

# Introducción a la Geometría Algebraica

Pedro Sancho de Salas

Enero de 2001



# Índice general

<b>0. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Esquemas</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Haces . . . . .	7
1.3. Gérmenes de secciones . . . . .	8
1.4. Espacio anillado . . . . .	13
1.4.1. Haz de localizaciones en abiertos de $\text{Spec } A$ . . . . .	14
1.5. Esquemas . . . . .	16
1.6. Ejemplos de esquemas . . . . .	17
1.6.1. Variedades algebraicas. Variedades proyectivas . . . . .	17
1.6.2. Variedad de Riemann . . . . .	18
1.6.3. Recollement de esquemas . . . . .	24
1.7. Problemas . . . . .	29
<b>2. Módulos cuasicoherentes y coherentes</b>	<b>31</b>
2.1. Haces cuasicoherentes sobre un espacio anillado . . . . .	31
2.1.1. Haces coherentes . . . . .	35
2.2. Haces cuasicoherentes sobre un esquema proyectivo . . . . .	36
2.3. Divisores y haces de línea . . . . .	38
2.4. Teoremas de Bézout y Max Noether . . . . .	42
2.5. Problemas . . . . .	45
<b>3. Cohomología</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. Cohomología de haces . . . . .	49
3.3. Aciclicidad en esquemas afines . . . . .	53
3.4. Caracterización cohomológica de la recta . . . . .	56
3.5. Dimensión de los grupos de cohomología . . . . .	57
3.5.1. Cohomología de los haces coherentes en variedades proyectivas . . . . .	57
3.5.2. Cohomología de los haces coherentes en curvas . . . . .	59
<b>4. Teoría de la dualidad en curvas</b>	<b>61</b>
4.1. Introducción . . . . .	61
4.2. Teorema de Riemann-Roch débil . . . . .	61
4.3. Algunos resultados técnicos . . . . .	62

4.4. Teoremas de dualidad y Riemann-Roch fuerte . . . . .	64
4.5. Módulo de diferenciales y derivaciones . . . . .	65
4.6. Dualizante de una curva lisa . . . . .	67
4.7. Aplicaciones de la teoría de dualidad . . . . .	69
4.7.1. Teorema de Hurwitz . . . . .	69
4.7.2. Morfismos en espacios proyectivos . . . . .	71
4.7.3. Curvas elípticas e hiperelípticas . . . . .	74
4.7.4. Integración por funciones elementales . . . . .	78
4.8. Apéndice: Teorema de representabilidad . . . . .	83
4.9. Problemas . . . . .	84
<b>Índice de términos</b>	<b>86</b>

# Capítulo 0

## Introducción

El saber matemático, como todo saber discursivo, se conoce y aclara en su propio desarrollo y despliegue. Por eso, toda introducción cuya pretensión sea dar una idea última de lo que se estudia es intrínsecamente falsa. Ahora bien, parafraseando al filósofo y pedagogo Gaos, la enseñanza es el conjunto de mentiras que hay que contar para que la verdad sea comprendida. Comencemos, sin más reservas, con la introducción.

En la Geometría Algebraica confluyen la Matemática Griega con el estudio de los cuerpos geométricos, y la Matemática Renacentista-Descartesiana con el cálculo de las soluciones de los sistemas de ecuaciones. Simplificando, podemos decir que la Geometría Algebraica es el estudio de las soluciones de los sistemas de ecuaciones algebraicas en el espacio afín o proyectivo, es decir, el estudio de las variedades algebraicas. Así pues, el objetivo fundamental de la Geometría Algebraica es la clasificación de las variedades algebraicas.

La teoría de haces nos permitirá comprender las variedades algebraicas como variedades diferenciales, cuyos anillos de funciones serán anillos de funciones algebraicas (las álgebras de tipo finito). Mediante cartas y la teoría de haces, como en Geometría Diferencial, definiremos los esquemas, que son variedades que localmente son variedades algebraicas afines.

Los esquemas son el marco más idóneo para el desarrollo de la Geometría Algebraica y de una Teoría de Intersección, sin embargo, el uso de anillos con nilpotentes exige un conocimiento profundo del Álgebra Conmutativa. Quizás una de las sorpresas mayores del Álgebra Conmutativa es cómo los conceptos de función (algebraicas), derivada, diferencial, variedad (algebraica), superficies de Riemann, Riemann-Roch, residuo, etc., son conceptos algebraicos.

Una aproximación a la clasificación de las variedades algebraicas es la clasificación birracional. Dos variedades algebraicas se dicen que son birracionalmente equivalentes si son isomorfas en un abierto denso. Veremos que a toda curva se le puede asignar un único modelo birracional proyectivo no singular, que podrá obtenerse mediante explosiones, estudiadas en Álgebra Local, y añadiendo los puntos necesarios para que sea proyectiva.

Introduciremos también el grupo de Picard de una curva, que es otro invariante intrínseco de la curva (que puede asociarse también, en general, a los esquemas). Esencialmente, el teorema de Torelli afirma que la variedad de Picard de una curva determina la curva (no lo veremos). La variedad de Picard de una curva es el conjunto de los fibrados de línea de la curva, módulo isomorfismos. Los fibrados de línea serán esenciales para la formulación del teorema de Riemann-Roch, la teoría de dualidad, la construcción de las inmersiones de las curvas en espacios proyectivos, etc.

La asignación de invariantes numéricos a las variedades algebraicas permite una primera aproxi-

mación a la clasificación “discreta” de éstas. Quizás la técnica moderna más importante para la introducción de invariantes numéricos es la cohomología. Existen muchas teorías cohomológicas, nosotros desarrollaremos la cohomología de los haces coherentes, introducida por Serre. Así pues, a un esquema le podemos asociar los grupos de cohomología de sus haces de funciones algebraicas. La cohomología es una técnica muy útil para comprender y expresar resultados importantes, como el teorema de Riemann-Roch. Definiremos los haces de módulos de diferenciales de un esquema, que se corresponden con los fibrados cotangentes de la Geometría Diferencial, y permiten introducir invariantes numéricos como la dimensión del espacio vectorial de todas diferenciales “holomorfas” del esquema. En el estudio de las curvas, en la Teoría de Dualidad, este espacio vectorial será determinante para definir un morfismo canónico de cada curva en un espacio proyectivo.

El teorema central del curso será el teorema de Riemann-Roch. Por una parte exigirá la introducción de los haces de línea, cohomología, teoría de dualidad, y por otra dará las relaciones entre los distintos invariantes, género geométrico, género aritmético, longitud del conductor, grado de un divisor, grado del divisor canónico. Además, posibilitará la demostración del teorema de Hurwitz, de la existencia de haces línea muy amplios, etc. Haremos una introducción a la clasificación de las curvas proyectivas. Por ejemplo, clasificaremos la familia de las curvas elípticas.

Muchas de las nociones y demostraciones adoptadas (por ejemplo aciclicidad de los grupos de cohomología de los esquemas afines, acotación cohomológica, etc.) serán generalizables a variedades proyectivas de dimensión mayor que uno y así lo haremos. Creemos que un curso de la Geometría Algebraica de la Curva es una buena introducción a la Geometría Algebraica Global, porque en él se introducen muchas de las técnicas generales de la Geometría Algebraica Global en una situación no excesivamente compleja.

# Capítulo 1

## Esquemas

### 1.1. Introducción

La teoría de variedades algebraicas estudiada hasta este curso padece de una grave deficiencia. No tenemos una noción clara de cuáles son, localmente o no, las funciones algebraicas sobre una variedad algebraica no afín. Así pues, dado un abierto de una variedad algebraica, no sabemos quién es su anillo de funciones algebraicas. Así, por ejemplo, no sabemos cuál es el anillo de funciones algebraicas, del espacio proyectivo. Cualquiera que sea la noción de funciones algebraicas tendrán que verificar que vienen determinadas localmente, como sucede en variedades diferenciales.

H. Cartan expresó la analogía entre variedades algebraicas y analíticas afirmando que en todos los casos se trataban de espacios anillados. Serre introdujo la teoría de haces y la cohomología de haces en el estudio de las variedades algebraicas abstractas. Finalmente, Grothendieck presentó la definición de esquema como espacio anillado que localmente es un esquema afín. Los esquemas son los objetos básicos de estudio de la Geometría Algebraica Abstracta actual.

### 1.2. Haces

**Definición 1.2.1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un prehaz de conjuntos sobre  $X$ , es una ley que asigna a cada abierto  $U \subseteq X$  un conjunto  $P(U)$  de modo que verifica que

1. Si  $V$  es un abierto contenido en otro abierto  $U$ , se tiene un morfismo de restricción:  $\phi_{U,V}: P(U) \rightarrow P(V)$ . Es usual escribir, para  $s \in P(U)$ ,  $\phi_{U,V}(s) = s|_V$ .
2. Para cada abierto  $U$ ,  $\phi_{U,U} = \text{Id}$ .
3. Si  $W \subseteq V \subseteq U$  son abiertos entonces  $\phi_{U,W} = \phi_{V,W} \circ \phi_{U,V}$ , es decir,  $(s|_V)|_W = s|_W$ .

Dicho de otro modo: Sea  $\mathcal{T}_X$  la categoría cuyos objetos son los abiertos de  $X$  y cuyos morfismos entre objetos son la inclusión natural (cuando exista) y sea  $\mathcal{C}_{Conj}$  la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones de conjuntos. Un prehaz de conjuntos sobre  $X$  no es sino un funtor de  $\mathcal{T}_X$  en  $\mathcal{C}_{Conj}$ .

Análogamente se definen los prehaces de grupos, de grupos abelianos, o anillos sin más que sustituir  $\mathcal{C}_{Conj}$  por la categoría de grupos, de grupos abelianos o anillos, respectivamente. Si  $A$  es un prehaz de

anillos, se llama prehaz de módulos sobre el prehaz de anillos  $A$ , a todo prehaz  $P$  de grupos abelianos que verifique:

1. Para cada abierto  $U$ ,  $P(U)$  es un  $A(U)$ -módulo.
2. Si  $V \subseteq U$ , entonces  $(a \cdot s)|_V = a|_V \cdot s|_V$ , para  $a \in A(U)$  y  $s \in P(U)$ .

**Ejemplo 1.2.2.** 1. Sea  $G$  un grupo abeliano. Sea  $P(U) = G$  para todo abierto  $U \subseteq X$ . Si tomamos como morfismos de restricción la identidad, entonces  $P$  es un prehaz de grupos abelianos en  $X$ .

2. Sea  $P(U)$  el anillo de funciones reales continuas sobre  $U \subseteq X$ . Si tomamos como morfismos de restricción la restricción de funciones, entonces  $P$  es un prehaz, “el prehaz de funciones continuas sobre  $X$ ”.

Análogamente, si  $X$  es una variedad diferenciable, se definen los prehaces de funciones diferenciales, de campos diferenciales, tensores, etc.

3. Sea  $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Poniendo  $P(U) = [1\text{-formas exactas en } U]$  y tomando como morfismos de restricción los evidentes, se define el prehaz de 1-formas exactas.
4. Sea  $A$  un anillo y  $X$  su espectro. Asociando a cada abierto  $U \subseteq X$  el anillo  $A_U = \{ \frac{a}{s}, \text{ con } a \in A \text{ y } s \in A \text{ de modo que } s \text{ no se anule en ningún punto de } U \}$  y tomando como morfismos de restricción los de localización, se obtiene un prehaz de anillos.
5. Si  $M$  es un  $A$ -módulo, asociando a  $U$  el  $A_U$ -módulo  $M_U = M \otimes_A A_U$  se define un prehaz de módulos sobre el anterior prehaz de anillos.

A los elementos de  $P(U)$  se le denominan secciones de  $P$  en  $U$ , y alguna vez denotaremos  $P(U) = \Gamma(U, P)$ .

### 1.3. Gérmenes de secciones

Queremos definir el concepto de germen de secciones en un punto. Hablemos primero del concepto de límite inductivo: Sea un diagrama conmutativo de morfismos (de conjuntos, de grupos, de anillos o de módulos, etc.)

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_i & \longrightarrow & M_l & \longrightarrow & M_r & \longrightarrow & M_t & \longrightarrow & \cdots \\
 & \nearrow & & & & & & & \\
 M_k & & & & & & M_q & & \\
 & & & & \nearrow & & & & \\
 & & & & M_p & & & & 
 \end{array}$$

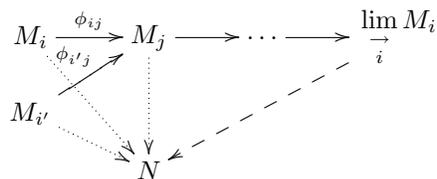
Suponemos que dados  $M_i$  y  $M_j$  cualesquiera, “más adelante”, existe un  $M_k$  donde siguiendo el río de flechas se aplican  $M_i$  y  $M_j$ . Denotemos  $\phi_{ij}: M_i \rightarrow M_j$  a los morfismos del diagrama (que cumplen  $\phi_{ii} = \text{Id}$  y  $\phi_{rs} \circ \phi_{ir} = \phi_{is}$ ). Se suele decir que  $\{M_i, \phi_{ij}\}_{i \in I}$  es un *sistema inductivo*.

Se define

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} M_i = \coprod_{i \in I} M_i / \sim$$

donde  $m_i \in M_i$  es equivalente a  $m_j \in M_j$  si existe un  $k$  tal que  $\phi_{ik}(m_i) = \phi_{jk}(m_j)$ . Tenemos morfismos naturales  $\phi_i: M_i \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} M_i$ ,  $\phi_i(m_i) = \bar{m}_i$ , que cumplen  $\phi_j \circ \phi_{ij} = \phi_i$ .

Es fácil ver que  $\varinjlim M_i$  cumple la siguiente propiedad universal: Si  $f_i: M_i \rightarrow N$  son morfismos tales que  $f_j \circ \phi_{ij} = f_i$



entonces existe un único morfismo  $f: \varinjlim M_i \rightarrow N$  ( $f(\bar{m}_i) := f_i(m_i)$ ) de modo que  $f_i = f \circ \phi_i$ .

Si los  $M_i$  son módulos dejamos que el lector pruebe que  $(\varinjlim M_i)_S = \varinjlim (M_i)_S$ .

Dados dos sistemas inductivos  $\{M_i, \phi_{ij}\}_{i \in I}$ ,  $\{M'_i, \phi'_{ij}\}_{i \in I}$  y morfismos  $g_i: M_i \rightarrow M'_i$  (cumpliendo que  $\phi'_{ij} \circ g_i = g_j \circ \phi_{ij}$ , para todo  $i, j$ ), entonces tenemos un morfismo natural  $g: \varinjlim M_i \rightarrow \varinjlim M'_i$ ,  $\bar{m}_i \mapsto \bar{g}_i(m_i)$ . Dejamos que el lector pruebe que si

$$0 \rightarrow M_i \rightarrow M'_i \rightarrow M''_i \rightarrow 0$$

son exactas tomando límites inductivos tenemos que

$$0 \rightarrow \varinjlim M_i \rightarrow \varinjlim M'_i \rightarrow \varinjlim M''_i \rightarrow 0$$

es exacta.

Dado un prehaz  $P$  sobre  $X$  y un punto  $x \in X$ , la fibra  $P_x$  de  $P$  en  $x$  se define del siguiente modo:

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{x \in U} P(U)$$

es decir,  $P_x = \coprod_{x \in U} \{s \in P(U)\} / \sim$ , donde dados  $s \in P(U)$  y  $s' \in P(U')$  cumplen que  $s \sim s'$  si y sólo si existe un abierto  $V$ , tal que  $x \in V \subseteq U \cap U'$ , de modo que  $s|_V = s'|_V$ . También se dice que  $P_x$  son los gérmenes de secciones de  $P$  en  $x$ .

Dado  $s \in P(U)$  denotaremos  $\bar{s} = s_x \in P_x$ .

**Ejercicio 1.3.1.** Sea  $P$  el prehaz definido en 1.2.2 5. sobre  $\text{Spec } A$ . Dado  $x \in \text{Spec } A$ , entonces  $P_x = M_x$ .

*Resolución:*  $P_x = \varinjlim_{x \in U} M_U$ . Como tenemos morfismos naturales  $M_U \rightarrow M_x$ , tenemos un morfismo natural  $P_x \rightarrow M_x$ . Dejamos al lector que compruebe que es un isomorfismo.

**Ejercicio 1.3.2.** Los gérmenes del prehaz de funciones reales continuas de  $\mathbb{R}^n$ , en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  coinciden con  $C(\mathbb{R}^n)_x$  (donde  $\mathfrak{m}_x$  es el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $x$  y  $C(\mathbb{R}^n)_x$  la localización en este ideal primo).

**Definición 1.3.3.** Un morfismo de prehaces  $f: P \rightarrow P'$  sobre  $X$  es un morfismo de funtores, es decir, una colección de morfismos  $f_U: P(U) \rightarrow P'(U)$  (para cada abierto  $U$ ) que conmutan con los morfismos de restricción. Denotaremos por  $\text{Hom}(P, P')$  al conjunto de morfismos de prehaces de  $P$  en  $P'$ .

Todo morfismo  $f: P \rightarrow P'$  de prehaces induce un morfismo  $f_x: P_x \rightarrow P'_x$ ,  $f_x(s_x) = f(s)_x$ .<sup>1</sup>

**Definición 1.3.4.** Un haz sobre un espacio topológico  $X$  es un prehaz  $F$  tal que para cada abierto  $U \subseteq X$  y cada recubrimiento  $\{U_\alpha\}$  por abiertos de  $U$ , la sucesión

$$F(U) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha} F(U_\alpha) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} \prod_{\alpha, \beta} F(U_\alpha \cap U_\beta)$$

donde  $p_1(\prod_{\alpha} s_\alpha) = \prod_{\alpha, \beta} s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$  y  $p_2(\prod_{\alpha} s_\alpha) = \prod_{\alpha, \beta} s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ , es exacta. Es decir,  $\delta$  es inyectivo y su imagen son las secciones de  $\prod_{\alpha} F(U_\alpha)$  donde coinciden  $p_1$  y  $p_2$ , que equivale a decir:

1. Si dos secciones de  $F$  sobre  $U$  tienen las mismas restricciones a cada  $U_\alpha$  ambas coinciden.
2. Dada una familia de secciones  $s_\alpha \in F(U_\alpha)$  cuyas restricciones a las intersecciones coinciden ( $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ ) existe una sección  $s \in F(U)$  de modo que su restricción a cada  $U_\alpha$  es  $s_\alpha$ .

Supondremos además que  $F(\emptyset)$  es un conjunto con un único elemento.

**Ejercicio 1.3.5.** Sea  $U$  y  $U'$  dos abiertos disjuntos de un espacio topológico  $X$  y  $F$  un haz en  $X$ . Probar que  $F(U \cup U') = F(U) \times F(U')$ .

**Ejemplo 1.3.6.** 1. Los prehaces del caso 2 del ejemplo 1.2.2 son haces. El del caso 1, lo será cuando el espacio topológico  $X$  considerado verifique que todo par de abiertos no vacíos tenga intersección no vacía.

2. Sea  $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . El prehaz de 1-formas exactas no es haz, pues  $d(\arctan y/x)$  es localmente exacta, pero no globalmente porque su integral a lo largo de la circunferencia unidad es diferente de cero.

Dado un prehaz  $P$  se le puede asociar de modo natural un haz  $\tilde{P}$ :

$$\tilde{P}(U) := \left\{ \begin{array}{l} (s_x)_{x \in U}, s_x \in P_x: \text{ Para cada } x \in U \text{ existe un entorno} \\ V \subseteq U \text{ de } x \text{ y } s'_y \in P(V) \text{ de modo que } s'_y = s_y \text{ para todo } y \in U \end{array} \right.$$

Dejamos al lector que pruebe:

1.  $\tilde{P}$  es un haz.
2. El morfismo natural  $P \rightarrow \tilde{P}$  definido por los morfismos  $P(U) \rightarrow \tilde{P}(U)$ ,  $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$  es un isomorfismo si y sólo si  $P$  es un haz.
3. Para todo  $x \in X$ ,  $P_x = \tilde{P}_x$ .

Dado un morfismo de prehaces  $f: P \rightarrow P'$  define de modo natural un morfismo  $\tilde{f}: \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}'$  entre los hacificados  $((s_x)_{x \in U} \mapsto (f_x(s_x))_{x \in U})$ .

**Proposición 1.3.7.** Sean  $P$  un prehaz y  $F$  un haz. Se cumple el isomorfismo

$$\text{Hom}(P, F) = \text{Hom}(\tilde{P}, F), \quad f \mapsto \tilde{f}$$

<sup>1</sup>Con más rigor, debiéramos escribir  $f_U(s)_x$  si  $s \in P(U)$ , en vez de  $f(s)_x$ .

*Demostración.* No es más que considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & & \parallel \\ \tilde{P} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{F} \end{array}$$

□

**Ejercicio 1.3.8.** Sea  $P$  un prehaz sobre un espacio topológico  $X$ . Sea  $\underline{P} = \coprod_{x \in X} P_x$  la unión disjunta de las fibras de  $P$ . Consideremos la proyección natural  $\underline{P} \rightarrow X$ ,  $s_x \mapsto x$ . Cada elemento  $s \in P(U)$  define una sección  $\tilde{s}: U \rightarrow \underline{P}$ ,  $x \mapsto s_x$ . Consideremos en  $\underline{P}$  la topología cuya base de abiertos son los conjuntos  $\tilde{s}(U)$ . A  $\underline{P}$  con esta topología se le denomina espacio etale asociado al prehaz  $P$ . Probar

1.  $\underline{P} \rightarrow X$  es un homeomorfismo local.
2. El haz  $\text{Hom}_X(-, \underline{P})$  de secciones continuas de la proyección  $\underline{P} \rightarrow X$ , sobre abiertos de  $X$ , es justamente el haz asociado a  $P$ .
3. La categoría de los espacios localmente homeomorfos a  $X$  es equivalente a la categoría de los haces sobre  $X$ .

**Proposición 1.3.9.** *Un morfismo  $f: F \rightarrow F'$  de haces es un isomorfismo si y sólo si  $f_x: F_x \rightarrow F'_x$  son isomorfismos para todo  $x \in X$ .*

*Un morfismo  $f: F \rightarrow F'$  de haces de grupos es el morfismo cero si y sólo si  $f_x = 0$  para todo  $x \in X$ . En particular, un haz es cero si y sólo si lo es en fibras.*

*Demostración.* Veamos sólo la suficiencia de la primera afirmación. Supongamos pues, que  $f_x: F_x \rightarrow F'_x$  son isomorfismos para todo  $x \in X$ . Dados  $s, s' \in F(U)$  si  $f_U(s) = f_U(s')$ , entonces  $f_x(s_x) = f_U(s)_x = f_U(s')_x = f_x(s'_x)$ . Luego  $s_x = s'_x$  para todo  $x$  y  $s = s'$ .

Así pues, los morfismos  $f_U: F(U) \rightarrow F'(U)$  son inyectivos. Dada una sección  $s' \in F'(U)$ , por ser los  $f_x$  epiyectivos, existirá un recubrimiento  $\{U_\alpha\}$  de  $U$  y secciones  $s_\alpha \in F(U_\alpha)$  de modo que  $f_{U_\alpha}(s_\alpha) = s'|_{U_\alpha}$ . Además las  $s_\alpha$  coinciden sobre las intersecciones por la inyectividad de los morfismos  $f_{U_\alpha}$ , luego definen una sección  $s \in F(U)$ , tal que  $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ . Luego  $f_U(s) = s'$ , pues localmente sobre los  $U_\alpha$  coinciden. Con todo hemos concluido que los  $f_U$  son isomorfismos.

En cuanto a la segunda afirmación. Dado  $s \in F(U)$ ,  $f_U(s) = 0$  si y sólo si  $f_U(s)_x = f_x(s_x) = 0$  para todo  $x \in U$ . Ahora es sencillo concluir. □

**Ejercicio 1.3.10.** Sea  $G$  un haz y  $F \hookrightarrow G$  un prehaz. Demostrar que el prehaz  $F'$  definido por  $F'(U) := \{s \in G(U) : s_x \in F_x, \text{ para todo } x \in U\}$  es el haz asociado a  $F$ .

*Resolución:* Veamos que  $F'$  es haz: Obviamente  $F'$  es un subprehaz de  $G$ . Sea  $\{U_i\}$  un recubrimiento por abiertos de  $U$ . Si  $s_i \in F'(U_i)$  coinciden sobre las intersecciones, por ser  $G$  haz, existe una única sección  $s \in G(U)$  cuya restricción a cada  $U_i$  es  $s_i$ . Además  $s_x = (s_i)_x \in F_x$ , para todo  $x \in U_i$  y todo  $i$ , luego  $s \in F'(U)$ .

El morfismo  $F \hookrightarrow F'$  induce un morfismo  $\tilde{F} \rightarrow F'$ . Como  $F'_x = F_x$ , el morfismo anterior es isomorfismo porque en fibras lo es.

Dado un morfismo  $f: F \rightarrow F'$  de haces de grupos, se cumple que el prehaz  $\text{Ker } f$  definido por  $\text{Ker } f(U) = \text{Ker}[F(U) \rightarrow F'(U)]$  es un haz. Sin embargo,  $\text{Im } f$  definido por  $\text{Im } f(U) = \text{Im}[F(U) \rightarrow F'(U)]$  no es en general haz. En el contexto de haces, denotaremos por  $\text{Im } f$  al hacificado del prehaz imagen recién definido. Igualmente,  $\text{Coker } f$  definido por  $\text{Coker } f(U) = \text{Coker}[F(U) \rightarrow F'(U)]$  no es en general haz. En el contexto de haces, denotaremos por  $\text{Coker } f$  al hacificado del prehaz conúcleo recién definido.

**Proposición 1.3.11.** *Dado un morfismo  $F \rightarrow F'$  de haces (o prehaces) de grupos, se cumple*

1.  $(\text{Ker } f)_x = \text{Ker } f_x$ , para todo  $x \in X$ .
2.  $(\text{Im } f)_x = \text{Im } f_x$ , para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Recordemos que el límite inductivo es un funtor exacto.

1.  $(\text{Ker } f)_x = \lim_{x \in U} \text{Ker } f_U = \text{Ker } f_x$
2.  $(\text{Im } f)_x = \lim_{x \in U} \text{Im } f_U = \text{Im } f_x$

□

**Definición 1.3.12.** Una sucesión de morfismos de haces de grupos

$$\dots F_n \xrightarrow{f_n} F_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} F_{n+2} \rightarrow \dots$$

diremos que es una sucesión exacta de haces, si se cumple la igualdad de haces  $\text{Ker } f_{n+1} = \text{Im } f_n$ .

**Corolario 1.3.13.** *Una sucesión de morfismos de haces de grupos*

$$\dots F_n \xrightarrow{f_n} F_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} F_{n+2} \rightarrow \dots$$

es una sucesión exacta de haces si sólo si

$$\dots F_{n_x} \xrightarrow{f_{n_x}} F_{n+1_x} \xrightarrow{f_{n+1_x}} F_{n+2_x} \rightarrow \dots$$

es una sucesión exacta de morfismos de grupos, para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Si  $\text{Im } f_{n_x} = \text{Ker } f_{n+1_x}$  entonces  $(f_{n+1} \circ f_n)_x = f_{n+1_x} \circ f_{n_x} = 0$  luego  $f_{n+1} \circ f_n = 0$ . Por tanto, tenemos un morfismo  $\text{Im } f_n \rightarrow \text{Ker } f_{n+1}$ , que en fibras sobre  $x$  es isomorfismo, luego  $\text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n+1}$ .

Recíprocamente, si  $\text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n+1}$ , en fibras  $\text{Im } f_{n_x} = \text{Ker } f_{n+1_x}$ . □

**Ejercicio 1.3.14.** Si  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de haces de grupos demostrar que para todo abierto  $U$ , la sucesión  $0 \rightarrow F'(U) \rightarrow F(U) \rightarrow F''(U)$  es exacta.

**Ejercicio 1.3.15.** Sea  $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ,  $F = C_X^\infty$  y  $F'$  el haz de las uno formas cerradas de  $X$ . Probar que el morfismo  $d: F \rightarrow F'$ ,  $g \mapsto dg$ , es un epimorfismo de haces pero  $d: F(X) \rightarrow F'(X)$  no es epiyectiva.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua de espacios topológicos.

**Definición 1.3.16.** Dado un prehaz  $P$  sobre  $X$  se define la imagen directa,  $f_*P$ , de  $P$  por  $f$ , como el prehaz  $f_*P(U) = P(f^{-1}(U))$ .

Es fácil comprobar que si  $F$  es un haz sobre  $X$ , entonces  $f_*F$  es un haz sobre  $Y$ .

## 1.4. Espacio anillado

Es obvio que cuando miramos una esfera no estamos viendo simplemente un conjunto de puntos sino que además estamos añadiendo una estructura topológica. Es decir, vemos la esfera como un conjunto con una topología (un espacio topológico). Si además consideramos que la esfera no es “deformable suavemente” al cubo, estamos añadiendo una estructura extra. Localmente estamos identificando “suavemente” la esfera con el plano, es decir estamos dando unas coordenadas, estamos indicando las funciones u “observaciones” sobre la esfera “suaves o adecuadas”. Con más precisión, estamos diciendo que la esfera es un espacio topológico junto con el anillo de funciones diferenciables, la estamos viendo como una variedad diferenciable con su anillo de funciones diferenciables.

Cuando hemos definido una variedad algebraica los únicos conjuntos que “observamos” son los definidos a partir de las funciones algebraicas. Es decir, cuando escribíamos  $\text{Spec } A$ , en realidad siempre teníamos presente la pareja  $(\text{Spec } A, A)^2$ . Así pues, un espacio es un espacio topológico junto con cierto anillo de observaciones, que están definidas o determinadas localmente.

**Definición 1.4.1.** Un espacio anillado es una pareja  $(X, \mathcal{O}_X)$  formada por un espacio topológico  $X$  y un haz de anillos  $\mathcal{O}_X$  sobre  $X$ .

Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  es un espacio anillado nos referiremos a  $X$  como al espacio topológico subyacente y a  $\mathcal{O}_X$  como el haz estructural. Por brevedad diremos que  $X$  es un espacio anillado.

**Definición 1.4.2.** Se llama espacio anillado en anillos locales a todo espacio anillado cuyas fibras sean anillos locales.

**Ejemplo 1.4.3.** Las variedades diferenciales y las variedades topológicas son espacios anillados en anillos locales.

**Definición 1.4.4.** Un morfismo de espacios anillados  $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  es una pareja formada por una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$ , y un morfismo de haces de anillos  $\phi: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ .

Dado un morfismo de espacios anillados  $(f, \phi): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ , para cada punto  $y = f(x) \in Y$ , se tienen morfismos naturales  $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ .

**Definición 1.4.5.** Un morfismo  $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  de espacios anillados entre espacios anillados en anillos locales se dice que es un morfismo en anillos locales, si los morfismos naturales  $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  son locales, es decir, aplican el ideal maximal del primer anillo dentro del ideal maximal del segundo.

**Ejemplo 1.4.6.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciales. Para cada abierto  $U \subseteq Y$ , tenemos un morfismo de anillos  $C_Y^\infty(U) \rightarrow C_X^\infty(f^{-1}(U))$ ,  $g \mapsto g \circ f|_{f^{-1}(U)}$ . Morfismos que definen un morfismo de haces de anillos  $C_Y^\infty \rightarrow f_*C_X^\infty$ . En gérmenes tenemos el morfismo  $C_{Y, f(x)}^\infty \rightarrow C_{X, x}^\infty$ ,  $[g] \mapsto [g \circ f]$ , que aplica el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $f(x)$ , de  $C_{Y, f(x)}^\infty$ , en el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $f(x)$ , de  $C_{X, x}^\infty$ . En conclusión, todo morfismo  $f: X \rightarrow Y$ , induce de modo natural un morfismo de espacios anillados en anillos locales entre los espacios anillados.

<sup>2</sup>Desde un punto de vista epistemológico las observaciones del espacio son previas a toda concepción del espacio y éste se obtiene como objetivación de aquellas. El problema de cómo puede haber observaciones sin tener previamente el espacio, aquí queda desdibujado pues no nos encontramos con ninguna dificultad al definir  $A$  sin tener  $\text{Spec } A$ , si bien, para definir  $A$  siempre necesitaremos de los conjuntos o al menos del conjunto  $\mathbb{N}$

### 1.4.1. Haz de localizaciones en abiertos de $\text{Spec } A$

Dado un anillo  $A$ , consideremos en  $\text{Spec } A$  el prehaz definido, para cada abierto  $U \subseteq \text{Spec } A$ , por

$$U \rightsquigarrow A(U) \underset{\text{Not}}{=} A_U \underset{\text{def}}{=} A_S \quad S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema multiplicativo de las} \\ \text{funciones que no se anulan en } U \end{array} \right\}$$

**Definición 1.4.7.** Denotaremos por  $\tilde{A}$  al haz en  $\text{Spec } A$  asociado al prehaz  $U \rightsquigarrow A_U$ . Diremos que  $\tilde{A}$  es el haz de localizaciones en abiertos de  $\text{Spec } A$ .

**Proposición 1.4.8.** *La fibra en un punto  $x \in \text{Spec } A$  del prehaz de localizaciones en abiertos de  $\text{Spec } A$ , coincide con la localización,  $A_x$ , del anillo  $A$  en  $x$ . En particular  $\tilde{A}_x = A_x$ .*

*Demostración.* Ejercicio 1.3.1 □

Así pues,  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$  es un espacio anillado en anillos locales.

**Lema 1.4.9.** *Sea  $U$  un abierto básico de  $\text{Spec } A$ . Si  $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$  es un recubrimiento finito de  $U$  por abiertos básicos, la siguiente sucesión es exacta*

$$A_U \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n A_{U_i} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \bigoplus_{i,j}^n A_{U_i \cap U_j}$$

*“El prehaz de localizaciones es un haz en la base de abiertos básicos”*

*Demostración.* La exactitud de la sucesión es una cuestión local, luego localizando en  $U_k$ , tenemos que ver que la sucesión

$$A_{U_k} \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^n A_{U_k \cap U_i} \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} \bigoplus_{i,j}^n A_{U_k \cap U_i \cap U_j}$$

es exacta. Obviamente,  $i$  es inyectiva porque  $i(s) = (s|_{U_k \cap U_i})_i$  y  $s|_{U_k \cap U_k} = s$ . Dado  $(s_i) \in \bigoplus_{i=1}^n A_{U_k \cap U_i}$ , si  $p_1(s_i) = p_2(s_i)$  entonces  $s_i|_{U_k \cap U_i \cap U_k} = s_k|_{U_k \cap U_i \cap U_k}$ . Luego  $s_i = s_k|_{U_k \cap U_i}$ , i.e.,  $i(s_k) = (s_i)$ . □

**Teorema 1.4.10.** *Si  $U \subseteq \text{Spec } A$  es un abierto básico distinto del vacío entonces*

$$\tilde{A}(U) = A_U$$

*En particular,  $\tilde{A}(\text{Spec } A) = A$ .*

*Demostración.* Tenemos que ver que el morfismo natural  $A_U \rightarrow \tilde{A}(U)$  es isomorfismo.

1) Es inyectivo: Dada  $s \in A_U$ , si  $s \mapsto 0$  entonces existe un recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $U$  por abiertos básicos, tal que  $s|_{U_i} = 0$  ( $A_U \rightarrow A_{U_i}, s \mapsto s|_{U_i}$ ). Por la compacidad de  $U$  podemos suponer que el recubrimiento es finito. Por el lema, el morfismo  $A_U \hookrightarrow \bigoplus A_{U_i}$  es inyectivo. Luego  $s = 0$ .

2) Es epiyectivo: Dada  $s \in \tilde{A}(U)$  existe un recubrimiento por abiertos básicos  $\{U_i\}$  y  $s_i \in A_{U_i}$ , de modo que por los morfismos  $A_{U_i} \rightarrow \tilde{A}(U_i)$  se cumple que  $s_i \mapsto s|_{U_i}$ . Observemos que  $s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j} = 0$  ya que  $s|_{U_i \cap U_j} - s|_{U_i \cap U_j} = 0$  y el morfismo  $A_{U_i \cap U_j} \rightarrow \tilde{A}(U_i \cap U_j)$  es inyectivo por 1). Por el lema, sabemos que existe  $s' \in A_U$  tal que  $s'|_{U_i} = s_i$ . Entonces en el morfismo  $A_U \rightarrow \tilde{A}(U)$  tenemos que  $s' \mapsto s$ , porque en los  $U_i$  así sucede. □

**Ejercicio 1.4.11.** Sea  $\mathcal{B}$  una base de abiertos de un espacio topológico  $X$ . Sea  $F$  un prehaz en  $X$ . Supongamos que  $F$  es haz para  $\mathcal{B}$ , es decir, para cada  $U \in \mathcal{B}$ , cada recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $U$  por abiertos  $U_i \in \mathcal{B}$  y un recubrimiento  $\{U_{ijk}\}$  de  $U_i \cap U_j$  por abiertos  $U_{ijk} \in \mathcal{B}$  la siguiente sucesión es exacta

$$F(U) \rightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j,k} F(U_{ijk})$$

Demostrar que el haz asociado a  $F$  coincide con  $F$  sobre  $\mathcal{B}$ .

