge supplies a surplus of such problems, it maintains its vitality. ... every mathematician certainly shares ..the conviction that every mathematical problem is necessarily capable of strict resolution ... we hear within ourselves the constant cry: There is the problem, seek the solution. You can find it through pure thought...

Hilbert's problems included the continuum hypothesis, the well ordering of the reals, Goldbach's conjecture, the transcendence of powers of algebraic numbers, the Riemann hypothesis, the extension of Dirichlet's principle and many more. Many of the problems were solved during this century, and each time one of the problems was solved it was a major event for mathematics.

Today Hilbert's name is often best remembered through the concept of Hilbert space. Irving Kaplansky explains Hilbert's work which led to this concept:

"Hilbert's work in integral equations in about 1909 led directly to 20th -century research in functional analysis (the branch of mathematics in which functions are studied collectively). This work also established the basis for his work on infinite-dimensional space, later called Hilbert space, a concept that is useful in mathematical analysis and quantum mechanics. Making use of his results on integral equations, Hilbert contributed to the development of mathematical physics by his important memoirs on kinetic gas theory and the theory of radiations."

Many have mistakenly claimed that in 1915 Hilbert discovered the correct field equations for general relativity before Einstein but never claimed priority.

In 1934 and 1939 two volumes of Grundlagen der Mathematik were published which were intended to lead to a 'proof theory', a direct check for the consistency of mathematics. Gödel's paper of 1931 showed that this aim is impossible.

Hilbert contributed to many branches of mathematics, including invariants, algebraic number fields, functional analysis, integral equations, mathematical physics, and the calculus of variations. His mathematical abilities were nicely summed up by Otto Blumenthal, his first student:

"*In the analysis of mathematical talent one has to differentiate between the ability to create new concepts that generate new types of thought structures and the gift for sensing deeper connections and underlying unity. In Hilbert's case, his greatness lies in an immensely powerful insight that penetrates into the depths of a question. All of his works contain examples from far-flung fields in which only he was able to discern an interrelatedness and connection with the problem at hand. From these, the synthesis, his work of art, was ultimately created. Insofar as the creation of new ideas is concerned, I would place Minkowski higher, and of the classical great ones, Gauss, Galois, and Riemann. But when it comes to penetrating insight, only a few of the very greatest were the equal of Hilbert.*"

Among Hilbert's students were Hermann Weyl, the famous world chess champion Emanuel Lasker, and Ernst Zermelo. But the list includes many other famour names including Wilhelm Ackermann, Felix Bernstein, Otto Blumenthal, Richard Courant, Haskell Curry, Max Dehn, Rudolf Fueter, Alfred Haar, Georg Hamel, Erich Hecke, Earle Hedrick, Ernst Hellinger, Edward Kasner, Oliver Kellogg, Hellmuth Kneser, Otto Neugebauer, Erhard Schmidt, Hugo Steinhaus, and Teiji Takagi.

In 1930 Hilbert retired but only a few years later, in 1933, life in Göttingen changed completely when the Nazis came to power and Jewish lecturers were dismissed. By the autumn of 1933 most had left or were dismissed. Hilbert, although retired, had still been giving a few lectures. In the winter semester of 1933-34 he gave one lecture a week on the foundations of geometry. After he finished giving this course he never set foot in the Institute again. In early 1942 he fell and broke his arm while walking in Göttingen. This made him totally inactive and this seems to have been a major factor in his death a year after the accident.

Hilbert received many honours. In 1905 the Hungarian Academy of Sciences gave a special citation for Hilbert. He was awarded the Bolyai Prize in 1910 and elected a fellow of the Royal Society of London in 1928. In 1930 Hilbert retired and the city of Königsberg made him an honorary citizen of the city. He gave an address which ended with six famous words showing his enthusiasm for mathematics and his life devoted to solving mathematical problems:

"*Wir müssen wissen, wir werden wissen - We must know, we shall know.*"

3.7. Problemas

1. Sean $f: A \to B$ y $f': A' \to B'$ dos morfismos de anillos finitos. Prueba que el morfismo de anillos $f \otimes f': A \otimes_{\mathbb{Z}} A' \to B \otimes_{\mathbb{Z}} B'$, $(f \otimes f')(a \otimes a') := f(a) \otimes f'(a')$ es finito.

2. Sea A un anillo íntegro y $a \in A$ ni invertible, ni nula. Prueba que el morfismo de localización $A \to A_a$ no es finito.

3. Sea $f: A \hookrightarrow B$ un morfismo de anillos entero y $f^*: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ el morfismo inducido en espectros.

   a) Si f es inyectivo, entonces f^* es epiyectivo.

   b) f^* es cerrado de fibras de dimensión cero.

4. Prueba que un morfismo de anillos $A \to B$ es finito si y solo si es entero y de tipo finito.

5. Sea X una variedad algebraica afín íntegra. Si dos morfismos de X en otra variedad algebraica afín coinciden en un abierto no vacío de X, prueba que coinciden en X.

6. Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión finita de cuerpos y $X = \operatorname{Spec} A$ una k-variedad algebraica. Prueba que el morfismo natural $X_K = \operatorname{Spec} A \otimes_k K \to X = \operatorname{Spec} A$ de cambio de base es epiyectivo y cerrado.

7. Sea $\pi: X = \operatorname{Spec} A \to \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x]$ un morfismo finito y supongamos que X es una variedad algebraica íntegra (de dimensión 1). Prueba que el número de puntos (contando grados y multiplicidades) de las fibras de π es constante.

8. Calcula los ideales maximales de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$.

9. Prueba que si X e Y son variedades algebraicas íntegras sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, entonces $X \times_k Y$ es íntegra. (Indicación: Usar el teorema de los ceros de Hilbert).

10. Sean Y, Y' k-subvariedades irreducibles de $\mathbb{A}^n$, con k algebraicamente cerrado. Llamemos codimensión de Y en $\mathbb{A}^n$, que denotaremos $\operatorname{codim} Y$, a $n - \dim Y$. Supongamos que $Y \cap Y' \neq 0$. Demuéstrese que

$$\operatorname{codim}(Y \cap Y') \leq \operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Y'.$$

11. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ una variedad íntegra sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Prueba que para toda extensión de cuerpos $k \to K$, la variedad $X_K = \operatorname{Spec} A \otimes_k K$ es íntegra. (Póngase K unión de álgebras de tipo finito).

12. Sea $\bar{k}$ el cierre algebraico de k. Prueba que dos ideales primos $\mathfrak{p} = (f_i)_{i \in I}$, $\mathfrak{q} = (g_j)_{j \in J}$ de $k[x_1, \dots, x_n]$ son iguales si y sólo si las soluciones en $\bar{k}$ de los dos sistemas de ecuaciones $\{f_i = 0\}_{i \in I}$, $\{g_j = 0\}_{j \in J}$ son las mismas.

13. Sean X, Y variedades algebraicas íntegras sobre un cuerpo k y sean Σ_X, Σ_Y sus respectivos cuerpos de funciones racionales. Si $\phi\colon Y \to X$ es un morfismo que transforma el punto genérico de Y en el punto genérico de X (lo que equivale a que tenga imagen densa), induce un morfismo de k-álgebras $\Sigma_X \to \Sigma_Y$. Diremos que ϕ es un morfismo de *grado n* cuando Σ_Y sea una extensión finita de grado n de Σ_X. Los morfismos de grado 1 se llaman morfismos <u>birracionales</u>. Diremos que X e Y son <u>birracionalmente equivalentes</u> si sus cuerpos de funciones racionales son extensiones de k isomorfas: $\Sigma_X \simeq \Sigma_Y$. Las variedades algebraicas birracionalmente equivalentes al espacio afín se llaman <u>racionales</u>. Es decir, una variedad algebraica sobre k es racional si su cuerpo de funciones racionales es isomorfo a un cuerpo de fracciones racionales $k(x_1, \dots, x_n)$ con coeficientes en k.

    a) Sea C la cúbica plana $y^2 = x^2 + x^3$. El haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}^1 \to C$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$. Calcula el área del "ojo del lazo" definido por la curva $y^2 = x^2 + x^3$.

    b) Sea C la cúbica plana $y^2 = x^3$. Prueba que el haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}^1 \to C$, $x = t^2$, $y = t^3$.

Capítulo 4

Desomposición primaria

4.1. Introducción

Puede parecernos que dado un ideal I es siempre mejor considerar $r(I)$ en vez de I. Pongamos un ejemplo sencillo en el que nos interese el ideal I: Consideremos el ideal (x, y^2-x) o el sistema

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \end{aligned}$$

la variedad de soluciones de este sistema es el punto $x=0, y=0$. Tenemos que $I=(x, y^2-x)=(x, y^2)$ y $r(I)=(x, y)$. Podemos pensar la variedad de soluciones dada, como el conjunto de puntos de corte de la recta $x=0$ con la parábola $y^2-x=0$, y como esta recta es tangente a la parábola nos gustaría afirmar que la variedad de soluciones es "el origen contado dos veces". De esta afirmación "queda rastro" en el ideal I pero no en $r(I)$. En conclusión, cuando estudiamos el sistema de ecuaciones definido por I, si consideramos solo el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones (o equivalentemente, consideramos solo $r(I)$) perdemos información que puede ser esencial, sobre todo en una teoría fina de intersección de variedades.

