Problemas del capítulo cuarto de Álgebra Local

José Navarro Garmendia

2005

0.1 Problemas

1. Probar que los anillos de valoración del cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$, que contienen a $\mathbb{C}$, se corresponden con los puntos de la circunferencia en el plano proyectivo.

   Resolución:

   Veamos que se corresponden con los puntos de la circunferencia proyectiva, $\operatorname{Proj}\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]/(x_1^2+x_2^2-x_0^2)$.

   Sea $\mathcal{O}_v \subset \Sigma_A$, donde $A := \mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$.

   $\mathcal{O}_v$ centra en algún abierto afín $U^h_{x_0}$: Sea $\frac{x_i}{x_j}$ el elemento de valor máximo entre todos los $\{\frac{x_l}{x_k}\}$. Entonces $\frac{x_1}{x_j}, \frac{x_2}{x_j}, \frac{x_3}{x_j} \in \mathcal{O}_v$, pues si

   $$\frac{x_a}{x_j} \notin \mathcal{O}_v \Rightarrow v(\frac{x_a}{x_j}) < 0 \Rightarrow v(\frac{x_j}{x_a}) > 0 \Rightarrow v(\frac{x_i}{x_j}\cdot\frac{x_j}{x_a}) > v(\frac{x_i}{x_j}) \text{ !!!}$$

   Digamos $x_j = x_0$. Tenemos que

   $$A = \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}]/((\frac{x_1}{x_0})^2 + \frac{x_2}{x_0})^2 - 1) \subset \mathcal{O}_v$$

   $\mathcal{O}_v = A_x$ para algún punto $x \in U^h_{x_0}$ de la circunferencia: Sea $\mathfrak{m}_{(a,b)} = \mathfrak{p}_v \cap A$. Si $\mathfrak{m}_{(a,b)} = 0$ entonces $\mathcal{O}_v = \Sigma_A$, pues todo elemento de A es invertible en $\mathcal{O}_v$. En otro caso, $\mathcal{O}_v$ domina a $A_{(a,b)}$, que es anillo de valoración (por ser local noetheriano íntegro y regular), con lo que

   $$\mathcal{O}_v = (\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1))_{(a,b)}$$

   Hemos concluido. Todos los anillos de valoración se corresponden con los puntos afines de la circunferencia en $U^h_{x_0}, U^h_{x_1}, U^h_{x_2}$. Es decir, con los puntos del $\operatorname{Proj}\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]/(x_1^2+x_2^2-x_0^2)$. $\square$

2. Probar que las $\mathbb{C}$-álgebras $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$, $\mathbb{C}[x]$ no son isomorfas aunque sí son birracionalmente isomorfas.

   Resolución:

   Al considerar las curvas proyectivas asociadas, la recta corta en un punto al infinito, mientras que la circunferencia lo hace en dos. Esto quiere decir que hay un anillo de valoración de $\mathbb{C}(x)$ que no contiene a $\mathbb{C}[x]$ y dos anillos que no contienen a la circunferencia. Por tanto, no pueden ser isomorfas.

   Isomorismo birracional: Fijemos el $(-1,0)$ en la circunferencia, y proyectemos la circunferencia sobre la recta $x=2$. En los anillos, el morfismo se escribe $k[\lambda] \to k[x,y]/(x^2+y^2-1)$, $\lambda \mapsto \frac{3y}{x+1}$. En los espectros, resulta:

   $$\begin{aligned} S_1 &\to \mathbb{A}_1 \\ (\alpha,\beta) &\mapsto \frac{3\beta}{\alpha+1} \end{aligned}$$

Hay que localizar, pues, en el punto $x=-1$ para que esté bien definido.

El morfismo inverso es el evidente: dado un punto $(2,\lambda)$, cortamos la recta que lo une con el $(-1,0)$ con la circunferencia unidad. En los anillos se escribe $k[x,y]/(x^2+y^2-1) \xrightarrow{f} k[\lambda]$, $f(\overline{x}) = \frac{1-c^2}{1+c^2}$, $f(\overline{y}) = \frac{2c}{1+c^2}$, para $c = (\frac{\lambda}{3})^2$. Tomando espectros:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &\to S_1 \\ \lambda &\mapsto (\frac{1-c^2}{1+c^2}, \frac{2c}{1+c^2}), \qquad c = (\frac{\lambda}{3})^2 \end{aligned}$$

□

3. Calcular el cierre entero de $\mathbb{Z}[\sqrt[2]{5}]$.

Resolución:

Escribimos $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2-5)$. Hemos visto en el ejercicio 6 del capítulo anterior que el único punto singular es el $\mathfrak{m}_x = (2, x-1)$. .

Para simplificar, hagamos

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[u,v] &\simeq \oplus \mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1} = G_{\mathfrak{m}_x}\mathbb{Z}[x] \\ u &\mapsto \overline{x-1} \\ v &\mapsto \overline{2} \end{aligned}$$

($\mathbb{Z}[x]_x$ es un anillo regular de dimensión 2).