**Ejercicio 1.4.12.** Sea  $A$  un anillo íntegro. Demuéstrase que  $A = \bigcap_{x \in \text{Spec } A} A_x$  y en general que  $\tilde{A}(U) = \bigcap_{x \in U} A_x$ . (obsérvese que  $\tilde{A} \hookrightarrow \tilde{\Sigma}$ , siendo  $\Sigma = A_{A-0}$ , y recuérdese 1.3.10).

**Proposición 1.4.13.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Morfismos de espacios anillados} \\ \text{en anillos locales} \\ (\text{Spec } B, \tilde{B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \tilde{A}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Morfismos de anillos} \\ A \rightarrow B \end{array} \right\}.$$

*Demostración.* Un morfismo  $(f, \phi): (\text{Spec } B, \tilde{B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \tilde{A})$  de espacios anillados en anillos, induce un morfismo

$$\phi_A: A = \tilde{A}(\text{Spec } A) \rightarrow f_* \tilde{B}(\text{Spec } A) = \tilde{B}(\text{Spec } B) = B.$$

Tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_A} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{A}_{f(x)} = A_{f(x)} & \longrightarrow & \tilde{B}_x = B_x \end{array}$$

Como  $A_{f(x)} \rightarrow B_x$  es local, se deduce que si  $\phi_A^*$  es el morfismo inducido en los espectros por  $\phi_A$  entonces  $\phi_A^*(x) = f(x)$ , es decir,  $\phi_A^* = f$ . Además,  $\phi$  está determinado por  $\phi_A$ : Dado un abierto básico  $U_a \subset \text{Spec } A$ , entonces  $f^{-1}(U_a) = U_{\phi_A(a)}$  y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_A} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{A}_{U_a} = A_a & \xrightarrow{\phi_{U_a}} & \tilde{B}_{U_{\phi_A(a)}} = B_{\phi_A(a)} \end{array}$$

es conmutativo, luego  $\phi_{U_a}$  está determinado por  $\phi_A$ , y en conclusión  $\phi$  también.

Recíprocamente, dado un morfismo  $f: A \rightarrow B$ , induce un morfismo continuo  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  y por localizaciones morfismos

$$A_U \rightarrow B_{f^{*-1}(U)}$$

que define un morfismo  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow (f^*)_* \tilde{B}$ . En fibras sobre  $f^*(x)$ , define el morfismo

$$A_{f^*(x)} \rightarrow ((f^*)_* \tilde{B})_{f^*(x)} \rightarrow B_x$$

inducido por  $f$ , que es local.

El morfismo  $\tilde{f}_A$  definido por toma de secciones globales es precisamente  $f$ . Con todo concluimos.  $\square$

## 1.5. Esquemas

Las variedades “anilladas” en Geometría Algebraica se denominan esquemas:

**Definición 1.5.1.** Un espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$ , diremos que es un esquema si existe un recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $X$  de modo que  $(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \simeq (\text{Spec } A_i, \tilde{A}_i)$ . Diremos que es un esquema afín si es isomorfo a un esquema  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$ .

**Ejercicio 1.5.2.** Probar que un abierto de un esquema es un esquema. Demuéstrese que  $\mathbb{A}_2 - \{0\}$  no es un esquema afín (Pista: probar que  $\Gamma(\mathbb{A}_2 - \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_2 - \{0\}}) = k[x, y]$ ).

**Ejemplo 1.5.3.** Obviamente  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$  es un esquema.

**Definición 1.5.4.** Los morfismos de espacios anillados en anillos locales, entre esquemas se denominan morfismos de esquemas.

**Definición 1.5.5.** Un esquema  $X$  se dice que es reducido si para todo abierto  $U \subset X$ ,  $\mathcal{O}_X(U)$  es un anillo reducido.

**Proposición 1.5.6.** Un esquema  $X$  es reducido si y sólo si para todo  $x \in X$ ,  $\mathcal{O}_{X,x}$  es un anillo reducido.

*Demostración.* Si  $X$  es reducido entonces  $\mathcal{O}_{X,x}$  es reducido porque dada  $\bar{a} \in \mathcal{O}_{X,x}$ ,  $a \in \mathcal{O}_X(U)$  si  $\bar{a}^n = 0$  entonces  $a^n = 0$  en un entorno abierto de  $x$ ,  $V \subset U$ , luego  $a = 0$  en  $V$  y  $\bar{a} = 0$ . Recíprocamente, si  $\mathcal{O}_{X,x}$  son anillos reducidos para todo  $x \in X$ , dado un abierto  $U$  tenemos el morfismo inyectivo  $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$ , luego  $\mathcal{O}_X(U)$  es un anillo reducido.  $\square$

**Definición 1.5.7.** Un esquema se dice que es irreducible cuando no es unión de cerrados propios, es decir, cuando el espacio topológico subyacente es irreducible.

**Ejercicio 1.5.8.** Demostrar que un espacio topológico es irreducible si y sólo si no contiene dos abiertos no vacíos disjuntos.

**Definición 1.5.9.** Un esquema  $X$  se dice que es íntegro si para todo abierto  $U \subset X$  se verifica que  $\mathcal{O}_X(U)$  es íntegro.

**Proposición 1.5.10.** Un esquema es íntegro  $\Leftrightarrow$  es irreducible y reducido.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Obviamente,  $X$  es reducido. Si  $X = C_1 \cup C_2$  es unión de cerrados propios, entonces  $X - (C_1 \cap C_2) = (C_1 - (C_1 \cap C_2)) \cup (C_2 - (C_1 \cap C_2))$ . Denotemos  $U = X - (C_1 \cap C_2)$ ,  $U_1 = C_1 - (C_1 \cap C_2)$  y  $U_2 = C_2 - (C_1 \cap C_2)$ . Se verifica  $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$ , que no es íntegro. Así pues, hemos llegado a contradicción por suponer que  $X$  no es irreducible.

$\Leftarrow$ ) Dado un abierto  $U \subseteq X$ , sean  $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ , tales que  $f \cdot g = 0$ .

Sea

$$C_1 = \left\{ x \in U \text{ tales que } f \text{ en } \mathcal{O}_{X,x} \right. \\ \left. \text{pertenezca al ideal maximal } \mathfrak{p}_x \mathcal{O}_{X,x} \right\} \stackrel{\text{Not}}{=} (f)_0$$

$$C_2 \stackrel{\text{ídem}}{=} (g)_0$$

Es fácil ver que  $C_1 \cup C_2 = U$ . Por tanto,  $X = [(X - U) \cup C_1] \cup [(X - U) \cup C_2]$ , luego por ser  $X$  irreducible podemos suponer que  $X = [(X - U) \cup C_1]$ , es decir  $C_1 = U$ . Así pues,  $f$  es nilpotente en cada abierto afín incluido en  $U$ . Luego por ser  $X$  reducido,  $f$  es nulo en cada abierto afín incluido en  $U$ , es decir,  $f$  es nulo. Luego  $\mathcal{O}_X(U)$  es íntegro.  $\square$

Si  $X$  es irreducible y  $U \subseteq X$  es un abierto afín, sabemos que existe un punto  $p \in U$ , tal que su cierre en  $U$  es  $U$ . Tendremos que  $X = \bar{p} \cup U^c$ , luego  $\bar{p} = X$ . Dado un abierto  $V \subseteq X$ , si  $p \notin V$ , entonces  $\bar{p} \subseteq V^c$ , luego  $V = \emptyset$ . Como consecuencia,  $p$  es el único punto cuyo cierre es  $X$ , pues localmente afínmente  $p$  es único. Diremos que  $p$  es el punto genérico de  $X$ . Si un esquema  $X$  es íntegro y  $p_g \in X$  es el punto genérico, llamaremos cuerpo de funciones de  $X$  a  $\mathcal{O}_{X,p_g}$ , que es el cuerpo de fracciones del anillo de funciones de cualquiera de sus abiertos afines. Denotaremos  $\Sigma_X = \mathcal{O}_{X,p_g}$ .

## 1.6. Ejemplos de esquemas

### 1.6.1. Variedades algebraicas. Variedades proyectivas

En el capítulo 1 hemos definido el espectro proyectivo de un anillo graduado, queremos ahora precisar qué funciones algebraicas estamos considerando en el espectro proyectivo. La pregunta sobre cuáles son las funciones del haz de anillos del espectro proyectivo de un anillo graduado es una pregunta esencialmente de naturaleza local, nos preguntamos cuáles son las funciones localmente. Para fijar ideas, consideremos  $\mathbb{P}_n = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]$ . Las funciones de  $\mathbb{P}_n - (x_i)_0^h$  han de ser funciones algebraicas  $f \in k[x_0, \dots, x_n]_{x_i}$  homogéneas de grado cero, pues sólo consideramos funciones que no distinguen un punto  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  de  $(\lambda\alpha_0, \dots, \lambda\alpha_n)$ . Es decir, las funciones de  $\mathbb{P}_n - (x_i)_0^h$  son  $(k[x_0, \dots, x_n]_{x_i})_0 = k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]$ . Como además  $\mathbb{P}_n - (x_i)_0^h = \text{Spec } k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]$  tendremos que  $\mathbb{P}_n$  con las funciones “adecuadas” es un esquema.

Procedamos con toda generalidad y rigor. Recordemos, que dado un anillo graduado  $R$ , denotamos por  $R_0$  los elementos de grado cero de  $R$ .

**Definición 1.6.1.** Definimos el haz de localizaciones homogéneas  $\widetilde{R}$ , en  $\text{Proj } R$  por el haz asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow (R_S)_0, \quad S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema multiplicativo de las funciones} \\ \text{homogéneas que no se anulan en } U \end{array} \right\}$$

para cada abierto  $U$  de  $\text{Proj } R$ .

Por sencillez supondremos, a partir de ahora, que  $R = R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$ , donde cada  $\xi_i$  es de grado 1.

**Teorema 1.6.2.**  $(\text{Proj } R, \widetilde{R})$  es un esquema.

*Demostración.* Recordemos que  $\text{Proj } R = \bigcup_{i=0}^n U_{\xi_i}^h$ , donde  $U_{\xi_i}^h = \text{Proj } R - (\xi_i)_0^h$ . Sabemos, además, que tenemos un homeomorfismo  $U_{\xi_i}^h \simeq \text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ , de modo que a través de esta identificación,  $(f_n)_0^h$  en  $U_{\xi_i}^h$  es igual a  $(f_n/\xi_i^n)_0$  en  $\text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ .

Nos falta ver que  $\widetilde{R}|_{U_{\xi_i}^h} = R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ :

Sea  $f_n \in R_n \subset R$ . Veamos que las secciones del prehaz de localizaciones homogéneas sobre  $U_{\xi_i}^h - (f_n)_0^h = U_{\xi_i}^h \cap U_{f_n}^h$  coincide con las secciones de  $R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  en  $\text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i] - (f_n/\xi_i^n)_0$ .

Observemos que  $R_{U_{\xi_i} \cap U_{f_n}} = R_{\xi_i \cdot f_n} = (R_{\xi_i})_{f_n/\xi_i^n}$ . Por tanto,

$$(R_{U_{\xi_i} \cap U_{f_n}})_0 = [(R_{\xi_i})_{f_n/\xi_i^n}]_0 = [(R_{\xi_i})_0]_{f_n/\xi_i^n} = R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]_{f_n/\xi_i^n}$$

Luego, los prehaces que definían a  $\widetilde{R}|_{U_{\xi_i}^h}$  y  $R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  son isomorfos en abiertos básicos y concluimos que los haces son isomorfos.

□

**Definición 1.6.3.** Diremos que un esquema  $X$  es un  $k$ -esquema si existe un morfismo prefijado  $X \rightarrow \text{Spec } k$  de esquemas. Diremos que un  $k$ -esquema es una variedad algebraica si existe un recubrimiento finito  $\{U_i = \text{Spec } A_i\}$  por abiertos afines de  $X$  de modo que los  $A_i$  son  $k$ -álgebras de tipo finito.

**Ejemplo 1.6.4.** Las variedades algebraicas afines  $\text{Spec } k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  son variedades algebraicas.

Si  $R = k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  es una  $k$ -álgebra graduada,  $(\text{Proj } R, \widetilde{R})$  es una variedad algebraica. A este tipo de variedades se las llama variedades proyectivas. Así pues, el espacio proyectivo y las curvas proyectivas planas son ejemplos de variedades algebraicas.

**Definición 1.6.5.** Llamaremos dimensión de un esquema  $X$  a la máxima longitud de las cadenas de cerrados irreducibles de  $X$ .

**Proposición 1.6.6.** Si  $X$  es una variedad algebraica íntegra entonces la dimensión de  $X$  coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de funciones  $\mathcal{O}_{X, p_g}$ .

*Demostración.* Si  $U$  es un abierto afín de  $X$  no vacío. Sabemos que  $\dim U$  es igual al grado de trascendencia de  $\Sigma_U = \Sigma_X$ .

Si  $C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \dots \subsetneq C_n$  es una cadena de cerrados irreducible de  $X$  y  $U$  es un abierto afín que corta con  $C_1$ , entonces  $U \cap C_1 \subsetneq U \cap C_2 \subsetneq \dots \subsetneq U \cap C_n$  es una cadena de cerrados irreducibles de  $U$  (recordemos que  $\overline{U \cap C_i} = C_i$ ). Por tanto,  $\dim X \leq \sup\{\dim U, \text{abiertos afines}\}$ , luego  $\dim X$  es menor o igual que el grado de trascendencia de  $\Sigma_X$ . Por otra parte, si  $D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \dots \subsetneq D_n$  es una cadena de cerrados de un abierto afín, entonces  $\bar{D}_1 \subsetneq \bar{D}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \bar{D}_n$  es una cadena de cerrados irreducibles de  $X$ , luego  $\dim U \leq \dim X$ , luego el grado de trascendencia de  $\Sigma_X$  es menor o igual que  $\dim X$ . □

**Ejercicio 1.6.7.** Probar que las variedades algebraicas son catenarias.

**Definición 1.6.8.** Diremos que una variedad algebraica es una curva si es de dimensión 1.

## 1.6.2. Variedad de Riemann

### Anillos de valoración

Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$  y dimensión de Krull 1. Se dice que  $\mathcal{O}$  es un anillo regular (de dimensión 1) si  $\mathfrak{m} = (t)$ .

**Ejercicio 1.6.9.** Sea  $\mathcal{O}$  la localización de  $k[x, y]/(ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \dots)$  en el origen.  $\mathcal{O}$  es un anillo local regular si y sólo si  $a$  o  $b$  son no nulos.

Supongamos que  $\mathcal{O}$  es regular. Dada  $f \in \mathcal{O}$ , tendremos que o bien  $f$  es invertible o  $f = t \cdot f_1$ , en este último caso tendremos que  $f_1$  es invertible o  $f_1 = t \cdot f_2$ , luego  $f = t^2 \cdot f_2$ . Este proceso acaba porque vamos obteniendo las cadenas de inclusiones estrictas  $(f) \subset (f_1) \subset (f_2) \subset \dots$ . Por tanto, existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f = t^n \cdot f_n$  con  $f_n$  invertible. Observemos que  $\mathcal{O}$  ha de ser un anillo íntegro: Si  $f \cdot g = 0$ , sean  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $f = t^n \cdot f_n$  y  $g = t^m \cdot g_m$ , con  $f_n$  y  $g_m$  invertibles. Si  $f \cdot g = 0$  entonces  $t^{n+m} = 0$ , luego las funciones de  $\mathcal{O}$  son invertibles o son nilpotentes, luego  $\mathcal{O}$  es un anillo de dimensión cero, contradicción. Sea  $\Sigma$  el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}$ . Dado  $f \in \Sigma$  tendremos que  $f = a/b$ , con  $a, b \in \mathcal{O}$ . Escribamos  $a = t^n \cdot a_n$  y  $b = t^m \cdot b_m$ , con  $a_n, b_m$  elementos invertibles de  $\mathcal{O}$ .

Tendremos que  $f = t^{n-m} \cdot f'$ , con  $f'$  un elemento invertible de  $\mathcal{O}$ . Si  $f = t^r \cdot f' = t^s \cdot f''$  con  $r, s \in \mathbb{Z}$  y  $f', f''$  elementos invertibles de  $\mathcal{O}$  entonces  $r = s$ : Supongamos que  $r > s$  entonces  $f'' = t^{r-s} \cdot f' \in \mathfrak{m}$  contradicción.

Así pues, podemos definir una aplicación

$$v_{\mathfrak{m}}: \Sigma - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$v_{\mathfrak{m}}(f) = r$ , si  $f = t^r \cdot f'$  siendo  $f'$  un elemento invertible de  $\mathcal{O}$ . Dejamos que el lector pruebe que  $v_{\mathfrak{m}}$  no depende del generador  $t$  considerado en  $\mathfrak{m}$ .

Observemos que  $\mathcal{O} = \{f \in \Sigma - \{0\}: v_{\mathfrak{m}}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$  y  $\mathfrak{m} = \{f \in \Sigma - \{0\}: v_{\mathfrak{m}}(f) > 0\} \cup \{0\}$ . Se cumple que  $v_{\mathfrak{m}}(f \cdot g) = v_{\mathfrak{m}}(f) + v_{\mathfrak{m}}(g)$ . Además  $v_{\mathfrak{m}}(f + g) \geq \min\{v_{\mathfrak{m}}(f), v_{\mathfrak{m}}(g)\}$ : Escribamos  $f = t^n \cdot f'$  y  $g = t^m \cdot g'$ , siendo  $f'$  y  $g'$  elementos invertibles de  $\mathcal{O}$ . Supongamos que  $m \leq n$ , entonces  $f + g = t^m \cdot (t^{n-m} \cdot f' + g')$  y  $v_{\mathfrak{m}}(f + g) = v_{\mathfrak{m}}(t^m) + v_{\mathfrak{m}}(t^{n-m} \cdot f' + g') \geq m + 0 = m$ .

Sea ahora  $\Sigma$  un cuerpo. Una aplicación epiyectiva  $v: \Sigma - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  diremos que es una valoración discreta si  $v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$  y  $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ .

Sea  $\mathcal{O}_v = \{f \in \Sigma: v(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ .

$\mathcal{O}_v$  es un anillo:  $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$ , luego  $v(1) = 0$  y  $1 \in \mathcal{O}_v$ . Si  $f, g \in \mathcal{O}_v$  es obvio que  $f + g, f \cdot g \in \mathcal{O}_v$ .

$\mathcal{O}_v$  es un anillo local de ideal maximal  $\mathfrak{p}_v = \{f \in \Sigma: v(f) > 0\} \cup \{0\}$ :  $0 = v(1) = v(f \cdot f^{-1}) = v(f) + v(f^{-1})$ , luego  $v(f^{-1}) = -v(f)$ . Así pues los elementos valor cero, que están en  $\mathcal{O}_v$ , son invertibles en  $\mathcal{O}_v$ . Recíprocamente un elemento de  $\mathcal{O}_v$  es invertible si su valor es cero. Para ver que  $\mathcal{O}_v$  es local sólo tenemos que probar que  $\mathfrak{p}_v$ , el complementario de los invertibles, es un ideal, lo cual es una sencilla comprobación.

El cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}_v$  es  $\Sigma$ : dado  $f \in \Sigma$  entonces  $v(f) \geq 0$  o  $v(f^{-1}) \geq 0$  luego  $f \in \mathcal{O}_v$  o  $f^{-1} \in \mathcal{O}_v$  (esta propiedad, junto con la noetherianidad, caracteriza los anillos  $\mathcal{O}_v$ , pero no lo vamos a comprobar).

El ideal  $\mathfrak{p}_v$  es principal: Sea  $t \in \mathfrak{p}_v$  tal que  $v(t) = 1$ . El ideal  $\mathfrak{p}_v$  está generado por  $t$ , pues si  $f \in \mathfrak{p}_v$  entonces  $v(f) \geq 1$ , luego  $v(f/t) \geq 0$  y  $f/t \in \mathcal{O}_v$  y  $f \in (t)$ .

$\mathcal{O}_v$  es un anillo noetheriano, pues los ideales de  $\mathcal{O}_v$  son  $\mathfrak{p}_v^n = (t^n)$ , con  $n \geq 0$ .

La dimensión de Krull de  $\mathcal{O}_v$  es cero o uno, cómo es inmediato por el párrafo anterior. Si es cero, entonces  $\mathcal{O}_v$  es un cuerpo, que ha de ser  $\Sigma$ , luego  $v(\Sigma - \{0\}) = 0$ , contradicción.

Tenemos una correspondencia biunívoca entre anillos locales regulares de dimensión 1 de cuerpo de fracciones  $\Sigma$  y valoraciones discretas de  $\Sigma$ .

Diremos que  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración discreta.

Si un anillo local  $\mathcal{O} \hookrightarrow \Sigma$ , de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , domina a  $\mathcal{O}_v$ , es decir,  $\mathcal{O}_v \hookrightarrow \mathcal{O}$  y  $\mathfrak{p}_v \hookrightarrow \mathfrak{m}$ , entonces  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_v$ : Si  $f \in \mathcal{O} - \mathcal{O}_v$  entonces  $f^{-1} \in \mathcal{O}_v$  y no es invertible en  $\mathcal{O}_v$ , luego  $f^{-1} \in \mathfrak{p}_v$  y  $f^{-1} \in \mathfrak{m}$ . Esto último implica que  $f^{-1}$  no es invertible en  $\mathcal{O}$ , lo cual es contradictorio. (Esta propiedad junto con la noetherianidad caracteriza los anillos de valoración discreta).

Por último veamos la equivalencia entre los anillos de valoración discreta y los anillos locales de dimensión 1 íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones

**Definición 1.6.10.** Diremos que un anillo  $A$  íntegro, es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ , si cumple que si una función  $f \in \Sigma$  es entera sobre  $A$  entonces  $f \in A$ . También se dice que  $A$  es normal.

Sea  $A \hookrightarrow B$  un morfismo de anillos. Llamaremos cierre entero de  $A$  en  $B$  al subanillo de  $B$  formado por todos los elementos de  $B$  enteros sobre  $A$ .

Dejamos que el lector pruebe que el cierre entero de un anillo íntegro en su cuerpo de fracciones es un anillo íntegramente cerrado.

**Proposición 1.6.11.** *Un anillo íntegro es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones si y sólo si es localmente íntegramente cerrado. En particular, si  $A$  es íntegramente cerrado, entonces  $A_S$  también, para todo sistema multiplicativo  $S$ .*

*Demostración.* Sea  $A$  íntegramente cerrado. Dado  $x \in \text{Spec } A$  veamos que  $A_x$  es íntegramente cerrado: Sea  $f \in \Sigma$  entero sobre  $A_x$ . Existe una relación entera

$$f^n + a_1/s_1 \cdot f^{n-1} + \cdots + a_n/s_n = 0 \quad \text{con } a_i, s_i \in A \text{ y } s_i(x) \neq 0$$

Sea  $t = s_1 \cdots s_n$  (luego  $t(x) \neq 0$ ). Multiplicando la relación anterior por  $t^n$  obtenemos una relación entera de  $tf$  con coeficientes en  $A$ , luego  $tf \in A$  y  $f \in A_x$ .

Recíprocamente, supongamos que  $A$  es localmente íntegramente cerrado. Sea  $f \in \Sigma$  entero sobre  $A$ . El morfismo  $A \rightarrow A[f]$  es finito, luego localmente es finito; es más, localmente es isomorfismo (porque  $A$  es localmente íntegramente cerrado). Por tanto,  $A = A[f]$  y  $f \in A$ , es decir,  $A$  es íntegramente cerrado. □

**Proposición 1.6.12.** *Los dominios de factorización única son íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones.*

*Demostración.* Sea  $A$  un dominio de factorización única y  $\Sigma$  su cuerpo de fracciones. Sea  $\frac{a}{b} \in \Sigma$  una fracción de modo que  $b$  sea primo con  $a$ . Si  $\frac{a}{b}$  es entero sobre  $A$  verifica una relación

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Multiplicando por  $b^n$  tendremos  $a^n + \dot{b} = 0$ . Luego, como  $b$  es primo con  $a$ , habrá de ser invertible y  $a/b \in A$ . En conclusión, los únicos elementos enteros de  $\Sigma$  sobre  $A$  son los de  $A$ . □

**Ejemplo 1.6.13.**  $\mathbb{Z}, k[x], k[x_1, \dots, x_n]$  son anillos íntegramente cerrados en sus cuerpos de fracciones.

**Proposición 1.6.14.** *Los anillos de valoración son íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{O}_v$  un anillo de valoración y  $\Sigma$  su cuerpo de fracciones. Sea  $f \in \Sigma$  entero sobre  $\mathcal{O}_v$ . Por tanto, verifica una relación entera

$$f^n + a_1f^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in \mathcal{O}_v$$

Si  $f^{-1} \in \mathcal{O}_v$ , entonces  $f = -a_1 - a_2f^{-1} - \cdots - f^{1-n} \in \mathcal{O}_v$ . Si  $f^{-1} \notin \mathcal{O}_v$  entonces  $f \in \mathcal{O}_v$ , pues  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración. En conclusión,  $\mathcal{O}_v$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de funciones.

De otro modo:  $nv(f) = v(f^n) = v(-a_1f^{n-1} - \cdots - a_n) \geq \min\{v(-a_1f^{n-1}), \dots, v(-a_{n-1}f), v(-a_n)\} \geq \min\{(n-1)v(f), \dots, v(f), 0\}$  de lo que se deduce que  $v(f) \geq 0$ . □

Si consideramos el nodo  $C \equiv y^2 - x^2 + x^3 = 0$  y consideramos la curva  $\tilde{C}$  que se obtiene de “despegar” las dos ramas y el morfismo natural  $\tilde{C} \rightarrow C$  “pegar”, resulta que este morfismo fuera del nodo es isomorfismo (birrational) y es un morfismo finito. Parece claro intuitivamente que para las curvas regulares en todo punto, no existen más morfismos birracionales finitos que los isomorfismos. En términos matemáticos precisos:

**Teorema 1.6.15.** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo íntegro local noetheriano de dimensión 1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\mathcal{O}$  es regular.
2.  $\mathcal{O}$  es un anillo de valoración.
3.  $\mathcal{O}$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ .

*Demostración.* Sólo nos falta probar  $(3 \Rightarrow 1)$ .

Sea  $f$  un elemento no nulo del ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$ .  $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$  es un anillo local de dimensión cero. Por tanto, el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  en  $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$  es nilpotente. Es decir, existe un  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $\mathfrak{m}^n \subseteq f\mathcal{O}$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  mínimo verificando  $\mathfrak{m}^n \subseteq f\mathcal{O}$ . Sea  $g \in \mathfrak{m}^{n-1}$  de modo que  $g \notin f\mathcal{O}$ . Basta probar que  $\mathfrak{m} = \frac{f}{g} \cdot \mathcal{O}$ , pues tendríamos que  $\mathfrak{m}$  es un  $\mathcal{O}$ -módulo principal y  $\mathcal{O}$  un anillo regular. Basta probar, pues, que  $\frac{g}{f} \cdot \mathfrak{m} = \mathcal{O}$ . Se verifica que  $\frac{g}{f} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \frac{1}{f} \cdot \mathfrak{m}^n \subseteq \mathcal{O}$ . Si  $\frac{g}{f} \cdot \mathfrak{m} \neq \mathcal{O}$ , tendremos que  $\frac{g}{f} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$ . Por tanto,  $\frac{g}{f} \cdot$  es un endomorfismo de  $\mathfrak{m}$ , que ha de satisfacer el correspondiente polinomio característico. Luego  $\frac{g}{f}$  es entero sobre  $\mathcal{O}$ , así pues  $\frac{g}{f} \in \mathcal{O}$ . Contradicción porque  $g \notin f\mathcal{O}$ . □

Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito íntegra de cuerpo de fracciones  $\Sigma$  y  $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$  es una extensión finita de cuerpos. Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma'$ . El morfismo de  $A \hookrightarrow \bar{A}$  es finito. Si  $\dim A = 1$  entonces  $\dim \bar{A} = 1$ . Si  $x \in \text{Spec } \bar{A}$  es un punto cerrado entonces  $\bar{A}_x$  es un anillo íntegramente cerrado de dimensión 1, luego un anillo de valoración discreta. Recíprocamente, si un anillo  $\mathcal{O}_v$  de valoración discreta contiene a  $A$ , entonces como es íntegramente cerrado contiene a  $\bar{A}$ . Tenemos  $\bar{A} \hookrightarrow \mathcal{O}_v$  y sea  $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_v \cap \bar{A}$ . El morfismo  $\bar{A}_x \hookrightarrow \mathcal{O}_v$  es dominante y  $\bar{A}_x$  es de valoración, entonces  $\mathcal{O}_v = \bar{A}_x$ .  $\bar{A}$  como todo anillo íntegro es igual a la intersección de sus localizados. En conclusión,

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subseteq \mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v$$

donde los  $\mathcal{O}_v$  son los anillos de valoración discreta de  $\Sigma'$  que contienen a  $A$  (o equivalentemente a  $\bar{A}$ ).

### Variedad de Riemann

Sea  $X$  una variedad algebraica íntegra y  $\mathcal{O}_v$  un subanillo de  $\Sigma_X$  de valoración, trivial sobre  $k$ . Se dice que  $\mathcal{O}_v$  tiene centro en un punto  $x \in X$ , cuando la imagen del morfismo de localización  $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \Sigma_X$  es un anillo local dominado por  $\mathcal{O}_v$ .

**Definición 1.6.16.** Diremos que una variedad algebraica íntegra es completa si todo anillo de valoración de su cuerpo de funciones, trivial sobre  $k$ , tiene centro en un único punto de la variedad.

**Teorema 1.6.17.** *Las variedades algebraicas íntegras proyectivas son completas.*

*Demostración.* Sea  $X = \text{Proj } k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  una variedad proyectiva íntegra. Sea  $\mathcal{O}_v \subseteq \Sigma_X$  un anillo de valoración trivial sobre  $k$ .

Sea  $\frac{\xi_i}{\xi_j} \in \Sigma_X$  la función de valor máximo para todo  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ . Se verifica que  $k[\frac{\xi_0}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_j}] \subseteq \mathcal{O}_v$ , porque si  $v(\frac{\xi_r}{\xi_j}) < 0$  para algún  $r$ , entonces  $v(\frac{\xi_i}{\xi_j}) < v(\frac{\xi_i}{\xi_j}) + v(\frac{\xi_j}{\xi_r}) = v(\frac{\xi_i}{\xi_j} \cdot \frac{\xi_j}{\xi_r}) = v(\frac{\xi_i}{\xi_r})$  y llegamos a contradicción. Así pues,  $\mathcal{O}_v$  centra en el punto  $x$ , donde  $\mathfrak{p}_x$  es el corte del ideal de valoración con  $k[\frac{\xi_0}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_j}]$ .

Por último, dado un punto  $y \neq x$ , existe un abierto afín que contiene a  $x$  e  $y$ , luego el anillo de valoración centra en  $x$  y no puede centrar en  $y$ . □

**Proposición 1.6.18.** *Sea  $C$  una curva proyectiva íntegra no singular. Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de  $C$  y las valoraciones de  $\Sigma_C$ , triviales sobre  $k$ .*

*Demostración.* En el teorema 1.6.17 hemos visto que todo anillo de valoración  $k \subset \mathcal{O}_v \subseteq \Sigma_C$  centra en un único punto  $x \in C$ , es decir,  $\mathcal{O}_{C,x} \subseteq \mathcal{O}_v$  (y  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_v$ ). Ahora bien,  $\mathcal{O}_{C,x}$  es un anillo local regular de dimensión 1, o es  $\Sigma_C$ , luego es de valoración. Por tanto, como los anillos de valoración no admiten morfismos dominantes, ha de cumplirse que  $\mathcal{O}_{C,x} = \mathcal{O}_v$ . Ahora fácilmente concluimos.  $\square$

Sea  $k$  un cuerpo y  $\Sigma$  una extensión de cuerpos de  $k$ , de tipo finito de grado de trascendencia 1, es decir, existe un  $t \in \Sigma$  trascendente de modo que  $k(t) \hookrightarrow \Sigma$  es una extensión finita de cuerpos.

**Definición 1.6.19.** Llamaremos variedad de Riemann de  $\Sigma$  al espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$ , donde

1)  $X$  es el conjunto de valoraciones discretas de  $\Sigma$  triviales sobre  $k$ , junto con  $\Sigma$ , dotado de la siguiente topología: los cerrados propios son los subconjuntos finitos de  $X$  que no contienen a la valoración  $\Sigma$  (que será, por tanto, el punto genérico de  $X$ ).

2)  $\mathcal{O}_X$  es el haz de anillos definido por  $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{v \in U} \mathcal{O}_v$ , para cada abierto  $U \subseteq X$ .

**Teorema 1.6.20.** *La variedad de Riemann  $X$  de  $\Sigma$  es una curva completa y no singular sobre  $k$  cuyo cuerpo de funciones es  $\Sigma$ .*

*Demostración.* Sea  $t \in \Sigma$  trascendente. Sea  $U$  el conjunto de anillos de valoración que contienen a  $t$  y  $U'$  el conjunto de anillos de valoración que contienen a  $t^{-1}$ . Se cumple  $X = U \cup U'$ . Sea  $B$  el cierre entero de  $k[t]$  en  $\Sigma$  y  $B'$  el cierre entero de  $k[t^{-1}]$  en  $\Sigma$ .

Se verifica que  $U = \text{Spec } B$  (y por simetría, que  $U' = \text{Spec } B'$ ): En efecto,  $B$  es un anillo íntegramente cerrado en  $\Sigma$ , de dimensión 1 (pues el morfismo  $k[t] \rightarrow B$  es finito) cuyo cuerpo de fracciones coincide con  $\Sigma$  (porque es íntegramente cerrado en  $\Sigma$  y contiene a  $k(t)$ ). Por tanto, dado  $x \in \text{Spec } B$ ,  $B_x$  es un anillo de valoración discreta que contiene a  $t$ . Recíprocamente, dado un anillo de valoración discreta  $\mathcal{O}_v$  que contenga a  $t$ , tendremos que  $B \hookrightarrow \mathcal{O}_v$  (pues  $B$  es la intersección de los anillos de valoración que contienen a  $k[t]$ ). Por tanto, si  $\mathfrak{p}_x = B \cap \mathfrak{p}_v$  (donde  $\mathfrak{p}_v$  es el ideal de valoración de  $\mathcal{O}_v$ ), tendremos que  $B_x = \mathcal{O}_v$ , porque  $B_x$  es de valoración y los anillos de valoración no admiten morfismos dominantes. Por último, observemos que por ser  $B$  un anillo de dimensión 1, la topología de  $\text{Spec } B$  coincide con la de  $U$ .

Se verifica que  $U$  es un abierto de la variedad de Riemann (y por simetría, que  $U'$  es un abierto de la variedad de Riemann): En efecto, los subanillos de valoración de  $\Sigma$  que no contienen a  $t$ , se corresponden con los anillos de valoración cuyo ideal irrelevante contiene a  $t^{-1}$ , es decir con los ideales primos de  $B'$  que contienen a  $(t^{-1})$ , que son un número finito (distintos del punto genérico), porque  $B'$  es de dimensión 1. En conclusión,  $X - U$  es un número finito de anillos de valoración (distintos del punto genérico), luego es un cerrado y  $U$  un abierto.

Observemos que  $\mathcal{O}_X$  restringido a  $U$  (ídem para  $U'$ ) coincide con  $\tilde{B}$ , porque por ser  $B$  íntegro se verifica que  $\tilde{B}(U) = \bigcap_{x \in U} B_x = \mathcal{O}_X(U)$ .

Por último, si  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración, entonces contiene a  $t$  (o a  $t^{-1}$ ), por tanto, contiene a  $B$  (o  $B'$ ) y como hemos visto  $\mathcal{O}_v = B_x$ , donde  $x \in U$  es la valoración correspondiente a  $v$ . En conclusión,  $\mathcal{O}_v$  centra en  $v$ .

Hemos concluido porque la variedad de Riemann es la unión de los dos abiertos  $U, U'$ , que son esquemas afines no singulares de cuerpo de funciones  $\Sigma$  y toda valoración centra en un punto y sólo uno de  $U \cup U'$ .  $\square$

**Ejercicio 1.6.21.** La variedad de Riemann de  $k(x)$  es la recta proyectiva  $\mathbb{P}_1$ .

**Definición 1.6.22.** Un morfismo de esquemas  $f: X \rightarrow Y$  diremos que es un morfismo afín si existe un recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $Y$  por abiertos afines de modo que  $f^{-1}(U_i)$  sean abiertos afines de  $X$ . Diremos además que es finito si los morfismos de anillos  $\mathcal{O}_Y(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_i))$  son finitos.

**Definición 1.6.23.** Un morfismo entre esquemas íntegros diremos que es birracional si el morfismo inducido entre los cuerpos de fracciones es un isomorfismo.

Observemos que el cuerpo de funciones de toda curva íntegra es una extensión de tipo finito de grado de trascendencia 1.