El ideal (x, y^2-x) es el ideal de polinomios $p(x, y)$ tales que $p(0,0)=0$ y $\frac{\partial p}{\partial y}(0,0)=0$, que hemos expresado de modo más impreciso como ideal de funciones que se anulan dos veces en el origen. En general, demostraremos que todo ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ es el ideal de polinomios que se anulan en ciertas variedades irreducibles y cumplen ciertas condiciones infinitesimales (no preciso este concepto) a lo largo de estas variedades irreducibles. Si llamamos ideal primario al ideal de funciones que se anula en una variedad irreducible y cumple ciertas condiciones infinitesimales a lo largo de ella, el resultado fundamental de la teoría de descomposiciones primarias afirma que todo ideal es intersección de un número finito de ideales primarios. En conclusión, dar un sistema de ecuaciones algebraicas equivale a dar un número finito de variedades

95

algebraicas irreducibles y ciertas condiciones infinitesimales a lo largo de ellas.

Demos ahora un punto de vista aritmético. El teorema de Euclides afirma que todo número natural n es producto de potencias de números primos distintos de modo único salvo ordenación de los factores, $n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$. En términos de ideales, estamos diciendo que $(n) = (p_1)^{n_1} \cap \cdots \cap (p_r)^{n_r}$. Puede probarse que un anillo íntegro es localmente dominio de ideales principales si y solo si todo ideal es producto de modo único (salvo ordenación de los factores) de ideales primos.

Sea ahora A un anillo noetheriano. Dado un ideal primo $\mathfrak{p}_x \subset A$ denotemos $\mathfrak{p}_x^{(n)}$ el núcleo del morfismo natural $A \to A_x/\mathfrak{p}_x^n \cdot A_x$. Puede probarse que A es un anillo normal si y solo si A es íntegro y para todo $a \in A$ se cumple que

$$(a) = \mathfrak{p}_{x_1}^{(n_1)} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{x_r}^{(n_r)}$$

para ciertos $n_1, \ldots, n_r > 0$ y $x_1, \ldots, x_r$ únicos, donde $\mathfrak{p}_{x_i} \not\subseteq \mathfrak{p}_{x_j}$ para todo $i \neq j$. Se dice que un ideal $\mathfrak{q}$ es $\mathfrak{p}_x$-primario si existe un número natural $n > 0$ tal que $\mathfrak{p}_x^{(n)} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_x$. El teorema central de este capítulo afirma que todo ideal de un anillo noetheriano es intersección de ideales primarios y veremos en qué sentido esta descomposición es única.

4.2. Ideales primarios

Queremos demostrar que todo ideal de un anillo noetheriano viene definido por condiciones infinitesimales en un número finito de puntos del espectro. Comencemos con los ideales primarios que serán los definidos por condiciones infinitesimales en un punto.

1. Definición: Sea A un anillo. Un ideal $\mathfrak{q} \underset{\neq}{\subset} A$ es *primario* si todo divisor de cero de $A/\mathfrak{q}$ es nilpotente; es decir:

$$ab \in \mathfrak{q},\ a \notin \mathfrak{q} \ \Rightarrow\ b^n \in \mathfrak{q} \text{ para algún } n \geq 1.$$

2. Ejemplos: 1. Los ideales primos son primarios.

2. Si $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo entonces (p^n) es un ideal primario de $\mathbb{Z}$. Igualmente si $p(x) \in k[x]$ es un polinomio irreducible entonces $(p(x)^n)$ es un ideal primario de $k[x]$

3. Proposición: *El radical de un ideal primario es un ideal primo.*

Demostración. En efecto, sea $\mathfrak{p}$ el radical de un ideal primario $\mathfrak{q}$. Si $ab \in \mathfrak{p}$ y $a \notin \mathfrak{p}$, entonces $(ab)^n \in \mathfrak{q}$ para algún $n \geq 1$ y $a^r \notin \mathfrak{q}$ para ningún r. Como $\mathfrak{q}$ es primario, alguna potencia de b^n ha de estar en $\mathfrak{q}$, luego $b \in \mathfrak{p}$. □

4. Definición : Sea $\mathfrak{q}$ un ideal primario y $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q})$ el radical de $\mathfrak{q}$. Diremos que $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario ó que $\mathfrak{p}$ es el *ideal primo asociado* a $\mathfrak{q}$.

En tal caso, si $A' \to A$ es un morfismo de anillos, es sencillo comprobar que $A' \cap \mathfrak{q}$ es un ideal $(A' \cap \mathfrak{p})$-primario de A'.

5. Proposición : *Sea $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal maximal. Entonces, un ideal $I \subset A$ es $\mathfrak{m}$-primario si y solo si $r(I) = \mathfrak{m}$.*

En particular, todas las potencias $\mathfrak{m}^n$, con $n > 0$, son ideales $\mathfrak{m}$-primarios.

Demostración. Si I es un ideal de radical $\mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{m}$ es el único ideal primo que contiene a I. Por tanto, A/I tiene un único ideal primo, luego todo elemento de A/I es invertible o nilpotente; en particular, todo divisor de cero es nilpotente. □

Si el anillo A es noetheriano, cada ideal contiene una potencia de su radical, así que todo ideal $\mathfrak{m}$-primario es de la forma $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})$ para algún ideal $\bar{\mathfrak{q}}$ de $A/\mathfrak{m}^r$ (donde $\pi\colon A \to A/\mathfrak{m}^r$ es el morfismo de paso al cociente). En el caso del anillo $A = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, si consideramos el ideal maximal $\mathfrak{m}_\alpha = (x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n)$ y escribimos $t_i = x_i - \alpha_i$, entonces $\mathfrak{m}_\alpha = (t_1,\dots,t_n)$,

$$A/\mathfrak{m}_\alpha^r = \mathbb{C}[t_1,\dots,t_n]/(t_1,\dots,t_n)^r = \begin{bmatrix}\text{Polinomios de grado}\\ < r \text{ en } t_1,\dots,t_n\end{bmatrix}$$

y la reducción módulo $\mathfrak{m}_\alpha^r$ de cualquier polinomio coincide con el clásico desarrollo de Taylor hasta el orden $r-1$ en el punto $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Por tanto, el ideal $\mathfrak{m}_\alpha$-primario $\mathfrak{q}$ está formado por todas las funciones $f \in A$ cuyo desarrollo de Taylor $\bar{f} \in A/\mathfrak{m}_\alpha^r$ hasta el orden $r-1$ en el punto α, pertenece al subespacio vectorial $\bar{\mathfrak{q}}$ de $A/\mathfrak{m}_\alpha^r$.

Una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial dual de $A/\mathfrak{m}_\alpha^r$, la constituyen las formas lineales

$$D_\beta = (\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial^{\beta_1}x_1\cdots\partial^{\beta_n}x_n})_{|\alpha}$$

con $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ y $|\beta| = \beta_1+\cdots+\beta_n < r$, definidas por $D_\beta(\bar{f}) = \frac{\partial^{|\beta|}f}{\partial^{\beta_1}x_1\cdots\partial^{\beta_n}x_n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Por tanto, todo ideal de $A/\mathfrak{m}_\alpha^r$ está definido por un sistema de s-ecuaciones

$$\sum_{|\beta|<r} \lambda_{i,\beta} D_\beta(\bar{f}) = 0, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Añadamos la ecuación redundante $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$. Los ideales $\mathfrak{m}$-primarios son ideales generados por las funciones f que verifican un sistema de s-ecuaciones

$$\begin{array}{l} \sum_{0<|\beta|<r} \lambda_{i,\beta} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial^{\beta_1} x_1 \cdots \partial^{\beta_n} x_n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0, \quad 1\le i\le s \\ f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0 \end{array}$$

(variando $r, s, \lambda_{i,\beta}$ se obtienen todos los ideales $\mathfrak{m}_\alpha$-primarios).

Por tanto, cada ideal $\mathfrak{m}$-primario viene definido por ciertas relaciones entre las derivadas parciales iteradas en el punto $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

Por ello, en general, diremos: "Los ideales primarios de radical maximal $\mathfrak{m}_x$ son los ideales definidos por condiciones infinitesimales en el punto cerrado x".

6. Ejemplo : El ideal primario $(x^2,y)\subset\mathbb{C}[x,y]$ es igual al ideal

$$I=\{f\in\mathbb{C}[x,y]\colon f(0,0)=0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\}.$$

7. Proposición : *Sea S un sistema multiplicativo de un anillo A y sea $\mathfrak{q}$ un ideal $\mathfrak{p}_x$-primario.*

1. *Si $\mathfrak{p}_x$ corta a S, entonces $\mathfrak{q}A_S=A_S$.*
2. *Si $\mathfrak{p}_x$ no corta a S, entonces $\mathfrak{q}A_S$ es un ideal $\mathfrak{p}_xA_S$-primario y $\mathfrak{q}=A\cap(\mathfrak{q}A_S)$. En particular:*
$$\mathfrak{q}=A\cap(\mathfrak{q}A_x).$$

Por tanto, dos ideales $\mathfrak{p}_x$-primarios son iguales si son iguales al localizar en x.