Multiplicidad de $\mathbb{Z}[x]/(x^2-5)$ *en* $\mathfrak{m}_x$: Tiene multiplicidad dos, pues

$$x^2-5 = (x-1)^2 - 2(x-1) - 2^3 = u^2 - vu - v^3 \in \mathfrak{m}_x^2 \setminus \mathfrak{m}_x^3$$

Tangentes en el origen:

$$u^2 - v\cdot u = 0 \Rightarrow u=0,\ u-v=0$$

Vemos, por tanto, que $v=0$ es transversal.

Explotemos:

$$\mathbb{Z}[x]/(x^2-5) \hookrightarrow \mathbb{Z}[x]/(x^2-5)[\frac{u}{v}] = \mathbb{Z}[2,t]/(t^2-t-2) = \mathbb{Z}[t]/(t^2-t-2)$$

donde $t = \frac{u}{v}$ y $x^2-5 = (x-1)^2 - 2(x-1) - 2^3 = v^2(t^2-t-2)$.

Fibra excepcional: Basta hacer $v=0$ en el anillo explotado:

$$\text{Spec}\,\mathbb{Z}[t]/(t^2-t-v,v) = \text{Spec}\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]/(t(t-1)) = \{(v,t),(v,t-1)\}$$

con ambos puntos regulares, pues el punto original tenía multiplicidad 2.

Hemos desingularizado la curva y llegado, por tanto, al cierre entero, que es lo que buscábamos.

$$\overline{\mathbb{Z}[\sqrt{5}]} = \mathbb{Z}[t]/(t^2-t-2) = \mathbb{Z}[\frac{\sqrt{9}-1}{2}]$$

□

4. Desingularizar la curva $y^2 - x^7 = 0$. ¿Es esta curva birracional a la recta afín?

   Resolución:

   El origen es un punto singular de multiplicidad 2. La recta $y = 0$ es tangente doble para la curva en ese punto.

   Explotemos en el origen. Para ello, podemos tomar el parámetro $x = 0$, pues pasa por el origen y es transversal a nuestra curva:

   $$k[x, y]/(y^2 - x^7) \hookrightarrow = k[x, \frac{y}{x}]/((\frac{y}{x})^2 - x^7) = k[x, u]/(u^2 - x^5)$$

   donde $u = \frac{y}{x}$. La fibra excepcional es sólo el origen, $(x = 0, u = 0)$ (hay que cortar la curva con $x = 0$). Sigue siendo un punto singular, así que explotamos de nuevo.

   Como la tangente es $u = 0$, el parámetro $x = 0$ vuelve a ser transversal.

   $$k[x, u]/(u^2 - x^5) = k[x, \frac{u}{x}]/((\frac{u}{x})^2 - x^3) = k[x, v]/(v^2 - x^3)$$

   para $v = \frac{u}{x}$. La fibra excepcional es, de nuevo, el origen, $(x = 0, v = 0)$. Vuelve a ser un punto singular para la curva explotada.

   Así que explotamos una tercera vez, con $x = 0$ de parámetro transversal, obteniendo

   $$k[x, v]/(v^2 - x^3) = k[x, \frac{v}{x}]/((\frac{v}{x})^2 - x^3) = k[x, z]/(z^2 - x)$$

   con $z = \frac{v}{x}$. La fibra excepcional, el origen $(x = 0, z = 0)$ es ya un punto regular de multiplicidad 1, y la curva está desingularizada:

   $$\overline{A} = \frac{k[x, \frac{y}{x^3}]}{((\frac{y}{x^3})^2 - x)}$$

   □

5. Calcular los anillos de valoración del cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$, que contengan a $\mathbb{C}$.

   Resolución:

   Veremos que hay tantas valoraciones como puntos tiene la curva proyectiva desingularizada.

   La curva proyectiva sólo tiene un punto singular, que es el $(1, 0, 0)$. Es la única solución válida que anula las tres derivadas parciales de la ecuación de la curva $x_2^2 x_0 - x_1^2 x_0 + x_1^3 = 0$.

   Como en el ejercicio número 1, se prueba que todo anillo de valoración centra en algún punto de la curva proyectiva.

   Si el punto es no singular, el anillo de valoración coincide con el anillo local de la curva en el punto (se comprueba con el mismo razonamiento que en el primer ejercicio).

   Anillos de valoración que centran en $(1, 0, 0)$*:* Explotemos la curva en ese punto, y sean y_1, y_2 los dos puntos regulares que resultan. Sean A, A_1 el anillo de la curva en el punto y el anillo explotado, respectivamente.

   Al explotar, el anillo de valoración sigue dominando. Como $\mathfrak{p}_v \cap A = \mathfrak{m}_{(0,0)}$, tendremos que $\mathfrak{p}_v \cap A_1 = \mathfrak{p}_1$ ó $\mathfrak{p}_v \cap A_1 = \mathfrak{p}_2$. □

6. Calcular la multiplicidad de intersección de $y^2 - x^3 + y^4 = 0$ con $yx + x^3 + y^3 = 0$ en el origen.

Resolución:

Sean $C \equiv y^2 - x^3 + y^4 = 0$, $C' \equiv yx + x^3 + y^3 = 0$.

Vemos que $(C)_{(0,0)} = (C')_{(0,0)} = 2$. Calculemos ahora la multiplicidad de corte al explotar en el origen.

