Exámenes de Álgebra Local

Pedro Sancho

2003

Índice General

Capítulo 1

Examen de Álgebra Local

Abril-2001

Teoría:

1. Probar el teorema de Artin-Rees y consecuencias.
2. Probar el teorema de Cohen.
3. Demostrar la equivalencia entre las distintas definiciones de dimensión en anillos locales noetherianos.

Problemas:

1. Probar que todo anillo es límite inductivo de $\mathbb{Z}$-álgebras de tipo finito.
2. Sea A un anillo noetheriano. Demostrar que $\underset{\substack{x\in \operatorname{Spec}_{max} A \\ n\in\mathbb{N}}}{\cap} \mathfrak{m}_x^n = 0$.
3. Calcular $\dim \mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2-1)$.
4. Sea $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ un anillo de polinomios de infinitas variables. Sean $\mathfrak{p}_i = (x_{2^i}, \dots, x_{2^{i+1}-1})$ y $S = A - \underset{i\geq 0}{\cup} \mathfrak{p}_i$. Nagata probó que este anillo es noetheriano. Probar que $\dim A_S = \infty$.

Capítulo 2

Examen de Álgebra Local

Abril-2001

Teoría:

1. Probar el teorema de Cohen.
2. Demostrar el teorema del ideal principal de Krull.
3. Calcular las fibras del morfismo de explosión de una variedad algebraica en un punto cerrado.

Problemas:

1. Probar que $\lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ i\in I}} (M_i \times N_i) = \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ i\in I}} M_i \times \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ i\in I}} N_i$.
2. Sea A un anillo noetheriano, $I \subset A$ un ideal y $\widehat{A}$ la completación I-ádica de A. Probar que $\dim \widehat{A} \leq \dim A$.
3. Sea $\pi\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ un epimorfismo entre anillos locales regulares. Si $\dim \mathcal{O} = n$ y $\dim \mathcal{O}' = r$, probar que $\operatorname{Ker} \pi$ es un ideal generado por $n - r$ funciones.
4. Calcular la multiplicidad de intersección en cada punto de intersección de las curvas proyectivas complejas de ecuaciones afines $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y $x^3 + y^2 x - x^2 - y^2 - x + 1 = 0$.

Capítulo 3

Examen de Álgebra Local

Junio-2001

Teoría:

1. Demostrar la equivalencia entre las distintas definiciones de dimensión en anillos locales noetherianos.

2. Sea $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$, con $I \subseteq \mathfrak{m}_x = (x_1, \dots, x_n)$. Probar que A_x es un anillo regular si y sólo si I está generado por un sistema de parámetros de diferenciales en el origen linealmente independientes.

3. Demostrar que en curvas algebraicas locales la desingularización se alcanza por un número finito de explosiones.

Problemas:

1. Probar que $\sqrt[2]{1-x} \in k[[x]]$. Calcular la completación (x, y)-ádica de $k[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$ y probar que no es un anillo íntegro.

2. Probar que la completación de un anillo local regular es un anillo íntegro.

3. Sean x e y puntos racionales de las variedades algebraicas $X = \operatorname{Spec} A$ e $Y = \operatorname{Spec} B$. Probar

   (a) $C_{(x,y)}(X \times_k Y) = C_x X \times_k C_y Y$, es decir, $G_{\mathfrak{m}_{(x,y)}} A \otimes_k B = G_{\mathfrak{m}_x} A \otimes_k G_{\mathfrak{m}_y} B$.

   (b) Si X e Y son regulares en x e y respectivamente, entonces $X \times_k Y$ es regular en (x, y).

4. Desingularizar la curva $y^6 - xy^4 - x^3 - x^2y^2 + x^8 = 0$ en el origen. Calcular su multiplicidad de intersección en el origen con la curva $y^2 - x = 0$.

Capítulo 4

Examen de Álgebra Local

Septiembre-2001

Teoría:

1. Probar el teorema de Artin-Rees.
2. Dar las distintas definiciones de dimensión de un anillo local noetheriano y probar su equivalencia.
3. Calcular las fibras del morfismo de explosión de una variedad en un punto cerrado.