Demostración. 1. Si $s\in S\cap\mathfrak{p}_x$, entonces $\mathfrak{q}$ contiene alguna s^n, que es invertible en A_S; luego $\mathfrak{q}A_S=A_S$.

2. Si $S\cap\mathfrak{p}_x=\emptyset$, entonces $\mathfrak{p}_xA_S$ es un ideal primo de A_S y es fácil comprobar que $\mathfrak{q}A_S$ es un ideal $\mathfrak{p}_xA_S$-primario. Por último, veamos que $\mathfrak{q}=A\cap(\mathfrak{q}A_S)$. Si $f\in A\cap(\mathfrak{q}A_S)$, entonces $sf\in\mathfrak{q}$ para algún $s\in S$. Ninguna potencia de s está en $\mathfrak{q}$, luego $f\in\mathfrak{q}$. Por tanto, $A\cap(\mathfrak{q}A_S)\subseteq\mathfrak{q}$. La inclusión contraria es evidente. □

8. Ejercicio : Prueba la igualdad

$$\{\text{Ideales primarios de } A_S\}=\{\text{Ideales primarios } \mathfrak{q}\subset A \text{ tales que } \mathfrak{q}\cap S=\emptyset\}.$$

9. Sea A un anillo noetheriano y $\mathfrak{p}_x \subset A$ un ideal primo. Un ideal $\mathfrak{q} \subset A$ es $\mathfrak{p}_x$-primario si y solo $\mathfrak{q} \cdot A_x$ es un ideal $\mathfrak{p}_x \cdot A_x$-primario, que equivale a que exista un número natural r, tal que $\mathfrak{p}_x^r A_x \subseteq \mathfrak{q} \cdot A_x \underset{\neq}{\subset} A_x$. En conclusión, $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}_x$-primario si y solo si existe un número natural r y un ideal $\bar{\mathfrak{q}} \underset{\neq}{\subset} A_x/\mathfrak{p}_x^r A_x$ tal que

$$\mathfrak{q} = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})$$

siendo $\pi\colon A \to A_x/\mathfrak{p}_x^r A_x$ el morfismo natural. Por tanto, "los ideales $\mathfrak{p}_x$-primarios son los ideales determinados por condiciones infinitesimales a lo largo de x".

10. Ejemplos : Si un ideal primo $\mathfrak{p}$ no es maximal, pueden existir ideales de radical $\mathfrak{p}$ que no son primarios. Fijemos en un plano afín un punto racional p y una recta r que pase por él. Sea $\mathfrak{m}_p$ el ideal de funciones del plano que se anulen en p y $\mathfrak{p}_r$ el ideal de funciones del plano que se anulen en r. Consideremos ahora el ideal $I = {\mathfrak{m}_p}^2 \cap \mathfrak{p}_r$, que son los polinomios que se anulan en la recta r y sus derivadas parciales se anulan en el punto fijado p. El radical de I es

$$r(I) = r({\mathfrak{m}_p}^2) \cap r(\mathfrak{p}_r) = \mathfrak{m}_p \cap \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}_r$$

pero el ideal I no es primario: si fuese primario sería $\mathfrak{p}_r$-primario. Al localizarlo en r, coincide con la localización de $\mathfrak{p}_r$ en r, por tanto I coincidiría con $\mathfrak{p}_r$, lo cual es falso.

Puede incluso darse el caso de que una potencia de un ideal primo no sea un ideal primario. Por ejemplo, sea $A = k[x,y,z]/(x^2 + y^2 - z^2)$ el anillo de las funciones algebraicas de un cono de $\mathbb{A}^3$ y sea $\mathfrak{p}_{gt} = (x, y-z)$ el ideal primo de A definido por una generatriz. El ideal ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ no viene definido por condiciones infinitesimales en el punto genérico de tal generatriz; es decir, ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ no coincide con $A \cap {\mathfrak{p}_{gt}}^2 A_{gt}$ sino que involucra además condiciones en el vértice del cono, pues las funciones de ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ deben cumplir además la condición de estar en $\mathfrak{m}^2$, donde $\mathfrak{m} = (x,y,z)$ denota el ideal maximal del vértice del cono. En efecto, $y - z \in A \cap {\mathfrak{p}_{gt}}^2 A_{gt}$ (porque $(y-z)\cdot(y+z) \in {\mathfrak{p}_{gt}}^2 A_{gt}$) pero $y - z \notin {\mathfrak{p}_{gt}}^2$ porque no pertenece a $\mathfrak{m}^2$. Luego el ideal ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ no es primario.

4.3. Descomposición primaria de ideales

1. Definición : Diremos que un ideal $\mathfrak{q}$ de un anillo A es *irreducible* si no es intersección de dos ideales estrictamente mayores; equivalentemente, si el ideal 0 de $A/\mathfrak{q}$ no es intersección de dos ideales no nulos.

2. Lema fundamental : *Sea A un anillo noetheriano. Todo ideal irreducible $\mathfrak{q} \neq A$ es primario.*

Demostración. Sea $\mathfrak{q}$ irreducible y sea $b \in A/\mathfrak{q}$ un divisor de cero. Sea $b\colon A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{q}$ la homotecia de razón b. Se tiene que

$$0 \neq \operatorname{Ker} b \subseteq \operatorname{Ker} b^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} b^n \subseteq \cdots$$

Como $A/\mathfrak{q}$ es un anillo noetheriano, $\operatorname{Ker} b^n = \operatorname{Ker} b^{n+1}$ para algún n. Por lo tanto, $(\operatorname{Ker} b) \cap (\operatorname{Im} b^n) = 0$. Como $\mathfrak{q}$ es irreducible, debe ser $\operatorname{Ker} b = 0$ ó $\operatorname{Im} b^n = 0$. Por hipótesis $\operatorname{Ker} b \neq 0$, luego $\operatorname{Im} b^n = 0$ y por tanto b es nilpotente. En conclusión, los divisores de cero de $A/\mathfrak{q}$ son nilpotentes y $\mathfrak{q}$ es primario. □

3. Teorema de existencia: *Sea A un anillo noetheriano. Todo ideal $I \subsetneq A$ es intersección finita de ideales irreducibles de A. Por tanto, todo ideal $I \subsetneq A$ es intersección finita de ideales primarios de A.*

Demostración. Basta ver que si I no es irreducible entonces $I = I_1 \cap I'$ con I_1 irreducible e $I \subsetneq I'$ (pues con I' se repite el argumento y así sucesivamente y se concluye por noetherianidad). Si I no es irreducible, entonces es intersección de ideales estrictamente mayores: $I = I_1 \cap J_1$. Si I_1 es irreducible hemos terminado; si no, $I_1 = I_{11} \cap I_{12}$, luego $I = I_{11} \cap I_{12} \cap J_1$. Si la inclusión $I \subset I_{12} \cap J_1$ es estricta, tomamos $I_2 = I_{11}, J_2 = I_{12} \cap J_1$; si no, tomamos $I_2 = I_{12}$, $J_2 = J_1$. En ambos casos obtenemos de nuevo que $I = I_2 \cap J_2$, con $I \subsetneq J_2$, además $I_1 \subsetneq I_2$. Así sucesivamente, el proceso es finito por noetherianidad, luego para cierto n, $I = I_n \cap J_n$ con I_n irreducible e $I \subsetneq J_n$ por construcción. □

4. Definición: Sea I un ideal de un anillo A. Diremos que una descomposición $I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ como intersección de ideales primarios de A es una *descomposición primaria reducida* de I cuando no tenga componentes redundantes (i.e., no puede eliminarse ninguno de los $\mathfrak{q}_i$ en la igualdad) ni componentes asociadas a un mismo ideal primo ($r(\mathfrak{q}_i) \neq r(\mathfrak{q}_j)$ cuando $i \neq j$).

5. Proposición: *Si $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q}'$ son dos ideales $\mathfrak{p}_x$-primarios entonces $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}'$ es $\mathfrak{p}_x$-primario.*

Demostración. Al lector. □

Si un ideal de un anillo puede descomponerse como intersección finita de ideales primarios, agrupando los términos de igual radical obtenemos una descomposición primaria en que todos los términos tienen radicales diferentes. Eliminando entonces términos redundantes, si los hubiera, se obtiene una descomposición primaria reducida. En conclusión, *si un ideal admite una descomposición primaria, entonces admite una descomposición primaria reducida.*

6. Teorema de unicidad de las componentes no sumergidas: *Sea I un ideal de un anillo A y sea $\mathfrak{p}_x$ el ideal primo de las funciones que se anulan en una componente irreducible de $(I)_0$. Si $I = \underset{i}{\cap}\, \mathfrak{q}_i$ es una descomposición primaria reducida, entonces $\mathfrak{p}_x$ es el radical de una componente $\mathfrak{q}_i$ y*

$$\mathfrak{q}_i = A \cap (IA_x)$$

Por tanto, las componentes $\mathfrak{q}_i$ cuyos radicales son mínimos (entre los primos que contienen a I), son únicas.