**Teorema 1.6.24.** *Sea  $C$  una curva completa sobre un cuerpo  $k$  y  $\bar{C}$  la variedad de Riemann del cuerpo de funciones  $\Sigma$  de  $C$ . Existe un epimorfismo natural  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$  finito y birracional de esquemas que es isomorfismo si y sólo si  $C$  es no singular.*

*Demostración.* Se define  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$  como sigue:  $\pi(v)$  es el centro en  $C$  de la valoración  $\mathcal{O}_v$ . Sea un abierto afín  $U \subseteq C$  y sea por el lema de normalización de Noether un morfismo finito  $k[t] \rightarrow \mathcal{O}_C(U)$ . Se verifica que  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } B$ , donde  $B$  es el cierre entero de  $k[t]$  (o  $\mathcal{O}_C(U)$ ) en  $\Sigma_C: \text{Spec } B$  se identifica con los anillos de valoración que dominan a  $\mathcal{O}_C(U)$  (o  $k[t]$ ), que se identifica con los anillos de valoración que centran en  $U$ , es decir, con  $\pi^{-1}(U)$ . Si recordamos la construcción de los abiertos afines por los que recubríamos la variedad de Riemann,  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } B$  es un abierto, luego  $\pi$  es continuo. Es claro, además, que el morfismo  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  es el inducido por la inclusión  $\mathcal{O}_C(U) \rightarrow B$ .

Entre los haces de anillos, tenemos las inclusiones naturales  $\mathcal{O}_C(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\bar{C}}(\pi^{-1}(U)) = \bigcap_{v \in \pi^{-1}(U)} \mathcal{O}_v$ .

Tenemos, pues, definido un morfismo de espacios anillados  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$ , que cumple las condiciones del teorema, como se comprueba afínmente con  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ .  $\square$

**Teorema 1.6.25.** *La categoría de las curvas completas no singulares sobre un cuerpo  $k$  (cuyos morfismos no sean constantes), es equivalente (contravariantemente) a la categoría de las extensiones de tipo finito de  $k$  de grado de trascendencia 1.*

*Demostración.* Sea  $F$  el funtor que asigna a cada curva  $C$  su cuerpo de funciones  $\Sigma_C$ . Dado un morfismo  $f: C \rightarrow C'$ , no constante, es decir,  $f$  aplica el punto genérico  $g$  de  $C$ , el punto genérico  $g'$  de  $C'$ , tenemos definido un morfismo  $\Sigma_{C'} = \mathcal{O}_{C',g'} \rightarrow \mathcal{O}_{C,g} = \Sigma_C$ , que por definición será  $F(f)$ . Obviamente,  $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ .

Sea  $G$  el funtor que asigna a cada extensión  $\Sigma$  de grado de trascendencia 1, su variedad de Riemann  $V$ . Dado un morfismo  $i: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ , sea  $G(i): V' \rightarrow V$  el morfismo definido entre las variedades de Riemann de  $\Sigma'$  y  $\Sigma$ , del siguiente modo: Entre los espacios topológicos,  $G(i)(v') \stackrel{\text{def}}{=} v$ , siendo  $\mathcal{O}_v = \Sigma \cap \mathcal{O}_{v'}$ . Dado  $t \in \Sigma$ , sea  $B$  el cierre entero de  $k[t]$  en  $\Sigma$  y  $B'$  el cierre entero de  $B$  (o  $k[t]$ ) en  $\Sigma'$ . Sean  $U = \text{Spec } B$  y  $U' = \text{Spec } B'$ , que son abiertos de  $V$  y  $V'$ . Se cumple que  $G(i)^{-1}(U) = U'$  y que  $G(i)|_{U'}$  el morfismo inducido por la inclusión  $B \hookrightarrow B'$ . Por último, entre los haces de anillos, para cada abierto  $W$ , las inclusiones  $\mathcal{O}_V(W) = \bigcap_{v \in W} \mathcal{O}_v \hookrightarrow \bigcap_{v' \in G(i)^{-1}(W)} \mathcal{O}_{v'}$  inducen un morfismo  $\mathcal{O}_V \rightarrow G(i)_* \mathcal{O}_{V'}$ . De nuevo, el morfismo de espacios anillados definido sobre  $U'$ , es el inducido por el morfismo de anillos  $B \hookrightarrow B'$ .

Para terminar, tenemos que ver que  $G \circ F \simeq \text{Id}$  y  $F \circ G \simeq \text{Id}$ . Efectivamente,  $\theta: C \rightarrow G(F(C)) = \text{Var. de Riemann de } \Sigma_C$ ,  $x \mapsto \mathcal{O}_{C,x}$  y entre los haces de anillos  $\mathcal{O}_V(U) = \bigcap_{v \in U} \mathcal{O}_v = \bigcap_{x \in \theta^{-1}(U)} \mathcal{O}_{C,x} = \mathcal{O}_C(\theta^{-1}(U))$ ; define el isomorfismo  $G \circ F \simeq \text{Id}$ . Por último,  $F \circ G(\Sigma) = \Sigma$ .  $\square$

**Ejercicio 1.6.26.** Dado un morfismo  $\pi: C' \rightarrow C$  entre curvas completas no singulares (no constante), demostrar que el número de puntos de las fibras es constante y coincide con el grado entre los cuerpos de funciones.

*Resolución:* Sea  $x \in C$  y  $U = \text{Spec } A \subset C$  un abierto afín que contenga a  $x$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma_{C'}$ , sabemos que  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } \bar{A}$ , y que  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } \bar{A} \rightarrow U = \text{Spec } A$  es el morfismo inducido  $A \hookrightarrow \bar{A}$ .  $A_x$  es un anillo de ideales principales y  $\bar{A}_x$  es un  $A_x$ -módulo finito sin torsión. Por tanto,  $\bar{A}_x = (A_x)^n$ . Sea  $g$  el punto genérico de  $C$ ,  $\bar{A}_g$  es un  $A_g = \Sigma_C$ -álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo, que ha de ser  $\Sigma_{C'}$ . Si localizamos la igualdad anterior en  $g$  tenemos  $\Sigma_{C'} = \bar{A}_g = (A_g)^n = \Sigma_C^n$ . Ahora ya tenemos

$$\begin{aligned} n \xi \text{ de puntos de } \pi^{-1}(x) &= \dim_{A_x/\mathfrak{m}_x} \bar{A}/\mathfrak{m}_x \bar{A} = (A_x)^n/\mathfrak{m}_x (A_x)^n = \dim_{A_x/\mathfrak{m}_x} (A_x/\mathfrak{m}_x)^n = n \\ &\dim_{\Sigma_C} \Sigma_{C'} = n \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.6.27.** Sea  $\pi: C' \rightarrow C$  un morfismo entre curvas afines no singulares. Demostrar que  $\pi$  es un morfismo finito si y sólo si el número de puntos de las fibras es constante.

**Ejemplo 1.6.28.** Sea  $\Sigma_C$  el cuerpo de funciones de una curva  $C$  completa no singular y  $f \in \Sigma_C$  trascendente. Consideremos el morfismo  $k(x) \hookrightarrow \Sigma_C$ ,  $p(x) \mapsto p(f)$ , que induce un morfismo entre las variedades de Riemann

$$\tilde{f}: C \rightarrow \mathbb{P}_1$$

Si  $k[x] \hookrightarrow \overline{k[x]}$ ,  $x \mapsto f$  es el morfismo de cierre entero, el morfismo inducido en espectros es  $\tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(U)}$ . Sea  $\mathfrak{m}_\alpha \subset \overline{k[x]}$  un ideal maximal racional y  $f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f} \in \overline{k[x]}/\mathfrak{m}_\alpha$ . Es fácil comprobar que  $\mathfrak{m}_\alpha \cap k[x] = (x - f(\alpha))$ . Por tanto,  $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$ . Por otra parte,  $\tilde{f}^{-1}(0) = \text{Spec } \overline{k[x]}/f\overline{k[x]}$ . Por tanto, si  $f\overline{k[x]} = \mathfrak{m}_{x_1}^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_{x_r}^{n_r}$ ,  $\tilde{f}^{-1}(0)$  son los puntos  $x_i$  con multiplicidad  $n_i$  y el número de los puntos de la fibra de 0 es  $\sum_i n_i \text{ gr } x_i$ .

### 1.6.3. Recollement de esquemas

#### Recollement de espacios topológicos

Sea  $X$  un espacio topológico. A veces, para “aprehender”  $X$ , es más fácil definir un recubrimiento  $\{U_i\}$  por abiertos de  $X$  y “aprehender” cada uno de los abiertos  $U_i$ . Por ejemplo, en el estudio de la superficie terrestre, se construyen una colección de mapas locales, llamémoslos  $\{U_i\}$ . Ahora bien, dados dos mapas locales, se están identificando ciertos puntos entre los dos mapas. Además esta identificación ha de estar bien hecha, es decir, si  $x \in U_i$  se identifica con  $x' \in U_j$  y  $x'$  con  $x'' \in U_k$  entonces  $x$  se identifica con  $x''$ . Obviamente si sólo dispusiésemos de los “mapas locales”  $\{U_i\}$ , con las identificaciones entre ellos bien hechas, tendríamos reconstruida la superficie terrestre. Éste va a ser el método de recollement, de construcción de un espacio topológico a partir de unos “datos” locales.

**Definición 1.6.29.** Unos datos de construcción consisten en una familia  $\{X_i\}$  de espacios topológicos, para cada  $X_i$  un recubrimiento  $X_i = \bigcup_j X_{ij}$  por abiertos, y una familia de homeomorfismos  $\theta_{ij}: X_{ij} \rightarrow X_{ji}$  tales que

1.  $\theta_{ij} = \theta_{ji}^{-1}$  y  $\theta_{ii} = \text{Id}$ .

2.  $\theta_{ij|X_{ij} \cap X_{ik}} : X_{ij} \cap X_{ik} \simeq X_{ji} \cap X_{jk}$  y se verifica un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_{ij} \cap X_{ik} & \xrightarrow{\theta_{ij}} & X_{ji} \cap X_{jk} \\ & \searrow \theta_{ik} & \swarrow \theta_{jk} \\ & X_{kj} \cap X_{ki} & \end{array}$$

para cualesquiera  $i, j, k$ . Es decir, se cumple la condición de “cociclo”  $\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = \theta_{ik}$ .<sup>3</sup>

**Definición 1.6.30.** Unos datos de construcción se dicen que son efectivos si existe un espacio topológico  $X$ , un recubrimiento por abiertos  $X = \cup_i U_i$  y unos homeomorfismos  $g_i : U_i \simeq X_i$  de modo que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{g_i|_{U_i \cap U_j}} & X_{ij} \\ \parallel & g_j|_{U_j \cap U_i} & \downarrow \theta_{ij} \\ U_j \cap U_i & \xrightarrow{\sim} & X_{ji} \end{array}$$

son conmutativos. Se dirá que  $X$  es un descenso de los datos de construcción.

**Teorema 1.6.31.** *Todo dato de construcción es efectivo y los descensos son únicos salvo isomorfismos.*

*Demostración.* Sea  $\{X_i, \theta_{ij}\}$  unos datos de construcción. Consideremos en  $\coprod_i X_i$  la relación  $\sim$ : dados  $x_i \in X_i$  y  $x_j \in X_j$  entonces  $x_i \sim x_j$  si  $x_j = \theta_{ij}(x_i)$ . La relación  $\sim$  es de equivalencia porque el dato de construcción cumple la condición de cociclo.

Sea pues  $\coprod_i X_i \rightarrow \coprod_i X_i / \sim$  el morfismo de paso al cociente y consideremos en  $\coprod_i X_i / \sim$  la topología cociente. Es fácil comprobar que los morfismos naturales  $X_i \rightarrow \coprod_i X_i / \sim$  son inmersiones abiertas, denotemos  $\bar{X}_i$  el abierto imagen de  $X_i$ . Es fácil comprobar que  $\bar{X}_i \cap \bar{X}_j$  es la imagen precisamente de  $X_{ij}$  y que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_{ij} & \xrightarrow{\sim} & \bar{X}_i \cap \bar{X}_j \\ \downarrow \theta_{ij} & & \parallel \\ X_{ji} & \xrightarrow{\sim} & \bar{X}_j \cap \bar{X}_i \end{array}$$

Luego  $\coprod_i X_i / \sim$  es un descenso y el dato de construcción es efectivo.

Sea  $X = \cup_i U_i$  otro descenso, con homeomorfismos  $g_i : U_i \simeq X_i$ , verificando los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{g_i|_{U_i \cap U_j}} & X_{ij} \\ \parallel & g_j|_{U_j \cap U_i} & \downarrow \theta_{ij} \\ U_j \cap U_i & \xrightarrow{\sim} & X_{ji} \end{array}$$

<sup>3</sup>Puede comprobarse que esta segunda condición implica la primera.

La composición  $\bar{g}_i$  de morfismos  $U_i \xrightarrow{g_i} X_i \simeq \bar{X}_i$  verifican el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{g_i|_{U_i \cap U_j}} & X_{ij} & \xrightarrow{\sim} & \bar{X}_i \cap \bar{X}_j \\ \parallel & & \downarrow \theta_{ij} & & \parallel \\ U_j \cap U_i & \xrightarrow{g_j|_{U_j \cap U_i}} & X_{ji} & \xrightarrow{\sim} & \bar{X}_j \cap \bar{X}_i \end{array}$$

Luego los homeomorfismos  $\bar{g}_i$  coinciden sobre las intersecciones, luego definen un homeomorfismo global  $\bar{g}: X \rightarrow \coprod_i X_i / \sim$ . □

### Recollement de esquemas

El recollement de haces puede ser entendido esencialmente como un caso particular del recollement de espacios topológicos, sin más que considerar, en vez de los haces, los espacios etale asociados. Puede verse después que en la categoría de los haces el recollement “deja estable” las subcategorías de los espacios anillados, y la de esquemas. Podríamos así desarrollar esta sección. Sin embargo, conviene para la comprensión de la teoría del descenso fielmente plano, más adelante estudiada, proceder de otro modo, igualmente natural.

**Definición 1.6.32.** Unos datos de construcción, en la categoría de esquemas, es una familia  $\{X_i, \mathcal{O}_{X_i}\}$  de esquemas, para cada  $X_i$  un recubrimiento  $X_i = \cup_j X_{ij}$  por abiertos, y una familia de isomorfismos  $\theta_{ij}: X_{ij} \rightarrow X_{ji}$  de esquemas tales que

1.  $\theta_{ij} = \theta_{ji}^{-1}$  y  $\theta_{ii} = \text{Id}$ .
2.  $\theta_{ij}|_{X_{ij} \cap X_{ik}}: X_{ij} \cap X_{ik} \simeq X_{ji} \cap X_{jk}$  y se verifica un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_{ij} \cap X_{ik} & \xrightarrow{\theta_{ij}} & X_{ji} \cap X_{jk} \\ & \searrow \theta_{ik} & \swarrow \theta_{jk} \\ & X_{kj} \cap X_{ki} & \end{array}$$

para cualesquiera  $i, j, k$ . Es decir, se cumple la condición de “cociclo”  $\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = \theta_{ik}$ . Observemos, que de hecho, la condición 1. es consecuencia de la condición 2.

**Definición 1.6.33.** Unos datos de construcción se dicen que son efectivos si existe un esquema  $X$ , un recubrimiento por abiertos  $X = \cup_i U_i$  y unos isomorfismos  $g_i: U_i \simeq X_i$  de esquemas de modo que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{g_i|_{U_i \cap U_j}} & X_{ij} \\ \parallel & & \downarrow \theta_{ij} \\ U_j \cap U_i & \xrightarrow{g_j|_{U_j \cap U_i}} & X_{ji} \end{array}$$

son conmutativos. Se dirá que  $X$  es un descenso de los datos de construcción.

**Teorema 1.6.34.** *Todo dato de construcción es efectivo y los descensos son únicos salvo isomorfismos de esquemas.*

*Demostración.* Por la sección anterior, podemos suponer a nivel topológico, que los  $X_i$  son abiertos del espacio topológico  $X = \coprod_i X_i / \sim$ , de modo que  $X_{ij} = X_i \cap X_j$  y los morfismos  $\theta_{ij}$  a nivel del espacio topológico son los morfismos identidad.

Es decir, tenemos un espacio topológico  $X$ , un recubrimiento  $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$  de  $X$  por abiertos que son esquemas e isomorfismos  $\theta_{ij}: \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \simeq \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i}$  verificando la condición de cociclo  $\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = \theta_{ik}$ . Tenemos que ver que existe un haz  $\mathcal{O}_X$  de anillos, e isomorfismos  $g_i: \mathcal{O}_X|_{X_i} \simeq \mathcal{O}_{X_i}$  de modo que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X|_{X_i \cap X_j} & \xrightarrow{\sim}^{g_i|_{X_i \cap X_j}} & \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \\ \parallel & & \downarrow \theta_{ij} \\ \mathcal{O}_X|_{X_j \cap X_i} & \xrightarrow{\sim}^{g_j|_{X_j \cap X_i}} & \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i} \end{array}$$

son conmutativos.

Sea  $i: X_i \rightarrow X$  la inmersión natural y sigamos denotando  $\mathcal{O}_{X_i} = i_* \mathcal{O}_{X_i}$ , es decir  $\mathcal{O}_{X_i}(V) = \mathcal{O}_{X_i}(V \cap X_i)$ . Igualmente denotemos  $\mathcal{O}_{X_i \cap X_j}$  el haz sobre  $X$  definido por  $\mathcal{O}_{X_i \cap X_j}(V) = \mathcal{O}_{X_i}(V \cap X_i \cap X_j)$ . Tenemos dos morfismos

$$\prod_i \mathcal{O}_{X_i} \xrightarrow[\theta \circ d_2]{d_1} \prod_{i,j} \mathcal{O}_{X_i \cap X_j}$$

definidos por  $d_1(s_i) = (s_i|_{X_i \cap X_j})_{i,j}$  y  $\theta \circ d_2(s_i) = (\theta_{ji}(s_j|_{X_j \cap X_i}))_{i,j}$ . Definimos  $\mathcal{O}_X$  como el núcleo de estas dos flechas, es decir, como el haz cuyas secciones son las secciones locales sobre los  $X_i$ , que coinciden (a través de las identificaciones  $\theta_{ij}: \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \simeq \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i}$ ) sobre las intersecciones. Dejamos al lector la rutina de probar que existen isomorfismos naturales  $g_i: \mathcal{O}_X|_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$  y que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X|_{X_i \cap X_j} & \xrightarrow{\sim}^{g_i|_{X_i \cap X_j}} & \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \\ \parallel & & \downarrow \theta_{ij} \\ \mathcal{O}_X|_{X_j \cap X_i} & \xrightarrow{\sim}^{g_j|_{X_j \cap X_i}} & \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i} \end{array}$$

son conmutativos.

Veamos la unicidad, salvo isomorfismos de  $\mathcal{O}_X$ . Sea otro haz de anillos  $\mathcal{O}'_X$  sobre  $X$ , e isomorfismos  $g'_i: \mathcal{O}'_X|_{X_i} \simeq \mathcal{O}_{X_i}$  de modo que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}'_X|_{X_i \cap X_j} & \xrightarrow{\sim}^{g'_i|_{X_i \cap X_j}} & \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \\ \parallel & & \downarrow \theta_{ij} \\ \mathcal{O}'_X|_{X_j \cap X_i} & \xrightarrow{\sim}^{g'_j|_{X_j \cap X_i}} & \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i} \end{array}$$

son conmutativos.

Por tanto tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}'_{X|X_i \cap X_j} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X|X_i \cap X_j} \\
\parallel & & \downarrow \theta_{ij} & & \parallel \\
\mathcal{O}'_{X|X_j \cap X_i} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X|X_j \cap X_i}
\end{array}$$

Por tanto, los isomorfismos  $g_i^{-1} \circ g'_i: \mathcal{O}'_{X|X_i \cap X_j} \simeq \mathcal{O}_{X|X_i \cap X_j}$  coinciden sobre las intersecciones, luego existe un isomorfismo global  $\mathcal{O}'_X \simeq \mathcal{O}_X$ .  $\square$

**Ejemplo 1.6.35.** Podemos construir  $\mathbb{P}_n$  como un recollement de esquemas. Sean  $X_i = \text{Spec } k[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$ . Sean  $X_{ij} = X_i - (\frac{x_j}{x_i})_0 = \text{Spec } k[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]_{\frac{x_j}{x_i}}$ , recubrimientos de cada  $X_i$ . Sea  $\theta_{ij}: X_{ij} \rightarrow X_{ji}$  el morfismo inducido por el morfismo de anillos

$$k[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}]_{\frac{x_i}{x_j}} \rightarrow k[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]_{\frac{x_j}{x_i}}, \quad \frac{x_k}{x_j} \mapsto \frac{x_k}{x_i} \frac{x_i}{x_j}$$

Pues bien, los  $\theta_{ij}$  cumplen la condición de cociclo y el recollement de los  $X_i$  es  $\mathbb{P}_n$ .

**Ejemplo 1.6.36.** El producto de esquemas. Sean  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f': X' \rightarrow Y$  morfismos de esquemas, queremos construir mediante recollement  $X \times_Y X'$ . Por definición,  $X \times_Y X'$  es un esquema sobre  $Y$ , con un par de  $Y$ -morfismos  $\pi_1: X \times_Y X' \rightarrow X$  y  $\pi_2: X \times_Y X' \rightarrow X'$ , de modo que

$$\text{Hom}_Y(Z, X \times_Y X') = \text{Hom}_Y(Z, X) \times \text{Hom}_Y(Z, X'), \quad f \mapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$$

Dado que el representante de un funtor es único, es decir, si existe otro representante, es isomorfo de modo único con el primero, tendremos que  $X \times_Y X'$  así definido es único, si existe.

Si  $X = \text{Spec } B$ ,  $X' = \text{Spec } B'$  e  $Y = \text{Spec } A$  son esquemas afines tenemos que  $X \times_Y X' \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}(B \otimes_A B')$ , porque

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_Y(Z, X \times_Y X') &= \text{Hom}_A(B \otimes_A B', \mathcal{O}_Z(Z)) = \text{Hom}_A(B, \mathcal{O}_Z(Z)) \times \text{Hom}_A(B', \mathcal{O}_Z(Z)) \\
&= \text{Hom}_Y(Z, X) \times \text{Hom}_Y(Z, X')
\end{aligned}$$

Sea  $V = \text{Spec } A \subset Y$  un abierto afín. Sean  $U = \text{Spec } B \subset X$  y  $U' = \text{Spec } B' \subset X'$  abiertos afines tales que  $\pi_1(U) \subseteq V$  y  $\pi_2(U') \subseteq V$ . Se cumple que  $U \times_Y U' = U \times_V U' = \text{Spec}(B \otimes_A B')$

En general, dado  $X \times_Y X'$  y abiertos  $U \subseteq X$ ,  $U' \subseteq X'$  se cumple que  $U \times_Y U' = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(U')$ .

Sea  $\{V_i\}$  un recubrimiento por abiertos afines de  $Y$ ,  $\{U_{ij}\}$  un recubrimiento por abiertos afines de  $\pi_1^{-1}(V_i)$ ,  $\{U'_{ik}\}$  un recubrimiento por abiertos afines de  $\pi_2^{-1}(V_i)$ . Sea  $X_{ijk} = U_{ij} \times_Y U'_{ik}$ ,  $\pi_{1ijk}$  la composición de la proyección de  $X_{ijk}$  en  $U_{ij}$ , con la inclusión  $U_{ij} \hookrightarrow X$ , y  $\pi_{2ijk}$  la composición de la proyección de  $X_{ijk}$  en  $U'_{ik}$ , con la inclusión  $U'_{ik} \hookrightarrow X'$ . Sea  $X_{ijk, i'j'k'} := X_{ijk}|_{\pi_{1ijk}^{-1}(U_{ij} \cap U_{i'j'})} \cap \pi_{2ijk}^{-1}(U'_{ik} \cap U'_{i'k'})$ .

Entonces,

Tenemos

$$X_{ijk, i'j'k'} = (U_{ij} \cap U_{i'j'}) \times_Y (U'_{ik} \cap U'_{i'k'}) = X_{i'j'k', ijk}$$

Por recollement, obtenemos un esquema que resulta ser  $X \times_Y X'$ .

## 1.7. Problemas

1. Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un esquema. Sea  $\mathcal{O}_{X,\text{red}}$  el prehaz de anillos sobre  $X$  definido por  $\mathcal{O}_{X,\text{red}}(U) = \mathcal{O}_X(U)/\text{Rad}(\mathcal{O}_X(U))$ . Probar que  $(X, \mathcal{O}_{X,\text{red}})$  es un esquema.
2. Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado,  $\text{Aut}(X)$  el grupo de los automorfismos de espacio anillados globales de  $X$  y  $G$  un subgrupo de  $\text{Aut}(X)$ . Sea  $X/G$  el espacio topológico cociente de  $X$  por la relación de equivalencia definida por  $G$  en  $X$ . Sea  $\pi: X \rightarrow X/G$  el morfismo de paso al cociente y  $\mathcal{O}_{X/G}$  el prehaz definido por  $\mathcal{O}_{X/G}(U) = \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G = \{s \in \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)), \text{tales que } gs = s, \text{ para todo } g \in G\}$ .
  - a) Probar que  $(X/G, \mathcal{O}_{X/G})$  es un espacio anillado.
  - b) Supongamos  $(X, \mathcal{O}_X) = (\text{Spec } A, \tilde{A})$  y que  $G$  es un grupo finito probar que  $(X/G, \mathcal{O}_{X/G}) = (\text{Spec } A^G, \tilde{A^G})$ .
  - c) Si  $G$  es finito y  $X$  es una variedad algebraica afín, probar que  $X/G$  también lo es.
3. Probar que  $C$  es un cerrado irreducible de un esquema si y sólo si existe un único punto  $x \in C$ , tal que  $\bar{x} = C$ .
4. Probar que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(k)}(\mathbb{P}_n(k)) = k$ . Probar que  $\mathbb{P}_n(k)$  no es un esquema afín.
5. Sea  $X = \mathbb{A}_2(k) - \{(0, 0)\}$ . Probar que  $\mathcal{O}_X(X) = k[x, y]$ . Probar que  $X$  no es un esquema afín.
6. Sea  $X = \mathbb{A}_3(k) - (x, y)_0$  no es un esquema afín.
7. Probar  $\text{Hom}_{\text{esq}}(Z, \text{Spec } A) = \text{Hom}_{\text{álg}}(A, \mathcal{O}_Z(Z))$ .
8. Se dice que un punto  $x$  de una  $k$ -variedad algebraica es racional si  $k = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}_x$ . Probar que si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo entre  $k$ -variedades algebraicas, entonces  $f$  aplica puntos racionales en puntos racionales. Probar que  $f$  aplica puntos cerrados en puntos cerrados.
9. Definir el morfismo de esquemas  $\mathbb{A}_3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_2$ , que sobre los puntos racionales aplica  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  en  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ .
10. Probar que una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es isomorfa a la recta proyectiva si y sólo si existe un función con un único polo en un punto, de orden 1.
11. Probar que toda curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es birracional a una curva plana.



## Capítulo 2

# Módulos cuasicoherentes y coherentes

### 2.1. Haces cuasicoherentes sobre un espacio anillado

En el capítulo anterior, hemos definido los esquemas como aquellas estructuras que localmente son  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$ . Anteriormente, hemos definido y estudiado los  $A$ -módulos. El objetivo principal de este capítulo es la definición en la categoría de esquemas del concepto de módulo, es decir, de haz de módulos cuasicoherentes.

Posteriormente estudiaremos los módulos en los esquemas proyectivos. Acabaremos con el estudio de los haces de línea, y demostraremos el teorema de Bézout.

**Definición 2.1.1.** Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado y  $\mathcal{M}$  un haz, diremos que es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo si para cada abierto  $U \subseteq X$   $\mathcal{M}(U)$  es un  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo y estas estructuras son compatibles con los morfismos de restricción.

**Ejemplo 2.1.2.** Sea  $(X, C_X^\infty)$  una variedad diferenciable y  $Der_X$  el prehaz que definido por  $Der_X(U) = \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_X^\infty(U))$ . Se cumple que  $Der_X$  es un haz de  $C_X^\infty$ -módulos.

Del mismo modo se definen los haces de  $C_X^\infty$ -módulos de  $r$ -formas diferenciales, etc.

Sea  $X$  es un espacio topológico,  $\mathcal{O}_X$  un prehaz de anillos y  $\mathcal{M}$  un prehaz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Si denotamos con  $\tilde{\phantom{x}}$  los hacificados, se cumple  $\tilde{\mathcal{M}}$  es un haz de  $\tilde{\mathcal{O}}_X$ -módulos: En efecto, consideremos los morfismos  $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \xrightarrow{\pm} \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{O}_X \times \mathcal{M} \xrightarrow{\pm} \mathcal{M}$  que dotan a  $\mathcal{M}$  de estructura de  $\mathcal{O}_X$ -módulo. Hacificando, obtenemos los morfismos  $\tilde{\mathcal{M}} \times \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\pm} \tilde{\mathcal{M}}$ ,  $\tilde{\mathcal{O}}_X \times \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\pm} \tilde{\mathcal{M}}$ , que cumplen las condiciones que dotan a  $\tilde{\mathcal{M}}$  de estructura de  $\tilde{\mathcal{O}}_X$ -módulo (como se comprueba en fibras).

Sean  $P$  y  $P'$  dos prehaces en un espacio topológico  $X$ . Se define el prehaz de homomorfismos de  $P$  en  $P'$ , que denotaremos  $Hom_X(P, P')$ , como el prehaz

$$Hom_X(P, P')(U) = Hom_U(P|_U, P'|_U)$$

Si  $P$  y  $P'$  son haces se puede comprobar que  $Hom_X(P, P')$  es un haz. Igualmente, si  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$  son haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, se define el haz de los morfismos de  $\mathcal{O}_X$ -módulos de  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{M}'$ , que denotaremos  $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ , como el haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')(U) = Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{M}'|_U)$$

Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, se define el producto tensorial de  $\mathcal{M}$  por  $\mathcal{M}'$ , que denotaremos  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}'$  como el haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}'(U)$$

**Ejercicio 2.1.3.** Sean  $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{M}''$  haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Probar que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}', \mathcal{M}'') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}', \mathcal{M}''))$$

**Ejercicio 2.1.4.** Sean  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$  haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos y  $x \in X$ . Probar que

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}')_x = \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}'_x$$

Sean  $P_i$  un sistema inductivo de prehaces. Se define el límite inductivo de los prehaces  $P_i$ , que denotaremos  $\varinjlim P_i$ , como el prehaz

$$U \rightsquigarrow \varinjlim [P_i(U)]$$

que resulta ser el límite inductivo de los prehaces en la categoría de prehaces. Si los  $P_i$  son haces y  $X$  es un espacio topológico noetheriano, entonces  $\varinjlim P_i$  es haz: Como todo abierto de un espacio noetheriano es compacto, todo recubrimiento por abiertos de un abierto de  $X$  contiene un subrecubrimiento finito. Así, un prehaz  $F$  sobre  $X$  será haz si verifica que para todo abierto  $U$  y recubrimiento finito por abiertos  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ , la sucesión

$$F(U) \rightarrow \prod_{i=1}^n F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

es exacta. Como las sucesiones

$$P_m(U) \rightarrow \prod_{i=1}^n P_m(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} P_m(U_i \cap U_j)$$

son exactas y la toma de límites inductivos es exacta entonces la sucesión

$$\varinjlim P_m(U) \rightarrow \prod_{i=1}^n \varinjlim P_m(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \varinjlim P_m(U_i \cap U_j)$$

es exacta y  $\varinjlim P_m$  es un haz.

Si además, los  $P_m$  son  $\mathcal{O}_X$ -módulos,  $\varinjlim P_m$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo.

En fin, dejamos ya que el lector defina  $\oplus \mathcal{M}_i, \prod \mathcal{M}_i$  de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\mathcal{M}_i$ .

**Definición 2.1.5.** Sea  $(\mathrm{Spec} A, \tilde{A})$  un esquema afín y  $M$  un  $A$ -módulo. Llamaremos haz de localizaciones de  $M$ , que denotaremos por  $\tilde{M}$ , al haz de  $\tilde{A}$ -módulos asociado al prehaz sobre  $\mathrm{Spec} A$

$$U \rightsquigarrow M_U \stackrel{def}{=} M_S \quad S = \left\{ \begin{array}{l} \text{sistema multiplicativo de las funciones} \\ \text{de } A \text{ que no se anulan en } U \end{array} \right\}$$

**Proposición 2.1.6.** *Sea  $x \in \text{Spec } A$ , entonces  $\tilde{M}_x = M_x$ .*

*Demostración.* Es consecuencia de 1.3.1.  $\square$

**Proposición 2.1.7.** *Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín y  $M$  un  $A$ -módulo. Se verifica para todo abierto básico  $U_a$  que  $\Gamma(U_a, \tilde{M}) = M_a$ . En particular,  $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$ .*

*Demostración.* Se argumenta como en 1.4.9 y 1.4.10.  $\square$

Nuestro objetivo ahora, es probar que si un haz de  $\tilde{A}$ -módulos localmente es la localización de un módulo, entonces lo es globalmente. El concepto de haces que son localizaciones en abiertos de un módulo, será un concepto local, luego definible en esquemas. Con precisión demos la definición y el teorema siguientes.

**Definición 2.1.8.** Se dice que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo,  $\mathcal{M}$ , es cuasicoherente, si existe un recubrimiento por abiertos afines  $\{U_i\}$  de  $X$  de modo que  $\mathcal{M}|_{U_i} = \widetilde{\mathcal{M}(U_i)}$  (recuérdese 2.1.7).

**Teorema 2.1.9.** *Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín. Si  $\mathcal{M}$  es un haz cuasicoherente entonces*

$$\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}(X)}.$$

*Por tanto, la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos cuasicoherentes es equivalente a la categoría de  $A$ -módulos. Luego,  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{Hom}_A(\Gamma(X, \mathcal{M}), \Gamma(X, \mathcal{N}))$ .*

*Demostración.* Dada  $f \in A$ ,  $f$  es invertible en  $U_f$ , por tanto, el morfismo de restricción  $\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(U_f)$  define localizando por  $f$  un morfismo  $\mathcal{M}(X)_f \rightarrow \mathcal{M}(U_f)$ . En conclusión, tenemos un morfismo natural  $\Gamma(\widetilde{\mathcal{M}(X)}) \rightarrow \mathcal{M}$ . Veamos que es isomorfismo.

Sea  $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$  un recubrimiento de  $X$  por abiertos básicos, tales que  $\mathcal{M}|_{U_i} = \widetilde{\mathcal{M}(U_i)}$ .

Consideremos la sucesión exacta

$$\Gamma(X, \mathcal{M}) \rightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{M}) \rightrightarrows \bigoplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{M})$$

Sea  $U_f$  un abierto básico. Localicemos por  $f$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{M})_f \rightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{M})_f & \rightrightarrows & \bigoplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{M})_f \\ \parallel \text{por } * & & \parallel \text{por } * \\ \Gamma(U_f, \mathcal{M}) \rightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_i \cap U_f, \mathcal{M}) & \rightrightarrows & \bigoplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_f, \mathcal{M}) \end{array}$$

De esta sucesión exacta obtenemos que  $\Gamma(X, \mathcal{M})_f = \Gamma(U_f, \mathcal{M})$ . Por tanto,  $\mathcal{M}$  coincide con  $\Gamma(\widetilde{\mathcal{M}(X)})$  en abiertos básicos  $U_f$  luego  $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}(X)}$ .

Lo demás al lector.  $\square$

**Corolario 2.1.10.** *Sobre un esquema afín  $X = \text{Spec } A$  el producto tensorial y el límite inductivo de módulos cuasicoherentes es cuasicoherente y estas operaciones conmutan con la toma de secciones globales, es decir,*

$$\Gamma(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) = \Gamma(X, \mathcal{M}) \otimes_A \Gamma(X, \mathcal{N}), \quad \Gamma(X, \varinjlim_i \mathcal{M}_i) = \varinjlim_i \Gamma(X, \mathcal{M}_i)$$

*Demostración.* El prehaz de localizaciones en abiertos de  $\text{Spec } A$  de  $M \otimes_A N$  es el producto tensorial de los prehaces de localizaciones en abiertos de  $\text{Spec } A$  de  $M$  y  $N$ , porque  $(M \otimes_A N)_S = M_S \otimes_{A_S} N_S$ . Por tanto, el producto tensorial de módulos cuasicoherentes es cuasicoherente. Además,  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{M}(X) \otimes_A \mathcal{N}(X)}$ . Por el teorema 2.1.9

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})(X) = \mathcal{M}(X) \otimes_A \mathcal{N}(X)$$

Argumentétese igual con el límite inductivo. □

**Corolario 2.1.11.** *Sobre un esquema afín  $X = \text{Spec } A$ , la sucesión de módulos cuasicoherentes  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}'') \rightarrow 0$  es exacta.*

*Demostración.*  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  es exacta  $\iff 0 \rightarrow \mathcal{M}'_x \rightarrow \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{M}''_x \rightarrow 0$  es exacta, para todo  $x \in X \iff 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}')_x \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M})_x \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}'')_x \rightarrow 0$  es exacta, para todo  $x \in X \iff 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}'') \rightarrow 0$  es exacta. □

**Ejercicio 2.1.12.** Sea  $X$  un esquema y  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ . Denotemos  $X_{f_i}$  por el abierto de  $X$  formado por los puntos de  $X$  donde  $f_i$  no se anula. Supongamos que  $(f_1, \dots, f_n) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  y que los  $X_{f_i}$  son esquemas afines. Probar que  $X$  es un esquema afín. (Cópiese el método de demostración de 2.1.9)

**Ejercicio 2.1.13.** Demuéstrese que toda curva afín menos un número finito de puntos cerrados es afín.

**Ejercicio 2.1.14.** Demuéstrese que si un morfismo de esquemas es afín la anti-imagen de todo abierto afín es afín. (Utilícese el ejercicio 2.1.12)

**Proposición 2.1.15.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo afín de esquemas. Si  $\mathcal{M}$  es un módulo cuasicoherente en  $X$  entonces  $f_*\mathcal{M}$  es un módulo cuasicoherente en  $Y$ .*

*Demostración.* El problema es local en  $Y$  y observemos que  $(f_*\mathcal{M})|_U = (f|_{f^{-1}(U)})_*\mathcal{M}|_{f^{-1}(U)}$ . Por tanto, podemos que  $X = \text{Spec } B$  e  $Y = \text{Spec } A$  son afines y  $\mathcal{M} = \tilde{M}$ . Dejamos que el lector compruebe que  $f_*\tilde{M} = \tilde{M}$ , entendido ahora como haz de localizaciones en  $Y$  (es decir, consideramos el  $B$ -módulo  $M$  como  $A$ -módulo). □

**Proposición 2.1.16.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas. Sea  $\mathcal{M}$  un módulo cuasicoherente en  $Y$ . Sea  $f^*\mathcal{M}$  el haz asociado al prehaz*

$$U \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{V' \supset f(U)} \mathcal{M}(V') \otimes_{\mathcal{O}_Y(V')} \mathcal{O}_X(U)$$

Si  $U = \text{Spec } B \subset X$  y  $V = \text{Spec } A \subset Y$  son abiertos afines tales que  $f(U) \subset V$  entonces  $(f^*\mathcal{M})|_U = \widetilde{\mathcal{M}(U) \otimes_A B}$ . Por tanto,  $f^*\mathcal{M}$  es un módulo cuasicoherente.