Explotamos ambas curvas, tomando el parámetro $x = 0$ (observemos que $x = 0$ es transversal a C en el origen, aunque no lo es a C'. Esto no nos afecta, pues queremos calcular los puntos comunes de las fibras excepcionales de C y C'):

$$\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3 + y^4) \hookrightarrow A_1 := \mathbb{C}[x, \frac{y}{x}]/((\frac{y}{x})^2 + x + (\frac{y}{x})^4 x^2)$$

cuya fibra excepcional es $(x = 0, \frac{y}{x} = 0)$.

$$\mathbb{C}[x,y]/(yx + x^3 + y^3) \hookrightarrow A_1 := \mathbb{C}[x, \frac{y}{x}]/((\frac{y}{x}) + x + (\frac{y}{x})^3 x)$$

de fibra excepcional $(x = 0, \frac{y}{x} = 0)$.

Para calcular la multiplicidad de intersección de estas dos curvas explotadas en el punto $(x = 0, \frac{y}{x} = 0)$ basta observar que son transversales, pues sus tangentes son distintas:

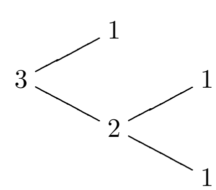
$$\widetilde{C} : x = 0, \qquad \widetilde{C'} : \frac{y}{x} + x = 0$$

Entonces,

$$(C \cap C')_{(0,0)} = (C)_{(0,0)} \cdot (C')_{(0,0)} + (\widetilde{C} \cap \widetilde{C'})_{(0,0)} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

dado que las curvas explotadas son no singulares en el punto. $\square$

7. Definir una curva plana que pase por el origen cuyo árbol de explosión en el origen sea



Resolución:

Sea C la curva que buscamos y $\widetilde{C}$ la curva explotada como se indica en el árbol.

Notemos que $\widetilde{C}$ puede ser un nodo, pues tiene multiplicidad 2 en el origen, y al explotar se desingulariza. Tomemos, por tanto, $\widetilde{C} = y^2 - x^2 + x^3$.

Vemos que $y = 0$ es transversal, luego

$$(\{y = 0\} \cap \widetilde{C}) = 2 \cdot (0,0) + 1 \cdot (1,0)$$

Contraigamos $y=0$ (el proceso inverso a explotar):

$$x = \frac{z}{y},\ y = y \ \Rightarrow\ y^2 - (\frac{z}{y})^2 + (\frac{z}{y})^3 = 0 \ \Rightarrow\ y^5 - z^2y + z^3 = 0$$

Un ejemplo de curva plana con dicho árbol de explosión es, por tanto,

$$C \equiv y^5 - z^2y + z^3 = 0$$

□

8. Probar que el morfismo $k[x,y]/(y^2-x^2+x^3) \hookrightarrow [k[x,\frac{y}{x}]/((\frac{y}{x})^2-1+x)]_{\frac{y}{x}-1}$ no es un morfismo finito.

Resolución:

Lo que tenemos es un morfismo de explosión, localizado en un punto de la fibra excepcional.

Como el nodo $y^2-x^2+x^3$ al explotar resulta una curva regular (la fibra excepcional son los puntos $(0,1)$, $(0,-1)$, en coordenadas $x, \frac{y}{x}$), tenemos que el morfismo de explosión "llega al cierre entero", es decir, el anillo de explosión es el cierre entero: $A \hookrightarrow \overline{A}$.

Po tanto, localizando nos salimos del cierre entero, y el morfismo no puede ser finito:

$$A \hookrightarrow \overline{A} \hookrightarrow \overline{A}_{(0,-1)}$$

Nota: El morfismo $\overline{A} \hookrightarrow \overline{A}_{(0,-1)}$ no es epiyectivo en Spec, luego no puede ser finito. □

9. Sean X e Y dos k-variedades algebraicas y $x \in X$ e $y \in Y$ dos puntos racionales. Probar que

$$m_{(x,y)}(X \times_k Y) = m_x(X) \cdot m_y(Y)$$

Resolución:

Sean $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec}; B$.

Tomemos una función en A tal que $f \in A, f \in \mathfrak{m}_x, f \notin \mathfrak{m}_x^2$ y f es no divisor de cero en G_xA (para asegurarnos de que existe dicha función f no divisor de cero en G_xA, habría que imponer alguna hipótesis. Por ejemplo, que G_xA sea un anillo Cohen-Macaulay).

Entonces $m(X)_x = m((f)_0)_x$. En efecto, como f es no divisor de cero en G_xA, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to G_XA \xrightarrow{\cdot f} G_xA \to G_x(A/(f)) \to 0$$

De aquí, obtenemos que $S_{A_x/(f)}(n) = S_{A_x}(n) - S_{A-x}(n-1)$, lo cual lleva directamente a $m(X)_x = m((f)_0)_x$, con un sencillo cálculo.