Problemas:

1. Sean M y N dos A-módulos. Sea $I \subset A$ un ideal y denotemos por $\widehat{\ }$ la completación I-ádica. Probar que
$$\widehat{M \times N} = \widehat{M} \times \widehat{N}$$
2. Probar que si A es un anillo que sólo contiene un número finito de elementos, entonces A es un anillo noetheriano de dimensión cero.
3. Probar que un anillo noetheriano local $\mathcal{O}$ de ideal maximal $\mathfrak{m}$ es regular si y sólo si $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ es un anillo regular.
4. Calcular la multiplicidad de intersección en el origen de las curvas afines planas $y^2 - x^3 + 2xy + x^2 = 0$ y $y^2 - 2x^3 + 2xy + x^2 = 0$.

Capítulo 5

Examen de Álgebra Local

Febrero-2002

Teoría:

1. Demostrar la equivalencia entre las distintas definiciones de dimensión en anillos locales noetherianos.

2. Demostrar que toda curva algebraica desingulariza después de un número finito de explosiones.

Problemas:

1. Sea $s(x) = x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \in k[[x]]$. Probar que $k[[x]] = k[[s(x)]]$.

2. Sea A un anillo y $\mathfrak{m}_y \subset A$ un ideal maximal. Si A_y es regular y $\mathfrak{m}_{y'} = (\mathfrak{m}_y, x) \subset A[x]$, probar que $(A[x])_{y'}$ es regular.

3. Calcular la multiplicidad de intersección en el origen de las curvas planas $y^2 - x^2 + x^3 = 0$ y $y^2 - 2xy + x^2 + x^3 = 0$.

Capítulo 6

Examen de Álgebra Local

Junio-2002

Teoría:

1. Demostrar el teorema de Cohen.
2. Equivalencia de las diferentes definiciones de dimensión de un anillo local noetheriano.
3. Probar que el espectro proyectivo de una k-álgebra de tipo finito graduada está recubierto por un número finito de abiertos afines.
4. Demostrar que la desingularización de una curva algebraica se alcanza por un número finito de explosiones.

Problemas:

1. (a) Sea $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}$ para todo i y consideremos los morfismos $\mathbb{Z}_i \to \mathbb{Z}_{i-1}, a \mapsto n \cdot a$, para todo i. Calcular $\varprojlim_i \mathbb{Z}_i$.

   (b) Calcular $\varprojlim_n \mathbb{C}[x,y]/(x^n)$.
2. Calcular la dimensión de Krull de $\mathbb{C}[[x,y]]_S$, con $S = \{1, x, \dots, x^n, \dots\}$.
3. Probar que el anillo $\mathbb{C}[[x]]$ es un anillo de valoración discreta. Calcular $v(x^2 \cdot (e^x - 1))$.
4. Probar que la curva plana proyectiva compleja de ecuación afín $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$ sólo tiene un punto singular y desingularizarla en ese punto.
5. Probar que si dos cúbicas proyectivas planas se cortan en nueve puntos distintos y seis de ellos están sobre una cónica, entonces los otros tres están sobre una recta.
6. Calcular la multiplicidad de intersección en los puntos del infinito de las curvas proyectivas planas de ecuaciones afines, $x^2 - y^3x + 1 = 0$, $xy + y^3 + 1 = 0$.

Capítulo 7

Examen de Álgebra Local

Septiembre-2002
Examen de Álgebra Local Septiembre-2002

Teoría:

1. Demostrar el teorema de Cohen.
2. Equivalencia de las diferentes definiciones de dimensión de un anillo local noetheriano.
3. Probar que el espectro proyectivo de una k-álgebra de tipo finito graduada está recubierto por un número finito de abiertos afines.
4. Demostrar que la desingularización de una curva algebraica se alcanza por un número finito de explosiones.

Problemas:

1. Demostrar que todo anillo es límite inductivo de $\mathbb{Z}$-álgebras de tipo finito. Demostrar que todo anillo es límite inductivo de anillos noetherianos.
2. Probar que $\mathbb{C}(x) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(y)$ es un anillo íntegro de dimensión uno, regular al localizar en todo punto.
3. Calcular la multiplicidad de intersección en los puntos del infinito de las curvas proyectivas planas de ecuaciones afines, $x^2 - y^3x + 1 = 0$, $xy + y^3 + 1 = 0$.