*Demostración.* Sea  $V' \subset V = \text{Spec } A$  tal que  $f(U) \subset V'$ . Veamos que  $\mathcal{M}(V') \otimes_{\mathcal{O}_Y(V')} B = \mathcal{M}(V) \otimes_A B$ : Tenemos que ver que el morfismo de  $B$ -módulos  $\mathcal{M}(V) \otimes_A B \rightarrow \mathcal{M}(V') \otimes_{\mathcal{O}_Y(V')} B$  es isomorfismo. Lo cual basta verlo localmente. Para todo  $x \in \text{Spec } B$ ,

$$(\mathcal{M}(V) \otimes_A B)_x = \mathcal{M}(V) \otimes_A B_x = \mathcal{M}(V)_y \otimes_{A_y} B_x$$

donde  $y = f(x)$ . E igualmente

$$(\mathcal{M}(V') \otimes_{\mathcal{O}_Y(V')} B)_x = \mathcal{M}(V')_y \otimes_{\mathcal{O}_Y(V')_y} B_x$$

Basta ver, pues, que  $\mathcal{M}(V)_y = \mathcal{M}(V')_y$ . El germen de  $\mathcal{M}$  en  $y$  es  $\mathcal{M}(V)_y$ . Tenemos, pues, los morfismos  $\mathcal{M}(V)_y \rightarrow \mathcal{M}(V')_y \rightarrow \mathcal{M}(V)_y$ . Entonces  $\mathcal{M}(V')_y \rightarrow \mathcal{M}(V)_y$  es epiyectivo. Veamos la inyección: si el germen de  $m \in \mathcal{M}(V')$  en  $y$  es cero entonces en cierto abierto básico  $U_a = \text{Spec } A_a$  que contiene a  $y$  la sección  $m$  es nula. Luego el soporte de  $m$  está incluido  $(a)_0$  luego para cierta  $n$ ,  $a^n \cdot m = 0$ , luego  $m$  en  $\mathcal{M}(V')_y$  es nula.

Por tanto,  $P(U) = \varinjlim_{V' \supset f(U)} \mathcal{M}(V') \otimes_{\mathcal{O}_Y(V')} \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{M}(V) \otimes_A B$ . Igualmente  $P(U_b) = \mathcal{M}(V) \otimes_A B_b = (\mathcal{M}(V) \otimes_A B)_b$ . Es decir,  $P$  en  $U$  coincide sobre los abiertos básicos con el prehaz de localizaciones de  $\mathcal{M}(V) \otimes_A B$ . Luego  $(f^* \mathcal{M})|_U = \widehat{\mathcal{M}(U)} \otimes_A B$ .  $\square$

### 2.1.1. Haces coherentes

**Definición 2.1.17.** Diremos que un esquema  $X$  es noetheriano si existe un recubrimiento abierto finito  $\{U_i = \text{Spec } A_i\}$  de  $X$ , con  $A_i$  noetherianos.

Observemos que los esquemas noetherianos son espacios topológicos noetherianos.

**Proposición 2.1.18.**  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$  es noetheriano si y sólo si  $A$  es un anillo noetheriano.

*Demostración.* Veamos que si  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$  es noetheriano entonces  $A$  es un anillo noetheriano.

Existe un recubrimiento abierto finito  $\{U_i = \text{Spec } A_i\}$  de  $\text{Spec } A$ , con  $A_i$  noetherianos. Sea una cadena  $I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$  de ideales de  $A$ . La restricción de esta cadena de ideales a los abiertos  $U_i$ , define una cadena de ideales de  $A_i$ , que estabiliza a partir de un  $n_i$ . Si  $n$  es el máximo de los  $n_i$ , para todo  $i$ , tenemos que la cadena de ideales de partida estabiliza a partir de  $n$ , porque así sucede localmente. En conclusión,  $A$  es noetheriano.  $\square$

A partir de ahora, por sencillez, supondremos que los esquemas considerados son noetherianos.

**Definición 2.1.19.** Sea  $X$  un esquema noetheriano. Diremos que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{M}$  es coherente si existe un recubrimiento por abiertos afines  $\{U_i\}$  de  $X$  de modo que  $\mathcal{M}|_{U_i} = \widehat{\mathcal{M}(U_i)}$  y  $\mathcal{M}(U_i)$  es un  $\mathcal{O}_X(U_i)$ -módulo finito generado.

**Teorema 2.1.20.** Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín. La categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos coherentes es equivalente a la categoría de  $A$ -módulos finito generados.

*Demostración.* Por el teorema 2.1.9, dado un módulo  $\mathcal{M}$  coherente, sólo nos falta probar que  $\Gamma(X, \mathcal{M})$  es un  $A$ -módulo finito generado. Sea  $\{U_{a_i}\}$  un recubrimiento finito de  $\text{Spec } A$  por abiertos básicos, de modo que  $\Gamma(U_{a_i}, \mathcal{M}) = \Gamma(X, \mathcal{M})_{a_i}$  es un  $A_{a_i}$ -módulo finito generado. Escribamos

$$\Gamma(X, \mathcal{M})_{a_i} = \left\langle \frac{m_{i,1}}{1}, \dots, \frac{m_{i,n_i}}{1} \right\rangle_{A_{a_i} \text{-mod}}$$

con  $m_{i,j} \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ . Sea  $M = \langle m_{i,j} \rangle_{i,j} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M})$ . Se verifica que  $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$ , pues las inclusiones  $M_{a_i} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M})_{a_i}$  son epiyectivas.  $\square$

Sea  $M$  es un  $A$ -módulo de presentación finita (es decir, si  $A$  es noetheriano,  $M$  es un módulo finito). Sea  $S \subseteq A$  un sistema multiplicativo. Sabemos que  $\text{Hom}_A(M, N)_S = \text{Hom}(M_S, N_S)$ . Por tanto, por 2.1.9, si  $X$  es un esquema noetheriano,  $\mathcal{M}$  un módulo coherente y  $\mathcal{N}$  un módulo cuasicoherente entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  es un módulo cuasicoherente.

**Corolario 2.1.21.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano. Se verifica que:*

*Los núcleos y conúcleos de un morfismo entre haces coherentes (resp. cuasicoherentes) es coherente (resp. cuasicoherente).*

*Si  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  son coherentes, entonces  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  son coherentes.*

*Demostración.* Podemos suponer que  $X = \text{Spec } A$  es afín y  $\mathcal{M} = M, \mathcal{N} = N$  son  $A$ -módulos finitos. Obviamente  $M \otimes_A N$  es un  $A$ -módulo finito generado. Sea un epimorfismo  $A^n \rightarrow M$ , entonces tenemos una inyección  $\text{Hom}_A(M, N) \hookrightarrow \text{Hom}_A(A^n, N) = N^n$ . Por tanto,  $\text{Hom}_A(M, N)$  es un  $A$ -módulo finito, pues es un submódulo de un  $A$ -módulo noetheriano.  $\square$

## 2.2. Haces cuasicoherentes sobre un esquema proyectivo

**Definición 2.2.1.** Sea  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$  y  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  un  $R$ -módulo graduado. Definimos el módulo  $\widetilde{M}$  de localizaciones homogéneas sobre  $(\text{Proj } R, \widetilde{R})$  como el haz asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow (M_U)_0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{f} \in M_U, \text{ con } m \in M \text{ y } f \in R \text{ homogéneos} \\ \text{del mismo grado y } f \text{ no se anula en } U \end{array} \right\}$$

Por sencillez, supondremos que  $R = R_0[\xi_1, \dots, \xi_n]$  con  $\xi_i$  de grado 1. Igual que veíamos para el haz estructural de  $\text{Proj } R$  tenemos

$$\widetilde{M}|_{U_{\xi_i}^h} = \widetilde{(M_{\xi_i})_0}$$

Luego  $\widetilde{M}$  es cuasicoherente.

**Notación 2.2.2.** Si  $M$  es un  $R$ -módulo graduado y  $n \in \mathbb{Z}$  denotaremos por  $M(n)$  al  $R$ -módulo graduado cuya componente de grado  $r$  es la componente de grado  $n+r$  de  $M$ . Denotaremos por  $\mathcal{O}(n)$  al haz  $\widetilde{R}(n)$ .

Se cumple la igualdad

$$\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n) \stackrel{\cong}{=} \widetilde{M}(n)$$

$$U_{\xi_i}^h : \quad \frac{m_r}{\xi_i^r} \otimes \frac{p_{s+n}}{\xi_i^s} \longmapsto \frac{p_{s+n} m_r}{\xi_i^{r+s}}$$

$$U_{\xi_i}^h : \quad \frac{m_{r+n}}{\xi_i^{r+n}} \otimes \xi_i^n \longleftarrow \frac{m_{r+n}}{\xi_i^r}$$

En particular,  $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m) = \widetilde{R}(n) \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{R}(m) = \widetilde{R}(n+m) = \mathcal{O}(n+m)$ . Observemos que  $\mathcal{O}(n)|_{U_{\xi_i}^h} \stackrel{\cdot \xi_i^{-n}}{\cong} \mathcal{O}|_{U_{\xi_i}^h}$ .

Dado un módulo  $\mathcal{M}$  cuasicoherente denotaremos  $\mathcal{M}(n) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n)$ . Denotemos  $U_i = U_{\xi_i}^h$  y por  $\mathcal{M}_{U_i}$  el haz  $\mathcal{M}_{U_i}(U) = \mathcal{M}(U_i \cap U)$ , “puede pensarse  $\mathcal{M}_{U_i}$ , como el haz de secciones meromorfas de  $\mathcal{M}$  que son regulares en  $U_i$ , pero pueden tener polos en  $\xi_i = 0$ ”.

Consideremos el morfismo

$$(*) \quad \mathcal{M}(n) \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} \mathcal{M}_{U_i}$$

$$U_i: \quad \mathcal{M}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} \mathcal{O}(U_i) \cdot \xi_i^n \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} \mathcal{M}_{U_i}(U_i) = \mathcal{M}(U_i)$$

$$U_j: \quad \mathcal{M}(U_j) \otimes_{\mathcal{O}(U_j)} \mathcal{O}(U_j) \cdot \xi_j^n \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} (\frac{\xi_i}{\xi_j})^{-n} \mathcal{M}(U_j) \subseteq \mathcal{M}(U_j)_{\frac{\xi_i}{\xi_j}} = \mathcal{M}_{U_i}(U_j)$$

Si bien, el morfismo  $\mathcal{M}(n) \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} \mathcal{M}_{U_i}$  no es inyectivo, “esencialmente” lo es para  $n \gg 0$ , más abajo lo vemos. Lo que permite pensar  $\mathcal{M}(n)$  como el haz de secciones meromorfas de  $\mathcal{M}$  regulares en  $U_i$  y con polo de orden  $\leq n$ , en  $\xi_i = 0$ .

**Proposición 2.2.3.** *Consideremos los diagramas conmutativo obvios*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(n+1) & \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n-1}} & \mathcal{M}_{U_i} \\ \cdot \xi_i \uparrow & \nearrow \cdot \xi_i^{-n} & \\ \mathcal{M}(n) & & \end{array}$$

Se tiene que  $\lim_{\rightarrow n} \mathcal{M}(n) = \mathcal{M}_{U_i}$ , “la unión, para todo  $n$ , de las secciones meromorfas de  $\mathcal{M}$  regulares en  $U_i$  con polos de orden menor que  $n$  en  $\xi_i = 0$ , son las secciones meromorfas de  $\mathcal{M}$  regulares en  $U_i$ ”.

*Demostración.* Por el diagrama (\*), tenemos que probar que  $\lim_{\rightarrow n} \mathcal{M}(n)(U_j) \rightarrow \mathcal{M}_{U_i}(U_j) = \mathcal{M}(U_j)_{\frac{\xi_i}{\xi_j}}$  es un isomorfismo, denotémoslo por  $\phi$ . La imagen de  $\phi$  es claramente la unión de  $(\frac{\xi_i}{\xi_j})^{-n} \mathcal{M}(U_j)$  que es  $\mathcal{M}(U_j)_{\frac{\xi_i}{\xi_j}}$ , luego el  $\phi$  es epiyectivo. Nos falta ver la inyección. Si  $\overline{m} \otimes \xi_j^n \in \text{Ker } \phi$  entonces  $0 = (\frac{\xi_i}{\xi_j})^{-n} m \in \mathcal{M}(U_j)_{\frac{\xi_i}{\xi_j}}$ . Luego existe un  $r \in \mathbb{N}$ , tal que  $(\frac{\xi_i}{\xi_j})^r m = 0$ , entonces  $0 = (\frac{\xi_i}{\xi_j})^r m \otimes \xi_j^{n+r} = m \otimes \xi_i^r \xi_j^n$ . Por tanto,  $\overline{m} \otimes \xi_j^n = \overline{m} \otimes \xi_i^r \xi_j^n = 0$ .  $\square$

Hemos definido morfismos  $\mathcal{M}(n) \xrightarrow{\cdot \xi_i} \mathcal{M}(n+1)$ , luego tenemos definidos morfismos  $\mathcal{M}(n)(X) \xrightarrow{\cdot \xi_i} \mathcal{M}(n+1)(X)$  ( $X = \text{Proj } R$ ). En conclusión,  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)(X)$  es un  $R = R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$ -módulo graduado.

**Proposición 2.2.4.** *Todo un módulo  $\mathcal{M}$  cuasicoherente en  $\text{Proj } R = X$  es la localización homogénea del módulo graduado  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)(X)$ .*

*Por tanto, todo haz de módulos cuasicoherente en un esquema proyectivo es el haz de localización homogénea de un módulo graduado.*

*Demostración.*

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{M}(n)(X)}(U_i) = \bigcup_i \frac{\mathcal{M}(n)(X)}{\xi_i^n} \stackrel{*}{=} \varinjlim_n (\mathcal{M}(n)(X)) = \varinjlim_n \mathcal{M}(n)(X) = \mathcal{M}_{U_i}(X) = \mathcal{M}(U_i)$$

$$* \overline{m_n/\xi_i^n} \mapsto \bar{m}_n. \quad \square$$

**Proposición 2.2.5.** *Dado un módulo  $\mathcal{M}$  cuasicoherente en  $(\text{Proj } R, \widetilde{R} = \mathcal{O})$  existe una resolución*

$$\bigoplus_I \mathcal{O}(n_i) \rightarrow \bigoplus_J \mathcal{O}(n_j) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

(si  $\mathcal{M}$  es coherente pueden tomarse  $I, J$  finitos).

*Demostración.* Por la proposición anterior,  $\mathcal{M}$  es la localización homogénea de un  $R$ -módulo graduado. Ahora bien, todo  $R$ -módulo graduado es el cociente graduado de una suma directa  $\bigoplus_J R(n_j)$ . Luego  $\mathcal{M}$  es un cociente de  $\bigoplus_J \mathcal{O}(n_j)$  y argumentando igual con el núcleo, concluimos.

Si  $\mathcal{M}$  es coherente y  $\bigoplus_J \mathcal{O}(n_j) \rightarrow \mathcal{M}$  es un epimorfismo, puede tomarse un subconjunto  $J'$  finito de subíndices de  $J$ , de modo que  $\bigoplus_{J'} \mathcal{O}(n_j) \rightarrow \mathcal{M}$  sea epiyectivo en cada abierto  $U_{\xi_i}^h$ . Argumentando igual con el núcleo de  $\bigoplus_{J'} \mathcal{O}(n_j) \rightarrow \mathcal{M}$ , que es coherente, demostraremos la última afirmación de la proposición. □

**Ejercicio 2.2.6.** Demuéstrese que todo haz coherente sobre  $(\text{Proj } R, \widetilde{R})$  es la localización homogénea de un  $R$ -módulo graduado finito generado.

## 2.3. Divisores y haces de línea

Sea  $C$  una curva completa no singular, sobre un cuerpo  $k$  y  $\Sigma_C$  su cuerpo de funciones.

**Definición 2.3.1.** Un divisor sobre  $C$  es una suma formal finita  $D = \sum_{x=\bar{x}} n_x \cdot x$ ,  $n_x \in \mathbb{Z}$ .

Diremos que  $D = \sum n_x \cdot x \leq D' = \sum n_{x'} \cdot x'$  cuando  $n_x \leq n_{x'}$  para todo  $x$ . Llamaremos soporte de un divisor,  $D = \sum n_x \cdot x$ , al cerrado  $|D|$  de los  $x \in C$  tales que  $n_x \neq 0$ . Se dice que  $D = \sum_{x=\bar{x}} n_x \cdot x$  es un divisor efectivo si  $n_x \geq 0$ , para todo  $x$ .

**Definición 2.3.2.** Definimos grado de un divisor  $D = \sum n_x \cdot x$  por  $\text{gr } D = \sum n_x \cdot \text{gr}(x)$ , siendo  $\text{gr}(x) = \dim_k(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x)$ .

Sea  $x \in C$  un punto cerrado y  $v_x$  la valoración definida por el anillo de valoración  $\mathcal{O}_{C,x}$ . Dada  $f \in \Sigma_C$  sea  $n_x = v_x(f)$ . Si  $n_x > 0$  se dice que  $f$  tiene un cero de orden  $n_x$  en  $x$ , y si  $n_x < 0$  se dice que  $f$  tiene un polo de orden  $-n_x$  en  $x$ .

Veamos ahora como toda función  $f \in \Sigma_C$  define un divisor:

**Definición 2.3.3.** Llamaremos divisor de ceros y polos de  $f$  al divisor  $D(f)$  definido por  $D(f) = \sum v_x(f) \cdot f$ .

Para que esta definición sea correcta el sumatorio escrito ha de ser finito. Necesitamos, pues, la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.4.** *Una  $f \in \Sigma_C$  no tiene más que un número finito de ceros y polos.*

*Demostración.* Dado un abierto afín  $U = \text{Spec } A \subset C$ , tendremos que  $f = \frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \Sigma_C$ . Es claro que los ceros de  $f$  en  $U$  están incluidos en  $(a)_0$  y que los polos de  $f$  en  $U$  están incluidos en  $(b)_0$ , que son un número finito de puntos. Como  $C$  está recubierto por un número finito de abiertos afines concluimos que  $f$  no tiene más que un número finito de ceros y polos.  $\square$

**Proposición 2.3.5.**  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \bar{k}$ , siendo  $\bar{k}$  el cierre entero de  $k$  en  $\Sigma_C$ .

*Demostración.*  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \bigcap_{v \in C} \mathcal{O}_v = \{ \text{cierre entero de } k \text{ en } \Sigma_C \} = \bar{k}$   $\square$

Así pues,  $\bar{k}$  son las únicas funciones  $f \in \Sigma_C$  sin polos. Como  $\bar{k}$  es un cuerpo, tendremos también que  $\bar{k}$  coincide con las funciones  $f \in \Sigma_C$  sin ceros.

**Teorema 2.3.6.** *El grado del divisor de ceros y polos de  $f$ ,  $D(f)$  es cero. Es decir, “el número de ceros de  $f$  es igual al número de polos de  $f$ ”.*

*Demostración.* Si  $f \in \bar{k}$  entonces no tiene ni ceros ni polos, y en este caso el teorema se verifica trivialmente.

Sea pues,  $f \in \Sigma_C$  es trascendente. El morfismo  $k(x) \rightarrow \Sigma_C$ ,  $x \mapsto f$  define un morfismo finito entre las variedades de Riemann

$$\tilde{f}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1, \quad \alpha \mapsto f(\alpha)$$

Es fácil comprobar que la fibra del “origen” es igual al divisor de ceros de  $f$  y la fibra del “infinito” es igual al de divisor de polos de  $f$ . Es decir,  $D(f) = \tilde{f}^{-1}(0) - \tilde{f}^{-1}(\infty)$ . Por el ejercicio 1.6.26,  $\text{gr}(D(f)) = 0$ .  $\square$

**Ejemplo 2.3.7.** Sea  $\mathbb{P}_1(k) = \text{Proj } k[x_0, x_1]$  y  $\Sigma_{\mathbb{P}_1(k)} = k[\frac{x_1}{x_0}]$ . Calculemos los ceros y polos de la función  $x^2$ ,  $x = \frac{x_1}{x_0}$ . Tenemos que  $\mathbb{P}_1(k) = \text{Spec } k[x] \cup \text{Spec } k[\frac{1}{x}] = \text{Spec } k[x] \cup \infty$ ,  $\mathfrak{m}_\infty = (\frac{1}{x}) \subset k[\frac{1}{x}]$ . En  $\text{Spec } k[x]$  se cumple que  $(x^2)_0 = \{\mathfrak{m}_0 = (x)\}$ . Por tanto, en  $\text{Spec } k[x]$ ,  $x^2$  no tiene más ceros que el origen y no tiene polos, además  $v_0(x^2) = 2$ . Por último,  $v_\infty(x^2) = v_\infty((\frac{1}{x})^{-2}) = -2$ . En conclusión,  $D(x^2) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot \infty$ .

**Ejercicio 2.3.8.** Calcular el divisor de ceros y polos de  $x$  sobre la variedad de Riemann del cuerpo de fracciones de  $k[x, y]/(y^2 - x^3)$ .

Dados dos divisores  $D = \sum n_x \cdot x$ ,  $D' = \sum n'_x \cdot x$  definimos la suma por  $D + D' = \sum (n_x + n'_x) \cdot x$ . El conjunto de todos los divisores de una curva completa no singular es un grupo abeliano libre que denotaremos  $\text{Div } C$ .

**Definición 2.3.9.** Se dice que dos divisores son linealmente equivalentes si difieren en el divisor de una función.

Obviamente, la equivalencia lineal es una relación de equivalencia. Además, el conjunto de las clases de divisores linealmente equivalentes, con la suma de divisores, es un grupo abeliano.

**Definición 2.3.10.** Dado un esquema  $X$  se dice que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $L$  es un haz de línea si existe un recubrimiento  $\{U_i\}$  por abiertos de  $X$  tal que  $L|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$ .

**Notación 2.3.11.** Dado un divisor  $D = \sum n_x \cdot x$  y un abierto  $U \subset C$ , denotaremos  $D_U \stackrel{\text{Not}}{=} \sum_{x \in |D| \cap U} n_x \cdot x$ .

**Ejemplo 2.3.12.** 1. Si  $X = \text{Proj } k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  entonces  $\mathcal{O}_X(n)$  es un haz de línea en  $\mathbb{P}_n(k)$  puesto que tenemos los isomorfismos  $\mathcal{O}_X(n)|_{U_{\xi_i}} \stackrel{\xi_i^{-n}}{\simeq} \mathcal{O}_X|_{U_{\xi_i}}$ .

2. Sea  $C$  es una curva completa no singular y  $x \in C$  es un punto cerrado. Sea  $\mathfrak{m}_x$  el subhaz de  $\mathcal{O}_C$ , definido por  $\mathfrak{m}_x(U) = \{f \in \mathcal{O}_C(U) : f(x) = 0\}$ , donde entendemos que  $\mathfrak{m}_x(U) = \mathcal{O}_C(U)$  si  $x \notin U$ . Si  $x \notin U$ , entonces  $\mathfrak{m}_x|_U = \mathcal{O}_X|_U$ . Si  $x \in U$ , empequeñeciendo  $U$ , si es preciso, existe  $t_x \in \Sigma_C$ , de modo que  $v_y(t_x) = 0$ , para todo  $y \in U - x$ , y  $v_x(t_x) = 1$ . Entonces  $\mathfrak{m}_x|_U = t_x \cdot \mathcal{O}_X|_U$ . También se denota  $\mathfrak{m}_x = L_{-x}$ .

3. Sea  $C$  es una curva completa no singular y  $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot x_i$  un divisor. Sea  $\mathfrak{m}_{x_1}^{-n_1} \cdots \mathfrak{m}_{x_r}^{-n_r} = L_D$  el subhaz de  $\tilde{\Sigma}_C$  definido por  $L_D(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Sigma_C \text{ tales que } (Df)_U + D_U \geq 0\}$ . Veamos que  $L_D$  es un haz de línea: Evidentemente  $L_D$  es un  $\mathcal{O}_C$ -módulo. Tenemos que ver que localmente es isomorfo a  $\mathcal{O}_C$ . Dado  $x \in |D|$  sea  $U$  un abierto afín, tal que  $U \cap |D| = x$ . Empequeñeciendo  $U$ , si es preciso, podemos suponer que existe una función,  $t_x \in \Sigma_C$ , tal que  $(Dt_x)_U = x$ . Se sigue trivialmente que  $L_D|_U = t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_C|_U$ .

Observemos que dados dos haces de línea  $L, L'$ , su producto tensorial  $L \otimes_{\mathcal{O}_X} L'$  es un haz de línea. El conjunto de clases de isomorfía de los haces de línea, con el producto tensorial, es un grupo abeliano donde:

1. El elemento neutro es  $\mathcal{O}_X$ .
2. El inverso del haz de línea  $L$  es  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X)$ : el morfismo  $L \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X$ ,  $e \otimes w \mapsto w(e)$  es un isomorfismo, como puede comprobarse localmente, en abiertos donde  $L$  sea libre.

**Teorema 2.3.13.** *El grupo de las clases de los divisores linealmente equivalentes es canónicamente isomorfo al grupo de las clases de isomorfía de los haces de línea, sobre una curva no singular  $C$ . El isomorfismo viene dado por*

$$[D = \sum n_x \cdot x] \mapsto L_D : \quad L_D(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Sigma_C \text{ tales que } (Df)_U + D_U \geq 0\}$$

*Demostración.* Si  $D' = D + Dg$  entonces  $L_{D'} \simeq L_D$  por el isomorfismo

$$L_{D'} \xrightarrow{\cdot g} L_D, \quad L_{D'}(U) \xrightarrow{\cdot g} L_D(U)$$

La asignación  $D \mapsto L_D$  es de grupos, pues tenemos un morfismo natural

$$L_D \otimes_{\mathcal{O}_C} L_{D'} \rightarrow L_{D+D'}, \quad L_D(U) \otimes_{\mathcal{O}_C(U)} L_{D'}(U) \rightarrow L_{D+D'}(U), \quad f \otimes g \mapsto f \cdot g$$

que localmente es el isomorfismo:  $t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_C|_U \otimes_{\mathcal{O}_C} t_x^{-n'_x} \cdot \mathcal{O}_C|_U = t_x^{-n_x - n'_x} \cdot \mathcal{O}_C|_U$ .

Recíprocamente, asignemos a cada haz de línea  $L$  un divisor  $D$ : Dado un haz de línea  $L$ , fijemos un isomorfismo  $\phi_g : L_{p_g} \simeq \Sigma_C$  de  $\Sigma$ -espacios vectoriales. Este isomorfismo define un morfismo inyectivo  $L \hookrightarrow \tilde{\Sigma}_C$ , que podemos suponer que es una inclusión, simplificando notaciones. Sea  $U$  un abierto afín sobre el que  $L$  sea libre, entonces  $L(U) = f_U \cdot \mathcal{O}_C(U)$  para cierta  $f_U \in \Sigma_C$ . Observemos que  $D(f_U)_U$  no depende del  $f_U$  escogido, porque cualquier otro escogido es  $\lambda \cdot f_U$ , con  $\lambda$  invertible en  $U$  y  $D(\lambda \cdot f_U)_U = D(f_U)_U$ .

Asignamos a  $L$  el divisor  $D_L$  definido localmente por  $(D_L)_U = -D(f_U)_U$ , para cada abierto afín  $U$  sobre el que  $L$  es libre.

1') Se verifica que  $D_L$  está bien definido, es decir,  $(D_L)_U$  coincide con  $(D_L)_{U'}$  sobre  $U \cap U'$ , porque las restricciones de  $f_U$  y  $f_{U'}$  difieren en un invertible de  $\mathcal{O}_C(U \cap U')$ .

2') Si  $\phi': L_{p_g} \rightarrow \Sigma_C$  es otro isomorfismo, será  $\phi' = g \cdot \phi$  para alguna función  $g \in \Sigma_C$ . Se sigue que si  $D'_L$  es el divisor construido a partir de  $\phi'$  entonces  $D'_L = D_L - Dg$ .

Para concluir, observemos que el haz de línea asociado a  $D_L$  es  $L$ , una vez que hemos identificado  $L$  con un subhaz de  $\Sigma$ , es decir, una vez que fijamos un isomorfismo  $L_{p_g} \simeq \Sigma$ . Recíprocamente, el divisor asociado a  $L_D$  es  $D$ . □

**Definición 2.3.14.** El grupo de las clases de isomorfía de los haces de línea de  $X$  se denomina grupo de Picard de  $X$ .

**Proposición 2.3.15.** *El grupo de Picard de la recta proyectiva es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , es decir*

$$\text{Pic } \mathbb{P}_1 = \mathbb{Z} \cdot L_\infty$$

*Demostración.*  $\mathbb{P}_1$  es la variedad de Riemann de  $k(x)$  y  $\mathbb{P}_1 = \text{Spec } k[x] \cup \text{Spec } k[\frac{1}{x}] = \text{Spec } k[x] \cup \infty$ .

Sea  $p(x) = a_0x^n + \dots + a_n \in k[x]$  un polinomio irreducible de grado  $n$ . Denotemos por  $p$  el punto de  $\text{Spec } k[x]$  definido por el ideal maximal  $(p(x)) \subset k[x]$ . Observemos que

$$v_\infty(p(x)) = v_\infty\left(\frac{p(x)}{x^n} \cdot x^n\right) = v_\infty\left(\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}\right) = 0 + (-n) = -n$$

Luego  $D(p(x)) = 1 \cdot p - n \cdot \infty$ , es decir  $1 \cdot p \sim \text{gr } p \cdot \infty$  y en general  $\sum n_i p_i \sim (\sum n_i \text{gr } p_i) \cdot \infty$ . Así pues, el morfismo

$$\text{Pic } \mathbb{P}_1 = \{\text{Divisores de } \mathbb{P}_1\} / \sim \longrightarrow \mathbb{Z} \cdot \infty, \quad [D] \mapsto \text{gr}(D) \cdot \infty$$

es un isomorfismo. □

**Proposición 2.3.16.** *Si  $C$  es una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado tal que  $\text{Pic } C = \mathbb{Z}$  entonces  $C = \mathbb{P}^1$ :*

*Demostración.* Si  $D$  es un divisor de grado 1, y  $D \sim nD'$ , ha de cumplirse que  $\text{gr } D' = \pm 1$  y  $n = \mp 1$ , como se comprueba tomando grados en la equivalencia anterior. Por tanto, si  $\text{Pic } C = \mathbb{Z}$ , podemos decir que  $\text{Pic } C = \mathbb{Z} \cdot p$ , siendo  $p$  cualquier punto cerrado de  $C$ . En consecuencia, dado otro punto cerrado  $q$ , se cumple que  $p - q$  es linealmente equivalente al divisor de ceros y polos de una función  $f \in \Sigma_C$ . Luego el morfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1, \alpha \mapsto f(\alpha)$ , es un morfismo de grado 1, es decir, un isomorfismo. □

**Ejercicio 2.3.17.** Probar que si  $\text{gr } D < 0$  entonces  $\Gamma(C, L_D) = 0$ .

**Ejercicio 2.3.18.** Consideremos la recta proyectiva  $\mathbb{P}_1$ . Probar que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)$  es un haz de línea isomorfo a  $L_{n\infty}$ , donde el isomorfismo es

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n) & \xrightarrow[\sim]{\cdot x_0^{-n}} & L_{n\infty} \\ U_{x_0}^h : \left\{ p\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \right\} \cdot x_0^n & \xrightarrow{\cdot x_0^{-n}} & \left\{ p\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \right\} \\ U_{x_1}^h : \left\{ p\left(\frac{x_0}{x_1}\right) \right\} \cdot x_1^n & \xrightarrow{\cdot x_0^{-n}} & \left\{ p\left(\frac{x_0}{x_1}\right) \cdot \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{-n} \right\} \end{array}$$

Sea  $C$  una curva no singular,  $L$  un haz de línea en  $C$ ,  $g \in C$  el punto genérico y  $\tilde{L}_g$  el haz constante asociado a  $L_g$ . El morfismo  $L \rightarrow \tilde{L}_g$  es inyectivo, pues localmente lo es. Dada una “sección meromorfa de  $L$ ”  $s \in L_g$  y un punto cerrado  $x \in C$ , definamos  $v_x(s) = n$  si  $s \in \mathfrak{m}_x^n L_x$  y  $s \notin \mathfrak{m}_x^{n+1} L_x$ . Observemos que  $s \in L_g$  pertenece a  $L(U)$  si y sólo si  $v_x(s) \geq 0$  para todo  $x \in U$ : la cuestión es local en  $U$ , podemos suponer pues que  $L|_U = \mathcal{O}_{C|U}$ .

**Proposición 2.3.19.** *Sea  $C$  una curva completa no singular,  $L$  un haz de línea en  $C$  y  $s \in L_g$ . Se cumple que el haz de línea asociado a  $D(s) = \sum_x v_x(s)x$  es  $L$ .*

*Demostración.* El morfismo  $L_{D(s)} \xrightarrow{\cdot s} L$ ,  $f \mapsto f \cdot s$  es un isomorfismo.  $\square$

Si  $D' = D(s) + D(f)$ ,  $f \in \Sigma_C$ , entonces  $D' = D(f \cdot s)$ . Por tanto, módulo  $k$ , las secciones de  $L_g$  se corresponden biyectivamente con la clase de divisores equivalentes a  $D(s)$ . Observemos que  $D(s)$  es un divisor efectivo si y sólo si  $s \in \Gamma(C, L)$ . Por tanto,  $\mathbb{P}(\Gamma(C, L)) = \{\text{Divisores efectivos equivalentes a } D(s)\}$ .

Hemos hablado de divisores en curvas, los cuales se obtienen localmente como ceros y polos de funciones. El grupo de Picard de una curva es un invariante importante en el estudio de la geometría intrínseca de la curva.

En variedades algebraicas de dimensión mayor, los ceros y polos de funciones son hipersuperficies y los divisores serán sumas formales de hipersuperficies.

## 2.4. Teoremas de Bézout y Max Noether

Dado un ideal homogéneo  $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$  consideremos el morfismo de paso al cociente

$$k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k[x_0, \dots, x_n]/I$$

Tomando espectros proyectivos, define el morfismo  $i: X = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]/I \hookrightarrow \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{P}_n$ , que establece un homeomorfismo  $X = (I)_0^h$ . La localización homogénea del morfismo de anillos anterior

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \rightarrow i_* \mathcal{O}_X$$

hace que el morfismo  $i: X \rightarrow \mathbb{P}_n$  sea un morfismo de espacios anillados en anillos locales, es decir, un morfismo de esquemas.

Si  $C_1, C_2$  son dos subesquemas cerrados de  $\mathbb{P}_n$  definidos por los ideales  $I_1, I_2$ , denotaremos  $C_1 \cap C_2$  al subesquema cerrado de  $\mathbb{P}_n$  definido por  $I_1 + I_2$ , que topológicamente es la intersección de  $C_1$  y  $C_2$ . Si  $C_1 \cap C_2 = \{x_1, \dots, x_n\}$  es un número finito de puntos cerrados de  $\mathbb{P}_n$ , entonces diremos que el número de puntos de corte de  $C_1$  con  $C_2$ , que denotaremos  $(C_1 \cap C_2)$ , es

$$\dim_k \mathcal{O}_{C_1 \cap C_2}(C_1 \cap C_2)$$

**Ejercicio 2.4.1.** Sea  $C = \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2)$  y  $f = \frac{x_1}{x_0} \in \Sigma_C$ . Calcular el divisor de ceros y polos de  $f$  e interpretarlo geoméricamente.