Notemos que $f \otimes 1$ está en las mismas hipótesis que f, pero en el anillo $A \otimes B$:

$$f \otimes 1 \in \mathfrak{m}_{(x,y)} = \mathfrak{m}_x \otimes B + A \otimes \mathfrak{m}_y$$

$$f \otimes 1 \notin \mathfrak{m}_{(x,y)}^2 = \mathfrak{m}_x^2 \otimes B + A \otimes \mathfrak{m}_y^2 + \mathfrak{m}_x \otimes \mathfrak{m}_y$$

Además, $f \otimes 1$ es no divisor de cero en $G_{(x,y)}A \otimes B = G_x A \otimes G_y B$. Por tanto, $m(X \times Y)_{(x,y)} = m((f \otimes 1)_0)_{(x,y)}$.

Podemos ya demostrar el enunciado por inducción sobre la dimensión de $X \times Y$:

Si $\dim X \times Y = 0$, entonces A, B, y $A \otimes B$ son k-álgebras finitas, y sus polinomios de Samuel son constantes (el grado del polinomio de Samuel coincide con la dimensión, y en este caso es 0). Ahora es trivial.

En dimensión general, como $(f \otimes 1)_0$ tiene dimensión estrictamente menor que $A \otimes B$, concluimos por hipótesis de inducción. □

10. Probar que las cúbicas proyectivas $y^2 - x^3 - 1 = 0$ y $y^2 - x^3 - 2 = 0$ se cortan en un único punto con multiplicidad 9.

Resolución:

Observamos que ambas cúbicas no tienen ningún punto afín común. Buscamos soluciones, por tanto, en el plano proyectivo, homogeneizando:

$$x_2^2 x_0 - x_1^3 - x_0^3 = 0, \qquad x_2^2 x_0 - x_1^3 - 2x_0^3 = 0$$

cuyo único punto común es el $(0,0,1)$, pues $x_0 = 0$ implica $x_1 = 0$.

Como sólo se cortan en un punto, lo hacen con multiplicidad 9, por el Teorema de Bezout. □

11. Parametrizar la curva $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$. Calcular sus soluciones racionales.

Resolución:

Sea $C \equiv x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$. Consideramos el haz de rectas $\{y = \lambda x\} \equiv \mathbb{A}_1$. Establecemos un isomorfismo birracional de la curva con la recta afín:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &\to C \\ \lambda &\mapsto (\lambda^3 + \lambda^5, \lambda^4 + \lambda^6) \end{aligned}$$

obtenido al cortar la recta $y = \lambda x$ con la C. Al tener multiplicidad 5 el origen, la curva y la recta se cortan en un único punto distinto del origen, y el morfismo está bien definido.

El morfismo inverso es

$$\begin{aligned} C &\to \mathbb{A}_1 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

definido sólo en el abierto de C $\{\alpha \neq 0\}$, es decir, definido en todos los puntos salvo en el origen. Así pues, hemos parametrizado la curva C, obteniendo todas sus soluciones racionales:

$$(\lambda^3 + \lambda^5, \lambda^4 + \lambda^6) \qquad \lambda \in k$$

□

12. Probar el Teorema de Pascal: Si un hexágono está inscrito en una cónica irreducible, entonces los lados opuestos se cortan en puntos alineados.

Resolución:

Sean los vértices del hexágono $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$. Consideramos las cúbicas

$$C_3 \equiv p_1p_2 \cup p_3p_4 \cup p_5p_6 \equiv P_3 = 0, \qquad C_3' \equiv p_2p_3 \cup p_4p_5 \cup p_6p_1 \equiv P_3' = 0$$

cuyas multiplicidades de corte con la cónica C_2 son

$$(C_2 \cap C_3) = 1 \cdot p_1 + \ldots + 1 \cdot p_6, \qquad (C_2 \cap C_3') = 1 \cdot p_1 + \ldots + 1 \cdot p_6$$

Como C_2 es no singular, estamos en las condiciones del Teorema de Max Noether, luego

$$P_3' = aP_2 + bP_3, \qquad \text{gr } a = 1$$

Sean $m = p_1p_6 \cap p_3p_4, n = p_2p_3 \cap p_5p_6, q = p_1p_2 \cap p_4p_5$. Como P_3, P_3' se anulan en m, n, q y P_2 no, tenemos que a se anula en m, n, q y, por tanto, están alineados. □

13. Probar el Teorema de Pappus: Sean R_1, R_2 dos rectas; $p_1, p_2, p_3 \in R_1$ y $q_1, q_2, q_3 \in R_2$ (ninguno de ellos se encuentran sobre $R_1 \cap R_2$). Sea R_{ij} la recta que une p_i y q_j. Probar que los puntos $p_{ij} = R_{ij} \cap R_{ji}$ $(i < j)$ están alineados.

Resolución:

Es justamente el Teorema de Pascal, pero en al caso degenerado de que C_2 sea un par de rectas, en lugar de ser no singular.

Sean

$$C_3 \equiv R_{13} \cup R_{21} \cup R_{32} \equiv P_3 = 0, \quad C_3' \equiv R_{12} \cup R_{23} \cup R_{31} \equiv P_3' = 0$$

Vemos que $C_3 \cap C_3' = p_1 \cup \ldots \cup q_3 \cup R_{12} \cup R_{23} \cup R_{13}$.