Demostración. $(I)_0 = \cup_i (\mathfrak{q}_i)_0$ y alguna de las componentes irreducibles de $(I)_0$ es $(\mathfrak{q}_i)_0$, luego $\mathfrak{p}_x = r(\mathfrak{q}_i)$ (y $\mathfrak{p}_x \not\supset \mathfrak{q}_j$, para $j \neq i$). Ahora, si $j \neq i$, entonces $\mathfrak{q}_j A_x = A_x$, porque $r(\mathfrak{q}_j)$ corta al sistema multiplicativo $A \backslash \mathfrak{p}_x$. Por tanto,

$$IA_x = \bigcap_{j=1}^{n} \mathfrak{q}_j A_x = \mathfrak{q}_i A_x$$

y, por 4.2.7, concluimos que $\mathfrak{q}_i = A \cap (\mathfrak{q}_i A_x) = A \cap (IA_x)$. □

7. Definición: Si $I = \cap_i \mathfrak{q}_i$ es una descomposición primaria reducida, las componentes $\mathfrak{q}_i$ cuyos radicales son mínimos se denominan componentes *no sumergidas*. Una componente $\mathfrak{q}_j$ está *sumergida* cuando sus ceros están contenidos estrictamente en los ceros de alguna otra componente: $(\mathfrak{q}_j)_0 \subset (\mathfrak{q}_i)_0$.

Las componentes no sumergidas corresponden a los puntos genéricos de las componentes irreducibles de $(I)_0$.

8. Corolario: *Si los ceros de un ideal I de un anillo noetheriano son puntos aislados, la descomposición primaria reducida de I es única salvo el orden.*

Las componentes sumergidas no son únicas pero sí lo son sus radicales, como vamos a demostrar.

Sea $a \in A$ e $I \subset A$ un ideal. Denotaremos

$$(I : a) = \{b \in A : a \cdot b \in I\}.$$

9. Proposición: *Sea $\mathfrak{q} \subset A$ un ideal $\mathfrak{p}$-primario. Se verifica*

$$(\mathfrak{q} : a) = \begin{cases} A & \text{si } a \in \mathfrak{q}. \\ \mathfrak{q}' & \text{si } a \notin \mathfrak{q}, \text{ siendo } \mathfrak{q}' \text{ un ideal } \mathfrak{p}\text{-primario que contiene a } \mathfrak{q}. \end{cases}$$

Demostración. Es una sencilla comprobación. □

10. Teorema: *Sea A un anillo noetheriano. Sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ una descomposición primaria reducida de I. Un ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ es un ideal primo asociado a un primario de la descomposición primaria de I si y solo si existe $a \in A$ de modo que $(I : a) = \mathfrak{p}$.*

En particular, los primos asociados a una descomposición primaria reducida de un ideal son independientes de la descomposición.

Demostración. Observemos que $(I : a) = (\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i : a) = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathfrak{q}_i : a)$. Denotemos $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$. Si $(I : a) = \mathfrak{p}$, tomando radicales tenemos que $\mathfrak{p}$ es intersección de unos cuantos $\mathfrak{p}_i$, por la proposición anterior. Luego, $\mathfrak{p}$ ha de coincidir con alguno de los $\mathfrak{p}_i$ (observemos que el cerrado irreducible $(\mathfrak{p})_0$ es unión de unos cuantos cerrados irreducibles $(\mathfrak{p}_i)_0$).

Recíprocamente, supongamos $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q}_1)$. Sea $a \in \bigcap_{i=2}^{n} \mathfrak{q}_i$ y $a \notin \mathfrak{q}_1$; por la proposición anterior $(I : a) = (\mathfrak{q}_1 : a)$ y es un ideal $\mathfrak{p}$-primario. Si $(\mathfrak{q}_1 : a) \neq \mathfrak{p}$, sea $\mathfrak{p}^r$ la primera potencia contenida en $(\mathfrak{q}_1 : a)$. Sea $b \in \mathfrak{p}^{r-1}$ tal que $b \notin (\mathfrak{q}_1 : a)$. Entonces $(I : ab) = (\mathfrak{q}_1 : ab) = \mathfrak{p}$. □

11. Definición: Sea A un anillo noetheriano. Llamaremos *ideales primos asociados* a un ideal I a los radicales de las componentes de cualquier descomposición primaria reducida de I.

Veamos ahora que los A-módulos $A/\mathfrak{p}_x$, $x \in \operatorname{Spec} A$, son los "ladrillos" de la categoría de los A-módulos noetherianos. El significado preciso viene dado por el siguiente teorema.

12. Teorema: *Sea M un A-módulo noetheriano. Existe una cadena de submódulos*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

tal que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$, con $\mathfrak{p}_i$ primo.

Demostración. Sea m un elemento no nulo de M. Entonces, $A/I \simeq \langle m \rangle \subset M$. Existe $\bar{a} \in A/I$ cuyo anulador es $\bar{\mathfrak{p}}_1$, siendo $\bar{\mathfrak{p}}_1$ un primo de A/I asociado al ideal 0. Sea $\pi : A \to A/I$ el morfismo de paso al cociente y $\mathfrak{p}_1 = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}_1)$. Luego $A/\mathfrak{p}_1 = (A/I)/\bar{\mathfrak{p}}_1 = \langle \bar{a} \rangle \subset \langle m \rangle \subset M$. Tomando $M_1 = A/\mathfrak{p}_1$ y repitiendo el argumento para M/M_1 se obtiene $A/\mathfrak{p}_2 \subset M/M_1$. Sea $M_2 = \phi^{-1}(A/\mathfrak{p}_2)$, siendo $\phi : M \to M/M_1$ el morfismo de paso al cociente; así sucesivamente se concluye por noetherianidad.

□

4.4. Descomposición primaria de submódulos

Hasta ahora, hemos desarrollado la descomposición primaria de los ideales de un anillo noetheriano. De modo totalmente análogo podemos desarrollar la descomposición primaria en módulos noetherianos. Indiquemos la línea argumental y dejemos al lector las demostraciones.

1. Definición: Un submódulo $M' \subset M$ diremos que es primario, si los elementos del anillo que son divisores de cero en M/M' (es decir, la homotecia definida por el elemento tiene núcleo no trivial) son nilpotentes en M/M' (es decir, la homotecia definida es nilpotente).

2. Definición: Un submódulo $M' \subseteq M$ diremos que es irreducible si no es intersección de dos submódulos estrictamente mayores de M.

3. Proposición: *Los submódulos irreducibles de un módulo noetheriano son primarios.*

4. Teorema: *Todo submódulo de un módulo noetheriano es intersección de un número finito de submódulos primarios.*

5. Proposición: *Si $M' \subset M$ es un submódulo primario, entonces el anulador de M/M' es un ideal primario.*

Si M' es un submódulo primario y $\mathfrak{p}$ es el radical del anulador de M/M', entonces diremos que M' es un submódulo $\mathfrak{p}$-primario y que $\mathfrak{p}$ es el ideal primo asociado a M'.

6. Proposición: *Si M_1,M_2 son submódulos $\mathfrak{p}$-primarios entonces $M_1 \cap M_2$ es $\mathfrak{p}$-primario.*

Por tanto, existen descomposiciones primarias <u>reducidas</u> de los submódulos de un módulo noetheriano.

Dados $m \in M$ y $M' \subset M$, denotaremos $(M' : m) = \{a \in A : am \in M'\}$.

7. Proposición: *Sea $M' \subset M$ un submódulo primario. Sea $\mathfrak{q}$ el anulador de M/M' y $\mathfrak{p}$ el radical de $\mathfrak{q}$. Se verifica*

$$(M' : m) = \begin{cases} A & \text{si } m \in M'. \\ \mathfrak{q}' & \text{si } m \notin M', \text{ siendo } \mathfrak{q}' \text{ un ideal } \mathfrak{p}\text{-primario, que contiene a } \mathfrak{q}. \end{cases}$$

8. Proposición: *Sea M' un submódulo de un módulo noetheriano M y consideremos una descomposición primaria reducida $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ de M'. Un ideal primo $\mathfrak{p}$ es un ideal primo asociado a alguno de los M_i si y solo si existe $m \in M$ tal que $(M' : m) = \mathfrak{p}$.*

9. Teorema de unicidad de las componentes no sumergidas: *Sea M' un submódulo de un módulo noetheriano M y $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ una descomposición primaria reducida. Sea $\mathfrak{p}_x$ el ideal primo asociado a M_i y supongamos que es minimal entre los ideales primos asociados a los M_j. Entonces,*

$$M_i = M \cap M'_x$$

10. Ejercicio: Prueba que los ideales primos minimales asociados a un submódulo M' de un módulo noetheriano M, coinciden con los ideales primos minimales asociados al ideal anulador de M/M'.

4.5. Una descomposición primaria canónica

1. Proposición: *Sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ una descomposición primaria reducida y $\mathfrak{p}_x$ un ideal primo. Denotemos $J := \cap_{\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}_x} \mathfrak{q}_i$. Entonces*

$$J = A \cap I_x.$$

Por tanto, el ideal J no depende de la descomposición primaria de I escogida.