**Teorema 2.4.2** (Bézout). *Sea  $C$  una curva proyectiva íntegra. Supongamos por sencillez que el cuerpo base  $k$  es algebraicamente cerrado.*

1) *Para cada hiperplano  $H$  que no contenga a  $C$ , el número de puntos de corte de  $H$  con  $C$  es un número natural que no depende del hiperplano  $H$ , que se llama grado de la curva  $C$ .*

2) *Si  $C$  es de grado  $n$  y  $H$  es una hipersuperficie de grado  $m$  (es decir definida por un polinomio de grado  $m$ ) que no contiene a  $C$  se cumple que el número de puntos de corte de  $H$  con  $C$  es  $n \cdot m$ .*

*Demostración.* 1) Sea  $H'$  un hiperplano que no pase por ningún punto de  $C \cap H$ . Sea  $U = \mathbb{P}_n - H'$ .  $H$  y  $H'$  son los ceros homogéneos de sendos polinomios homogéneos de grado 1, que denotaremos por  $H$  y  $H'$ , también. Consideremos la función  $f = \frac{H}{H'} \in \mathcal{O}_C(U) = A$ . Se cumple que  $C \cap H = \text{Spec } A/fA$  y

$$(C \cap H) = \dim_k \mathcal{O}_{C \cap H}(C \cap H) = \dim_k \mathcal{O}_{C \cap H}(C \cap H \cap U) = \dim_k(A/(f))$$

Denotemos por  $\bar{C}$  la desingularización de  $C$ ,  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$  el morfismo de desingularización y  $B = \mathcal{O}_{\bar{C}}(\pi^{-1}(U))$ . Del isomorfismo  $B/A \simeq fB/fA$  y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} fA & \longrightarrow & fB \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

se deduce que  $\dim_k(A/(f)) = \dim_k(B/(f))$ , que coincide con el grado del divisor de ceros de  $f$  en  $\bar{C}$  (observemos que los ceros de  $f$  en  $C \cap U$  son  $C \cap H$  y  $C \cap H'$  son ceros de  $1/f = H'/H$ ). Por tanto,

$$\begin{aligned} (C \cap H) &= \text{grado del divisor de ceros de la función } \frac{H}{H'} \text{ en } \bar{C} \\ &= \text{grado del divisor de polos de la función } \frac{H}{H'} \text{ en } \bar{C} \\ &= \text{grado del divisor de ceros de la función } \frac{H'}{H} \text{ en } \bar{C} \\ &= (C \cap H') \end{aligned}$$

Sean  $H$  y  $H''$  dos hiperplanos cualesquiera que no contienen a  $C$ , sea  $H'$  un hiperplano que no pase por ningún punto de  $C \cap H$  ni de  $C \cap H''$ . Entonces,  $(C \cap H) = (C \cap H') = (C \cap H'')$ .

2) Podemos suponer que  $x_0 = 0$  no pasa por ningún punto de  $C \cap H$  y que  $x_1 = 0$  no pasa por ningún punto de  $\{x_0 = 0\} \cap C$ , ni de  $C \cap H$ . Tomando  $f = \frac{H}{x_0^m}$  tenemos, como en el apartado anterior, que  $(C \cap H) = \text{grado del divisor de ceros de } f = \text{grado del divisor de polos de } f = \text{grado del divisor de ceros de } \frac{x_0^m}{H} = \text{grado del divisor de ceros de } \frac{x_0^m}{x_1^n} = m \cdot (\text{grado del divisor de ceros de } \frac{x_0}{x_1}) = m \cdot (C \cap \{x_0 = 0\}) = m \cdot n$ .

□

**Ejercicio 2.4.3.** Sean  $p_1, p_2 \in k[x, y]$  polinomios primos con  $p \in k[x, y]$ . Demostrar que la sucesión

$$0 \rightarrow k[x, y]/(p, p_2) \xrightarrow{p_1} k[x, y]/(p, p_1 \cdot p_2) \rightarrow k[x, y]/(p, p_1) \rightarrow 0$$

es exacta. Si denotamos por  $C, C', C_1$  y  $C_2$  las curvas planas definidas por  $p = 0, p_1 \cdot p_2 = 0, p_1 = 0$  y  $p_2 = 0$  respectivamente, demostrar que  $(C \cap C')_x = (C \cap C_1)_x + (C \cap C_2)_x$ .

**Corolario 2.4.4.** Sean  $C \equiv p_r(x_0, x_1, x_2) = 0$  y  $C' \equiv p_{r'}(x_0, x_1, x_2) = 0$  dos curvas proyectivas planas sin componentes comunes. El número de puntos de corte de las dos curvas es  $r \cdot r'$ .

*Demostración.* En primer lugar podemos suponer las curvas son íntegras por el ejercicio 2.4.3.

Por el teorema anterior, sólo tenemos que comprobar que si  $p_r(x_0, x_1, x_2) = 0$  es una curva  $C$  proyectiva plana entonces  $r$  coincide con el grado de  $C$ , es decir, con el número de puntos de corte  $C$  con una recta  $R$ : Si  $C$  es una recta es claro que su grado es uno. Ahora ya,

$$(C \cap R) = (R \cap C) = r \cdot \text{grado de } R = r$$

□

Ahora vamos a demostrar el teorema de Max Noether, con el que se podrán resolver múltiples problemas geométricos, como los teoremas de Pascal y Pappus.

**Teorema 2.4.5.** Sean  $p_i \in k[x_0, x_1, x_2]$  polinomios homogéneos ( $i = 1, 2, 3$ ). Consideremos las curvas proyectivas planas  $C_i \equiv p_i = 0$  y los haces  $\mathfrak{p}_{C_i}$  de ideales de funciones de  $\mathbb{P}_2$  que se anulan en  $C_i$ . Supongamos que  $C_1, C_2$  no tienen componentes comunes. Existe una ecuación

$$p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$$

con  $a, b$  polinomios homogéneos de grados  $\text{gr } a = \text{gr } p_3 - \text{gr } p_1$ ,  $\text{gr } b = \text{gr } p_3 - \text{gr } p_2$ , si y sólo si para todo  $x \in C_1 \cap C_2$  se verifica que  $\mathfrak{p}_{C_3, x} \subseteq \mathfrak{p}_{C_1, x} + \mathfrak{p}_{C_2, x}$ .

*Demostración.* La necesidad es obvia, veamos la suficiencia.

Tenemos que  $\mathfrak{p}_{C_1} + \mathfrak{p}_{C_2} = \mathfrak{p}_{C_1} + \mathfrak{p}_{C_2} + \mathfrak{p}_{C_3}$ , pues lo es localmente para todo punto  $x \in \mathbb{P}_2$  por la hipótesis. Por tanto,

$$\mathfrak{p}_{C_3} \subset \mathfrak{p}_{C_1} + \mathfrak{p}_{C_2} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2, x} \quad *$$

Por cambio homogéneo de coordenadas, podemos suponer que  $x_0 = 0$  no pasa por ningún punto de  $C_1 \cap C_2$ , es decir,  $p_1(0, x_1, x_2)$  es primo con  $p_2(0, x_1, x_2)$ . Sabemos que

$$\frac{p_3}{x_0^{n_3}} = a \cdot \frac{p_1}{x_0^{n_1}} + b \cdot \frac{p_2}{x_0^{n_2}}$$

Tenemos homogeneizando que  $x_0^r \cdot p_3 = a' p_1 + b' p_2$ . Sea  $r$  mínimo en las igualdades de esta forma. Si  $r > 0$ , entonces  $0 = a'(0, x_1, x_2)p_1(0, x_1, x_2) + b'(0, x_1, x_2)p_2(0, x_1, x_2)$ . Por tanto,  $a'(0, x_1, x_2) = h \cdot p_2(0, x_1, x_2)$  y  $b'(0, x_1, x_2) = -h \cdot p_1(0, x_1, x_2)$ . Luego  $a'' = a' - h \cdot p_2$ ,  $b'' = b' - h \cdot p_1$  son divisibles por  $x_0$  y  $x_0^r \cdot p_3 = a'' p_1 + b'' p_2$ . Dividiendo en esta igualdad por  $x_0$  llegamos a contradicción, porque  $r - 1 < r$ . En conclusión,

$$p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$$

Es fácil concluir. □

**Proposición 2.4.6.** Sean  $C_i$  curvas proyectivas planas definidas por polinomios homogéneos  $p_i \in k[x_0, x_1, x_2]$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Supongamos que  $C_1, C_2$  no tienen componentes comunes. Supongamos el cuerpo base  $k$  es algebraicamente cerrado.  $C_3$  verifica las condiciones de Noether en un punto cerrado  $x \in C_1 \cap C_2$ , es decir,  $\mathfrak{p}_{C_3, x} \subseteq \mathfrak{p}_{C_1, x} + \mathfrak{p}_{C_2, x}$  si

- 1)  $C_1$  y  $C_2$  son simples en  $x$ , se cortan transversalmente en  $x$  y  $x \in C_3$ .
- 2) El punto  $x$  es un punto simple de  $C_1$  y  $(C_1 \cap C_3)_x \geq (C_1 \cap C_2)_x$  (es decir, la multiplicidad de intersección de  $C_3$  con  $C_1$  en  $x$  es mayor o igual que la multiplicidad de intersección de  $C_2$  con  $C_1$  en  $x$ ).
- 3)  $C_1$  y  $C_2$  poseen tangentes distintas y  $m_x(C_3) \geq m_x(C_1) + m_x(C_2) - 1$ .

*Demostración.* Como la proposición es local, podemos suponer que las curvas  $C_i$  son curvas planas afines de ecuaciones  $p_i(x, y) = 0$ .

1) Por las hipótesis  $(k[x, y]/(p_1, p_2))_x = k$ . Por tanto, si denotamos  $\mathfrak{m}_x$  el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $x$ , tenemos que  $\mathfrak{m}_x = (p_1, p_2)_x$ , luego  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x$ .

2) Si  $x$  es un punto simple de  $C_1$ , entonces  $\overline{\mathfrak{m}_x} = (t)$  en  $(k[x, y]/(p_1(x, y)))_x$ . Además,  $\overline{(p_i(x, y))} = (t^{(C_i \cap C_1)_x})$ . Por tanto,  $(p_3(x, y)) \subseteq (p_2(x, y))$ , luego  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x$ .

3) Vamos a usar del lema de estabilidad para curvas planas, que dice si  $\mathcal{O}_{C_1,x} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x}$  es el morfismo de explosión en el punto  $x$  entonces  $\mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x}$

Por otra parte, si  $\xi$  es un parámetro transversal a  $C_1$  en  $x$ , por el que explotamos, tenemos que  $p_2(x, y) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} = p'(x/\xi, y/\xi) \cdot \xi^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} = \xi^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x}$  porque  $C_1$  y  $C_2$  no tienen tangentes comunes en  $x$ . Por tanto,  $p_2(x, y) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x}$ .

Con todo,

$$\begin{aligned} p_3(x, y) &\in \mathfrak{m}_x^{m_x(C_3)} \subset \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)+m_x(C_2)-1} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \\ &= \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} = p_2(x, y) \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} \\ &= p_2(x, y) \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \subset p_2(x, y) \mathcal{O}_{C_1,x} \end{aligned}$$

por lo que  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x \in k[x, y]$ .

□

## 2.5. Problemas

1. Probar el Teorema de Pascal: Si un hexágono está inscrito en una cónica irreducible, entonces los lados opuestos se cortan en puntos alineados.
2. Probar el Teorema de Pappus: Sean  $R_1, R_2$  dos rectas;  $p_1, p_2, p_3 \in R_1$  y  $q_1, q_2, q_3 \in R_2$  (ninguno de ellos se encuentran sobre  $R_1 \cap R_2$ ). Sea  $R_{ij}$  la recta que une  $p_i$  y  $q_j$ . Probar que los puntos  $p_{ij} = R_{ij} \cap R_{ji}$  ( $i < j$ ) están alineados.
3. Ley de grupo en las cúbicas. Sea  $C$  una cúbica plana no singular. Fijemos un punto  $p_0 \in C$ . Dados dos puntos  $p, q \in C$ , la recta que pasa estos dos puntos, corta a  $C$  en un tercer punto  $r$ . Definamos  $\phi: C \times C \rightarrow C$ ,  $(p, q) \mapsto r$ . Probar que la aplicación  $C \times C \rightarrow C$ ,  $(p, q) \mapsto \phi(p_0, \phi(p, q))$  dota a  $C$  de estructura de grupo abeliano. (Pista: Utilícese la teoría de divisores en  $C$ ).
4. Sean  $C_3, C'_3$  dos cúbicas planas que se cortan en 9 puntos distintos, de manera que 6 de ellos están sobre una cónica. Probar que los tres restantes están alineados.
5. Demostrar que las tangentes a una cúbica irreducible plana en 3 puntos alineados cortan a la cúbica en otros 3 puntos alineados.
6. Demostrar que si un triángulo está inscrito en una cónica irreducible, entonces los puntos de corte de cada lado del triángulo con la tangente a la cónica en el vértice opuesto, están alineados.
7. Probar que una recta que pase por dos puntos de inflexión de una cúbica plana irreducible pasa por un tercer punto de inflexión.
8. Probar que si una cúbica pasa por ocho de los nueve puntos distintos de corte de otras dos cúbicas, entonces también pasa por el noveno.
9. Sea  $C_3$  una cúbica plana y  $x \in C_3$  un punto de inflexión. Probar que los puntos  $y \in C_3$  para los que existe una cónica que cumpla  $m_x(C_3 \cap C_2) = m_y(C_3 \cap C_2) = 3$ , son las terceras intersecciones de las rectas que unen los puntos de inflexión con  $x$ .
10. Teorema de Cayley-Bacharach: Sea  $C_{n+m-3}$  una curva plana de  $n+m-3$  que pasa por  $n \cdot m - 1$  de los puntos de intersección de dos curvas de grados  $n$  y  $m$ . Probar que  $C_{n+m-3}$  pasa por el punto restante.

11. Si una curva  $C_{n+m-\gamma}$  de grado  $n + m - \gamma$  ( $\gamma > 3$ ), pasa por  $n \cdot m - \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}$  de los  $n \cdot m$  puntos distintos en los que se cortan dos curvas de grados  $n$  y  $m$ , entonces pasa también por los restantes puntos siempre que dichos puntos no estén en una curva de grado  $\gamma - 3$ .
12. Probar que todos los ideales maximales racionales de  $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 2y)$  no son ideales principales. Probar que  $(x, y) \subset \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 2y)$  es un ideal principal.

# Capítulo 3

## Cohomología

### 3.1. Introducción

Comencemos con una justificación muy sucinta, sin detalle ni rigor, de la introducción y definición de los grupos de cohomología de un haz.

En la construcción de un poliedro y en su clasificación topológica, es fundamental qué caras pegamos entre sí, a través de las aristas, y qué aristas pegamos entre sí, a través de los vértices.

Consideremos un poliedro  $r$ -dimensional de  $n$  vértices  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Una arista viene definida por un par de vértices  $l^{ij} = \{a_i, a_j\}$ , una cara por tres vértices  $C^{ijk} = \{a_i, a_j, a_k\}$ , en general, un símplece de orden  $p$  por  $p + 1$  vértices  $S_p^\alpha = \{a_{i_0}, \dots, a_{i_p}\}$ ,  $\alpha = \{i_0, \dots, i_p\}$ . Denotemos por  $M_p = \sum_{\alpha} \mathbb{Q} \cdot S_p^\alpha$  el  $\mathbb{Q}$ -módulo libre generado por todos los símplexes  $S_p^\alpha$  de orden  $p$ , del poliedro considerado. El módulo

$$M. = \bigoplus_{p=0}^r M_p = \left( \sum_{\alpha} \mathbb{Q} \cdot S_0^\alpha \right) \oplus \dots \oplus \left( \sum_{\alpha} \mathbb{Q} \cdot S_r^\alpha \right)$$

es el *módulo graduado diferencial de cadenas sobre el poliedro* con la diferencial de grado  $-1$ , definida como sigue

$$d_p \{a_{i_0}, \dots, a_{i_p}\} = \sum_{\{a_{i_0}, \dots, \widehat{a_{i_j}}, \dots, a_{i_p}\}} (-1)^j \{a_{i_0}, \dots, \widehat{a_{i_j}}, \dots, a_{i_p}\}$$

Se cumple que  $d_{p+1} \circ d_p = 0$ . Los grupos de homología del complejo diferencial de cadenas sobre el poliedro es por definición,  $H.(M.) = \bigoplus_{p=0}^r \text{Ker } d_p / \text{Im } d_{p+1}$ .

No es extraño que los grupos de homología, del módulo diferencial de las cadenas del poliedro, sean invariantes topológicos esenciales en la clasificación topológica del poliedro. Por ejemplo, si un poliedro está inscrito en una esfera, entonces

$$\chi(M.) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(M.) = n^0 \text{ vértices} - n^1 \text{ aristas} + n^2 \text{ caras} = 2$$

Si el poliedro está inscrito en un toro de  $g$  asas, entonces  $\chi(M.) = 2 - 2g$ .

Si una superficie  $X$  compacta de  $\mathbb{R}^3$  la triangulamos, tendremos que es homeomorfa al correspondiente poliedro. Así en la clasificación topológica de la superficie será fundamental la homología del

poliedro considerado. Si en vez de tomar los triángulos de la triangulación de la superficie consideramos entornos abiertos “muy aproximados” a cada triángulo, tendremos un recubrimiento  $\{U_i\}$  de la superficie, de modo que los abiertos  $U_i \cap U_j$  serán entornos muy aproximados a las aristas y los abiertos  $U_i \cap U_j \cap U_k$  serán entornos muy aproximados a los vértices. Dado un abierto  $U \xrightarrow{i} X$ , denotemos  $\tilde{Q}_U = i_* i^{-1} \tilde{Q}$ , explícitamente  $\tilde{Q}_U(V) = \tilde{Q}(U \cap V)$ . Si  $U \subset U'$ , tenemos un morfismo natural de haces  $\tilde{Q}_U \rightarrow \tilde{Q}_{U'}$  de restricción de secciones ( $\tilde{Q}_U(V) = \tilde{Q}(U \cap V) \xrightarrow{\text{restr.}} \tilde{Q}(U' \cap V) = \tilde{Q}_{U'}(V)$ ). Se verifica la sucesión exacta de haces

$$\tilde{Q} \rightarrow \prod_i \tilde{Q}_{U_i} \xrightarrow{d_0} \prod_{i,j} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j,k} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j \cap U_k} \rightarrow \dots$$

para  $s \in \tilde{Q}_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}(V)$ ,  $(ds)_{\{i_0, \dots, i_j, i', \dots, i_k\}} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^j s|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_j} \cap U_{i'} \cap \dots \cap U_{i_k}}$ . Sea  $M'$  el complejo definido por  $M^k = \prod_{i_0, \dots, i_k} \tilde{Q}_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}(X) = \bigoplus_{i_0, \dots, i_k} \mathbb{Q}$ , de diferencial la definida por las  $d_k$ . Pues bien, este complejo es esencialmente el complejo diferencial de cadenas del poliedro asociado a la superficie.

Con más generalidad, sea  $X$  un espacio topológico y  $\{U_i\}$  un recubrimiento por abiertos de  $X$ . Se verifica que la sucesión de haces

$$\tilde{Q} \rightarrow \prod_i \tilde{Q}_{U_i} \xrightarrow{d_0} \prod_{i,j} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j,k} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j \cap U_k} \xrightarrow{d_2} \dots$$

es exacta. Se llama grupos de cohomología Čech de  $X$  asociada al recubrimiento  $\{U_i\}$ , a los grupos de cohomología del complejo  $M'$ , definido por  $M^k = \prod_{i_0, \dots, i_k} \tilde{Q}_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}(X)$ , de diferencial la definida por las  $d_k$ .

Sea  $R = \prod_i U_i$  y  $\pi: R \rightarrow X$  el morfismo natural. Dado un haz  $F$  en  $X$  denotemos  $R^0 F = \pi_* \pi^{-1} F$ .

Se cumple que  $R^0 \tilde{Q} = \prod_i \tilde{Q}_{U_i}$ ,  $R^0(R^0 \tilde{Q}) = \prod_{i,j} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j}$ . Así tendremos una sucesión exacta de haces

$$\tilde{Q} \rightarrow R^0 \tilde{Q} \xrightarrow{d} R^0(R^0 \tilde{Q}) \xrightarrow{d} \dots$$

Tomando secciones globales y cohomología obtendremos los grupos de cohomología Čech de  $X$ , asociada al recubrimiento  $\{U_i\}$ .

Si queremos independizarnos del recubrimiento  $\{U_i\}$  tendremos que tomar sucesivos refinamientos del recubrimiento  $\{U_i\}$ , y considerar el límite inductivo de los sucesivos grupos de cohomología Čech obtenidos. Si queremos hacer esto de una sola vez de modo drástico, consideraremos el recubrimiento de  $X$  formado por el conjunto discreto de todos sus puntos: Dado un espacio topológico  $X$  consideremos la aplicación  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ , siendo  $\tilde{X}$  el espacio topológico cuyos puntos son los de  $X$  y de topología la discreta, y  $\pi$  la aplicación identidad. Dado un haz  $F$  en  $X$  denotemos  $C^0 F = \pi_* \pi^{-1} F$ . Pues bien, se tiene una sucesión exacta de haces

$$\tilde{Q} \rightarrow C^0 \tilde{Q} \xrightarrow{d} C^0(C^0 \tilde{Q}) \xrightarrow{d} \dots \quad (*)$$

Tomando secciones globales y cohomología obtendremos los llamados grupos de cohomología de  $X$ .

Por último, el teorema de De Rham (más adelante enunciado) afirmará que es equivalente, para el cálculo de los grupos de cohomología de  $X$ , a tomar la resolución de Godement (más adelante definida) en vez de la resolución (\*) considerada. Además, puede considerarse en vez de el haz  $\tilde{Q}$ , cualquier haz  $F$ , y en tal caso se hablará de los grupos de cohomología de  $X$  con valores en  $F$ .

## 3.2. Cohomología de haces

Sea  $F$  un haz sobre un espacio topológico  $X$ . Sea  $\bar{X}$  el conjunto  $X$  dotado de la topología discreta y  $\pi: \bar{X} \rightarrow X$  la identidad, que es continua.

Como  $\bar{X}$  tiene la topología discreta, entonces  $\pi^{-1}F(U) = \prod_{x \in U} (\pi^{-1}F)_x = \prod_{x \in U} F_x$ . Denotemos  $\pi_*\pi^{-1}F = C^0F$ . Se tiene una inyección natural  $F \rightarrow C^0F$ ,  $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$  ( $s \in F(U)$ ).

Denotemos  $F_1 = C^0F/F$ . El haz cociente  $F_1$  se inyecta a su vez en  $C^1F = C^0F_1 = \pi_*\pi^{-1}F_1$ . Sea  $F_2 = C^1F/F_1$ , que se inyecta en  $C^2F \stackrel{\text{def}}{=} C^0F_2$ . Reiterando el proceso se obtiene una sucesión exacta larga de haces:

$$0 \rightarrow F \rightarrow C^0F \rightarrow C^1F \rightarrow C^2F \rightarrow \dots$$

que se conoce como resolución de Godement del haz  $F$ .

Las secciones globales  $C^iF(X)$  de la resolución de Godement forman un complejo diferencial de grupos abelianos:

$$C^0F(X) \xrightarrow{d_0} C^1F(X) \xrightarrow{d_1} C^2F(X) \xrightarrow{d_2} \dots$$

**Definición 3.2.1.** Se definen los grupos de cohomología,  $H^i(X, F)$ , de  $X$  con valores en el haz  $F$ , como los grupos de cohomología del complejo diferencial formado por las secciones globales de la resolución flasga de Godement de  $F$ , es decir,  $H^i(X, F) = H^i(X, C^iF(X)) = \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i-1}$ .

**Proposición 3.2.2.**  $H^0(X, F) = \Gamma(X, F)$

*Demostración.* Las sucesiones

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F(X) \rightarrow C^0F(X) \rightarrow F_1(X) \\ 0 \rightarrow F_1(X) \rightarrow C^0F_1(X) = C^1F(X) \end{aligned}$$

son exactas, luego el núcleo del morfismo  $C^0F(X) \rightarrow C^1F(X)$  es justamente  $F(X)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.3.** *La toma de los grupos de homología es funtorial. Dada una sucesión exacta larga  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  de haces de grupos abelianos, se tiene una sucesión exacta larga en cohomología*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, F') \rightarrow H^0(X, F) \rightarrow H^0(X, F'') \rightarrow H^1(X, F') \\ \rightarrow H^1(X, F) \rightarrow H^1(X, F'') \rightarrow H^2(X, F') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

*Demostración.* Dado un morfismo  $f: F \rightarrow G$  de haces, para cada  $x \in X$  tenemos un morfismo  $F_x \rightarrow G_x$ , tenemos pues un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^0F & \longrightarrow & C^0G \end{array}$$

Por tanto, tenemos un morfismo  $F_1 \rightarrow G_1$  entre los conúcleos. Reiterando el proceso tenemos un morfismo  $C^iF \rightarrow C^iG$ , que conmuta con las diferenciales. Tomando secciones globales, obtenemos un morfismo  $f': H^i(X, F) \rightarrow H^i(X, G)$ . Obviamente  $\text{Id}' = \text{Id}$  y  $(f \circ g)' = f' \circ g'$ .

Dada la sucesión exacta  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  de haces, para cada  $x \in X$  la sucesión de grupos

$$0 \rightarrow F'_x \rightarrow F_x \rightarrow F''_x \rightarrow 0$$

es exacta, luego es exacta la sucesión de grupos

$$0 \rightarrow C^0 F'(X) \rightarrow C^0 F(X) \rightarrow C^0 F''(X) \rightarrow 0$$

y es exacta la sucesión de haces

$$0 \rightarrow C^0 F' \rightarrow C^0 F \rightarrow C^0 F'' \rightarrow 0$$

Por tanto, por el lema de la serpiente (tomando fibras), es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow F'_1 \rightarrow F_1 \rightarrow F''_1 \rightarrow 0$$

Reiterando se obtiene una sucesión exacta de complejos diferenciales

$$0 \rightarrow C' F'(X) \rightarrow C' F(X) \rightarrow C' F''(X) \rightarrow 0$$

de donde se obtiene la sucesión exacta larga de cohomología

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, F') \rightarrow H^0(X, F) \rightarrow H^0(X, F'') \rightarrow H^1(X, F') \\ \rightarrow H^1(X, F) \rightarrow H^1(X, F'') \rightarrow H^2(X, F') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

□

**Definición 3.2.4.** Se dice que un haz  $F$  sobre  $X$  es flasgo cuando para cada pareja de abiertos  $V \subseteq U$  el morfismo de restricción  $F(U) \rightarrow F(V)$  es epiyectivo.

Obviamente dado un haz  $F$ , entonces  $C^0 F$  es un haz flasgo.

**Teorema 3.2.5.** Si  $0 \rightarrow F' \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} F'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de haces sobre  $X$  y si  $F'$  es flasgo, para cada abierto  $U$  la sucesión

$$0 \rightarrow F'(U) \xrightarrow{i} F(U) \xrightarrow{p} F''(U) \rightarrow 0$$

es exacta.

*Demostración.* Sólo hay que ver que  $p$  es epiyectiva. Sea  $s'' \in F''(U)$ . Consideremos la familia formada por las parejas  $(V, s_V)$ , donde  $V$  es un abierto contenido en  $U$ , y  $s_V$  es una sección de  $F$  en  $V$  cuya imagen por  $p$  es  $s''|_V$ .

Como para cada  $x \in U$ , el morfismo  $p_x: F_x \rightarrow F''_x$  es epiyectivo, dicha familia no es vacía. Como está claramente ordenada y es inductiva, por el lema de Zorn tiene un elemento maximal  $(V, s_V)$ . Si  $V = U$  hemos acabado. Si no fuera así, sea  $x \in U - V$ . Existe un entorno abierto  $W \subseteq U$  de  $x$  y una sección  $\bar{s} \in F(W)$  de modo que  $p(\bar{s}) = s''|_W$ . Por tanto,  $p(s|_{W \cap V}) = p(\bar{s}|_{W \cap V})$  y existe una sección  $s'_{W \cap V} \in F'(W \cap V)$  de modo que  $i(s'_{W \cap V}) = s_{W \cap V} - \bar{s}|_{W \cap V}$ . Como  $F'$  es flasgo existe una  $s' \in F'(W)$  que restringe a  $s'_{W \cap V}$ . Entonces  $\bar{s} + i(s')$  es una sección de  $F$  sobre  $W$  que se aplica por  $p$  en  $s''|_W$  y que coincide con  $s_V$  sobre  $W \cap V$ . Luego, existe una sección de  $F$  sobre  $V \cup W$  cuya restricción a  $V$  es  $s_V$  y que se aplica por  $p$  a  $s''|_{V \cup W}$ , lo que contradice la maximalidad de  $(V, s_V)$ .

□

**Corolario 3.2.6.** Sea  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  una sucesión de haces. Si  $F'$  y  $F$  son flasgos, también lo es  $F''$ .

*Demostración.* Sea  $V \subseteq U$  una inclusión de abiertos. Por el teorema anterior, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F'(U) & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F''(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow r' & & \downarrow r & & \downarrow r'' & & \\ 0 & \longrightarrow & F'(V) & \longrightarrow & F(V) & \longrightarrow & F''(V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es de filas exactas. Por ser  $F$  flasgo  $r$  es epiyectiva y por el lema de la serpiente  $r''$  es epiyectiva, luego  $F''$  es flasgo. □

**Definición 3.2.7.** Se dice que un haz  $F$  es acíclico si  $H^i(X, F) = 0$  para todo  $i > 0$ .

**Teorema 3.2.8.** *Los haces flasgos son acíclicos.*

*Demostración.* Si  $F$  es flasgo, la sucesión  $0 \rightarrow F(X) \rightarrow C^0F(X) \rightarrow F_1(X) \rightarrow 0$  es exacta. Como  $F$  y  $C^0F$  son flasgos entonces  $F_1$  lo es y de nuevo  $0 \rightarrow F_1(X) \rightarrow C^0F_1(X) = C^1F(X) \rightarrow F_2(X) \rightarrow 0$  es exacta. Reiterando, se sigue que  $C^iF(X)$  es una sucesión exacta, luego su cohomología es nula. □

Sea  $M_\cdot = \bigoplus_{i,j} M_i^j$  y supongamos definidas dos diferenciales  $d_\cdot : M_i^j \rightarrow M_{i+1}^j$ ,  $d' : M_i^j \rightarrow M_i^{j+1}$  que conmutan entre sí, entonces diremos que es un bicomplejo diferencial. En  $M_\cdot$  podemos definir una graduación y una diferencial del siguiente modo:

$$M_n = \bigoplus_{i+j=n} M_i^j, \quad d \cdot m_i^j = d_\cdot m_i^j + (-1)^i d' m_i^j, \quad \text{para } m_i^j \in M_i^j$$

**Ejemplo 3.2.9.** Si  $M_\cdot = \bigoplus_i M_i$  y  $N_\cdot = \bigoplus_j N_j$ , son módulos diferenciales graduados, entonces  $M_\cdot \otimes N_\cdot$  es un bicomplejo:  $(M_\cdot \otimes N_\cdot)_i^j = M_i \otimes N_j$  con las diferenciales  $d_\cdot = d \otimes 1$ ,  $d' = 1 \otimes d$ . Así pues  $M_\cdot \otimes N_\cdot$  es un módulo diferencial graduado. También  $\text{Hom}(M_\cdot, N_\cdot)$  es un bicomplejo diferencial:  $\text{Hom}_A(M_\cdot, N_\cdot)_i^j = \text{Hom}_A(M_{-i}, N_j)$ ,  $d_\cdot(\phi) = \phi \circ d$  y  $d'(\phi) = d \circ \phi$ .

**Teorema 3.2.10.** *Sea el bicomplejo diferencial*

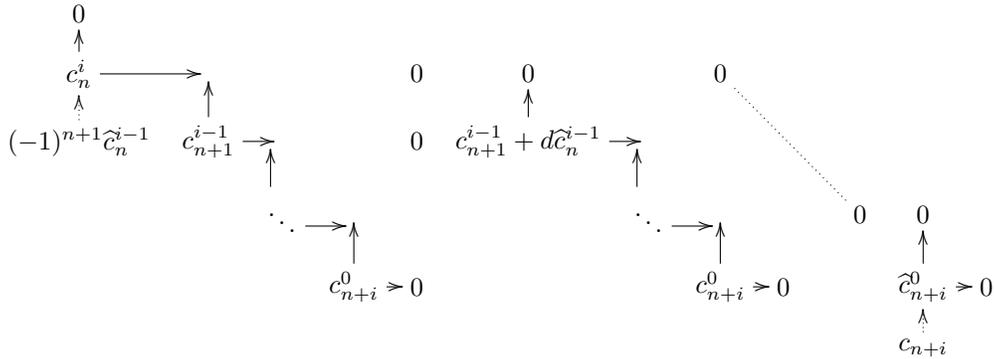
$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & C_n^1 & \longrightarrow & C_{n+1}^1 & \longrightarrow & C_{n+2}^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow d' & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n^0 & \longrightarrow & C_{n+1}^0 & \xrightarrow{d_\cdot} & C_{n+2}^0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow i & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_\cdot} & C_{n+2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

y supongamos que las columnas son acíclicas, es decir,  $H^i(C_\cdot^n) = \begin{cases} 0 & i \neq 0 \\ C_n & i = 0 \end{cases}$ . Entonces  $H^i(C_\cdot) = H^i(C_\cdot)$

*Demostración.* Denotemos  $i: C_i \rightarrow C_i^0$  a las inclusiones del teorema. El morfismo  $\varphi: H^i(C.) \rightarrow H^i(C'), \bar{c}_i \mapsto i(\bar{c}_i)$  está bien definido: dado un borde  $d.c_{i-1}$ , se verifica que  $id.c_{i-1} = d.ic_{i-1} = d'.ic_{i-1}$  es un borde para  $d'$ . Además, si  $c_i$  es un ciclo para  $d$ , entonces  $ic_i$  es un ciclo para  $d'$ , ya que  $d'.ic_i = d.ic_i = id.c_i = 0$ . Veamos que  $\varphi$  es un isomorfismo. Veamos sólo la epiyectividad, pues la inyectividad es más sencilla. Sea  $c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0$  un ciclo para  $d$ . Ha de verificarse que  $d.c_n^i = 0$ , luego existe  $\tilde{c}_n^{i-1} \in C_n^{i-1}$  tal que  $d.\tilde{c}_n^{i-1} = (-1)^{n+1}c_n^i$ . Entonces, en cohomología,  $c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0 = d.\tilde{c}_n^{i-1} + c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0 = (d.\tilde{c}_n^{i-1} + c_n^i) + \dots + c_{n+i}^0$ . Argumentando así sucesivamente obtendremos que  $c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0 = \tilde{c}_{n+i}^0$  en cohomología. De nuevo tendremos que existe  $c_{n+i} \in C_{n+i}$  tal que  $ic_{n+i} = \tilde{c}_{n+i}^0$  y se verifica que  $d.c_{n+i} = 0$ , porque  $id.c_{n+i} = d.ic_{n+i} = d.\tilde{c}_{n+i}^0$ , que es cero ya que  $d.\tilde{c}_{n+i}^0 = 0$ . Hemos concluido entonces que

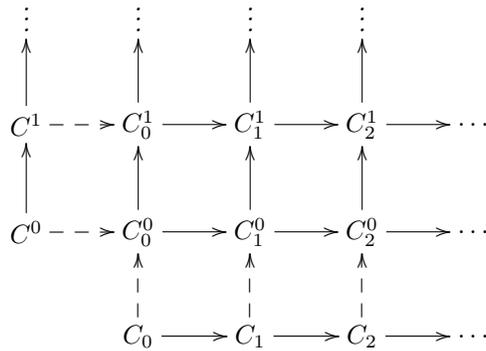
$$\overline{c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0} = \varphi(\bar{c}_{n+i})$$

En tres gráficos, hemos escrito



□

**Corolario 3.2.11.** *Sea el bicomplejo diferencial*



de filas y columnas acíclicas. Entonces  $H^i(C') = H^i(C.) = H^i(C)$ .

**Teorema 3.2.12** (De Rham). *Sea  $R$ . una resolución de  $F$  por haces acíclicos, es decir una sucesión exacta*

$$R_0 \xrightarrow{d_0} R_1 \xrightarrow{d_1} R_2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

de modo que cada  $R_i$  es acíclico y  $\text{Ker } d_0 = F$ . Se cumple que la cohomología de  $X$  con valores en  $F$  es la cohomología del complejo de secciones globales de  $R$ , es decir,  $H^i(X, F) = H^i(X, R \cdot(X))$ .

*Demostración.* Consideremos el bicomplejo de grupos abelianos  $C \cdot R \cdot(X) = \bigoplus_{i,j} C^i(R_j)(X)$  y el diagrama diferencial

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 C^1 F(X) & \dashrightarrow & C^1 R_0(X) & \longrightarrow & C^1 R_1(X) & \longrightarrow & C^1 R_2(X) \longrightarrow \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 C^0 F(X) & \dashrightarrow & C^0 R_0(X) & \longrightarrow & C^0 R_1(X) & \longrightarrow & C^0 R_2(X) \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & R_0(X) & \longrightarrow & R_1(X) & \longrightarrow & R_2(X) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

que es de filas acíclicas, porque el functor  $\Gamma(X, C^r(-))$  sobre la categoría de haces es exacto, y de columnas acíclicas por ser los  $R_r$  acíclicos.