Las curvas C_2, C_3, C_3' están en las condiciones del teorema de Max Noether, pues $(C_3 \cap C_2)_{p_i} = 1 = (C_3 \cap C_3')_{p_i}$, luego

$$P_3' = aP_2 + bP_3, \qquad \text{gr } a = 1$$

Por tanto, a se anula en R_{ij} $(i < j)$, y dichos puntos están alineados. □

14. Ley de grupo en las cúbicas. Sea C una cúbica plana no singular. Fijemos un punto $p_0 \in C$. Dados dos puntos $p, q \in C$, la recta que pasa estos dos puntos, corta a C en un tercer punto r. Definamos $\phi\colon C \times C \to C$, $(p, q) \mapsto r$. Probar que la aplicación $C \times C \to C$, $(p, q) \mapsto \phi(p_0, \phi(p, q))$ dota a C de estructura de grupo abeliano.

Resolución:

Elemento neutro: Se comprueba fácilmente que es p_0.

Asociativa: Sean $p, q, h \in C$. Denotemos $\phi(p, q) = p * q$. Veamos que $(p * q) * h = p * (q * h)$. Consideremos las curvas planas

$$C_3' = pq \cup (p * q)h \cup p_0(q * h), \quad C_2 = p_0(p * q) \cup qh$$

(donde pq denota la recta que pasa por p y q) cuyos cortes con la cúbica original son

$$C_3 \cap C_3' = p + q + p * q + h + p_0 + q * h + z_1 + z_2 + v_1$$

$$C_3 \cap C_2 = p_0 + p * q + z_1 + q + h + z_2$$

donde

$$v_1 = (p * q)h \cap C_3, \quad v_2 = p(q * h) \cap C_3, \quad z_1 = (p * q)p_0 \cap C_3, \quad z_2 = qh \cap C_3$$

Lo que queremos probar es que $v_1 = v_2$. Como las curvas consideradas están en las condiciones del teorema de Max Noether, tenemos que

$$P_3' = aP_2 + bP_3, \qquad \mathrm{gr}\, a = 1$$

Como C_3, C_3' pasan por $v_1, p, q * h$ y C_2 no pasa por ellos, ha de ocurrir que a se anule en $v_1, p, q * h$, luego estos tres puntos están alineados.

Como $v_2 = p(q * h) \cap C_3$, hemos terminado, pues $v_1 = v_2$.

Conmutatividad: Es obvia. □

15. Sean C_3, C_3' dos cúbicas planas que se cortan en 9 puntos distintos, de manera que 6 de ellos están sobre una cónica. Probar que los tres restantes están alineados.

Resolución:

Sean $C_3 \equiv P_3 = 0, C_3' \equiv P_3' = 0, C_2 \equiv P_2 = 0$ las curvas del enunciado.

Como $(C_3 \cap C_2)_x \geq (C_3 \cap C_3')_x$, $\forall x \in C_3 \cap C_2$, estamos en las condiciones del Teorema de Max Noether, luego

$$P_3' = aP_2 + bP_3 \qquad \mathrm{gr}\ a = 1$$

Sabemos que P_2 no se anula en los 3 puntos de corte de C_3 con C_3' estudiados, por lo que a ha de anularse en ellos y concluimos que están alineados. □

16. Demostrar que las tangentes a una cúbica irreducible plana en 3 puntos alineados cortan a la cúbica en otros 3 puntos alineados.

Resolución:

Sean $t_{p_1}, t_{p_2}, t_{p_3}$ las tangentes del enunciado. Consideramos ahora las curvas

$$C_3 \equiv P_3 = 0,\ C_3' \equiv t_{p_1} \cup t_{p_2} \cup t_{p_3} \equiv P_3' = 0,\ C_2 \equiv p_1p_2 \cup p_1p_2 \equiv P_2 = 0$$

Así

$$C_3 \cap C_2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3, \quad C_3 \cap C_3' = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + q_1 + q_2 + q_3$$

y podemos aplicar el Teorema de Max Noether, con lo que

$$P_3' = aP_2 + bP_3 \qquad \mathrm{gr}\, a = 1$$

Cortando con C_3 vemos que la recta $a = 0$ ha de pasar por los puntos q_1, q_2, q_3, luego están alineados. □

17. Demostrar que si un triángulo está inscrito en una cónica irreducible, entonces los puntos de corte de cada lado del triángulo con la tangente a la cónica en el vértice opuesto, están alineados.

Resolución:

Teorema de Pascal (degenerado)

Sean p_1, p_2, p_3 los vértices del triángulo, t_1, t_2, t_3 las tangentes a la cónica en dichos puntos. Consideramos las curvas

$$C_2 \equiv P_2 = 0, \quad C_3 = p_1p_2 \cup p_2p_3 \cup p_3p_1 \equiv P_3 = 0, \quad C_3' = t_1 \cup t_2 \cup t_3 \equiv P_3' = 0$$

Los cortes entre ellas son:

$$C \cap C_2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3, \quad C_3 \cap C_3' = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + q_1 + q_2 + q_3$$

y estamos, por tanto, en las condiciones del Teorema de Max Noether, luego

$$P_3' = aP_2 + bP_3, \qquad \text{gr } a = 1$$

Cortando con C_3, vemos que la recta $a = 0$ ha de pasar por los puntos q_1, q_2, q_3 y concluimos que están alineados. □

18. Probar que una recta que pase por dos puntos de inflexión de una cúbica plana irreducible pasa por un tercer punto de inflexión.