Demostración. Se deduce de la Proposición 4.2.7 □

2. Corolario: *Sean $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_n$ dos descomposiciones primarias reducidas de primos asociados $r(\mathfrak{q}'_i) = r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_{x_i}$. Se cumple que*

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{j-1} \cap \mathfrak{q}'_j \cap \mathfrak{q}_{j+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$$

para todo j. En consecuencia, si $\mathfrak{q}''_i$ son ideales $\mathfrak{p}_{x_i}$-primarios, y cada uno de ellos aparece en alguna descomposición primaria reducida de I, entonces

$$I = \mathfrak{q}''_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}''_n.$$

Demostración. Reordenando, podemos suponer que $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}'_i \subseteq \mathfrak{p}_{x_j} \Leftrightarrow i \leq j$. Por la proposición anterior, $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_j = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_j$. Denotemos $J_i = A \cap I_{x_i}$. Por la proposición anterior, $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{j-1} = \cap_{i<j} J_i = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_{j-1}$. Por tanto,

$$\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{j-1} \cap \mathfrak{q}'_j = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_{j-1} \cap \mathfrak{q}'_j \overset{4.5.1}{=} \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_j$$

Cortando con $\mathfrak{q}_{j+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ concluimos. □

Procedamos a ver que entre las descomposiciones primarias de I hay una canónica.

3. Proposición: *Sea I un ideal de un anillo noetheriano, de ideales primos asociados $x_1,\dots,x_r$. Sea n_i el número natural más pequeño posible tal que $\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}$ está incluido en algún ideal $\mathfrak{p}_{x_i}$-primario que aparezca en alguna descomposición primaria reducida de I. Denotemos $\mathfrak{a}_i := A\cap(I+\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})_{x_i}$. Entonces*

$$I=\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_r$$

es una descomposición primaria reducida de I (y diremos que es la descomposición primaria canónica de I). Observemos que $\mathfrak{a}_i$ es el ideal $\mathfrak{p}_{x_i}$-primario más pequeño que contiene a $\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}$ que aparece en alguna descomposición primaria reducida de I.

Demostración. Observemos que $\operatorname{rad}((I+\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})_{x_i})=\mathfrak{p}_{x_i}\cdot A_{x_i}$, luego es un ideal $\mathfrak{p}_{x_i}\cdot A_{x_i}$-primario de A_{x_i} y $\mathfrak{a}_i$ es un ideal $\mathfrak{p}_{x_i}$-primario. Consideremos una descomposición primaria reducida $I=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r$, tal que $\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}\subset\mathfrak{q}_i$, para todo i. Entonces, $I+\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}\subseteq\mathfrak{q}_i$ y por tanto $\mathfrak{a}_i=A\cap(I+\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})_{x_i}\subseteq A\cap\mathfrak{q}_{i,x_i}=\mathfrak{q}_i$ y

$$I\subseteq\cap_{i=1}^r\mathfrak{a}_i\subseteq\cap_{i=1}^r\mathfrak{q}_i=I$$

luego todas las desigualdades son igualdades.

□

Tenemos pues unos números $n_1,\dots,n_r$ canónicamente asociados al ideal I. Determinemos de un modo algo más algorítmico los números n_i. Sea $I_i=\cap_{\mathfrak{a}_j\subset\mathfrak{p}_i}\mathfrak{a}_j$. Entonces, n_i es el mínimo número tal que $I_{i,x_i}\cap(I+\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}))_{x_i}=I_{x_i}$. Como

$$I_{i,x_i}\cap(I+\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})_{x_i}=(I_i\cap(I+\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})_{x_i}=(I+(I_i\cap\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}))_{x_i},$$

n_i es el mínimo numero tal que $(I_i\cap\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})_{x_i}\subseteq I_{x_i}$, es decir, $(I:I_i\cap\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})_{x_i}=A_{x_i}$. Por tanto, n_i es el mínimo número tal que $(I:I_i\cap\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})\not\subseteq\mathfrak{p}_{x_i}$.

Del mismo modo obtenemos descomposiciones primarias canónicas para los submódulos de un módulo noetheriano. Las demostraciones de las siguientes proposiciones se pueden copiar de sus equivalentes en el caso de ideales.

4. Proposición: *Sea M' un submódulo del módulo noetheriano M, $M'=M_1\cap\cdots\cap M_n$ una descomposición primaria reducida, y $\mathfrak{p}_x$ un ideal primo. Sea M'' la intersección de los M_i cuyos primos asociados están contenidos en $\mathfrak{p}_x$. Entonces*

$$M''=M\cap M'_x.$$

Por tanto, M'' no depende de la descomposición primaria escogida.

5. Corolario: *Sean $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_n = N_1 \cap \cdots \cap N_n$ dos descomposiciones primarias reducidas, de primos asociados $\mathfrak{p}_{x_i}$. Se verifica que*

$$M' = M_1 \cap \cdots \cap M_{j-1} \cap N_j \cap M_{j+1} \cap \cdots \cap M_n$$

para todo j. En consecuencia, si $\{L_i\}_{1 \leq i \leq n}$ son submódulos $\mathfrak{p}_{x_i}$-primarios y cada uno de ellos aparece en alguna descomposición primaria de M', entonces

$$M' = L_1 \cap \cdots \cap L_n.$$

6. Proposición : *Sea M' un submódulo de un A-módulo noetheriano M. Sea $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_m$ una descomposición primaria reducida de primos asociados $\mathfrak{p}_{x_i}$. Sea $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}$ está contenido en el anulador de M/M_i. Denotemos por N_i el submódulo $\mathfrak{p}_{x_i}$-primario antimagen de $M'_{x_i} + \mathfrak{p}_{x_i}^{n_i} M_{x_i}$ por el morfismo de localización $M \to M_{x_i}$. Entonces,*

$$M' = M_1 \cap \cdots \cap N_i \cap \cdots \cap M_m.$$

Ahora, argumentando como en el caso de los ideales, obtendremos una descomposición primaria canónica de M'.

Solución de los problemas del curso

Solución de los problemas del capítulo primero

P1. Supongamos $\operatorname{Ker} f \neq 0$. Entonces $\operatorname{Ker} f \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} f^2$: sea $m \in \operatorname{Ker} f$ no nulo y $m' \in M$, tal que $f(m') = m$, entonces $m' \in \operatorname{Ker} f^2$ y $m' \notin \operatorname{Ker} f$. Igualmente, $\operatorname{Ker} f^2 \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} f^4$ y tenemos la cadena de inclusiones estrictas

$$\operatorname{Ker} f \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} f^2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} f^{2^n} \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

Lo cual contradice la noetherianidad de M.

P2. La aplicación $(a_1,\dots,a_n,\dots) \mapsto (a_2,\dots,a_n,\dots)$.

P3. Si $N+N_0$ es noetheriano, entonces los submódulos suyos N, N_0 son noetherianos. Si N y N_0 son noetherianos entonces $N \oplus N_0$ es noetheriano y como el morfismo $N \oplus N_0 \to N+N_0$, $(n.n_0) \mapsto n+n_0$ es epiyectivo, entonces $N+N-0$ es noetheriano.

P4. Si M es noetheriano, entonces los cocientes M/N y M/N_0 son noetherianos. Si M/N y M/N_0, entonces M es noetheriano porque el morfismo $M \to M/N \oplus M/N_0$, $m \mapsto (\bar m, \bar m)$ es inyectivo

P5. Escribamos $N = \langle n_1,\dots,n_r\rangle$. El morfismo de A-módulos

$$\operatorname{Hom}_A(N,M) \to M \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus M,\ f \mapsto (f(n_1),\dots,f(n_r))$$

es inyectivo. Como M es noetheriano entonces $M \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus M$ es notehriano, luego $\operatorname{Hom}_A(N,M)$ es noetheriano.

P6. Escribamos $M = \langle m_1,\dots,m_r\rangle$. El morfismo de A-módulos

$$A/I \to M \oplus \overset{r}{\cdots} \oplus M,\ \bar a \mapsto (am_1,\dots,am_r)$$

es inyectivo. Luego, A/I es un A-módulo notheriano, luego es un A/I-módulo noetheriano, es decir, A/I es un anillo noetheriano.

P7. Escribamos $\operatorname{rad} A = (a_1, \dots, a_r)$ y sean n_i tales que $a_i^{n_i} = 0$. Sea $n = n_1 + \cdot + n_r$, entonces

$$\operatorname{rad}(A)^n = (a_1^{\beta_1} \cdots a_r^{\beta_r})_{\beta_1 + \cdots + \beta_r = n} = (0).$$

P8. Sea $I_n = \{(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, \dots) \subset \prod^{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \colon \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$. Tenemos la cadenas de inlcusiones estrictas de ideales

$$I_1 \underset{\neq}{\subset} I_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} I_n \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

que muestra que $\prod^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ no es un anillo noetheriano.

P9. Supongamos que $I = (f_1, \dots, f_n)$. Sea V_i el conjunto de puntos donde se anula f_i y B una bola centrada en 0, tal que $B \subset \cap_i V_i$. Entonces, toda $f \in I$ se anula en B, lo cual es falso. Por lo tanto, I no es finito generado.

P10. Si existe un morfismo g, éste ha de cumplir que $g(\frac{a}{s}) = g(\frac{a}{1}) \cdot g(\frac{1}{s}) = f(a) \cdot g(\frac{s}{1}^{-1}) = f(a) \cdot f(s)^{-1}$ (luego $f(s)$ es invertible para todo $s \in S$) y el morfismo así definido (cuando $f(s)$ es invertible para todo $s \in S$) está bien definido y cumple lo requerido.