Por el teorema 3.2.11,  $H^i(X, R \cdot(X)) = H^i(X, C \cdot F(X)) = H^i(X, F)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.13.** Si  $X$  es un espacio topológico noetheriano y  $\{F_i\}$  es un sistema inductivo de haces de grupos, entonces

$$\varinjlim H^n(X, F_i) = H^n(X, \varinjlim F_i)$$

*Demostración.*  $\varinjlim C \cdot F_i$  es una resolución de  $\varinjlim F_i$  por haces flascos. Por el teorema de De Rham,

$$H^n(X, \varinjlim F_i) = H^n(\Gamma(X, \varinjlim C \cdot F_i)) \stackrel{??}{=} H^n(\varinjlim \Gamma(X, C \cdot F_i)) = \varinjlim H^n(\Gamma(X, C \cdot F_i)) = \varinjlim H^n(X, F_i)$$

$\square$

### 3.3. Aciclicidad de los haces cuasicoherentes sobre esquemas afines

Nuestro objetivo, en esta sección, es demostrar que los haces cuasicoherentes, en esquemas afines, son acíclicos. Probaremos primero esta afirmación en esquemas afines de dimensión uno, porque la demostración es menos aparatosa, pero contiene ya todos los elementos de la demostración general.

**Definición 3.3.1.** Dado un haz  $F$  sobre un espacio topológico  $X$ , llamaremos soporte de  $F$  y lo denotaremos  $\text{Sop } F$ , a

$$\text{Sop } F = \{x \in X : F_x \neq 0\}$$

Si  $X$  es un esquema, denotaremos  $\dim F = \max\{\dim \bar{x} \mid x \in \text{Sop } F\}$ .

**Proposición 3.3.2.** Sea  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente de modo que  $\dim \mathcal{M} = 0$ . Se cumple

1.  $\mathcal{M}(U) = \bigoplus_{x \in U} \mathcal{M}_x$ . Por tanto,  $\mathcal{M}$  es un haz flasco.

2. Para todo haz de línea  $L$ ,  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L \simeq \mathcal{M}$ .

*Demostración.* El soporte de una sección  $s \in \mathcal{M}(U)$  es un cerrado. Por tanto, como  $\dim \mathcal{M} = 0$ , los puntos  $x \in U$  donde el germe  $s_x$  es no nulo es un número finito de puntos cerrados. Así pues, para toda  $s_x \in \mathcal{M}_x$  y abierto  $U$  que contiene a  $x$ , existe una sección  $s \in \mathcal{M}(U)$  de modo que la fibra de  $s$  en  $x$  es  $s_x$  y es nula en cualquier otro punto. Es fácil concluir que  $\mathcal{M}(U) = \bigoplus_{x \in U} \mathcal{M}_x$ .

Observemos que si  $\dim \mathcal{M} = 0$  entonces  $\dim(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L) = 0$ . Además, para cada  $x$  podemos definir un isomorfismo  $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L)_x = \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{C,x}} L_x \simeq \mathcal{M}_x$ . Por tanto,

$$\mathcal{M}(U) = \bigoplus_{x \in U} \mathcal{M}_x \simeq \bigoplus_{x \in U} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L)_x = (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L)(U)$$

y  $\mathcal{M} \simeq (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L)$ . □

**Proposición 3.3.3.** *Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín íntegro de dimensión 1 y  $M$  un  $A$ -módulo. Se cumple que*

$$H^i(X, \tilde{M}) = \begin{cases} M & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $\Sigma = A_{A-\{0\}}$  y  $M_\Sigma = M_{A-\{0\}}$ . Sea el morfismo de localización  $\phi: M \rightarrow M_\Sigma$ ,  $m \mapsto \frac{m}{1}$ . Obviamente,  $\phi$  es un isomorfismo en el punto genérico, por tanto,  $\dim \text{Ker } \phi < 1$  y  $\dim \text{Coker } \phi < 1$ . Luego  $\widetilde{\text{Ker } \phi}$  y  $\widetilde{\text{Coker } \phi}$  son flascos por 3.3.2.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{Im } \phi} \hookrightarrow \widetilde{M_\Sigma} \rightarrow \widetilde{\text{Coker } \phi} \rightarrow 0$$

Como  $\widetilde{M_\Sigma}$  es constante, es flasco. Tomando secciones globales, de la sucesión exacta larga de cohomología y 2.1.7, obtenemos que  $H^i(X, \widetilde{\text{Im } \phi}) = 0$ , para  $i \geq 0$ .

Ahora, de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{Ker } \phi} \hookrightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{\text{Im } \phi} \rightarrow 0$$

tomando secciones globales, de la sucesión exacta larga de cohomología y 2.1.7, concluimos. □

**Teorema 3.3.4.** *Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín noetheriano de dimensión  $n < \infty$  y  $M$  un  $A$ -módulo. Se verifica*

$$H^i(X, \tilde{M}) = \begin{cases} M & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Vamos a demostrar el teorema por inducción sobre la  $\dim M$ .

Si  $\dim M = -1$  entonces  $M = 0$  y en este caso el teorema es trivial. En general, sean  $\{x_i\}$  los puntos minimales del  $\text{Sop } M$ . Consideremos el morfismo de localización  $A \rightarrow A_{x_i}$ , que induce la inclusión  $i: \text{Spec } A_{x_i} \hookrightarrow \text{Spec } A$ .  $\text{Sop } i^* \tilde{M} = \text{Sop } \tilde{M} \cap \text{Spec } A_{x_i} = x_i$ , luego por la proposición 3.3.2,  $i^* \tilde{M}$  es flasco y  $i_* i^* \tilde{M} = \tilde{M}_{x_i}$  es flasco. Por tanto,  $\bigoplus_i \tilde{M}_{x_i}$  es flasco. Consideremos el morfismo

natural  $\phi: M \rightarrow \bigoplus_i M_{x_i}$  (observemos que el soporte de cada  $m \in M$  es un cerrado, que sólo puede contener un número finito de los  $x_i$ ). Se verifica que  $\dim \text{Ker } \phi < \dim M$  y  $\dim \text{Coker } \phi < \dim M$ , pues  $\phi$  es un isomorfismo en los puntos  $x_i$ . Por tanto, por inducción sobre la dimensión tenemos que  $H^i(X, \text{Coker } \phi) = 0$  y  $H^i(X, \text{Ker } \phi) = 0$  para  $i > 0$ . De la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Im } \phi \rightarrow \bigoplus_i \tilde{M}_{x_i} \rightarrow \text{Coker } \phi \rightarrow 0$$

la proposición 2.1.7 y la sucesión exacta larga de cohomología, obtenemos que  $H^i(X, \text{Im } \phi) = 0$  para  $i > 0$ . De la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Ker } \phi \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \text{Im } \phi \rightarrow 0$$

la proposición 2.1.7 y la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos la demostración del teorema.  $\square$

**Corolario 3.3.5.** *Sea  $\pi: X \rightarrow Y$  un morfismo afín de esquemas y  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente en  $X$ . Se verifica que*

$$H^i(X, \mathcal{M}) = H^i(Y, \pi_* \mathcal{M}).$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M} \rightarrow C_0(\mathcal{M}) \rightarrow C_1(\mathcal{M}) \rightarrow \dots$  una resolución de  $\mathcal{M}$  por haces flascos. Se verifica que  $\pi_* \mathcal{M} \rightarrow \pi_* C_0(\mathcal{M}) \rightarrow \pi_* C_1(\mathcal{M}) \rightarrow \dots$  es una sucesión exacta, porque para cada abierto afín  $U \subset Y$ ,  $H^i(\Gamma(U, \pi_* C.(\mathcal{M}))) = H^i(\Gamma(\pi^{-1}(U), C.(\mathcal{M}))) = H^i(\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{M}))$  3.3.4 = 0. Además, la imagen directa de un haz flasco es flasco. Por tanto,

$$H^i(Y, \pi_* \mathcal{M}) = H^i(\Gamma(Y, \pi_* C.(\mathcal{M}))) = H^i(\Gamma(X, C.(\mathcal{M}))) = H^i(X, \mathcal{M}).$$

$\square$

**Teorema 3.3.6.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano de dimensión finita y  $\mathcal{M}$  un haz en  $X$ . Se verifica*

$$H^i(X, \mathcal{M}) = 0, \text{ para } i > \dim \mathcal{M}$$

*Demostración.* Demostremos el teorema por inducción sobre  $\dim \mathcal{M}$ .

Si  $\dim \mathcal{M} = -1$  entonces  $\mathcal{M} = 0$  y el teorema es obvio. Sean  $\{x_i\}$  los puntos minimales de  $\text{Sop } \mathcal{M}$ . Sea  $\mathcal{M}_{x_i}$  el haz sobre  $x_i$  definido por  $\mathcal{M}_{x_i}(x_i) = \mathcal{M}_{x_i}$ . Sea  $i: x_i \hookrightarrow X$  la inclusión obvia y denotemos también  $\mathcal{M}_{x_i} := i_* \mathcal{M}_{x_i}$ . Las imágenes directas de un haz flasco es flasco luego  $\mathcal{M}_{x_i}$  es flasco. Tenemos un morfismo natural  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{x_i}$ ,

$$\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}_{x_i}(U), m \mapsto \begin{cases} m_{x_i} & \text{si } x_i \in U \\ 0 & \text{si } x_i \notin U \end{cases}$$

Sea  $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \bigoplus_{x_i} \mathcal{M}_{x_i}$  el morfismo natural. Obsérvese que la fibra de una sección de  $\mathcal{M}$  es no nula en un número finito de  $x_i$ . El morfismo  $\phi$  es un isomorfismo en los  $x_i$  y la dimensión de  $\text{Ker } \phi$  y  $\text{Coker } \phi$  es menor estrictamente que la de  $\mathcal{M}$ , porque  $(\mathcal{M}_{x_i})_y = 0$  si  $y \notin \bar{x}_i$ . Por hipótesis de inducción,  $H^i(X, \text{Ker } \phi) = H^i(X, \text{Coker } \phi) = 0$ , para  $i \geq \dim \mathcal{M}$ . De la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Im } \phi \rightarrow \bigoplus_{x_i} \mathcal{M}_{x_i} \rightarrow \text{Coker } \phi \rightarrow 0$$

y la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos que  $H^i(X, \text{Im } \phi) = 0$ , para  $i > \dim \mathcal{M}$ . De la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Ker } \phi \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \text{Im } \phi \rightarrow 0$$

y la sucesión exacta de cohomología obtenemos que  $H^i(X, \mathcal{M}) = 0$ , para  $i > \dim \mathcal{M}$ .  $\square$

**Ejercicio 3.3.7.** Consideremos en la recta proyectiva los abiertos  $U_0 = \mathbb{P}_1 - \{0\}$  y  $U_1 = \mathbb{P}_1 - \{\infty\}$ . Si  $V \subset \mathbb{P}_1$  es un abierto denotemos  $\mathcal{O}_V$  el haz sobre  $\mathbb{P}_1$  definido por  $\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(U \cap V)$ . Demostrar que la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \rightarrow \mathcal{O}_{U_0} \oplus \mathcal{O}_{U_1} \rightarrow \mathcal{O}_{U_0 \cap U_1} \rightarrow 0$$

de morfismos obvios es exacta. Probar que  $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = 0$ .

### 3.4. Caracterización cohomológica de la recta proyectiva

Sea  $C$  una curva completa no singular. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \Sigma_C \xrightarrow{\pi} \Sigma_C / \mathcal{O}_C \rightarrow 0 \quad *$$

donde  $\Sigma_C$  es el haz constante  $\Sigma_C$ . Luego  $\Sigma_C / \mathcal{O}_C = \bigoplus_{x \in C} \Sigma_C / \mathcal{O}_{C,x}$ . Sea  $x \in C$  un punto cerrado y  $f \in \Sigma_C$ . Si  $v_x(f) \geq 0$  entonces  $f \in \mathcal{O}_{C,x}$ . Supongamos que  $v_x(f) = -n$ ,  $n \leq 0$ . Denotemos  $\mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{O}_{C,x} = (t_x)$ , entonces  $f = \frac{a}{t_x^n}$ , para un  $a \in \mathcal{O}_{C,x}$ . Si  $x$  es un punto racional, sabemos que  $a = \sum_{i=0}^n a_i t_x^i + b t_x^n$ , con  $a_i \in k$  y  $b \in \mathcal{O}_{C,x}$ . En conclusión,  $f = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{t_x^{n-i}} \pmod{\mathcal{O}_{C,x}}$ , luego

$$\begin{aligned} \Sigma_C / \mathcal{O}_{C,x} &= \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t_x^i}, n \text{ variable, } a_i \in k \right\} \\ &= \{ \text{partes princ. del desarrollo de Laurent en el punto } x \text{ de } f \in \Sigma_C \} \end{aligned}$$

El morfismo  $\pi$  asigna a cada  $f \in \Sigma_C = \Sigma_C(U)$  sus partes principales del desarrollo de Laurent en cada  $x \in U$ .

**Ejercicio 3.4.1.** Si el punto cerrado  $x \in C$  no es racional, entonces

$$\Sigma_C / \mathcal{O}_{C,x} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t_x^i}, n \text{ variable, } a_i \in \mathcal{O}_{C,x} / \mathfrak{m}_x \right\}$$

(Pista: Recordar que por el teorema de Cohen el morfismo de paso al cociente  $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{C,x} / \mathfrak{m}_x \widehat{\mathcal{O}}_{C,x} = \mathcal{O}_{C,x} / \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{C,x}$  tiene sección).

**Teorema 3.4.2.** Una curva  $C$  completa y no singular es isomorfa a la recta proyectiva  $\Leftrightarrow$  Existe un punto racional  $x \in C$  y  $H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Tomemos la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión exacta  $*$ , con  $C = \mathbb{P}_1$

$$\Sigma_{\mathbb{P}_1} \xrightarrow{\pi} \Gamma(\mathbb{P}_1, \Sigma_{\mathbb{P}_1} / \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = \bigoplus_{y \in \mathbb{P}_1} \Sigma_{\mathbb{P}_1} / \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1,y} \rightarrow H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_1, \Sigma_{\mathbb{P}_1}) = 0$$

Dada  $s \in \Gamma(\mathbb{P}_1, \Sigma_{\mathbb{P}_1} / \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1})$  entonces  $s = \left( \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \right)$ .<sup>1</sup> Las funciones  $\frac{1}{x-\alpha}$  tienen sólo polo en el punto  $\alpha \in \mathbb{P}_1$ , por tanto, la imagen por  $\pi$  de  $f(x) = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}$  es  $s$ . En conclusión,  $\pi$  es epi y  $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = 0$ .

<sup>1</sup>El desarrollo de Laurent en el punto del infinito es un polinomio en  $x$ , sin coeficiente constante.

⇐) Consideremos de nuevo, la sucesión exacta larga, asociada a \*

$$\Sigma_C \rightarrow \Gamma(C, \Sigma_C/\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{y \in C} \Sigma_C/\mathcal{O}_{C,y} \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0 \quad **$$

Sea  $s = (0, \dots, \frac{1}{t_x}, \dots, 0) \in \Gamma(C, \Sigma_C/\mathcal{O}_C)$ , donde entendemos que  $(\mathbf{m}_x)_x = t_x \cdot \mathcal{O}_{C,x}$ . Por la sucesión exacta \*\* existe una  $f \in \Sigma_C$  sin polos en  $C$ , salvo en  $x$  donde tiene un polo de orden 1. Por tanto, el morfismo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_1 \\ \Sigma_C & \longleftarrow & k(x) \\ f & \longleftarrow & x \end{array}$$

es de grado 1, es decir  $C \simeq \mathbb{P}_1$ . □

**Ejercicio 3.4.3.** Sea  $C$  la curva del plano proyectivo real de ecuación afín  $x^2 + y^2 = 0$ . Demostrar

1. El cierre entero de  $\mathbb{R}$  en  $\Sigma_C$  es  $\mathbb{C}$ .
2.  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \mathbb{R}$ .
3. La desingularización de  $C$  es isomorfa a la recta proyectiva compleja.
4. El origen es un punto racional de  $C$  y  $\dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$ .

## 3.5. Finitud de la dimensión de los grupos de cohomología

### 3.5.1. Cohomología de los haces coherentes en variedades proyectivas

**Proposición 3.5.1.**  $\Gamma(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = \{\text{Polinomios homogéneos } p(x_0, \dots, x_r) \text{ de grado } n\}$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) &= \left\{ \begin{array}{l} \{s_i \in \Gamma(U_{x_i}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i] \cdot x_i^n\}_i, \text{ tales que} \\ s_i = s_j \text{ en } \Gamma(U_{x_i} \cap U_{x_j}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = k[x_0/x_i, \dots, x_r/x_i]_{x_j/x_i} \cdot x_i^n \end{array} \right\} \\ &= \{\text{Pol. hom. } p(x_0, \dots, x_r) \text{ de grado } n\} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es una sencilla comprobación. □

La sucesión exacta de módulos graduados

$$0 \rightarrow k[x_0, \dots, x_n][n-1] \xrightarrow{x_0} k[x_0, \dots, x_n][n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n][n] \rightarrow 0$$

define la sucesión exacta de haces

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n-1) \xrightarrow{x_0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n) \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{r-1}}(n) \rightarrow 0 \quad *$$

donde  $\mathbb{P}_{r-1} \xrightarrow{i} \mathbb{P}_r$  es el hiperplano  $x_0 = 0$ . Denotemos por  $U = \mathbb{P}_r - \mathbb{P}_{r-1}$  y por  $\mathcal{O}_U$  al haz en  $\mathbb{P}_r$  definido por  $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}(U \cap V)$ , para cada abierto  $V \subset \mathbb{P}_r$ .

**Notación:** Dado un  $k$ -esquema  $X$  y un haz cuasicoherente  $\mathcal{M}$  denotaremos  $h^i(X, \mathcal{M}) = \dim_k H^i(X, \mathcal{M})$ .

**Teorema 3.5.2.**

$$h^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = \begin{cases} \binom{n+r}{r} = \left| \frac{(n+r) \cdot \dots \cdot (n+1)}{r!} \right|, & i = 0, n \geq 0; i = r, n < 0 \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

*Demostración.* Conocemos ya, por 3.5.1,  $h^0(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = \binom{n+r}{r}$ . Por inducción sobre  $r$  obtenemos, de la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión \*:

1) Para  $n \geq 0$ ,  $H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n+1))$  para  $i > 0$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) &= \varinjlim_{m > n} H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(m)) = H^i(\mathbb{P}_r, \varinjlim_{m > n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(m)) \\ &= H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_U) = H^i(\mathbb{P}_r - \mathbb{P}_{r-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r - \mathbb{P}_{r-1}}) = 0 \end{aligned}$$

2) Para  $n \leq 0$  se demuestra el teorema por inducción descendente sobre  $n$  (observemos que el caso  $n = 0$  ha sido resuelto en el caso anterior). □

**Teorema 3.5.3.** *Sea  $X = \text{Proj } k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  una variedad algebraica proyectiva y  $\mathcal{M}$  un haz coherente en  $X$ . Se cumple que  $h^i(X, \mathcal{M}) < \infty$  para todo  $i$ .*

*Demostración.* Sea  $k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  el epimorfismo graduado obvio, que induce una inmersión cerrada  $i: X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ . Por ser  $i$  un morfismo finito,  $h^i(X, \mathcal{M}) = h^i(X, i_*\mathcal{M})$  y  $i_*\mathcal{M}$  es un haz coherente en  $\mathbb{P}_n$ . Basta demostrar el teorema para  $X = \mathbb{P}_n$ . Por 2.2.5, sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(n_i) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

Tomando la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos que  $h^n(\mathbb{P}_n, \mathcal{M}) < \infty$ . En particular  $h^n(\mathbb{P}_n, \text{Ker}) < \infty$ . De nuevo, por la sucesión exacta larga de cohomología  $h^{n-1}(\mathbb{P}_n, \mathcal{M}) < \infty$ . En particular  $h^{n-1}(\mathbb{P}_n, \text{Ker}) < \infty$ . Por inducción descendente concluimos. □

**Proposición 3.5.4.** *Sea  $i: C \hookrightarrow \mathbb{P}_2$  la curva proyectiva plana definida por un polinomio homogéneo  $p_n(x_0, x_1, x_2) = 0$ , entonces  $h^1(C, \mathcal{O}_C) = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ .*

*Demostración.* Tómesse la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión

$$0 \rightarrow \mathfrak{p}_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n) \xrightarrow{\cdot p_n(x_0, x_1, x_2)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

donde  $\mathfrak{p}_C$  es el haz de ideales de funciones que se anulan en  $C$ . □

**Corolario 3.5.5.** *Sea  $C$  una curva proyectiva plana íntegra, de grado  $n$ , sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y  $\tilde{C}$  la desingularización de  $C$ . Entonces el género geométrico  $g = h^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$  es*

$$g = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} - \sum_{x \in \text{Sing } C} \sum_{y \in a_x} \frac{m_y \cdot (m_y - 1)}{2}$$

<sup>2</sup>En espacios topológicos noetherianos la cohomología conmuta con límites inductivos.

donde  $a_x$  es el árbol de explosión asociado a la desingularización de  $x$ , y  $m_y$  es la multiplicidad en el punto  $y$ .

*Demostración.* Sea  $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$  el morfismo de desingularización. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \bigoplus_{x \in \text{Sing } C} \tilde{\mathcal{O}}_{C,x} / \mathcal{O}_{C,x} \rightarrow 0$$

Como  $k$  es algebraicamente cerrado, tenemos que  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \Gamma(C, \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) = \Gamma(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) = k$ , luego

$$g = h^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) = h^1(C, \mathcal{O}_C) - \dim_k \bigoplus_{x \in \text{Sing } C} \tilde{\mathcal{O}}_{C,x} / \mathcal{O}_{C,x}$$

Sabemos que  $\dim_k \bigoplus_{x \in \text{Sing } C} \tilde{\mathcal{O}}_{C,x} / \mathcal{O}_{C,x} = \sum_{x \in \text{Sing } C} \sum_{y \in a_x} \frac{m_y \cdot (m_y - 1)}{2}$ . Por la proposición anterior  $h^1(C, \mathcal{O}_C) = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$  y concluimos.  $\square$

### 3.5.2. Cohomología de los haces coherentes en curvas

**Teorema 3.5.6.** *Sea  $C$  una curva completa y  $\mathcal{M}$  un haz coherente en  $C$ . Se verifica*

1.  $H^0(C, \mathcal{M})$  y  $H^1(C, \mathcal{M})$  son  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita.
2.  $H^i(C, \mathcal{M}) = 0$  para  $i > 1$ .

*Demostración.* Sea  $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$  el morfismo de desingularización de  $C$ . Sea el morfismo natural  $\mathcal{M} \rightarrow \pi_* \pi^* \mathcal{M}$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker } i \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \pi_* \pi^* \mathcal{M} \rightarrow \text{Coker } i \rightarrow 0$$

$\text{Coker } i$  y  $\text{Ker } i$  tiene el soporte concentrado en los puntos singulares de  $C$ , luego es flasco y sus secciones son un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita (argumentando como en el teorema anterior). Así pues, basta demostrar el teorema para  $\pi_* \pi^* \mathcal{M}$ . Ahora bien,  $H^i(C, \pi_* \pi^* \mathcal{M}) = H^i(\tilde{C}, \pi^* \mathcal{M})$  porque  $\pi$  es un morfismo afín, y éstos “conservan” la cohomología por 3.3.5. En conclusión, como  $\pi^* \mathcal{M}$  es coherente por ??, podemos suponer que  $C$  es no singular.

Sea  $\phi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  un morfismo finito en la recta proyectiva. Se verifica que  $H^i(C, \mathcal{M}) = H^i(\mathbb{P}_1, \phi_* \mathcal{M})$ . Luego basta demostrar el teorema para la recta proyectiva y hemos concluido.  $\square$



## Capítulo 4

# Teoría de la dualidad en curvas algebraicas

### 4.1. Introducción

Si  $X$  es una variedad diferenciable compacta orientada, tenemos el isomorfismo  $H^i(X, \mathbb{R}) \simeq H^{n-i}(X, \mathbb{R})^*$ ,  $w_i \mapsto w_i: w_i(w_{n-i}) = \int_X w_i \wedge w_{n-i}$ . El objetivo de la teoría de la dualidad es dualizar la cohomología. Ahora en Geometría Algebraica, sea  $C$  es una curva completa y consideremos el funtor sobre la categoría de  $\mathcal{O}_C$ -módulos coherentes

$$\mathcal{M} \rightsquigarrow H^1(C, \mathcal{M})^*$$

Este funtor es exacto por la izquierda, por el teorema de representabilidad será representable por un  $\mathcal{O}_C$ -módulo cuasicoherente  $w_C$ . Es decir,

$$\text{Hom}_C(\mathcal{M}, w_C) = H^1(C, \mathcal{M})^*$$

Probaremos que si  $C$  es no singular entonces  $w_C = \Omega_{C/k}$ . Además, el morfismo  $\text{Id}: \Omega_{C/k} \rightarrow \Omega_{C/k}$  se corresponderá por dualidad con un elemento  $\text{Res} \in H^1(C, \Omega_{C/k})^*$ , que es el residuo del análisis complejo.

La teoría de dualidad, junto con el Riemann-Roch fuerte permite el cálculo de la dimensión de los espacios de las funciones con polos en determinados puntos de órdenes prefijados. Cálculo que resuelve muchos problemas de tipo geométrico. Veremos diversas aplicaciones de la teoría de dualidad: Teorema de Hurwitz, clasificación de las curvas elípticas e hiperelípticas, inmersión canónica de una curva en un espacio proyectivo, etc.

Supondremos siempre que las curvas consideradas son completas, no singulares sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

### 4.2. Teorema de Riemann-Roch débil

Sea  $C$  una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

**Teorema 4.2.1** (Riemann-Roch débil). *Sea  $D$  un divisor de  $C$  y  $\mathcal{L}_D$  el haz de línea definido por  $D$ . Se verifica*

$$\chi(C, \mathcal{L}_D) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr } D$$

*Demostración.* Dado un punto cerrado  $x \in C$ , consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{-x} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow k(x) \rightarrow 0$$

donde  $k(x)$  es un haz concentrado en  $x$  y  $k(x)_x = k$ , de modo que  $h^0(C, k(x)) = \dim_k k = 1$ . Tensorializando por  $\mathcal{L}_D$  resulta

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{D-x} \rightarrow \mathcal{L}_D \rightarrow k(x) \rightarrow 0$$

Luego  $\chi(\mathcal{L}_D) = \chi(\mathcal{L}_{D-x}) + 1$ . Así pues, el teorema de Riemann-Roch se verificará para  $\mathcal{L}_D$  si y sólo si se verifica para  $\mathcal{L}_{D-x}$ . Por tanto, por suma y resta de puntos a  $D$ , el teorema de Riemann-Roch se verificará para  $\mathcal{L}_D$  si y sólo si se verifica para  $\mathcal{O}_C$ , y en este caso es obvio.  $\square$

### 4.3. Algunos resultados técnicos

Las siguientes proposiciones serán útiles en teoría de dualidad.

**Definición 4.3.1.** Sea  $X$  un esquema íntegro, de punto genérico  $p_g$ . Dado un haz  $\mathcal{M}$  cuasicoherente sobre  $X$  consideremos el haz constante  $\mathcal{M}_{p_g}$ . Llamaremos parte de torsión de  $\mathcal{M}$  y denotaremos  $T(\mathcal{M})$ , al núcleo del morfismo natural  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{p_g}$ . Diremos que  $\mathcal{M}$  es de torsión si  $\mathcal{M} = T(\mathcal{M})$ . Diremos que  $\mathcal{M}$  es libre de torsión si  $T(\mathcal{M}) = 0$ , es decir, si el morfismo  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{p_g}$  es inyectivo. Llamaremos rango de un módulo coherente  $\mathcal{M}$  a  $\dim_{\mathcal{O}_{X, p_g}} \mathcal{M}_{p_g}$ .

Por ejemplo, los haces de línea sobre un esquema íntegro son módulos coherentes libres de torsión de rango 1.

**Proposición 4.3.2.** Sea  $x \in C$  un punto cerrado y  $\mathcal{M}$  un módulo coherente de rango  $r$ . Denotemos  $\mathcal{M}_{nx} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{nx}$ . Entonces,

1.  $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = \text{cte}$  para todo  $n \gg 0$ , y  $h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) = r \cdot n + \text{cte}$  para todo  $n \gg 0$ .
2.  $h^1(C, \mathcal{M}_{-nx}) = r \cdot n + \text{cte}$  para todo  $n \gg 0$ , y  $h^0(C, \mathcal{M}_{-nx}) = \text{cte}'$  para todo  $n \gg 0$ .

*Demostración.* 1. Si  $\mathcal{M}$  es de rango cero, entonces  $\mathcal{M}_{nx} = \mathcal{M}$ ,  $H^0(C, \mathcal{M}_{nx}) = H^0(C, \mathcal{M})$  y  $H^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = 0$ . Se concluye.

Sea  $T(\mathcal{M})$  la torsión de  $\mathcal{M}$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/T(\mathcal{M}) \rightarrow 0$$

Tensorializando por  $\mathcal{L}_{nx}$ , obtenemos la sucesión exacta  $0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}_{nx} \rightarrow (\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_{nx} \rightarrow 0$ . Por tanto,  $h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) = h^0(C, T(\mathcal{M})) + h^0(C, (\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_{nx})$  y  $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = h^1(C, (\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_{nx})$ . En conclusión, podemos suponer que  $\mathcal{M}$  no tiene torsión.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{(n-1)x} \rightarrow \mathcal{L}_{nx} \rightarrow k(x) \rightarrow 0$$

Tensorializando por  $\otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{M}$ , la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_{(n-1)x} \xrightarrow{i} \mathcal{M}_{nx} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x) \rightarrow 0$$

es exacta, es decir  $i$  es inyectiva. En efecto, en  $C - x$  obviamente lo es, y en gérmenes en  $x$  lo es porque  $i$  es multiplicar por un parámetro de la curva que pase por  $x$ .

En cohomología tenemos el epimorfismo  $H^1(C, \mathcal{M}_{(n-1)x}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{M}_{nx})$ , luego  $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) \leq h^1(C, \mathcal{M}_{(n-1)x})$  y para todo  $n \gg 0$   $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = cte$ . Ahora, para todo  $n > N$ ,  $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = cte$  y  $h^0(C, \mathcal{M}_{(n+1)x}) = h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) + h^0(C, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x))$ . Ahora bien,  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x)(C) = (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x))_x = \mathcal{M}/\mathfrak{m}_x \mathcal{M}$ , que es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión  $r$ , porque  $\mathcal{M}_x$  es libre de torsión de rango  $r$ , luego libre de rango  $r$ . En conclusión,  $h^0(C, \mathcal{M}_{(n+1)x}) = h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) + r$ , y en general  $h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) = h^0(C, \mathcal{M}_{Nx}) + (n - N) \cdot r = r \cdot n + cte..$

2. Pruébese primero que se puede suponer que  $\mathcal{M}$  no tiene torsión y a continuación considérese la sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathcal{M}_{(-n-1)x} \rightarrow \mathcal{M}_{-nx} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x) \rightarrow 0$ . □

**Lema 4.3.3.** *Sea  $C$  una curva íntegra (no necesariamente no singular, ni  $k$  algebraicamente cerrado).*

1. *Sea  $\mathcal{M} \neq 0$  un haz coherente libre de torsión. Existe un haz  $L$  coherente libre de torsión de rango 1 y un morfismo inyectivo  $L \hookrightarrow \mathcal{M}$ , tal que  $\mathcal{M}/L$  no tiene torsión.*
2. *Sea  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente libre de torsión. Existe un haz de ideales  $L$  de rango 1, es decir, no nulo y un morfismo inyectivo  $L \hookrightarrow \mathcal{M}$ .*

*Demostración.* 1. Sea  $s \in \mathcal{M}_{p_g}$ . Consideremos el haz constante  $\mathcal{M}_{p_g}$ . Tenemos que el haz constante  $\Sigma_C \cdot s$  y  $\mathcal{M}$  son subhaces de  $\mathcal{M}_{p_g}$ . Sea  $L = \Sigma_C \cdot s \cap \mathcal{M}$  el “haz de ceros y polos de  $s$ ”. Se verifica

- a)  $L$  es coherente sin torsión porque  $\mathcal{M}$  lo es.
- b)  $L$  es de rango 1 porque  $L_{p_g} = \Sigma_X \cdot s \cap \mathcal{M}_{p_g} = \Sigma_C \cdot s$ .
- c)  $L$  está incluido en  $\mathcal{M}$ ,  $(\mathcal{M}/L)_{p_g} = \mathcal{M}_{p_g}/\Sigma_C \cdot s$  y el núcleo de  $\mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{M}/L)_{p_g}$  es  $L$ , luego  $\mathcal{M}/L \hookrightarrow (\mathcal{M}/L)_{p_g}$ .

Con todo, hemos concluido.

2. Dada  $s \in \mathcal{M}_{p_g}$  no nula, tómesese  $L = \mathcal{O}_C \cdot s \cap \mathcal{M}$ . □

**Proposición 4.3.4.** *Sea  $x \in C$  un punto cerrado. Sea  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente. Si  $h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) \leq r \cdot n + cte.$ , para todo  $n \gg 0$  entonces  $\mathcal{M}$  es un módulo coherente de rango menor o igual que  $r$ .*

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre  $r$ .

Consideremos la sucesión exacta natural  $0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ . Tensorializando por  $\mathcal{L}_{nx}$ , tenemos  $0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}_{nx}$ . Por tanto,  $h^0(C, T(\mathcal{M})) < \infty$ . Ahora bien,  $H^0(C, T(\mathcal{M})) = \bigoplus_{x \in C} T(\mathcal{M})_x$ . Luego sólo para un número finito de puntos cerrados  $T(\mathcal{M})_x \neq 0$  y éstos son  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita. En consecuencia,  $T(\mathcal{M})$  es un módulo coherente de rango cero.

Haciendo cociente por  $T(\mathcal{M})$  podemos suponer que  $\mathcal{M}$  no tiene torsión.

Sea  $L$  coherente de rango 1 y una inclusión  $L \hookrightarrow \mathcal{M}$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow L_{nx} \rightarrow \mathcal{M}_{nx} \rightarrow (\mathcal{M}/L)_{nx} \rightarrow 0$$

Por la sucesión exacta larga de cohomología e inducción sobre  $r$ ,  $\mathcal{M}/L$  es coherente de rango menor o igual que  $r - 1$ . Luego  $\mathcal{M}$ , es coherente de rango menor o igual que  $r$ . □

**Ejercicio 4.3.5.** Sea  $C$  una curva completa no singular y  $x \in C$  un punto cerrado. Se verifica que  $C - x$  es una curva afín.

*Resolución:* Por 4.3.2  $h^0(C, \mathcal{L}_{(n+1)x}) \neq h^0(C, \mathcal{L}_{nx})$  para  $n \gg 0$ , luego existe una función  $f \in \Sigma_C$  con un único polo (de orden  $n+1$ ) en  $x$ . Por tanto, el morfismo afín definido por  $f$

$$f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$$

verifica que  $f^{-1}(\infty) = (n+1)x$ , luego  $C - x = f^{-1}(\mathbb{P}_1 - \infty)$ , que es afín.

## 4.4. Teoremas de dualidad y Riemann-Roch fuerte

Por los teoremas de finitud del capítulo anterior sabemos que  $H^2(C, \mathcal{M}) = 0$  para todo haz cuasicoherente  $\mathcal{M}$ . Por tanto, el funtor,  $H^1(C, \mathcal{M})^*$  definido en la categoría de módulos cuasicoherentes, que asigna a cada haz cuasicoherente el dual sobre  $k$  de su primer grupo de cohomología, es exacto por la izquierda y transforma límites inductivos en límites proyectivos.

**Definición 4.4.1.** Al haz cuasicoherente, que denotaremos por  $w_C$ , representante del funtor  $H^1(C, -)^*$ , que existe por el teorema de representabilidad, se le denomina haz dualizante de  $C$ . Por tanto, para todo módulo cuasicoherente  $\mathcal{M}$  se verifica

$$H^1(C, \mathcal{M})^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{M}, w_C).^1$$

**Teorema 4.4.2** (Riemann-Roch fuerte). *Sea  $D = \sum_i n_i x_i$  y  $\mathcal{L}_D$  el haz de línea asociado a  $D$ . Se verifica que*

$$h^0(C, \mathcal{L}_D) - h^0(C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-D}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr } D$$

*Demostración.*  $H^1(C, \mathcal{L}_D)^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}_D, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-D}) = \Gamma(C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-D})$ . Luego  $h^1(C, \mathcal{L}_D) = h^0(C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-D})$ . Ahora ya, por el Riemann-Roch débil se concluye el teorema.  $\square$

**Proposición 4.4.3.** *El haz dualizante  $w_C$  es un haz de línea.*

*Demostración.* Probemos que el dualizante no tiene torsión: Sea  $T$  un módulo coherente incluido en la torsión de  $w_C$ , se verifica  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(T, w_C) = H^1(C, T)^* = 0$  porque  $T$  es flasco. Luego,  $T = 0$  y  $w_C$  es libre de torsión.

Nos falta ver que el rango de  $w_C$  es 1. Sea  $x \in C$  un punto cerrado. Tenemos que  $H^0(C, (w_C)_{nx}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, w_C \otimes \mathcal{L}_{nx}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}_{-nx}, w_C) = H^1(C, \mathcal{L}_{-nx})^*$ . Por 4.3.4,  $h^0(C, (w_C)_{nx}) = n + \text{cte}$ , para  $n \gg 0$ . Por 4.3.2,  $w_C$  es de rango 1.  $\square$

**Definición 4.4.4.** Denominamos género aritmético,  $g_a$ , de una curva completa  $C$  a  $h^1(C, \mathcal{O}_C)$  y género geométrico,  $g$ , al género aritmético de su desingularización.