Resolución:

Sea $C_3 \equiv P_3 = 0$ la cúbica del enunciado, y sean $x, z \in C_3$ puntos de inflexión (esto es, la tangente corta a la cúbica con multiplicidad 3 en dichos puntos).

Consideremos

$$C_2 = t_x \cup t_z \equiv P_2 = 0, \qquad C_3' = 3xz \equiv P_3' = 0$$

Entonces

$$C_3 \cap C_2 = 3x + 3z, \qquad C_3 \cap C_3' = 3x + 3z + 3y$$

y estamos en las condiciones del Teorema de Max Noether. Por tanto,

$$P_3' = aP_2 + bP_3, \qquad \text{gr } a = 1$$

Cortando con C_3 obtenemos que $C_3 \cap \{a = 0\} = 3y$, de donde concluimos que y es punto de inflexión de C_3, de tangente $a = 0$. □

19. Probar que si una cúbica pasa por ocho de los nueve puntos distintos de corte de otras dos cúbicas, entonces también pasa por el noveno.

Resolución:

Sean $C_3 \equiv P_3 = 0, C_3' \equiv P_3' = 0$ dos cúbicas planas, y sean $C_3 \cap C_3' = p_1 + \ldots + p_9$. Sea t_9 la tangente a una de las cúbicas en p_9. Sea $C_3'' \equiv P_3'' = 0$ otra cúbica tal que $C_3 \cap C_3'' = p_1 + \ldots + p_8 + q$.

Consideramos la cuártica $C_4 = C_3'' + t_9 \equiv P_4 = 0$, que verifica

$$C_3 \cap C_4 = p_1 + \ldots + p_9 + p_9 + q + s, \quad p_9, s \in t_9$$

Podemos, pues, aplicar el Teorema de Max Noether, obteniendo

$$P_4 = aP_3 + bP_3', \qquad \text{gr } a = 1, \text{gr } b = 1$$

Cortando con C_3 tenemos que $C_3 \cap \{b = 0\} = p_9 + q + s$, luego $\{b = 0\} = t_9$, porque pasa por los puntos p_9, s, y concluimos que $p_9 = q$ como queríamos demostrar. □

20. Sea C_3 una cúbica plana y $x \in C_3$ un punto de inflexión. Probar que los puntos $y \in C_3$ para los que existe una cónica que que cumpla $m_x(C_3 \cap C_2) = m_y(C_3 \cap C_2) = 3$, son las terceras intersecciones de las rectas que unen los puntos de inflexión con x.

Resolución:

Sea y la intersección de la recta xz con C_3, donde z es punto de inflexión. Consideramos

$$C_3 \equiv P_3 = 0, \qquad C_3' = 3xy, \qquad C_1 = t_z \equiv P_1 = 0$$

cuyos cortes son

$$C_3 \cap C_1 = 3z, \qquad C_3 \cap C_3' = 3x + 3y + 3z$$

con lo que estamos en las condiciones del Teorema de Max Noether. Por tanto,

$$P_3' = aP_1 + bP_3, \qquad \text{gr} a = 2$$

donde $C_3 \cap \{a = 0\} = 3x + 3y$, y la cónica $\{a = 0\}$ verifica la condición del enunciado.

Para la otra implicación, sea $y \in C_3$ tal que existe una cónica C_2 verificando $(C_3 \cap C_2)_x = (C_3 \cap C_2)_y = 3$. Veamos entonces que $z := C_3 \cap xy$ es punto de inflexión de C_3.

Sean

$$C_3 \equiv P_3 = 0, \qquad C_2 \equiv P_2 = 0, \qquad C_3' = 3xy \equiv P_3' = 0$$

cuyos cortes son

$$C_3 \cap C_2 = 3x + 3y, \qquad C_3 \cap C_3' = 3x + 3y + 3z$$

Aplicando el Teorema de Max Noether, obtenemos

$$P_3' = aP_2 + bP_3, \quad \text{gr} a = 1$$

Cortando con C_3 concluimos, pues ha de ser $C_3 \cap \{a = 0\} = 3z$ con lo que z es punto de inflexión. □

Nota: Hemos dado un procedimiento para, conocidos dos puntos de inflexión x, z, hallar un tercero: consideramos la cuádrica $t_x \cup t_z$. Está en las condiciones del enunciado, luego $y := C_3 \cap xz$ será también punto de inflexión.

Una cúbica plana tiene, a lo sumo, 11 puntos de inflexión (recordar que tienen coeficientes complejos, y no reales, que son las que estamos acostumbrados a ver, y que sólo pueden tener uno).

21. Teorema de Cayley-Bacharay: Sea C_{n+m-3} una curva plana de $n+m-3$ que pasa por $n \cdot m - 1$ de los puntos de intersección de dos curvas de grados n y m. Probar que C_{n+m-3} pasa por el punto restante.

