PRÁCTICA QUINTA

1. Ejercicios

Con la ayuda de los comandos poly, conv, deconv, residue, roots, null, eig, jordan, etc., resolver los siguientes ejercicios.

(1) Dar la forma cerrada de la solución y definir la correspondiente sucesión como función de `MATLAB` para cada una de siguiente ecuaciones en diferencias con la condición inicial dada.
   1. $x_{n+3} = 5x_{n+2} - 8x_{n+1} + 4x_n, \quad x_2 = 3,\ x_1 = 2,\ x_0 = 1$
   2. $x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n, \quad x_2 = 3,\ x_1 = 2,\ x_0 = 1$
   3. $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n, \quad x_2 = 3,\ x_1 = 2,\ x_0 = 1.$

(2) Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{lll}
\frac{dx}{dt} = x - 3y + 3z & \frac{dx}{dt} = 3x - y & \frac{dx}{dt} = -11x - 4y \\
\frac{dy}{dt} = -2x - 6y + 13z & \frac{dy}{dt} = x + y & \frac{dy}{dt} = 15x + 6y \\
\frac{dz}{dt} = -x - 4y + 8z & \frac{dy}{dt} = 3x + 5z - 3u & \\
 & \frac{du}{dt} = 4x - y + 3z - u &
\end{array}$$

(3) Sean $V = \mathbb{R}^3$ y $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tal que su matriz asociada respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$ es

$$(a)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada T^m respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$

(4) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{l} x'' - x + y' = e^t \\ x'' + 2x' + x + y'' = e^t \end{array}$$

(5) Comprobar el teorema de Perron-Fröbenius calculando los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Encontrar el autovalor y el autovector de Perron de A.

(6) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   1. Probar que A es irreducible.
   2. Hallar el autovalor y el autovector de Perron de A.

Date: Marzo-2011.

(7) Un estudio ha determinado que el sector de ocupación de un niño, cuando sea adulto, depende del sector en que trabaje su padre, y está dada por la siguiente matriz de transición, con los sectores de producción P = sector primario, S = sector secundario, T = sector terciario.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Sector del padre} \\ & & \begin{array}{ccc} \mathrm{T} & \mathrm{S} & \mathrm{P} \end{array} \\ \text{Sector del hijo} & \begin{array}{c} \mathrm{T} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{P} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Así, la probabilidad de que el hijo de alguien que trabaja en el sector terciario también lo haga en ese sector es 0.8.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el nieto de un trabajador del sector terciario trabaje en ese sector?
2. A largo plazo, ¿qué proporción de la población trabajará en el sector secundario?

2. Dibujo de trayectorias

Consideremos el sistema de ecuación en diferencias con condición inicial definida por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n1} & = & 1.0\, x_{n-1\,1} + 0.2\, x_{n-1\,2} \\ x_{n\,2} & = & 0.2\, x_{n-1\,1} + 1.0\, x_{n-1\,2} \end{array} \right. \tag{2.1}$$

con $x_{01} = 0$ y $x_{02} = 1$. En notación matricial

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 \\ 0.2 & 1.0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{n-1}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

siendo $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, x_{n2})^{\mathrm{t}}$, $n \geq 0$.

Vamos a usar el m-fichero `traj2.m` (cuyo código se incluye al final de esta sección), que nos ayudará a dibujar soluciones de la ecuación (2.1). Ejecutamos el programa tecleando `traj2` en la pantalla de comandos de `MATLAB`. Introducimos entonces la matriz de la ecuación 2.1 cuando nos la pidan.

```
>> traj2
```

El programa responde creando una figura con ejes. Coloca el puntero del ratón, aproximadamente, en el punto $(1, 0)$, que va a ser la condición inicial $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^{\mathrm{t}}$, y haga 'click' con el botón derecho. Se dibuja la trayectoria solución, primero hacia adelante en el tiempo desde la condición inicial $\mathbf{x}_0$ y luego hacia atrás en el tiempo. Observa que esta solución, tal como aparece en la figura, se acerca de forma paralela al autovalor $\mathbf{v}_1$. Crea ahora más trayectorias de la ecuación (2.1) pulsando condiciones iniciales $\mathbf{x}_0$ con el ratón. Note que las trayectorias futuras se acercan a un vector paralelo a $\mathbf{v}_1$.

1. Ejercicio: Para cada una de las siguientes ecuaciones en diferencia (sistemas dinámicos) realizar las siguientes tareas:

- Usar el comando `eig` para calcular los autovalores y autovectores de la matriz asociada.

- Escribir en forma cerrada
$$\mathbf{x}_{n+2} = c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$$
la solución de la ecuación.
- Dividir ambos lados de la solución $\mathbf{x}_{n+2} = c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$ por la n-ésima potencia del autovalor dominante y tome el límite cuando $n \to \infty$. Usar el resultado para aproximar $\mathbf{x}_n$ para valores grandes de n y prediga el comportamiento de la solución.
- Ejecutar el m-fichero `traj2.m` y verificar que las trayectorias de la solución se comportan como se indicó en el apartado anterior.

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.0 & 0.8 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{n-1}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 1.42 & 0.16 \\ 0.16 & 1.18 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{n-1}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$