**Proposición 4.4.5.** *Sea  $C$  una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.*

$$1. h^0(C, w_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C) \underset{\text{def}}{=} \underset{\text{Not}}{\text{género aritmético}} = g_a$$

$$2. h^1(C, w_C) = h^0(C, \mathcal{O}_C).$$

*Demostración.* 1.  $H^0(C, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, w_C) = H^1(C, \mathcal{O}_C)^*$ . Luego,  $h^0(C, w_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ .  
 2.  $H^1(C, w_C)^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(w_C, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \mathcal{O}_C)$ . □

**Definición 4.4.6.** Llamaremos divisores canónicos a los divisores cuyo haz de línea asociado sea el haz dualizante.

**Proposición 4.4.7.** Sea  $\mathcal{L}_K = w_C$  el haz dualizante. Se verifica que  $\text{gr } K = 2\chi(C, \mathcal{O}_C) = 2g - 2$ .

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata del Riemann-Roch débil para  $\mathcal{L}_K$  y la proposición anterior. □

## 4.5. Módulo de diferenciales y derivaciones

**Definición 4.5.1.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra. Llamaremos ideal de la diagonal, que denotaremos por  $\Delta$ , al núcleo del morfismo de anillos  $A \otimes_k A \xrightarrow{\pi} A$ ,  $a \otimes b \mapsto ab$ . Llamaremos módulo de las diferenciales de Kahler de  $A$ , que denotaremos por  $\Omega_{A/k}$ , a  $\Delta/\Delta^2$ .

Observemos que  $\Omega_{A/k} = \Delta/\Delta^2$  es un  $A \otimes A$ -módulo, anulado por  $\Delta$ , luego es un  $A \otimes A/\Delta = A$ -módulo. Luego  $a \cdot w := (a \otimes 1) \cdot w = (1 \otimes a) \cdot w$  (por ser  $a \otimes 1 = 1 \otimes a$  en  $A \otimes A/\Delta = A$ ).

Tenemos la sucesión exacta de  $A \otimes A$ -módulos.

$$(*) \quad 0 \rightarrow \Delta \rightarrow A \otimes A \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$$

El morfismo  $s: A \rightarrow A \otimes A$ ,  $s(a) = 1 \otimes a$ , es una sección de  $\pi$ . Además considerando  $A \otimes A$  como  $A = 1 \otimes A$ -módulo  $s$  es un morfismo de  $A$ -módulos. Por tanto, la sucesión  $(*)$  es una sucesión exacta escindida de  $A$ -módulos.

**Proposición 4.5.2.** Sea  $\mathfrak{m} \subset A$  un ideal maximal tal que  $A/\mathfrak{m} = k$ , entonces  $\Omega_{A/k} \otimes_k A/\mathfrak{m} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ .

*Demostración.* Si tensorializamos  $(*)$  por  $\otimes_A A/\mathfrak{m}$  obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Delta \otimes_A A/\mathfrak{m} \rightarrow A \otimes_k A/\mathfrak{m} = A \rightarrow A/\mathfrak{m} \rightarrow 0$$

que muestra que  $\Delta \otimes_A A/\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ . Por tanto,  $\Omega_{A/k} \otimes_k A/\mathfrak{m} = (\Delta \otimes_A A/\mathfrak{m})/(\Delta \otimes_A A/\mathfrak{m})^2 = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . □

**Proposición 4.5.3.** Sea  $S \subset A$  un sistema multiplicativo, entonces  $(\Omega_{A/k})_S = \Omega_{A_S/k}$ .

*Demostración.* Si Localizamos  $(*)$  por  $S \otimes S = \{s \otimes s' \subset A \otimes A, s, s' \in S\}$  obtenemos

$$0 \rightarrow \Delta_{S \otimes S} \rightarrow A_S \otimes A_S \xrightarrow{\pi} A_S \rightarrow 0$$

luego  $\Delta_{S \otimes S} = \Delta_{A_S}$ , denotando este último el ideal de la diagonal de  $A_S$ . Por tanto,

$$(\Omega_{A/k})_S = (\Omega_{A/k})_{S \otimes S} = \Delta_{S \otimes S}/\Delta_{S \otimes S}^2 = \Delta_{A_S}/\Delta_{A_S}^2 = \Omega_{A_S/k}$$

□

**Proposición 4.5.4.** Sea  $k \rightarrow k'$  un morfismo de anillos. Entonces,  $\Omega_{A/k} \otimes_k k' = \Omega_{A \otimes_k k'/k'}$

*Demostración.* Al lector. □

Sea  $\mathfrak{m}_x \subset A$  un ideal tal que  $A/\mathfrak{m}_x = k$ . Dado  $a \in A$  denotemos  $a(x) = \bar{a} \in A/\mathfrak{m}_x = k$ . La aplicación  $k$ -lineal  $d_{\mathfrak{m}_x} = d_x: A \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ ,  $d_x a = \bar{a} - a(x)$  cumple que  $d_x(ab) = a(x)d_x b + b(x)d_x a$ : Observemos que dado  $n \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  entonces  $a \cdot n = a(x) \cdot n$ , pues  $(a - a(x)) \cdot n = 0$ , ya que  $a - a(x) \in \mathfrak{m}_x$ . Ahora ya,  $a(x)d_x b + b(x)d_x a = a \cdot (b - b(x)) + b(x) \cdot (a - a(x)) = \overline{ab - a(x)b(x)} = d_x(ab)$ .

El morfismo  $k$ -lineal  $d: A \rightarrow \Omega_{A/k}$ ,  $d(a) := \overline{a \otimes 1 - 1 \otimes a} \in \Delta/\Delta^2$  se denomina diferencial de  $A$ . Se cumple que  $d(ab) = adb + bda$ : Como  $A \otimes A/\Delta = A$  consideremos el morfismo  $d_\Delta: A \otimes A \rightarrow \Delta/\Delta^2$  del párrafo anterior. Si  $i: A \rightarrow A \otimes A$  es el morfismo de anillos  $i(a) = a \otimes 1$  entonces  $d = d_\Delta \circ i$  y es fácil concluir lo requerido.

**Definición 4.5.5.** Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Una aplicación  $k$ -lineal  $D: A \rightarrow M$  diremos que es una derivación si  $D(ab) = aDb + bDa$ , para todo  $a, b \in A$ .

El conjunto de todas las derivaciones de  $A$  en  $M$ , con la suma y producto por elementos de  $A$  naturales es un  $A$ -módulo que denotaremos por  $\text{Der}_k(A, M)$ .

Observemos que  $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1D(1) + 1D(1) = 2D(1)$ , luego  $D1 = 0$  y  $D(k) = 0$ .

**Lema 4.5.6.** Sea  $\mathfrak{m} \subset A$  tal que  $A/\mathfrak{m} = k$  y sea  $M$  un  $A/\mathfrak{m}$ -módulo. Entonces

$$\text{Der}_k(A, M) = \text{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, M)$$

*Demostración.* Tenemos que  $A = \mathfrak{m} \oplus k$ . Dada  $D \in \text{Der}_k(A, M)$ , entonces  $D$  se anula en  $k$  y en  $\mathfrak{m}^2$  (pues  $D(m_1 \cdot m_2)m_1 Dm_2 + m_2 Dm_1 = 0$ , para todo  $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$ , ya que  $\mathfrak{m} \cdot M = 0$ ). Por tanto, tenemos un morfismo  $k$ -lineal  $\bar{D}: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow M$ ,  $\bar{D}(\bar{n}) = Dn$ . Recíprocamente, dado un morfismo  $k$ -lineal  $F: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow M$ , entonces  $D_F: A \rightarrow M$ , definido por  $D_F = F \circ d$  es una derivación de  $A$  en  $M$ . Ambas asignaciones son inversas entre sí. □

**Teorema 4.5.7.**  $\text{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) = \text{Der}_k(A, M)$ .

*Demostración.* Podemos considerar el  $A$ -módulo  $M$  como  $A \otimes A$ -módulo vía el epimorfismo  $A \otimes A \rightarrow A$ ,  $a \otimes b \mapsto ab$ . Además,  $A \otimes A$  es una  $A$ -álgebra:  $A \rightarrow A \otimes A$ ,  $a \mapsto 1 \otimes a$ .

El morfismo  $\text{Der}_k(A, M) \rightarrow \text{Der}_A(A \otimes_k A, M)$ ,  $D \mapsto D \otimes 1$ ,  $(D \otimes 1)(a \otimes b) := bDa$ , es isomorfismo pues el morfismo inverso es  $D' \mapsto D$ ,  $D(a) := D'(a \otimes 1)$ .

Por tanto,

$$\text{Der}_k(A, M) = \text{Der}_A(A \otimes_k A, M) \stackrel{4.5.6}{=} \text{Hom}_A(\Delta/\Delta^2, M)$$

□

Sea  $\mathfrak{m}_x \in A$  tal que  $A/\mathfrak{m}_x = k$ , entonces  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \{d_x a \mid a \in A\}$  pues dado  $a \in \mathfrak{m}_x$ ,  $\bar{a} = \overline{a - a(x)} = d_x a$ . Por tanto,  $\Omega_{A/k} = \langle \overline{a \otimes b - 1 \otimes ab} = bda \mid a \otimes b \in A \otimes A \rangle_{\text{lineal}}$ .

El isomorfismo  $\text{Der}_k(A, M) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M)$  explícitamente es  $D \mapsto i_D$ ,  $i_D(bda) := bDa$ ; el morfismo inverso  $F \mapsto F \circ d$ .

Todo morfismo de  $k$ -álgebras  $\phi: A \rightarrow B$  induce un morfismo natural  $\Omega_{A/k} \rightarrow \Omega_{B/k}$ ,  $a'da \mapsto \phi(a')d\phi(a)$ .  $B$  es una  $A$ -álgebra además de una  $k$ -álgebra y se tiene un morfismo natural  $\Omega_{A/k} \rightarrow \Omega_{B/A}$ .

**Proposición 4.5.8.** Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo de  $k$ -álgebras. La sucesión

$$\Omega_{A/k} \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k} \rightarrow \Omega_{B/A} \rightarrow 0$$

es exacta.

*Demostración.* Basta ver que para todo  $B$ -módulo la sucesión que se obtiene tomando  $\text{Hom}_B(-, M)$  es exacta por la izquierda. Efectivamente, la sucesión obtenida es

$$0 \rightarrow \text{Der}_A(B, M) \rightarrow \text{Der}_k(B, M) \rightarrow \text{Der}_k(A, M)$$

que es exacta porque las  $k$ -derivaciones de  $B$  que son nulas sobre  $A$  son las  $A$ -derivaciones.  $\square$

**Proposición 4.5.9.** *Sea  $I \subset A$  un ideal. La sucesión*

$$I/I^2 \xrightarrow{d} \Omega_{A/k} \otimes_A A/I \rightarrow \Omega_{(A/I)/k} \rightarrow 0$$

donde  $d\bar{i} := di \otimes 1$ , es exacta.

*Demostración.* Basta ver que para todo  $A/I$ -módulo la sucesión que se obtiene tomando  $\text{Hom}_{A/I}(-, M)$  es exacta por la izquierda. Efectivamente, la sucesión obtenida es

$$0 \rightarrow \text{Der}_k(A/I, M) \rightarrow \text{Der}_k(A, M) \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(I/I^2, M) = \text{Hom}_A(I, M)$$

que es exacta porque si las derivaciones de  $A$  que se anulan sobre  $I$  se corresponden biunívocamente con las derivaciones de  $A/I$ .  $\square$

**Ejemplo 4.5.10.**  $\text{Der}_k(k[x_1, \dots, x_n], M) = k[x_1, \dots, x_n] \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \dots \oplus k[x_1, \dots, x_n] \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}$ :

Toda derivación sobre  $k[x_1, \dots, x_n]$  está determinada por sus valores en  $x_1, \dots, x_n$  (por ejemplo  $D(x_1 \cdot x_2) = x_1 D x_2 + x_2 D x_1$ ). Dados  $m_i \in M$ , sea  $D = \sum_i m_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$  la derivación de  $k[x_1, \dots, x_n]$  definida por  $Dp(x_1, \dots, x_n) = \sum_i \frac{\partial p(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \cdot m_i$ . Dada una derivación  $D$  cualquiera se cumple que  $D = \sum_i D x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$  porque la diferencia de ambas es la derivación cero, pues se anula sobre las  $x_i$ , para todo  $i$ .

$\Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k} = k[x_1, \dots, x_n] dx_1 \oplus \dots \oplus k[x_1, \dots, x_n] dx_n$ : Consideremos el morfismo  $k[x_1, \dots, x_n] dx_1 \oplus \dots \oplus k[x_1, \dots, x_n] dx_n \rightarrow \Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/k}$ ,  $\sum p_i dx_i \mapsto \sum p_i dx_i$ . Tomando  $\text{Hom}_{k[x_1, \dots, x_n]}(-, M)$  se obtiene la igualdad anterior, para todo  $M$ , luego el morfismo considerado es isomorfismo.

Ahora ya, por 4.5.9

$$\Omega_{k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)/k} = (k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r) \cdot dx_1 \oplus \dots \oplus k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r) \cdot dx_n) \langle dp_1, \dots, dp_r \rangle$$

En particular,  $\Omega_{k[x]/(p(x))/k} = k[x]/(p(x), p'(x)) dx$ . Si  $\text{car } k = 0$  y  $p(x)$  es un polinomio irreducible, entonces  $p'(x)$  es de grado uno menos que el de  $p(x)$  y  $(p(x), p'(x)) = (1)$ , luego  $\Omega_{k[x]/(p(x))/k} = 0$ .

Supongamos que  $\text{car } k = 0$  y sea  $k \hookrightarrow K$  una extensión finita de cuerpos. Se cumple que  $\Omega_{K/k} = 0$ :

Dado  $a \in K$  consideremos el morfismo  $f: k[x] \rightarrow K$ ,  $f(q(x)) = q(a)$ .  $\text{Ker } f$  es un ideal primo, generado por un polinomio  $p(x)$  irreducible ("el polinomio mínimo anulador de  $a$ ). Consideremos el morfismo inyectivo inducido.  $k[x]/(p(x)) \hookrightarrow K$ . Del morfismo inducido  $0 = \Omega_{k[x]/(p(x))/k} \rightarrow \Omega_{K/k}$ ,  $0 = d\bar{x} \mapsto da$  se deduce que  $da = 0$ . Luego,  $\Omega_{K/k} = 0$ .

**Ejercicio 4.5.11.** Sea  $B$  una  $A$ -álgebra y  $S \subset A$  un sistema multiplicativamente cerrado. Probar que  $\Omega_{B_S/A_S} = \Omega_{B_S/A}$ .

## 4.6. Dualizante de una curva lisa

**Definición 4.6.1.** Sea  $X$  un  $k$ -esquema. Denotamos por  $\Omega_{X/k}$  y lo denominamos haz de diferenciales de Kähler de  $X$ , al haz asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow \Omega_{\mathcal{O}_X(U)/k}, \quad \text{para cada abierto } U \subseteq X$$

Con toda generalidad,

**Definición 4.6.2.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas. Sea  $\delta: X \rightarrow X \times_Y X$  el morfismo diagonal y  $\Delta$  es el núcleo del morfismo  $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \rightarrow \delta_* \mathcal{O}_X$ . Se define, el haz de módulos de diferenciales relativas de  $X$  sobre  $Y$ , que denotaremos  $\Omega_{X/Y}$ , por

$$\Omega_{X/Y} \stackrel{\text{def}}{=} \delta^* \Delta$$

Si  $V \subseteq Y$  es un abierto afín y  $U \subseteq X$  es un abierto afín tal que  $f(U) \subseteq V$ , entonces  $\Omega_{X/Y}(U) = \Omega_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}$ .

**Proposición 4.6.3.** Si  $C$  es una curva no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces  $\Omega_{C/k}$  es un haz de línea.

*Demostración.* Sea  $x \in C$  un punto cerrado.  $\Omega_{C/k} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  tiene dimensión 1. Veamos que si  $\mathcal{M}$  es un haz coherente tal que  $\dim_k \mathcal{M}/\mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{M} = 1$  para todo  $x \in C$  entonces  $\mathcal{M}$  es un haz de línea. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/T(\mathcal{M}) \rightarrow 0$$

$\mathcal{M}/T(\mathcal{M})$  es un módulo coherente sin torsión, luego localmente libre. Veamos que es de rango 1: Sea  $y \notin \text{Sop } T(\mathcal{M})$ . Entonces  $\mathcal{M}_y = (\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_y$ , luego  $(\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_y/\mathfrak{m}_y(\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_y$  es de dimensión 1 y  $\mathcal{M}/T(\mathcal{M})$  es de rango 1. Sea ahora  $x \in C$  un punto cerrado cualquiera.  $(\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_x$  es libre, luego  $\mathcal{M}_x = T(\mathcal{M})_x \oplus (\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_x$ . Tensorializando por  $\otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x$  y por dimensiones tenemos que  $T(\mathcal{M})_x/\mathfrak{m}_x \cdot T(\mathcal{M}) = 0$ . Por el lema de Nakayama  $T(\mathcal{M})_x = 0$ , para todo  $x$ , luego  $T(\mathcal{M}) = 0$  y  $\mathcal{M} = \mathcal{M}/T(\mathcal{M})$  es de línea.  $\square$

**Preámbulo:** Sea  $C$  una curva no singular, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Sean  $U_1 = \text{Spec } B_1 = C - y_1$ ,  $U_2 = \text{Spec } B_2 = C - y_2$  dos abiertos afines, que recubren  $C$ . Sea  $U = \text{Spec } A \stackrel{i}{\subset} C$  un abierto afín, de modo que  $A = (B_1)_{b_1} = (B_2)_{b_2}$ .

Dado un haz de  $k$ -módulos  $M$ , denotamos  $M \otimes_k A$  como el haz sobre  $C$  definido por  $(M \otimes_k A)(V) = M(V) \otimes_k A$ . Es sencillo probar que  $H^i(C, M \otimes_k A) = H^i(C, M) \otimes_k A$ . Además, si  $\mathcal{M}$  es cuasicoherente entonces  $\mathcal{M} \otimes_k A$  también lo es.

Denotemos  $i_*(\mathcal{M}|_U) \stackrel{\text{Not}}{=} \mathcal{M}_U$ . Sea  $\Delta$  al haz cuasicoherente núcleo del morfismo  $\pi: \mathcal{O}_C \otimes_k A \rightarrow \mathcal{O}_U$ ,  $a' \otimes a \mapsto a \cdot a'$ . Sea  $\Delta_i$  el núcleo del morfismo  $B_i \otimes_k B_i \rightarrow B_i, b \otimes b' \mapsto bb'$ . Consideremos las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Delta(U_i) \rightarrow B_i \otimes_k A \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \Delta_i \rightarrow B_i \otimes_k B_i \xrightarrow{\pi} B_i \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Obviamente  $\Delta(U_i) = (\Delta_i)_{1 \otimes b_i}$ .

$\Delta(U_i)$  es un  $B_i \otimes A$ -módulo localmente principal, porque  $\Delta_i$  es un  $B_i \otimes_k B_i$ -módulo localmente principal. Es una sencilla comprobación (en los abiertos  $U_i$ ) que dado un haz coherente  $\mathcal{M}$ , se verifica que  $(\mathcal{M} \otimes_k A)/\Delta(\mathcal{M} \otimes_k A) = \mathcal{M}_U$ . También es fácil ver (en los abiertos  $U_i$ ) que  $\Delta/\Delta^2 = (\Omega_{C/k})_U$ .

**Teorema 4.6.4.** Sea  $C$  una curva no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Se verifica que

$$w_C \simeq \Omega_{C/k}$$

*Demostración.* Sea  $x \in C$  un punto cerrado. Se verifica la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow w_C & \xrightarrow{i} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, w_C) & \xrightarrow{\pi} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) & \rightarrow & 0 \\ & & w & \mapsto & i(w): a \mapsto a \cdot w & & \\ & & f & \mapsto & \pi(f): \bar{a} \mapsto f(\bar{a}) & & \end{array}$$

Observemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}_{-x}, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_x) = w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_x$ . Tomando la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) &\xrightarrow{\delta_x} H^1(C, w_C) \rightarrow H^1(C, w_C \otimes L_x) = H^0(C, L_{-x})^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por dimensiones  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) \stackrel{\delta_x}{=} H^1(C, w_C)$ . Así pues, tenemos que dado  $\xi \in H^1(C, w_C)$  no nulo, un isomorfismo canónico

$$\delta_x^{-1}(\xi): \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = w_C/\mathfrak{m}_x w_C$$

Tomando en vez de  $x$  un “punto general” obtendremos el isomorfismo  $\Omega_{C/k} \simeq w$ :

Siguiendo las notaciones del preámbulo, consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow w_C \otimes_k A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_C \otimes_k A}(\Delta, w_C \otimes_k A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_C \otimes_k A}(\Delta/\Delta^2, w_U) \rightarrow 0$$

Por paso a fibras en el punto  $x \in U = \text{Spec } A$ , tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & w_C \otimes_k A & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C \otimes_k A}(\Delta, w_C \otimes_k A) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C \otimes_k A}(\Delta/\Delta^2, w_U) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & w_C & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, w_C) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Así pues, tomando la sucesión exacta larga de cohomología, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{A \otimes_k A}(\Omega_{C/k}(U), w_C(U)) & \xrightarrow{\delta} & H^1(C, w_C \otimes_k A) = H^1(C, w_C) \otimes_k A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) & \stackrel{\delta_x}{=} & H^1(C, w_C) \end{array}$$

De modo que,  $\delta$  es un morfismo entre  $A$ -módulos localmente principales que en fibras sobre  $x$ , es isomorfismo. Luego  $\delta$  es un isomorfismo y  $\delta^{-1}(\xi): \Omega_{C/k}(U) \rightarrow w_C(U)$  es un isomorfismo que en fibras sobre  $x$  es  $\delta_x^{-1}(\xi \otimes 1)$ . Luego existe un isomorfismo global  $\Omega_{C/k} \rightarrow w_C$  (que en fibras es  $\delta_x^{-1}(\xi)$ ).  $\square$

## 4.7. Aplicaciones de la teoría de dualidad

### 4.7.1. Teorema de Hurwitz

Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un morfismo finito entre curvas completas no singulares sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Se dice que un punto cerrado  $y \in C$  es un punto de ramificación de  $\pi$ , si  $\dim_k(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_C)_y = r > 1$ , donde  $x = \pi(y)$ . A  $r$  se le denomina el índice de ramificación y coincide con la multiplicidad con que aparece  $y$  en la fibra de  $x$ . Los puntos de ramificación coinciden con los puntos donde el haz de diferenciales relativas  $\Omega_{C/C'}$  son no nulas:  $(\Omega_{C/C'})_y$  es un  $\mathcal{O}_{C,y}$ -módulo finito nulo si y sólo si, por Nakayama, lo es

$$(\Omega_{C/C'})_y \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} \mathcal{O}_{C'}/\mathfrak{m}_x = \Omega_{(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_C)_y/k}$$

Sea  $A = (\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_C)_y$ , que es una  $k$ -álgebra finita local, de ideal maximal  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{m}}_y$ . Por Nakayama,  $\Omega_{A/k}$  es cero si y sólo si  $0 = \Omega_{A/k} \otimes A/\mathfrak{m} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , es decir,  $\mathfrak{m} = 0$ , es decir,  $\mathcal{O}_{C'}/\mathfrak{m}_x = k$ .

**Proposición 4.7.1.** *Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un morfismo finito, entre curvas completas no singulares. Sea  $D = \sum n_x \cdot x$  un divisor en  $C'$  y  $\mathcal{L}_D$  el haz de línea asociado. Se verifica que  $\pi^*\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_{\pi^{-1}D}$ , con  $\pi^{-1}D = \sum n_x \cdot \pi^{-1}(x)$  (donde  $\pi^{-1}(x)$  son los puntos de la fibra de  $x$ , contando multiplicidades).*

*Demostración.* Sea  $t_x \in \Sigma_{C'}$  un generador de  $\mathfrak{m}_x$  en un entorno de  $x$ . Sabemos que  $\mathcal{L}_D$  en un entorno  $U$  afín de  $x$ , tal que  $D|_U = n_x x$ , es igual a  $t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_U$ . Sea  $y \in C$  tal que  $\pi(y) = x$ , sea  $V$  un entorno afín de  $y$ , contenido en  $\pi^{-1}(U)$ . En el morfismo inducido entre los anillos de funciones  $\pi_{VU}^*: \mathcal{O}_{C'}(U) \rightarrow \mathcal{O}_C(V)$ , se verifica que  $(\pi_{VU}^*(t_x)) = t_x \cdot \mathcal{O}_C(V) = \mathfrak{m}_{y_1}^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_{y_r}^{n_r}$ , donde  $y_1, \dots, y_r$  son los puntos de la fibra de  $x$  en  $V$  y  $n_1, \dots, n_r$  son la multiplicidad con que aparece cada uno.

Se verifica

$$\begin{aligned} (\pi^*(\mathcal{L}_D))|_V &= \pi_{VU}^*((\mathcal{L}_D)|_U) = \pi_{VU}^*(t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_U) = t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_V \\ &= (\mathfrak{m}_{y_1}^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_{y_r}^{n_r})^{-n_x} = (\mathcal{L}_{\pi^{-1}D})|_V \end{aligned}$$

con lo que se concluye. □

**Teorema 4.7.2 (Hurwitz).** *Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un morfismo no constante entre curvas completas no singulares sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Se cumple que el módulo de las diferenciales relativas  $\Omega_{C/C'}$  es de torsión y*

$$2g - 2 = \text{gr } \pi \cdot (2g' - 2) + \dim_k(\Omega_{C/C'})$$

donde  $g$  y  $g'$  son los géneros de  $C$  y  $C'$  respectivamente.

*Demostración.* Sea  $p_g$  el punto genérico de  $C$ , entonces  $(\Omega_{C/C'})_{p_g} = \Omega_{\Sigma_C/\Sigma_{C'}} = 0$  por ser  $\Sigma_C \rightarrow \Sigma_{C'}$  separable. Por tanto, como  $\Omega_{C/C'}$  es un haz coherente cuya fibra en el punto genérico es cero, es de torsión.

Consideremos la sucesión exacta

$$\pi^*\Omega_{C'/k} \xrightarrow{\pi^*} \Omega_{C/k} \rightarrow \Omega_{C/C'} \rightarrow 0$$

El morfismo  $\pi^*$  ha de ser inyectivo, porque todo morfismo entre haces de línea que es isomorfismo en el punto genérico es inyectivo.

Si denotamos por  $K$  y  $K'$  los divisores canónicos de  $C$  y  $C'$ , tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{\pi^{-1}K'} \rightarrow \mathcal{L}_K \rightarrow \Omega_{C/C'} \rightarrow 0$$

Tomando características, tenemos  $\chi(\mathcal{L}_K) = \chi(\mathcal{L}_{\pi^{-1}K'}) + \dim_k \Omega_{C/C'}$ , que por el Riemann-Roch equivale a  $\text{gr}(K) = \text{gr}(\pi^{-1}K') + \dim_k \Omega_{C/C'}$ . Ahora ya, dado que  $\text{gr}(\pi^{-1}K') = \text{gr}(\pi) \cdot \text{gr } K'$ , deducimos la fórmula de Hurwitz. □

En característica cero, diremos que un morfismo  $\pi: C \rightarrow C'$  finito es un revestimiento no ramificado si no tiene puntos de ramificación.

**Corolario 4.7.3.** *La recta proyectiva no tiene revestimientos no ramificados, salvo los isomorfismos (se dice que  $\mathbb{P}_1$  es simplemente conexa).*

*Demostración.* Dado un revestimiento  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  no ramificado, por Hurwitz tenemos  $2g - 2 = \text{gr } \pi \cdot (2 \cdot 0 - 2)$ . Luego  $g = 0$  y  $\text{gr } \pi = 1$ .  $\square$

**Corolario 4.7.4** (Lüroth). *Toda subextensión de  $k(x)$  es igual a  $k(p(x))$ , para cierto  $p(x) \in k(x)$ . Supongamos  $\text{car } k = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $L \subset k(x)$  una subextensión. Consideremos el morfismo inducido entre las variedades de Riemann,  $\pi: \mathbb{P}_1 \rightarrow C$ . Por el teorema de Hurwitz,  $2 \cdot 0 - 2 = \text{gr } \pi \cdot (2g_C - 2) + \dim_k(\Omega_{\mathbb{P}_1/C})$ . Por tanto,  $g_C = 0$  y  $C = \mathbb{P}_1$ . Es decir,  $L = k(p(x))$ .  $\square$

## 4.7.2. Morfismos en espacios proyectivos

Vamos a ver que toda variedad de Riemann es una curva proyectiva.

Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado, por sencillez de exposición. Sea  $C$  una curva completa y  $\mathcal{L}$  un haz de línea en  $C$ . Dado un punto cerrado  $x \in C$  y un isomorfismo  $\mathcal{L}/\mathfrak{m}_x \mathcal{L} \simeq k$ , para cada  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L})$  podemos definir el valor de  $s$  en  $x$ , “ $s(x)$ ”:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L}/\mathfrak{m}_x \mathcal{L} \simeq k \\ s &\mapsto \bar{s} \underset{\text{Not}}{=} s(x) \end{aligned}$$

El valor  $s(x)$  depende del isomorfismo  $\mathcal{L}/\mathfrak{m}_x \mathcal{L} \simeq k$ , luego está definido para toda  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L})$ , salvo un factor  $\lambda \in k$ . Ahora bien, si tiene sentido decir si  $s(x) = 0$  o no. Además, los puntos donde  $s(x) = 0$ , que denotaremos  $(s)_0$ , es un cerrado de  $C$ . Recordemos que el divisor de ceros (no hay polos) de  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L})$ , es un divisor efectivo cuyo haz de línea asociado es  $\mathcal{L}$ . Por tanto,  $(s)_0$  es el soporte del divisor  $D(s)$ , asociado a  $s$ .

Sea  $\{s_0, \dots, s_n\}$  una base de  $V \subseteq \Gamma(C, \mathcal{L})$  sin puntos base, i.e.,  $\bigcap_{i=0}^n (s_i)_0 = \emptyset$ . Definamos “puntualmente” el morfismo

$$C \rightarrow \mathbb{P}_n, \quad x \xrightarrow{\text{def}} (s_0(x), \dots, s_n(x))$$

Definámoslo ahora esquemáticamente (no necesitaremos que  $k$  es algebraicamente cerrado):

Dados dos secciones  $s_i, s_j \in \Gamma(C, \mathcal{L})$  entonces  $s_i = f_{ij} \cdot s_j$ , para una  $f_{ij} \in \Sigma_C$ , de modo que  $D(s_i) = D(f_{ij}) + D(s_j)$ . Por tanto,  $f_{ij}$  no tiene polos en  $U_j = C - (s_j)_0$ , es decir,  $f_{ij} \in \mathcal{O}_C(U_j)$ . Escribiremos  $f_{ij} = \frac{s_i}{s_j}$ .

Sea  $U_j = C - (s_j)_0$ . Los morfismos

$$\begin{aligned} U_j &\longrightarrow \text{Spec } k\left[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right] \\ \mathcal{O}_C(U_j) &\longleftarrow k\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \\ \frac{s_i}{s_j} &\longleftarrow \frac{x_i}{x_j} \end{aligned}$$

nos definen el morfismo

$$C \rightarrow \mathbb{P}_n$$

antes definido “puntualmente”.

El morfismo  $C \rightarrow \mathbb{P}_n$  definido por el haz de línea  $\mathcal{L}$ , y el subespacio  $V \subseteq \Gamma(C, \mathcal{L})$ , depende de la elección de una base de  $V$ . Obviamente, si se considera otra base el nuevo morfismo definido diferirá del primero en una proyectividad de  $\mathbb{P}_n$ . Así pues,  $\mathcal{L}$  si consideramos todo  $\Gamma(C, \mathcal{L})$  y suponemos que no hay puntos base, define un único morfismo de  $C$  en un espacio proyectivo, salvo proyectividades.

Recíprocamente, todo morfismo  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_m$ , de modo que  $\text{Im } \pi$  no yace en ningún hiperplano (“ $C$  es alabeada”), es el definido por un subespacio vectorial de las secciones de un haz de línea de  $C$ : Sea  $\mathcal{L} = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ , el morfismo natural  $\pi^*: H^0(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))$  y  $V = \text{Im } \pi^*$ . Pues bien,  $\pi$  es el morfismo definido por el haz de línea  $\mathcal{L}$  y  $V$ , como puede comprobarse.

Por último, si  $H \equiv \sum_i a_i x_i = 0$  es un hiperplano de  $\mathbb{P}_m$ , entonces  $H \cap C \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(H) = D(\sum_i a_i s_i)$ . Los hiperplanos cortan a  $C$  en los divisores efectivos asociados a  $\mathcal{L}$ . En el caso de que  $\pi$  sea una inmersión cerrada el grado de la curva  $C$  es igual al grado de los divisores asociados a  $\mathcal{L}$ .

**Definición 4.7.5.** Se dice que las secciones globales de  $\mathcal{L}$  separan los puntos de  $C$ , cuando para cada par de puntos  $x, x'$  existe una sección tal que  $s(x) = 0$  y  $s(x') \neq 0$ .

**Definición 4.7.6.** Se dice que las secciones globales de  $\mathcal{L}$  separan puntos infinitesimalmente próximos, cuando para cada punto cerrado  $x \in C$ , las secciones globales de  $\mathcal{L}$  que se anulan en  $x$  generan  $\mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$ . Es decir, para cada punto cerrado  $x \in C$ , existe  $s \in H^0(C, \mathcal{L})$  tal que  $v_x(s) = 1$ .

**Definición 4.7.7.** Un haz de línea se dice que es muy amplio cuando sus secciones globales generan la fibra en cada punto del haz de línea (es decir, no tienen puntos base), separan puntos y separan puntos infinitesimalmente próximos.

Sea  $\Gamma(C, \mathcal{L}) = \langle s_0, \dots, s_n \rangle$ . Sobre  $U_j = C - (s_j)_0$  tenemos el isomorfismo  $\mathcal{L}_{U_j} \stackrel{s_j^{-1}}{\simeq} \mathcal{O}_{U_j}$ . Dados  $x, y \in U_j$ , que las secciones globales de  $\mathcal{L}$  separen  $x$  de  $y$ , equivale a decir que las funciones  $\langle f_{ij} = s_i/s_j \rangle_i$  separen  $x$  de  $y$ , es decir, existe  $f \in \langle f_{ij} = s_i/s_j \rangle_i$  tal que  $f(x) = 0$  y  $f(y) \neq 0$ . Que las secciones globales que se anulan en  $x$  generan  $\mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$  equivale a decir que las funciones de  $\langle f_{ij} = s_i/s_j \rangle_i$  que se anulan en  $x$  generan  $\mathfrak{m}_x$ .

**Teorema 4.7.8.** El morfismo definido por una “serie lineal completa”  $\langle s_0, \dots, s_n \rangle = \Gamma(C, \mathcal{L})$ , sin puntos base,

$$i: C \rightarrow \mathbb{P}_n, x \mapsto (s_0(x), \dots, s_n(x))$$

es una inmersión cerrada, si y sólo si  $\mathcal{L}$  es un haz de línea muy amplio.

*Demostración.* En coordenadas, tenemos localmente

$$\begin{array}{ccc} k\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] & \longrightarrow & k\left[\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_n}{s_i}\right] \xrightarrow{i^*} \mathcal{O}_C(U_i) \\ \frac{x_j}{x_i} & \longrightarrow & \frac{s_j}{s_i} \hookrightarrow \frac{s_j}{s_i} \end{array}$$

Tenemos que probar que las inclusiones  $i^*: k\left[\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_n}{s_i}\right] \hookrightarrow \mathcal{O}_C(U_i)$  son isomorfismos si y sólo si  $\mathcal{L}$  es muy amplio.

El morfismo  $i^*$  es finito: Sea  $\mathcal{O}_{v_x}$  un anillo de valoración de  $\Sigma_C$  que contenga a  $k\left[\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_n}{s_i}\right]$ , es decir,  $v_x(s_j/s_i) \geq 0$  para todo  $j$ . Si  $x \in (s_i)_0$  entonces  $v_x(s_j) = v_x((s_j/s_i) \cdot s_i) = v_x(s_j/s_i) + v_x(s_i) > 0$ ,

para todo  $j$ . Es decir,  $x$  sería un punto base, que no existe. Luego  $x \in U_i$ . Por tanto,  $\mathcal{O}_{v_x}$  contiene a  $\mathcal{O}_C(U_i)$ , y  $\mathcal{O}_C(U_i)$  es el cierre entero de  $k[\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_n}{s_i}] = B$ .

Por ser  $i^*$  un morfismo finito, en espectros es epiyectivo, y todo ideal maximal  $\mathfrak{m}_y \subset B$  es  $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}_x \cap B$ , para cierto ideal maximal  $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_C(U_i)$ .

La inclusión  $B \xrightarrow{i^*} \mathcal{O}_C(U_i)$  es un isomorfismo si y sólo si para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}_y \subset B$ , el morfismo  $B/\mathfrak{m}_y \rightarrow \mathcal{O}_C(U_i)/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_C(U_i)$  es un isomorfismo. Es decir, si y sólo si  $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_C(U_i) = \mathfrak{m}_x$ , donde  $\mathfrak{m}_x \cap B = \mathfrak{m}_y$ . Ahora bien,  $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_C(U_i) = \mathfrak{m}_x$  si y sólo si las secciones globales de  $\mathcal{L}$ , que se anulan en  $x$  no se anulan, todas a la vez, ni en otro punto ni dos veces en  $x$ .