    Resolución:

    Usamos notaciones habituales. Sean

    $$C_n \cap C_m = p_1 + \ldots + p_{nm-1} + q_1$$

    Consideramos la curva $C_{n+m-2} := C_{n+m-3} \cup t_{q_1}$. Se tiene, por tanto,

    $$C_n \cap C_{n+m-2} = p_1 + \ldots + p_{nm-1} + q_1 + q_1 + q_2 + s_1 + \ldots + s_{n^2-2n-2}$$

    Aplicando el Teorema de Max Noether, resulta la condición:

    $$P_{n+m-2} = aP_m + bP_n, \qquad \text{gr } a = n-2$$

    Cortando con C_n, vemos que $q_1, q_2 \in \{a = 0\} \Rightarrow t_{q_1} \subset \{a = 0\}$. Por tanto, $t_{q_1} \subset C_{n+m-2} \cap \{a = 0\} \cap \{b = 0\}$, y podemos simplificar la recta en la ecuación anterior, quedando:

    $$P_{n+m-3} = a'P_m + b'P_n$$

    de donde $q_1 \in C_{n+m-3}$, como queríamos demostrar. □

22. Si una curva $C_{n+m-\gamma}$ de grado $n+m-\gamma$ ($\gamma > 3$), pasa por $n \cdot m - \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}$ de los $n \cdot m$ puntos distintos en los que se cortan dos curvas de grados n y m, entonces pasa también por los restantes puntos siempre que dichos puntos no estén en una curva de grado $\gamma - 3$.

    Resolución:

    Generalización del Teorema de Cayley-Bacharay:

    Sean las notaciones habituales, y $\beta = \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2} = \frac{\gamma^2-3\gamma}{2} + 1$. Recordemos que una curva de grado $\gamma - 3$ queda determinada al fijar $\frac{(\gamma-3)^2+3(\gamma-3)}{2} = \frac{\gamma^2-3\gamma}{2} = \beta - 1$ puntos en posición general.

    Sean

    $$C_n \cap C_m = p_1 + \ldots + p_{nm-\beta} + q_1 + \ldots + q_\beta$$

    Consideramos la curva $C_{\gamma-3}$ determinada por los puntos $q_1 + \ldots + q_{\beta-1}$. Así, para $C_{n-m-3} := C_{n+m-\gamma} \cup C_{\gamma-3}$, tenemos

    $$C_n \cap C_{n-m-3} = p_1 + \ldots + p_{n+m-\beta} + q_1 + \ldots + q_{\beta-1}$$

    Aplicando el Teorema de Cayley-Bacharay, obtenemos que $q_\beta \in C_{n+m-\gamma}$. Como el razonamiento se puede repetir con cualquiera de los puntos q_i, hemos concluido. □

23. Si una cónica es tangente a una cúbica en tres puntos distintos, entonces los puntos de intersección restantes de la cúbica con las rectas que unen estos tres puntos están alineados.

24. Las tangentes en seis puntos de intersección distintos de una cúbica con una cónica cortan a la cúbica de nuevo en seis puntos de una cónica.

25. Sea C la cúbica plana $y^2 = x^2 + x^3$. El haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}_1 \to C$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$. Calcular el área del “ojo del lazo” definido por la curva $y^2 = x^2 + x^3$.

    Resolución:

    Queremos calcular la integral $2\int_{-1}^{0} y(x)dx$

    En este caso es sencillo despejar la función $y(x)$, pero vamos a resolver el problema con un método más general, que vale para casos donde la función $y(x)$ se da de forma implícita.

    Como nos dice el enunciado, el haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}_1 \to C$, puesto que las soluciones del sistema

    $$y = tx, \qquad y^2 - x^2 - x^3 = 0$$

    son $x = 0,\ x = 0,\ x = t^2 - 1$. Es decir, el morfismo birracional viene dado, explícitamente por

    $$y = tx \longrightarrow (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$$

    Ahora estudiamos los límites de integración, viendo que $x = -1 \to t = 0$, $x = 0 \to t = -1$, pues las pendientes de las rectas en ese cuadrante son negativas.

    Finalmente realizamos el cálculo:

    $$2\int_{-1}^{0} y(x)dx = 2\int_{t=0}^{t=-1} t(t^2-1)d(t^2-1) = 4\int_{0}^{-1}(t^4 - t^2)dt = \frac{-4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

    □

26. Sea C la cúbica plana $y^2 = x^3$. El haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}_1 \to C, x = t^2, y = t^3$.

    Resolución:

    El morfismo dado es

    $$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &\to C \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} k[x,y]/(y^2 - x^3) &\to k[t] \\ x &\mapsto t^2 \\ y &\mapsto t^3 \end{aligned}$$

    Veamos que es isomorfismo birracional dando el morfismo inverso

    $$\begin{aligned} C - \{\alpha = 0\} &\to \mathbb{A}_1 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} k[t] &\to (k[x,y]/(y^2 - x^3))_x \\ t \quad \longrightarrow &\quad \frac{y}{x} \end{aligned}$$

    que está definido en un abierto. □

27. Probar que si una cónica tiene un punto singular entonces no es irreducible.

    Resolución:

    Consideramos una recta que pase por dicho punto singular y por otro punto cualquiera de la cónica. La multiplicidad de corte de la recta y la cónica será de, al menos, 3, y por el Teorema de Bezout concluimos que la recta es una componente de la cónica. □

28. Probar que si una cúbica plana tiene dos puntos singulares entonces no es irreducible.

    Resolución:

    Consideramos una recta que pase por los dos puntos singulares. La multiplicidad de intersección de la cúbica y la recta será de, al menos, cuatro.