P11. Los morfismos $A_{SS'} \to (A_S)_{S'}$, $\frac{a}{ss'} \mapsto \frac{\frac{a}{s}}{s'}$ y $(A_S)_{S'} \to A_{SS'}$, $\frac{\frac{a}{s}}{s'} \mapsto \frac{a}{ss'}$ están bien definido y son inversos entre sí.

P12. $(M/IM)_S = M \otimes_A A/I \otimes_A A_S = M \otimes_A A_S \otimes_A A/I = M_S / I \cdot M_S$.

P13. Supongamos que $\xi_1, \dots, \xi_n, \alpha$ no son k-algebraicamente independientes. Entonces existe un polinomio $p(x_1, \dots, x_n, y)$ no nulo con coeficientes en k, tal que $p(\xi_1, \dots, \xi_n, \alpha) = 0$. Con las notaciones obvias escribamos $p(x_1, \dots, x_n, y) = p(x, y) = \sum_n p_n(x) \cdot y^n$ (algún $p_n(x)$ es no nulo). Entonces, $p(\xi, y) \in k(\xi_1, \dots, \xi_n)[y]$ es no nulo (porque algún $p_n(\xi) \neq 0$) y cumple que $p(\xi, \alpha) = 0$, luego α es $k(\xi_1, \dots, \xi_n)$-algebraico.

Supongamos que α es $k(\xi_1, \dots, \xi_n)$-algebraico, entonces existe un polinomio $p(y) \in k(\xi_1, \dots, \xi_n)[y]$ no nulo tal que $p(\alpha) = 0$. Con las notaciones obvias escribamos $p(y) = \sum_n \frac{p_n(\xi)}{q_n(\xi)} \dot y^n$. Observemos que $q(y) := \prod_n q_n(\xi) \cdot p(y) \in k[\xi_1, \dots, \xi_n][y]$. Entonces, $\xi_1, \dots, \xi_n, \alpha$ no son k-algebraicamente independientes porque $q(\alpha) = 0$.

P14. Sea $\xi_1, \dots, \xi_n \in K$ una base de k-trascendencia de K y $\eta_1, \dots, \eta_m$ una base de K-trascendencia de Σ. Veamos que $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m$ es una base de k-trascendencia de Σ.

Son k-algebraicamente independientes: Sea $p(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ un polinomio con coeficientes en k tal que $p(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m)=0$. Escribamos, con las notaciones evidentes, $p(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=p(x,y)=\sum_\gamma p_\gamma(x)\cdot y^\gamma$ (donde los $p_\gamma(x)\in k[x]$) Entonces, $p(\xi,y)=\sum_\gamma p_\gamma(\xi)\cdot y^\gamma\in K[y]$, cumple que $p(\xi,\eta)=0$, luego $p_\gamma(\xi)=0$, para todo γ, porque las η son K-algebraicamente independientes, entonces $p_\gamma(x)=0$, porque las ξ son k-algebraicamente independientes. Luego, $p(x,y)=0$ y $\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m$ son algebraicamente independientes.

El morfismo $k(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m)\hookrightarrow\Sigma$ es algebraico, porque es composición de los morfismos algebraicos $k(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m)\hookrightarrow K(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m)\hookrightarrow\Sigma$.

En conclusión,

$$\operatorname{gr}\operatorname{tr}_k\Sigma=n+m=\operatorname{gr}\operatorname{tr}_k K+\operatorname{gr}\operatorname{tr}_K\Sigma.$$

P15. Sea $\xi_1,\dots,\xi_n\in\Sigma$ k-algebraicamente independientes. Sea $\xi_1,\dots,\xi_m\in\Sigma$ una base de $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$-trasecendencia de Σ. En el problema anterior hemos probado que $\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m$ es una base de k-trascendencia de Σ.

Solución de los problemas del capítulo segundo

P1. El morfismo de localización $A\to A_S$ induce un morfismo $\operatorname{Esp}A_S\to\operatorname{Esp}A$. Tenemos que probar que vía este morfismo

$$\operatorname{Esp}A_S(B)=\{x\in\operatorname{Esp}A(B)\colon s(x)\text{ es invertible, para todo }s\in S\}$$

que es justamente la propiedad universal de la localización de A por S.

P2. La recta que pasa por $p=(\alpha,\beta)$ y $(2,2)$, es $\frac{x-2}{\alpha-2}=\frac{y-2}{\beta-2}$ y corta a $y=0$ en el punto $((\alpha-2)\cdot\frac{-2}{\beta-2}+2,0)$, luego definimos $f(x)=(x-2)\cdot\frac{-2}{y-2}+2$.

P3. a), b) y c) son consecuencia de las propiedades de los ceros de un ideal.

d) Si $J\subset A$ es un ideal y $\bar J=\{\bar j\in A/I,\forall j\in J\}$, entonces $(A/I)/\bar J=A/(I+J)$. Por tanto, si $\mathfrak{m}\subset A$ es un ideal de A que contiene a I, entonces $(A/I)/\bar{\mathfrak{m}}=A/I+\mathfrak{m}=A/\mathfrak{m}$. Si en la biyección $\operatorname{Spec}A/I=(I)_0$ nos quedamos con los ideales racionales, obtenemos la igualdad requerida.

P4. $\mathbb{R}[x,y,z]/((x,y,z)\cap(x,y,z-2)\cap(x,x^2+y^2+z^2-1))$.

P5. Dado un ideal primo $\mathfrak{p}_z$ de una k-álgebra, denotemos $k(z)=(B(\mathfrak{p}_z)_z$. Si $S\subset B$ es un sistema multiplicativo, $\mathfrak{p}_z\cap S=\emptyset$ y denotamos $\mathfrak{p}_{\tilde z}=\mathfrak{p}_z\cdot B_S$, entonces

$$k(\tilde z)=(B_s/\mathfrak{p}_z\cdot B_S)_{\tilde z}=(B_z/\mathfrak{p}_z\cdot B_z)_{\tilde z}=k(z).$$

Observemos además que $\mathfrak{p}_z \subset B$ es racional si y solo si $k(z) = k$. Ahora ya, el problema es consecuencia de que $\operatorname{Spec} A_S = \{z \in \operatorname{Spec} A\colon\ s(z) \neq 0. \forall s \in S\}$.

P6. a) Por el ejemplo 2,4,9 sabemos que la aplicación es biyectiva. Dado un ideal $I \subset C(X)$ se cumple que $I \subseteq \mathfrak{m}_p$ si y solo si todas las funciones $f \in I$ se anulan en p. $(I)_0 \cap \operatorname{Spec}_{rac} C(X)$ se corresponde con los puntos de X donde se anulan todas las funciones $f \in I$, que es un cerrado. Por tanto la aplicación es continua. Si C es un cerrado de X y $p \notin C$, entonces existe una función continua f tal que $f_{|C} = 0$ y $f(p) \neq 0$. Si $I_C = \{f \in C(X)\colon f_{|C} = 0\}$, entonces C se corresponde vía la aplicación con $(I_C)_0 \cap \operatorname{Spec}_{rac} C(X)$. Luego la aplicación es un homeomorfismo.

b) Cada morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $h\colon C(Y) \to C(X)$, induce el morfismo natural $X = \operatorname{Spec}_{rac} C(X) \xrightarrow{h^*} \operatorname{Spec}_{rac} C(Y) = Y$. La asignación $h \mapsto h^*$ es la asignación inversa de la dada.

c) El morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $C(X) \to C(Y)$, $f \mapsto f_{|Y}$ es epiyectivo por el teorema de extensión de Tietze y su núcleo es I. Por tanto,

$$\operatorname{Spec}_{rac} C(X)/I = \operatorname{Spec}_{rac} C(Y) = Y.$$

P7. Si $A = A_1 \times A_2$, entonces $(1,0)\cdot(0,1) = (0,0)$ y $(1,0)+(0,1) = (1,1)$, luego $\operatorname{Spec} A = ((1,0))_0 \coprod ((0,1))_0$ y no es conexo.

Supongamos ahora que $\operatorname{Spec} A$ es la unión disjunta de dos cerrados C_1 y C_2. Sea I_i el ideal de las funciones que se anulan en todos los puntos de C_i. Sabemos que $(I_1 \cdot I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0 = C_1 \cup C_2 = \operatorname{Spec} A$, luego $I_1 \cdot I_2 \subset \operatorname{rad} A$ y que $(I_1 + I_2)_0 = (I_1)_0 \cap (I_2)_0 = C_1 \cap C_2 = \emptyset$, luego $I_1 + I_2 = A$ y existen $f_1 \in I_1$ y $f_2 \in I_2$ tales que $f_1 + f_2 = 1$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 = (f_1 f_2)^n = f_1^n f_2^n$. Observemos que $((f_1^n)+(f_2^n))_0 = (f_1^n)_0 \cap (f_2^n)_0 = (f_1)_0 \cap (f_2)_0 = ((f_1)+(f_2))_0 = \emptyset$, luego $(f_1^n)+(f_2^n) = A$. Por el teorema chino de los restos

$$A = A/(f_1^n)\cdot(f_2^n) = A/(f_1^n) \times A/(f_2^n).$$

P8. Sea $\mathfrak{p}_z \subset A$ un ideal primo. Si $\overline{x-n} \in \mathfrak{p}_z$, entonces $\overline{x-m} \notin \mathfrak{p}_z$, para $m \neq n$ y $\overline{x-m}$ es invertible en A_z. Luego, $A_z = (\mathbb{Q}[x, x_n]/((x-n)\cdot x_n))_z$ que es noetheriano. Si $\overline{x-n} \notin \mathfrak{p}_z$, para todo n, entonces $A_z = \mathbb{Q}[x]_z$ que es noetheriano.