    Por el teorema de Bezout, concluimos que la recta es una componente de la cúbica. □

29. Probar que si una cuártica plana tiene cuatro puntos singulares entonces no es irreducible.

    Resolución:

    Consideramos la cónica que pasa por dichos 4 puntos singulares y otro quinto punto cualquiera de la cuártica. Corta a la cuártica en 9 puntos, al menos, y por el teorema de Bezout concluimos que dicha cónica es una componente de la cuártica. □

30. Probar que $(0,0),(2,0),(0,2)$ son puntos singulares de la cuártica plana $xy(x+y-2)-(x^2+y^2-2x-2y)^2 = 0$ ¿Existen más puntos singulares? Parametrizar esta cuártica (mediante un haz de cónicas).

    Resolución:

    Sea $P(x,y) = xy(x+y-2)-(x^2+y^2-2x-2y)^2$. Buscamos los puntos donde se anule su diferencial,

    $$\frac{\partial P}{\partial x} = y(x+y-2)+xy-2(x^2+y^2-2x-2y)(2x-2) = 0$$

    $$\frac{\partial P}{\partial y} = x(x+y-2)+xy-2(x^2+y^2-2x-2y)(2y-2) = 0$$

    cuyas únicas soluciones son $(0,0),(2,0),(0,2)$. Por tanto, esos son los únicos puntos singulares.

    Para parametrizarla, fijemos un punto regular cuañquiera, $p \in C$.

    El morfismo será: a cada cónica C_2 del haz de cónicas que pasan por $p,(0,0)$, $(2,0),(0,2)$ le asignaremos el octavo punto de corte con nuestra curva C, pues cortará seis veces en los puntos singulares y una séptima en p.

31. Justificar por qué las circunferencias $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-2=0$ han de ser tangentes en algún punto del infinito, sin hacer el cálculo explícito de sus tangentes en los puntos del infinito.

    Resolución:

    Observamos que no se cortan en ningún punto afín. Sus puntos de corte han de estar, por tanto, sobre la recta del infinito.

    Pero una circunferencia corta a la recta del infinito en dos puntos. Así, si ambas circunferencias fueran transversales en sus puntos de corte sobre la recta del infinito, que hemos visto son, a lo sumo 2, el número de puntos de corte, contando multiplicidades, no podría ser 4, como ha de ser. □

32. Calcular la multiplicidad de intersección de las cúbicas proyectivas planas $y^2 - x^3 = 0$ con $y^2 - x^3 - 1 = 0$, en todos los puntos de intersección. Poner un ejemplo de dos cúbicas planas afines irreducibles, cuyos puntos de corte estén alineados.

    Resolución:

    Observamos que no se cortan en ningún punto afín. Homogeneizando por x_0, y haciendo $x = x_1, y = x_2$, comprobamos que el único punto común es el $(0,0,1)$, puesto que $x_0 = 0$ implica $x_1 = 0$. Así pues, se cortan en el $(0,0,1)$, con multiplicidad 9.

    Para poner el ejemplo pedido, primero construimos dos cúbicas que proyectivamente se corten sobre una recta:
$$x_2^3 - x_1^3 + x_2^2 x_0 = 0, \qquad x_2^3 - x_1^3 + x_2^2 x_0 - x_0^3 = 0$$
    Los puntos de corte están sobre $x_0 = 0$, y son tres
$$x_2^3 - x_1^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^3 = 1 \qquad (z := \frac{x_2}{x_1})$$
    Ahora sólo hace falta deshomogeneizar, tomando una recta del infinito distinta a $x_0 = 0$.

    Por ejemplo, en el abierto afín $x_1 \neq 0$, y haciendo $u = \frac{x_0}{x_1}, v = \frac{x_2}{x_1}$, las cúbicas planas afines irreducibles que pide el ejercicio son:
$$v^3 + v^2 u - 1 = 0, \qquad v^3 + v^2 u - 1 - u^3 = 0$$

33. Sea $s(x,y) \in k[[x,y]]$ tal que $s(0,0) = 0$ y $s(x,y) \notin (x)$. Probar que
    (a) $k[[x]] \to k[[x,y]]/(s(x,y))$, $t(x) \mapsto t(x)$ es un morfismo finito.
    (b) Supongamos que $s(x,y)$ es irreducible. El cierre entero de $k[[x,y]]/(s(x,y)) = A$ en su cuerpo de fracciones es un A-módulo finito, que como anillo es isomorfo a un anillo de series formales en una variable.

34. Denotemos por $\mathbb{C}((x))$ el cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[[x]]$. Probar que $\mathbb{C}((\sqrt[\infty]{x})) := \varinjlim_{n} \mathbb{C}((\sqrt[n]{x}))$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.