A no es noetheriano, porque tenemos la cadena de inclusiones estrictas

$$(\overline{x_0}) \underset{\neq}{\subset} (\overline{x_0}, \overline{x_1}) \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} (\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_n}) \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

ya que $0 \neq \bar{x}_{n+1} \in A/(\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{x_{n+2}}, \overline{x_{n+3}}, \ldots) = \mathbb{Q}[x, x_{n+1}]/((x-(n+1))\cdot x_{n+1})$.

P9. Supongamos que $\mathfrak{m}\cdot M = M$. Escribamos $M = \langle n_1,\dots,n_r\rangle$. Podemos suponer que ninguno de los n_i es combinación lineal de los demás, porque en tal caso quitaríamos tal n_i. Si $r>0$, $n_1 \in \mathfrak{m}\cdot M$, luego $n_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i\cdot n_i$, con $a_i \in \mathfrak{m}$. Entonces, $(1-a_1)\cdot n_1 = \sum_{i=2}^{r} a_i\cdot n_i$ y como $1-a_1 \in \mathcal{O}$ es invertible ya que no pertenece al maximal, tenemos que $n_1 = \sum_{i=2}^{r} \frac{a_i}{1-a_1}\cdot n_i$ y hemos llegado a contradicción. Luego $r=0$ y $M=0$.

Supongamos que $\bar m_1,\dots,\bar m_n$ generan el $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$-espacio vectorial $M/\mathfrak{m}\cdot M$. Sea $\bar M = M/\langle m_1,\dots,m_n\rangle$, entonces

$$\bar M/\mathfrak{m}\cdot \bar M = M\Big/(\mathfrak{m}\cdot M + \langle m_1,\dots,m_n\rangle) = (M/\mathfrak{m}\cdot M)\Big/\langle \bar m_1,\dots,\bar m_n\rangle = 0.$$

Luego, $\bar M = \mathfrak{m}\cdot \bar M$, $\bar M = 0$ y $M = \langle m_1,\dots,m_n\rangle$.

P10. a) $f = \sup(f,0) - \sup(-f,0) = \sqrt{\sup(f,0)}^2 - \sqrt{\sup(-f,0)}^2 \in \mathfrak{m}_x^2$.

b) El ideal $\mathfrak{m}_x\cdot C(X)_x$ de $C(X)_x$ es no nulo: $h(y) := d(y,x)$ no es cero en ningún entorno de x y $h\in\mathfrak{m}_x$, luego si $g\in C(X)$ no se anula en x entonces no se anula en ningún punto de un entorno V de x, luego $g\cdot h$ no es cero en V, luego $0 \neq \frac{h}{1} \in \mathfrak{m}_x\cdot C(X)_x \subset C(X)_x$. Por el lema de Nakayama, $\mathfrak{m}_x\cdot C(X)_x$ no es un ideal finito generado y $C(X)_x$ no es un anillo noetheriano. Por tanto, $C(X)$ no es un anillo noetheriano.

c) Es inyectivo: si $[f]\cdot[g]^{-1} = 0$ entonces f es cero en una bola

$$B_\delta := \{y \in X : d(y,x) < \delta\} \underset{\neq}{\subset} X.$$

Sea $h(y) := 1 - \frac{d(y,B_{\delta/2})}{d(y,B_\delta^c)+d(y,B_{\delta/2})}$, entonces $f\cdot h = 0$ y $\frac{f}{g} = 0$. Es epiyectivo: sea f' una función definida en un entorno U de x y $B_\delta \subset U$, entonces la función

$$f(x) := \begin{cases} f(x)\cdot h(x), & \text{si } x\in B_\delta \\ 0, & \text{si } x \notin B_\delta \end{cases}$$

es continua en X y $[f'] = [f]$.

P11. El morfismo $C^\infty(\mathbb{R})_{or} \to \mathcal{O}$, $\frac{f}{g} \mapsto [f]\cdot[g]^{-1}$ es un morfismo de anillos bien definido.

Es epiyectivo: Dada una función diferenciable f' en un entorno abierto U de 0, $B_r \subset U$ una bola abierta de radio r centrada en 0 y h una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$ que sea 1 sobre $B_{r/2}$ y nula en B_r^c. Entonces, la función diferenciable f en X, definida por $f_{|U} = f'\cdot h_{|U}$ y $f_{|X-U} = 0$ cumple que $\frac{f}{1} \mapsto [f] = [f']$.

Es inyectivo: Si $[f]\cdot[g]^{-1}=0$, entonces f se anula en un entorno V del cero. Sea h una función diferenciable en X que sea igual a 1 en un entorno $W\subset V$ de 0 y nula en V^c. Entonces, $f\cdot h=0$ y $\frac{f}{g}=0$.

P12. a) Procedamos por reducción al absurdo. Desechando los ideales primos $\mathfrak{p}_{x_i}$ que convenga, podemos suponer que $I\not\subset \mathfrak{p}_{x_1}\cup\cdots\cup\widehat{\mathfrak{p}_{x_i}}\cup\cdots\cup\mathfrak{p}_{x_n}$, para todo i y que $\mathfrak{p}_{x_i}\not\subset\mathfrak{p}_{x_i}$ para todo $i\neq j$. Sea $f_i\in I$ tal que $f_i(x_j)\neq 0$ (y $f_i(x_i)=0$). Entonces, $g_i=\prod_{j\neq i}f_j$ cumple que $g_i(x_j)\neq 0$ si y solo si $i=j$. Por tanto, $f=\sum_i g_i$ no se anula en ningún x_i y $f\in I$, lo que es contradictorio.

b) En efecto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}A_S&=\{x\in\operatorname{Spec}A\colon \mathfrak{p}_x\cap S=\emptyset\}=\{x\in\operatorname{Spec}A\colon \mathfrak{p}_x\subseteq\cup_i\mathfrak{p}_{x_i}\}\\&\overset{1}{=}\{x\in\operatorname{Spec}A\colon \mathfrak{p}_x\subseteq\mathfrak{p}_{x_i},\text{ para algún } i\}=\cup_i\operatorname{Spec}A_{x_i}.\end{aligned}$$

P13. U y V son también cerrados disjuntos. Sea I_U el ideal de todas las funciones que se anulan en todos los puntos de U e I_V el ideal de todas las funciones que se anulan en todos los puntos de V. Entonces, $(I_U+I_V)_0=(I_U)_0\cap(I_V)_0=U\cap V=\emptyset$, luego $I_U+I_V=1$ y existe $a\in I_U$ y $b\in I_V$ tales que $a+b=1$. Observemos que como a se anula en los puntos de U, entonces b no puede anularse en ninguno de los puntos de U, pues $a+b=1$. Igualmente, a no puede anularse en ningún punto de V. Por tanto, $U=U_b$ y $V=U_a$.

P14. Si A es íntegro, entonces es reducido y como el ideal $\mathfrak{p}_g=(0)$ es primo, tenemos que $\operatorname{Spec}A=(0)_0=\bar{g}$ y es irreducible. Recíprocamente, como $\operatorname{Spec}A$ es irreducible, es el cierre de un punto x, y $\mathfrak{p}_x$ es el único ideal primo minimal de A, luego $\mathfrak{p}_x=\operatorname{rad}A=0$ y A es un anillo íntegro.

P15. Consideremos la inclusión $i\colon\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}[x]$ y el morfismo inducido en los espectros $i^*\colon\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x]\to\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Sea $\mathfrak{p}_p:=(p)\subset\mathbb{Z}$, donde p es un número primo. Entonces,

$$i^{*-1}(p)=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x]/(p)=\operatorname{Spec}\mathbb{F}_p[x]=\begin{cases}(\bar{0})\\(\bar{p}(x)),\ \bar{p}(x)\in\mathbb{F}_p[x]\text{ irreducible.}\end{cases}$$

Por tanto, $i^{*-1}(p)=\begin{cases}(p)\\(p(x)),\ \overline{p(x)}\in\mathbb{F}_p[x]\text{ irreducible.}\end{cases}$ Sea $\mathfrak{p}_g=(0)\subset\mathbb{Z}$. Entonces,

$$i^{*-1}(g)=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x]_g=\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x]=\begin{cases}(0)\\(p(x)),\ p(x)\in\mathbb{Z}[x]\text{ irreducible y }\operatorname{gr}(p(x))>0.\end{cases}$$

Luego,

$$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x] = \begin{cases} (0) \\ (p(x)),\ p(x)\in\mathbb{Z}[x] \text{ irreducible.} \\ (p,p(x)),\ p \text{ primo y } \overline{p(x)}\in\mathbb{F}_p[x] \text{ irreducible.} \end{cases}$$

Solución de los problemas del capítulo tercero

P1. Sean $b_1,\dots,b_n\in B$ y $b'_1,\dots,b'_m\in B'$, tales que $B=\sum_i A\cdot b_i$ y $B'=\sum_j A'\cdot b'_j$. Entonces, $B\otimes_{\mathbb{Z}}B'=\sum_{ij}(A\otimes_{\mathbb{Z}}A')\cdot b_i\otimes b'_j$.

P2. No es finito, porque el morfismo inducido en los espectros $\operatorname{Spec}A_a=U_a\hookrightarrow\operatorname{Spec}A$ no es epiyectivo.

P3. a) Sea $z\in\operatorname{Spec}A$ tal que $\emptyset=f^{*-1}(z)=\operatorname{Spec}B_z/\mathfrak{p}_zB_z$. Entonces, $\mathfrak{p}_z\cdot B_z=B_z$, luego existen $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{p}_z$ y $\frac{b_1}{s_1},\dots,\frac{b_n}{s_n}\in B_z$ tales que $\sum_i a_i\cdot\frac{b_i}{s_i}=1$. Entonces, si consideramos el morfismo finito inyectivo $g\colon A\to A[b_1,\dots,b_n]$, $a\mapsto f(a)$, tendremos que $g^{*-1}(z)=\emptyset$. lo cual es imposible.

b) Cópiese la demostración de este resultado en el caso de que f es finito.

c) Sean $\mathfrak{p}_y\underset{\neq}{\subset}\mathfrak{p}_z\underset{\neq}{\subset}B$ dos ideales primos tales que $f^*(y)=f^*(z)=x$. Sea $b\in\mathfrak{p}_z\backslash\mathfrak{p}_y$. El morfismo obvio $f'\colon A\to A[b]\subset B$ es finito. Sea $\mathfrak{p}_{y'}=\mathfrak{p}_y\cap A[b]$ y $\mathfrak{p}_{z'}=\mathfrak{p}_z\cap A[b]$. Tenemos que $\mathfrak{p}_{y'}\underset{\neq}{\subset}\mathfrak{p}_{z'}$ y $f'^*(y')=x=f'^*(z)$ lo cual es imposible, porque las fibras de f'^* son de dimensión cero.

P4. $\Rightarrow$) Es obviamente entero y existen $b_1,\dots,b_n\in B$ tales que $B=\sum_i A\cdot b_i$, luego $B=A[b_1,\dots,b_n]$ y es una A-álgebra de tipo finito. $\Leftarrow$) $B=A[b_1,\dots,b_n]$ y los b_i son enteros sobre A, luego son enteros sobre $A[b_1,\dots,b_{i-1}]$ y los morfismos $A[b_1,\dots,b_{i-1}]\to A[b_1,\dots,b_i]$ son finitos. Como la composición de morfismos finitos es finito, entonces $A\to B$ es finito.

P5. Escribamos $X=\operatorname{Spec}A$, $Y=\operatorname{Spec}B$ y $f,g\colon B\to A$ dos morfismos de k-álgebras, tales que los morfismos inducidos $f^*,g^*\colon X\to Y$ coinciden en un abierto no vacío $U\subset X$. Para cada $b\in B$

P6. Es consecuencia de que el morfismo de anillos $A\to A\otimes_k K$ es finito es inyectivo.

P7. Para cada $z\in\operatorname{Spec}k[x]$, piden que probemos que el número de puntos de $\pi^{-1}(z)=\operatorname{Spec}A_z/\mathfrak{p}_zA_z$ es constante, es decir, $\dim_{k(z)}A_z/\mathfrak{p}_zA_z$ no depende de z. A es un $k[x]$-módulo finito generado sin torsión, ya que A es íntegro. Por tanto, A es un $k[x]$-módulo libre, $A\simeq k[x]\oplus\overset{n}{\cdots}\oplus k[x]$. Sea $g\in\operatorname{Spec}k[x]$ el punto genérico, entonces $A_g=k(x)\oplus\overset{n}{\cdots}\oplus k(x)$ y el número de puntos de $\pi^{-1}(g)=n$. Sea $z\in\operatorname{Spec}k[x]$

un punto cerrado, entonces $A/\mathfrak{m}_z A = k(z)\oplus\cdots\oplus k(z)$ y y el número de puntos de $\pi^{-1}(z) = n$.

P8. Los ideales maximales de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]/(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)$ son racionales. Por tanto, $\operatorname{Spec}_{max}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] = \{(x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n), \forall\,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}\}$ y $\operatorname{Spec}_{max}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1) = \{(\bar{x}_1-\alpha_1,\dots,\bar{x}_n-\alpha_n), \forall\,(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$, tales que $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-1=0\}$.

P9. Escribamos $\bar{X} = \operatorname{Spec}_{max} A$, $\bar{Y} = \operatorname{Spec}_{max} B$, luego $\bar{X}\times\bar{Y} = \operatorname{Spec}_{max} A\otimes_k B$. Sea $f\in A\otimes_k B$ y C el conjunto de puntos $\alpha\in\bar{X}$ tales que $f_{|\alpha\times\bar{Y}} = 0$. Observemos que si $f_{|\alpha\times\bar{Y}}\neq 0$, entonces existe un punto $\beta\in\bar{Y}$, tal que $f(\alpha,\beta)\neq 0$, luego existe un entorno abierto (básico) $\bar{U}_\alpha$ de α tal que para todo $\alpha'\in\bar{U}_\alpha$ se cumple que $f(\alpha',\beta)\neq 0$; por tanto, $f_{|\alpha'\times\bar{Y}}\neq 0$. En conclusión, C es un cerrado de $\bar{X}$. Sea $g\in A\otimes B$ y D el conjunto de puntos $\alpha\in\bar{X}$ tales que $g_{|\alpha\times\bar{Y}} = 0$. Si $f\cdot g = 0$, entonces para cada punto cerrado $\alpha\in\bar{X}$, tenemos que $f_{|\alpha\times\bar{Y}}\cdot g_{|\alpha\times\bar{Y}} = 0$, luego $f_{|\alpha\times\bar{Y}} = 0$ o $g_{|\alpha\times\bar{Y}} = 0$, es decir, $\alpha\in C\cup D$. En conclusión, $\bar{X} = C\cup D$ lo que implica que $\bar{X} = C$ (luego $f=0$) o que $\bar{X} = D$ (luego $g=0$).

P10. Sea $\Delta := (x_1-x_1',\dots,x_n-x_n')_0\subset\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n,x_1',\dots,x_n'] = \mathbb{A}^n\times_k\mathbb{A}^n$ y consideremos el cerrado obvio $Y\times Y'\subset\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^n$. Se cumple que $Y\cap Y' = \Delta\cap(Y\times Y')$. Por el teorema del ideal principal de Krull, $\dim(Y\cap Y')\geq\dim(Y\times Y')-n = \dim Y+\dim Y'-n$ y se concluye.

P11. Sean $f=\sum_i a_i\otimes\lambda_i$, $g=\sum_j a_j'\otimes\mu_j\in A\otimes_k K$, tales que $f\cdot g=0$. Sea $B := k[\lambda_i,\mu_j]_{i,j}\subset K$. Como $f,g\in A\otimes_k B$ y $f\cdot g=0$, entonces $f=0$ o $g=0$.

P12. Sea $A = k[x]/\mathfrak{p}$, entonces $A\otimes_k\bar{k} = \bar{k}[x]/\mathfrak{p}\cdot\bar{k}[x]$. El ideal de polinomios con coeficientes en $\bar{k}$ que se anulan en el conjunto de las soluciones de $\{f_i=0\}_{i\in I}$ con valores en $\bar{k}$ coincide con $\mathfrak{p}\cdot\bar{k}[x]$, luego el ideal de polinomios con coeficientes en k que se anulan en el conjunto de soluciones de $\{f_i=0\}_{i\in I}$ con valores en $\bar{k}$ coincide con $\mathfrak{p}$.

Bibliografía

1. M.F. Atiyah, I.G. Macdonald. Introduction to Commutative Algebra,Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1969.

2. D. Eisenbud, Commutative Algebra, with a View Toward Algebraic Geometry,GTM Springer, 1995.

3. R. Hartshorne, Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1977.

4. S. Lang, Álgebra, Aguilar S.A. de ediciones, Madrid, 1971.

5. H. Matsumura. Commutative ring theory,Cambridge University Press, 1986.

6. J.S. Milne. Algebraic Geometry.http://www.jmilne.org/math/

7. J.A. Navarro. Álgebra Conmutativa Básica, Manuales UNEX, 19. Servicio de Publicaciones, Universidad de Extremadura, 1996. Versión on-line actualizada disponible en http://matematicas.unex.es/ navarro.

8. M. Reid. Undergraduate Commutative Algebra, London Mathematical Society, Students Texts 29, University Cambridge Press, 1995.

9. C. Sancho, P. Sancho. Álgebra Conmutatica. Geometría Algebraica. Manuales Uex online, 90. Servicio de Publicaciones, Universidad de Extremadura, 2013.

Índice alfabético

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

UNIÓN EUROPEA
FEDER
FONDO EUROPEO DE
DESARROLLO REGIONAL:
UNA MANERA DE HACER EUROPA

GOBIERNO DE EXTREMADURA
Consejería de Empleo, Empresa e Innovación

91