Concluimos que  $i$  es una inmersión cerrada si y sólo si  $\mathcal{L}$  es muy amplio. □

**Ejercicio 4.7.9.** Demuéstrese que la condición de que las secciones separen puntos equivale a que  $i$  sea inyectiva y la condición de que las secciones separen puntos infinitesimalmente próximos equivale a que  $i$  sea inyectiva a nivel tangente.

**Lema 4.7.10.** *Sea  $C$  una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.*

1. *La condición necesaria y suficiente para que la serie lineal  $\Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  no tenga puntos base es que  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) < h^0(C, \mathcal{L}_D)$ , para todo  $x \in C$ .*
2. *La condición necesaria y suficiente para que la serie lineal  $\Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  separe puntos es que  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) < h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$  para todo  $x \neq y \in C$ .*
3. *La condición necesaria y suficiente para que la serie lineal  $\Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  separe puntos infinitesimalmente próximos es que  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-2x}) < h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$ , para todo  $x \in C$ .*

*Demostración.* 1. Observemos que  $\mathcal{L}_{D-x} = \mathcal{L}_D \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-x} = \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{L}_D$ , que está incluido naturalmente en  $\mathcal{L}_D$ . Así pues, las secciones globales de  $\mathcal{L}_{D-x}$  se identifican con las  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  tales que en gérmenes pertenezcan a  $\mathcal{L}_{D-x}$ . Es decir,

$$H^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) = \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s_x \in \mathfrak{m}_x(\mathcal{L}_D)_x\} = \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s(x) = 0\}$$

Luego,  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) < h^0(C, \mathcal{L}_D)$  si y sólo si existe  $s \in H^0(C, \mathcal{L}_D)$  tal que  $s(x) \neq 0$ , es decir, si y sólo si  $x$  no es un punto base.

2. Observemos que  $\mathcal{L}_{D-x-y} = \mathfrak{m}_x \cdot \mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{L}_D$ , que está incluido naturalmente en  $\mathcal{L}_D$ . Así pues, las secciones globales de  $\mathcal{L}_{D-x-y}$  se identifican con las  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  tales que en gérmenes pertenezcan a  $\mathcal{L}_{D-x-y}$ . Es decir,

$$\begin{aligned} H^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) &= \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s_x \in \mathfrak{m}_x(\mathcal{L}_D)_x \text{ y } s_y \in \mathfrak{m}_y(\mathcal{L}_D)_y\} \\ &= \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s(x) = 0 \text{ y } s(y) = 0\} \end{aligned}$$

Luego,  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) < h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$  si y sólo si existe  $s \in H^0(C, \mathcal{L}_D)$ , tal que  $s(x) = 0$  y  $s(y) \neq 0$ , con lo que se concluye.

3. Observemos que  $\mathcal{L}_{D-2x} = \mathfrak{m}_x^2 \cdot \mathcal{L}_D$ , que está incluido naturalmente en  $\mathcal{L}_D$ . Así pues, las secciones globales de  $\mathcal{L}_{D-2x}$  se identifican con las  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  tales que en gérmenes pertenezcan a  $\mathcal{L}_{D-2x}$ . Es decir,

$$H^0(C, \mathcal{L}_{D-2x}) = \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s_x \in \mathfrak{m}_x^2(\mathcal{L}_D)_x\} = \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : v_x(s) \geq 2\}$$

Luego,  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-2x}) < h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$  si y sólo si existe  $s \in H^0(C, \mathcal{L}_D)$ , tal que  $v_x(s) = 1$ , con lo que se concluye. □

**Proposición 4.7.11.** *Si  $D$  es un divisor de grado mayor que dos veces el género geométrico, entonces  $\mathcal{L}_D$  es muy amplio.*

*Si  $D$  es un divisor de grado mayor o igual que el género geométrico, entonces las secciones globales de  $\mathcal{L}_D$  no tiene puntos base.*

*Demostración.* Por ser  $D$  un divisor de grado mayor que el canónico  $h^1(C, \mathcal{L}_D) = h^0(C, \mathcal{L}_{K-D}) = 0$ . Lo mismo decimos  $D - x$ ,  $D - 2x$ ,  $D - x - y$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} h^0(C, \mathcal{L}_D) &= \chi(C, \mathcal{L}_D) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr}D \\ h^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) &= \chi(C, \mathcal{L}_{D-x}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr}D - 1 \\ h^0(C, \mathcal{L}_{D-2x}) &= \chi(C, \mathcal{L}_{D-2x}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr}D - 2 \\ h^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) &= \chi(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr}D - 2 \end{aligned}$$

Ahora es fácil concluir la tesis primera utilizando el lema anterior. Para la segunda afirmación se procede igual. □

**Teorema 4.7.12.** *Toda curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es una curva proyectiva.*

*Demostración.* Si  $D$  es un divisor de grado  $2g + 1$ , entonces por la proposición anterior  $\mathcal{L}_D$  es muy amplio. Por el teorema anterior  $\mathcal{L}_D$  define una inmersión cerrada de la curva en un espacio proyectivo. □

Sea  $C$  es una curva completa no singular de género mayor que 1, y  $K$  es un divisor canónico.  $3K$  es un divisor muy amplio, es decir,  $w_C^3 = w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \otimes_{\mathcal{O}_C} w_C$  es un haz de línea muy amplio. Luego  $w_C^3$  define una inmersión cerrada, canónica de  $C$  en  $\mathbb{P}_{5g-6}$ , salvo proyectividades de modo que  $C$  es una curva alabeada de grado  $6g - 6$  y los hiperplanos cortan a  $C$  en divisores linealmente equivalentes a  $3K$ .

### 4.7.3. Curvas elípticas e hiperelípticas

Sea  $C$  una curva completa no singular, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Supondremos que  $\text{car } k \neq 2$ .

**Proposición 4.7.13.** *En las curvas de género menor o igual que dos el dualizante no es muy amplio.*

*Demostración.* Si el género es dos y el dualizante es muy amplio, entonces el dualizante define una inmersión cerrada de la curva en la recta proyectiva, luego la curva sería la recta proyectiva que es de género cero, contradicción. Si el género es 1 o cero es obvio. □

**Definición 4.7.14.** Las curvas de género mayor o igual que dos tales que su haz dualizante no sea muy amplio se denominan curvas hiperelípticas. Las curvas de género 1 se denominan curvas elípticas.

Así, si  $C$  es una curva de género mayor que uno no hiperelíptica el dualizante define una inmersión canónica  $C \hookrightarrow \mathbb{P}_{g-1}$  que identifica  $C$  con una curva no singular de grado  $2g - 2$ .

**Proposición 4.7.15.** *La condición necesaria y suficiente para que un haz de línea  $\mathcal{L}_D$  sea muy amplio es que para cada par de puntos  $x, y \in C$  (distintos o no), se verifique  $h^1(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) = h^1(C, \mathcal{L}_D)$ .*

*Demostración.* Por la sucesión exacta larga de cohomología asociada a

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{D'-x} \hookrightarrow \mathcal{L}_{D'} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

donde  $\mathcal{C}$  está concentrado en  $x$  y  $h^0(C, \mathcal{C}) = 1$ , se tiene que

$$h^1(C, \mathcal{L}_{D'-x}) = \begin{cases} h^1(C, \mathcal{L}_{D'}) \\ h^1(C, \mathcal{L}_{D'}) + 1 \end{cases} \quad h^0(C, \mathcal{L}_{D'-x}) = \begin{cases} h^0(C, \mathcal{L}_{D'}) - 1 \\ h^0(C, \mathcal{L}_{D'}) \end{cases}$$

La condición  $h^1(C, \mathcal{L}_D) = h^1(C, \mathcal{L}_{D-x-y})$  equivale a que  $h^1(C, \mathcal{L}_D) = h^1(C, \mathcal{L}_{D-x})$  y  $h^1(C, \mathcal{L}_{D-x}) = h^1(C, \mathcal{L}_{D-x-y})$ , que equivalen a  $h^0(C, \mathcal{L}_D) > h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$  y  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) > h^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y})$ . Por el lema 4.7.10, se concluye.  $\square$

**Corolario 4.7.16.** *Una curva de género mayor que cero es elíptica o hiperelíptica si y sólo si admite un morfismo de grado dos en la recta proyectiva.*

*Demostración.*  $C$  es elíptica o hiperelíptica  $\Leftrightarrow$  Existen dos puntos  $x, y$  de modo que  $h^1(C, \mathcal{L}_{K-x-y}) < h^1(C, \mathcal{L}_K) \stackrel{\text{dualidad}}{\Leftrightarrow} h^0(C, \mathcal{L}_{x+y}) > h^0(C, \mathcal{O}_C) = 1 \Leftrightarrow$  Existe una  $f \in \Sigma_C$  cuyo divisor de polos es  $x + y$  (si el divisor de polos fuese de grado 1 entonces la curva sería la recta proyectiva, contradicción)  $\Leftrightarrow$  Existe un morfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  de grado dos.  $\square$

**Corolario 4.7.17.** *Toda curva elíptica o hiperelíptica es birracionalmente isomorfa a una curva plana de ecuaciones  $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - \alpha_i)$ , donde  $g$  es el género de la curva. Supongamos  $\text{car } k \neq 2$ .*

*Demostración.* Sea  $C \rightarrow \mathbb{P}_1$  un morfismo de grado dos de la curva en la recta proyectiva.

$\Sigma_{\mathbb{P}_1} \hookrightarrow \Sigma_C$  es un morfismo de grado 2, luego  $\Sigma_C = \Sigma_{\mathbb{P}_1}(\xi)$ , de modo que  $\xi^2 + s\xi + t = 0$ , con  $s, t \in k(x) = \Sigma_{\mathbb{P}_1}$ . Cambiando  $\xi$  por  $\xi + \frac{s}{2}$ , podemos suponer que  $\xi^2 + u = 0$ , con  $u \in \Sigma_{\mathbb{P}_1} = k(x)$ . Es decir,  $\xi^2 = \frac{p(x)}{q(x)}$ , con  $p(x), q(x) \in k[x]$ . Sustituyendo,  $\xi$  por  $\xi \cdot q(x)$ , podemos suponer que  $\xi^2 = p(x)$ , con  $p(x) \in k[x]$ . Sustituyendo,  $\xi$  por  $\xi \cdot (x - \alpha)^n$  (para  $n$  conveniente), podemos suponer que las raíces de  $p(x)$  son simples.

Por Hurwitz, el número de puntos de ramificación es  $2g + 2$  (todos ellos han de ser distintos, de índice de ramificación 2). Además, podemos suponer que el punto del infinito es de ramificación.

Con todo tenemos que  $C$  es birracionalmente isomorfa a la curva plana  $y^2 = p(x)$  y la proyección a la recta afín tiene  $2g + 1$  puntos de ramificación luego  $p(x) = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - \alpha_i)$ .  $\square$

**Proposición 4.7.18.** *Sea  $C$  una curva completa no singular de género  $g$  mayor que 1. Entonces,  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_{g-1}$  es un morfismo de grado  $2g - 2$  (es decir,  $\pi^{-1}(H)$  es un divisor de grado  $2g - 2$  para todo hiperplano  $H$  de  $\mathbb{P}_{g-1}$ ) de imagen una curva alabeada si y sólo si  $\pi$  es (salvo proyectividades) el morfismo canónico, es decir, el morfismo definido por el haz dualizante y la serie lineal completa.*

*Demostración.* El dualizante  $L_K$  no tiene puntos base: Si  $h^0(C, L_{K-x}) = H^0(C, L_K)$  entonces por dualidad  $H^0(C, L_x) > H^0(C, \mathcal{O}_C)$ . Luego existe una función con un único polo (en  $x$ ) y éste de multiplicidad 1, que define un isomorfismo de  $C$  con  $\mathbb{P}_1$ . Pero el género de  $C$  no es cero y hemos llegado a contradicción.

En conclusión el dualizante (y sus secciones globales) definen un morfismo  $C \rightarrow \mathbb{P}_{g-1}$  de grado  $2g - 2$ .

Si  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_{g-1}$  es un morfismo alabeado de grado  $2g-2$  entonces éste viene definido por un haz de línea  $L_D$  tal que  $h^0(C, L_D) \geq g$  y  $\text{gr } D = 2g-2$ . Por el teorema de Riemann-Roch,  $H^0(C, L_{K-D}) > 0$ . Lo cual implica que  $D$  es equivalente a  $K$  y que  $\pi$  es el morfismo inducido por el canónico y sus secciones globales.  $\square$

**Proposición 4.7.19.** *Si  $C$  es una curva hiperelíptica entonces existe un único morfismo de grado 2,  $C \rightarrow \mathbb{P}_1$ , salvo proyectividades.*

*Demostración.* Nos falta probar la unicidad.

Sean  $\pi, \pi': C \rightarrow \mathbb{P}_1$  dos morfismos de grado 2. Sea  $i: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_{g-1}$ ,  $\alpha \mapsto (1, \alpha, \dots, \alpha^{g-1})$  el morfismo inducido por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(g)$  y sus secciones globales.

Por la proposición anterior existe una proyectividad  $\tau: \mathbb{P}_{g-1} \rightarrow \mathbb{P}_{g-1}$  que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_{g-1} \\ & \searrow \pi' & & & \parallel \tau \\ & & \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_{g-1} \end{array}$$

$\tau$  induce una proyectividad  $\tau': \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ , tal que  $\tau' \circ \pi = \pi'$ .  $\square$

Observemos que el morfismo canónico es igual a  $i \circ \pi$ .

**Corolario 4.7.20.** *El conjunto de curvas hiperelípticas de género  $g$ , módulo isomorfismos, es igual al conjunto de los subconjuntos (divisores) de  $2g+2$  puntos distintos de  $\mathbb{P}_1$ , módulo proyectividades.*

*Demostración.* Dados  $2g+2$  puntos distintos  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g+2} \in \mathbb{P}_1$ , la curva  $C$  completa no singular brracional la curva plana  $y^2 - \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \alpha_i) = 0$ , resulta ser una curva de género  $g$ . La proyección “vertical” de esta curva en  $y = 0$  es un morfismo de grado dos que ramifica en  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g+2}$ . La composición de este morfismo con una proyectividad  $\tau$  ramifica en  $\tau(\alpha_1), \dots, \tau(\alpha_{2g+2})$ , luego como vimos en la demostración de 4.7.17,  $C$  es brracional a  $y^2 - \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \tau(\alpha_i)) = 0$ .

Si  $C$  es brracional a otra curva plana  $y^2 - \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \alpha'_i) = 0$ , entonces tenemos otro morfismo de grado dos en la recta proyectiva ( $y = 0$ ) que ramifica en  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{2g+2}$ . Por la proposición anterior existe una proyectividad  $\tau: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  tal que  $\tau(\alpha_i) = \alpha'_i$ , para todo  $i$ .

Con todo se concluye.  $\square$

**Proposición 4.7.21.** *El grupo de automorfismos de una curva elíptica actúa transitivamente sobre los puntos racionales de la curva.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in C$  dos puntos racionales. El haz de línea  $\mathcal{L}_{x+y}$  no tiene puntos base, por 4.7.11. Además,  $h^0(C, \mathcal{L}_{x+y}) = 2$ , por Riemann-Roch fuerte. Luego,  $\mathcal{L}_{x+y}$  define un morfismo finito

$$\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$$

Las fibras de los puntos de  $\mathbb{P}_1$  son los divisores efectivos linealmente equivalentes a  $x+y$ . En particular,  $\pi(x) = \pi(y)$ . El morfismo  $\pi$  define un morfismo  $\Sigma_{\mathbb{P}_1} = k(x) \hookrightarrow \Sigma_C$  de grado 2.  $\Sigma_C$  es una extensión separable, luego de Galois, de  $k(x)$ , incluso en característica 2, porque si no  $\Sigma_C = k(\sqrt[2]{x})$  y  $C$  sería de género cero. Sea  $\sigma$  el generador de  $\text{Aut}_{k(x)}(\Sigma_C) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . El morfismo  $\bar{\sigma}: C \rightarrow C$  inducido por  $\sigma$ , conmuta con  $\pi$ , luego deja estables las fibras de  $\pi$ . Es más,  $\sigma$  intercambia los dos puntos de cada fibra: Se debe al hecho de que  $C/\langle\sigma\rangle = \mathbb{P}_1$ , pero demos una demostración ad hoc. Sea  $\pi(x) = \pi(y)$  y  $f \in \Sigma_C$  con un cero en  $x$  y no en  $y$ . Si  $\sigma(x) = x$  y  $\sigma(y) = y$  entonces  $f \cdot \sigma(f) \in k(x)$  tiene un cero en  $x$  y no en  $y$ , luego esta función por un lado se anula en  $\pi(x)$  y por el otro no se anula en  $\pi(y) = \pi(x)$ . En conclusión,  $\sigma(x) = y$ . □

**Proposición 4.7.22.** *Sea  $C$  una curva elíptica y  $\pi_1, \pi_2: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  dos morfismos de grado dos. Existen isomorfismos  $\tau: C \rightarrow C$ ,  $\sigma: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$  de modo que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\tau} & C \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

es conmutativo.

*Demostración.* Por Hurwitz sabemos que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  ramifican en cuatro puntos. Sea  $x$  un punto de ramificación de  $\pi_1$ ,  $y$  un punto de ramificación de  $\pi_2$  y  $\sigma$  un automorfismo de  $C$  tal que  $\sigma(x) = y$ . El morfismo  $\pi_2$  es el morfismo definido por el haz de línea  $\mathcal{L}_{2y}$  y el morfismo  $\pi_1 \circ \sigma$  también es el morfismo definido por el haz de línea  $\mathcal{L}_{2y}$ . Por tanto,  $\pi_2$  y  $\pi_1 \circ \sigma$  difieren en un automorfismo  $\tau$  de  $\mathbb{P}_1$ . □

En la proposición 4.7.17 probamos que si  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  es un morfismo de grado dos y escribimos  $\Sigma_{\mathbb{P}_1} = k(x)$ , existe  $y \in \Sigma_C$ , de modo que  $\Sigma_C = k(x, y)$ ,  $y^2 = (x - \alpha_0) \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$ , donde  $\infty, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{P}_1$  resultan ser los puntos (distintos) donde ramifica  $\pi$ . Los puntos donde ramifica  $\pi$  es invariante por automorfismos de  $C$ . Componiendo con una proyectividad, podemos suponer que  $\alpha_0 = 0$  y  $\alpha_1 = 1$  y tendremos que  $C \cong y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - \lambda)$ . Además,  $C \cong y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - \lambda')$ , si y sólo si existe una proyectividad  $\sigma$  tal que  $\{\infty, 0, 1, \lambda'\} = \{\sigma(\infty), \sigma(0), \sigma(1), \sigma(\lambda)\}$ . Componiendo con una proyectividad conveniente que me reordene  $\{\sigma(\infty), \sigma(0), \sigma(1), \sigma(\lambda)\}$ , podemos suponer que  $\sigma(\lambda) = \lambda$ . Entonces  $\sigma$  permuta los puntos  $\{\infty, 0, 1\}$  y queda determinada por cómo lo haga. El grupo de las proyectividades que permutan los puntos  $\{\infty, 0, 1\}$ , es isomorfo al grupo simétrico de las permutaciones de tres letras,  $S_3$ . En conclusión,

$$\{\text{Curvas elípticas}\} = k - \{1, 0\}/S_3$$

Sea  $\sigma$  la proyectividad que permuta el  $\infty$  con el 0, y deja fijo el 1, entonces  $\sigma(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ . Sea  $\sigma'$  la proyectividad que permuta el 1 con el 0 y deja fijo  $\infty$ , entonces  $\sigma'(\lambda) = 1 - \lambda$ . Se cumple que  $S_3 = \langle\sigma, \sigma'\rangle$ . Sea  $j(\lambda) = 2^8 \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$ ,<sup>2</sup> se cumple que

$$k(\lambda)^{S_3} = k(j(\lambda))$$

<sup>2</sup>El factor  $2^8$  se introduce, a pesar de lo que pueda parecer, para que en característica 2 todo vaya bien

pues  $j(\lambda)$  es  $S_3$ -invariante y la inclusión  $k(j(\lambda)) \hookrightarrow k(\lambda)$  es de grado 6, porque el divisor de ceros de  $j(\lambda)$  es de grado 6. Por tanto,  $\mathbb{P}_1/S_3 = \mathbb{P}_1$ ,  $\mathbb{P}_1 - \{\infty, 0, 1\}/S_3 = \mathbb{P}_1 - \infty$  y el morfismo de paso al cociente es

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1 & \rightarrow & \mathbb{P}_1/S_3 = \mathbb{P}_1 \\ \lambda & \mapsto & j(\lambda) \end{array}$$

Con todo,

$$\{\text{Curvas elípticas}\} \xlongequal{\quad} \mathbb{A}_1$$

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \longmapsto j(\lambda)$$

**Teorema 4.7.23.** *Sea  $C$  una curva elíptica sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y  $\text{Pic}^0(C)$  el grupo de los divisores de  $C$  de grado cero módulo el grupo los divisores principales. Fijemos un punto cerrado  $x \in C$ . Se cumple que la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Puntos cerrados de } C\} & \rightarrow & \text{Pic}^0(C) \\ y & \mapsto & \mathcal{L}_{y-x} \end{array}$$

es biyectiva.

*Demostración.* Veamos que la aplicación es inyectiva: si  $\mathcal{L}_{y-x} \simeq \mathcal{L}_{y'-x}$  entonces  $\mathcal{L}_{y-y'} \simeq \mathcal{O}_C$ , luego existe una función  $f \in \Sigma_C$  tal que  $D(f) = y' - y$ . Si  $y' \neq y$  esta función define un isomorfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$ , contradicción.

Veamos que la aplicación es epiyectiva: Sea  $D$  un divisor de grado cero. Por Riemann-Roch fuerte  $h^0(C, \mathcal{L}_{D+x}) = 1$ , dado que los divisores canónicos tienen grado cero (de hecho  $w_C = \mathcal{O}_C$ ). Por tanto,  $D+x$  es linealmente equivalente a un divisor efectivo de grado 1, digamos  $y$ , luego  $D$  es linealmente equivalente a  $y-x$ . □

Dado que  $\text{Pic}^0(C)$  tiene estructura de grupo abeliano, tenemos que el conjunto de los puntos cerrados de  $C$  tiene estructura de grupo abeliano:  $y + y' = y''$  si el divisor  $(y-x) + (y'-x)$  es linealmente equivalente a  $y''-x$ , es decir,  $y + y' - x - y'' = D(f)$  es un divisor principal. Sabemos por 4.7.17 que  $C$  es isomorfa a una cúbica proyectiva plana,  $y^2 - x \cdot (x-1) \cdot (x-\lambda) = 0$ , para cierta  $\lambda \in k - \{1, 0\}$ . Sea  $r$  la ecuación de la recta que pasa por  $y$  e  $y'$ , sea  $x'$  el tercer punto de corte de la recta con la cúbica, y sea  $r'$  la ecuación de la recta que pasa por  $x$  y  $x'$ , sea  $x''$  el tercer punto de corte de la recta  $r'$  con la cúbica. Se cumple que  $D(\frac{r}{r'}) = y + y' - x - x''$ . Por tanto,  $D(\frac{r}{r'} \cdot f^{-1}) = y'' - x''$  y como el género de  $C$  no es cero  $y'' = x''$ . En conclusión, si denotamos  $\phi: C \times C \rightarrow C$  el morfismo que asigna a cada pareja  $(y, y')$  el tercer punto de corte de la recta que pasa por  $y$  e  $y'$  con  $C$ , tenemos que el morfismo

$$C \times C \rightarrow C, (y, y') \mapsto \phi(\phi(y, y'), x)$$

en los puntos racionales es la ley de grupo recién definida en  $C$ .

#### 4.7.4. Integración por funciones elementales (J.A.Navarro)

**Definición 4.7.24.** Diremos que un cuerpo  $K$ , con una (ley de) derivación es un cuerpo diferencial. Denotaremos la ley de derivación por  $'$ . Diremos que  $a \in K$  es una constante si  $a' = 0$ . Diremos que  $i: K \rightarrow L$  es una extensión diferencial si  $L$  es un cuerpo diferencial e  $i$  es un morfismo de anillos que conmuta con las derivaciones.

$\mathbb{C}$  será el cuerpo de constantes de todos los cuerpos diferenciales.

La “derivación logarítmica” cumple:

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} \Leftrightarrow v = cu \text{ para alguna constante } c \in \mathbb{C}$$

**Definición 4.7.25.** Cuando  $v' = u'/u$ , diremos que  $v = \ln u$  es el *logaritmo* de  $u$ , ó que  $u = e^v$  es la *exponencial* de  $v$ .

Diremos que una extensión diferencial  $K \rightarrow L$  es una extensión por *funciones elementales* si  $L = K(u_1, \dots, u_n)$  donde cada función  $u_i$  verifica una de las siguientes condiciones:

1.  $u_i$  es algebraico sobre  $K(u_1, \dots, u_{i-1})$ .
2.  $u_i$  es la exponencial de algún elemento de  $K(u_1, \dots, u_{i-1})$ .
3.  $u_i$  es el logaritmo de algún elemento de  $K(u_1, \dots, u_{i-1})$ .

y diremos que  $f \in K$  es *integrable con funciones elementales* si existe alguna extensión  $L$  por funciones elementales y  $u \in L$  tal que  $u' = f$ .

**Nota:** Las funciones elementales de una variable en sentido clásico son los elementos de las extensiones por funciones elementales del cuerpo de funciones racionales  $\mathbb{C}(x)$ , contenidas en el cuerpo de funciones meromorfas en un abierto del plano complejo (que jugaría el papel de un cierre algebraico). Las funciones trigonométricas (incluso hiperbólicas) y sus inversas son elementales: se expresan con exponenciales y logaritmos.

En principio, la integración con funciones elementales en sentido clásico sería un concepto más restrictivo (pues no hemos probado que toda extensión de  $\mathbb{C}(x)$  por funciones elementales pueda sumergirse en un cuerpo de funciones meromorfas); pero el teorema de Liouville mostrará que las funciones integrables con funciones elementales también lo son en el sentido clásico, por lo que ambos coinciden:

**Teorema 4.7.26 (Liouville).** *Si una función  $f \in K$  es integrable con funciones elementales, entonces existen funciones  $h, g_1, \dots, g_n \in K$  y constantes  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  tales que*

$$\int f dx = h + c_1 \ln g_1 + \dots + c_n \ln g_n$$

*Demostración.* Si  $f$  admite una primitiva elemental en  $K(u, u_2, \dots, u_r)$ , por inducción sobre  $r$  y considerando la extensión diferencial

$$K(u) \rightarrow K(u, u_2, \dots, u_r)$$

podemos suponer que existen  $q(u), p_1(u), \dots, p_n(u) \in K(u)$  tales que

$$f = q(u)' + c_1 \frac{p_1(u)'}{p_1(u)} + \dots + c_n \frac{p_n(u)'}{p_n(u)}$$

y hemos de hallar una descomposición similar en  $K$ .

**Caso algebraico:** La derivación de  $K$  se extiende de modo *único* a cada extensión finita (porque ésta es separable). Luego tal extensión es compatible con cualquier morfismo  $y$ , por tanto, con trazas y normas. Además  $\text{tr}(p'/p) = N(p)'/N(p)$ :

$$[K(u) : K] \cdot f = \text{tr}(f) = (\text{tr } q)' + c_1 \frac{N(p_1)'}{N(p_1)} + \dots + c_n \frac{N(p_n)'}{N(p_n)}$$

**Caso trascendente:**

(1) **Si  $u$  es una exponencial:**  $u' = g'u$ . En este caso  $(fu^n)' = (f' + ng')u^n$ , así que disponemos

de una "traza"  $\text{tr}(\sum f_i u^i) := f_0$  que también es compatible con las derivaciones de  $K$  y  $K(u)$ , y se concluye de igual modo que en el caso algebraico, ya que si  $v = f_n u^n + f_{n+1} u^{n+1} + \dots$ , entonces

$$\text{tr} \frac{v'}{v} = (ng)' + \frac{f'_n}{f_n}$$

(2) **Si  $u$  es un logaritmo:**  $u' = g'/g$ . Descomponiendo las funciones racionales  $p_i(u)$  en factores

irreducibles podemos suponer que son polinomios mónicos irreducibles o constantes. Descomponiendo  $q(u)$  en fracciones simples tenemos:

$$(*) \quad f = \sum \left( \frac{s_j(u)}{q_j(u)^r} \right)' + c_1 \frac{p_1(u)'}{p_1(u)} + \dots + c_n \frac{p_n(u)'}{p_n(u)}$$

Según el lema 4.7.27, la derivada  $p(u)'$  de un polinomio es otro polinomio de igual grado, ó baja en una unidad si el coeficiente de mayor grado es constante. Luego las fracciones  $p_i(u)'/p_i(u)$  son simples y vemos que no hay términos con  $r \geq 1$  en la descomposición de  $q(u)$ , porque

$$\left( \frac{s(u)}{q(u)^r} \right)' = -r \frac{s(u) \cdot q(u)'}{q(u)^{r+1}} + \dots$$

y  $q(u)$  no divide a  $s(u) \cdot q(u)'$ . Es decir, los polinomios  $p_i(u) \in K$  y  $q(u)$  es un polinomio tal que  $q(u)' \in K$ ; luego  $q(u) = cu + h$  por el lema,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $h \in K$ , y concluimos que  $f = h' + c(g'/g) + c_1(p_1'/p_1) + \dots + c_n(p_n'/p_n)$ .  $\square$

**Lema 4.7.27.** *Si  $u$  es trascendente y  $u' = g \in K$ , el grado de  $p(u)'$  coincide con el de  $p(u)$ , salvo que el primer coeficiente sea constante, caso en que el grado baja en una unidad.*

*Demostración.*  $(f_0 u^n + f_1 u^{n-1} + \dots)' = f'_0 u^n + (nf_0 g + f'_1) u^{n-1} + \dots$  sólo baja de grado cuando  $f'_0 = 0$ , caso en que  $0 = nf_0 g + f'_1 = (nf_0 u + f_1)'$  contradice el carácter trascendente de  $u$ .  $\square$

Queda por averiguar cuándo una función elemental satisface la condición del Teorema de Liouville. Cuando al cuerpo de funciones racionales  $\mathbb{C}(x)$  se le adjunta una exponencial o un logaritmo (trascendentes) puede decidirse descomponiendo  $f$  en fracciones simples y usando el lema 4.7.27 en el caso de un logaritmo y el lema 4.7.28 en el de una exponencial:

**Lema 4.7.28.** *Si  $u$  es trascendente y  $u' = gu$ ,  $g \in K$ , entonces la derivada de cualquier monomio  $hu^n \neq 0$  es un monomio no nulo de igual grado, y la derivada  $p(u)'$  de un polinomio sólo es múltiplo de  $p(u)$  cuando éste es un monomio.*

*Demostración.*  $(hu^n)' = (h' + nhg)u^n$ , y su anulación implica que  $hu^n$  es constante y contradice el carácter trascendente de  $u$ . Además, si  $n > m$  y

$$\frac{h' + nhg}{h} = \frac{f' + mfg}{f}$$

entonces  $(n - m)(u'/u) = (f'/f) - (h'/h)$  vuelve a contradecir el carácter trascendente de  $u$ .  $\square$

**Ejemplo 4.7.29.** Vamos a estudiar si la integral  $\int f(x)e^{g(x)}dx$  es elemental, donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones racionales. En este caso  $K := \mathbb{C}(x, e^g)$ , y pondremos  $u := e^g$ , de modo que  $u'/u = g'$ . Si  $g(x)$  no es constante, entonces  $u$  es trascendente sobre  $\mathbb{C}(x)$ :

$$\begin{aligned} u^n + f_1(x)u^{n-1} + \dots + f_n(x) &= 0 \\ (ng')u^n + (f'_1 + (n-1)f_1g')u^{n-1} + \dots + f'_n &= 0 \\ ng' &= f'_n/f_n \end{aligned}$$

y como  $f'_n/f_n$  es nula o descompone en suma de fracciones con denominadores lineales, concluimos que  $g' = 0$ . (O bien  $e^g$  es trascendente porque tiene una singularidad esencial en cualquier polo de  $g$ ). Ahora, si

$$fu = q(u)' + c_1 \frac{p_1(u)'}{p_1(u)} + \dots + c_n \frac{p_n(u)'}{p_n(u)}$$

descomponiendo  $q(u)$  en fracciones simples, el lema 4.7.28 permite obtener que  $p_i(u) = u$  ó está en  $\mathbb{C}(x)$ , y que  $q(u) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i(x)u^i$ . Luego  $q(u) = z(x)u$  para alguna función racional  $z(x)$ , y concluimos que  $fu = (z' + g'z)u$ . Es decir, la ecuación diferencial

$$z' + g'z = f$$

tiene alguna solución racional  $z(x) \in \mathbb{C}(x)$ . Recíprocamente, si  $z(x)$  es una de tales soluciones, la integral  $\int fe^g dx = ze^g$  es elemental. La existencia de soluciones racionales de esta ecuación puede decidirse descomponiendo en fracciones simples:  $\int e^{x^2} dx$  origina la ecuación  $z' + 2xz = 1$ , cuya solución

ha de ser un polinomio, lo que es imposible. Tal integral no es una función elemental.  $\int x^{-1}e^x dx$  origina la ecuación  $z' + z = x^{-1}$ , que claramente no tiene solución racional. No es una función elemental.

Con el cambio  $y = e^x$  obtenemos que  $\int \frac{dy}{\ln y}$  no es una función elemental. Como esta integral se obtiene al integrar por partes  $\int \ln(\ln x) dx$ , ésta tampoco es una función elemental.

**Ejercicio 4.7.30.**  $\int x^{-1} \operatorname{sen} x dx$  no es una función elemental.

Veamos ahora el

**Caso algebraico:**  $K = \mathbb{C}(x, y)$  donde  $y$  es algebraico sobre  $\mathbb{C}(x)$ . Dada una 1-forma diferencial  $\omega = f(x, y)dx$ , consideramos una base  $\{r_1, \dots, r_s\}$  del grupo generado por sus residuos y los divisores  $D_1, \dots, D_s$ , donde el coeficiente en  $D_i$  de un punto  $p$  es el coeficiente de  $r_i$  en el residuo de  $\omega$  en  $p$ .

Si la integral  $\int \omega$  es elemental, entonces los divisores  $D_1, \dots, D_s$  definen elementos de torsión en la variedad jacobiana,  $m_i D_i = D(g_i)$ , y existe una función meromorfa  $h \in K$  tal que

$$\omega = dh + \sum_{i=1}^s \frac{r_i}{m_i} \frac{dg_i}{g_i}$$

En efecto, de acuerdo con el Teorema de Liouville tenemos

$$\omega = dh + \sum_j c_j \frac{dh_j}{h_j}, \quad c_j \in \mathbb{C}$$

y considerando una base  $\{r_1, \dots, r_s, a_1, \dots\}$  del  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial que generan los residuos y las constantes  $c_j$  tendremos:

$$\begin{aligned} c_j &= \left( \sum_i \frac{m_{ij}}{m_i} r_i \right) + \frac{n_{1j}}{n_1} a_1 + \dots \\ \omega &= dh + \sum_i r_i \left( \sum_j \frac{m_{ij}}{m_i} \frac{dh_j}{h_j} \right) + a_1 \left( \sum_j \frac{n_{1j}}{n_1} \frac{dh_j}{h_j} \right) + \dots \\ &= dh + \sum_i \frac{r_i}{m_i} \frac{dg_i}{g_i} + \frac{a_1}{n_1} \frac{dv_1}{v_1} + \dots \end{aligned}$$

Considerando el residuo de  $\omega$  en cualquier cero de  $v_1$  vemos que éstos no existen:

$$\omega = dh + \sum_{i=1}^s \frac{r_i}{m_i} \frac{dg_i}{g_i}$$

y al observar que el residuo de  $(df)/f$  en un punto  $p$  es precisamente el coeficiente de  $p$  en el divisor  $D(f)$ , concluimos que

$$D_i = \frac{D(g_i)}{m_i}$$

**Nota:** Aunque aparentemente este resultado sólo sea una condición necesaria para que una integral  $\int \omega$  sea elemental, realmente es una caracterización, y permite averiguar el carácter elemental de  $\int \omega$  (siempre que se sepa decidir cuándo un elemento de la jacobiana es de torsión):

Primero se calculan los residuos de  $\omega$  y los correspondientes divisores  $D_i$ . Si alguno no es de torsión, la integral no es elemental. Si todos son de torsión,  $m_i D_i = D(g_i)$ , consideramos la forma diferencial

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \omega - \sum_{i=1}^s \frac{r_i}{m_i} \frac{dg_i}{g_i}$$

y el resultado anterior afirma que  $\theta$  es exacta precisamente cuando la integral  $\int \omega$  es elemental. Esta forma diferencial  $\theta$  ya tiene residuo nulo en todo punto así que las partes principales de sus polos pueden integrarse y obtenemos unos desarrollos de Laurent  $\delta_p$ . Podemos decidir si tales desarrollos de Laurent son los de alguna función meromorfa  $h \in K$  (pues tal condición equivale a que  $\sum_p \text{res}_p(\delta_p \omega_i) = 0$  para toda forma diferencial regular  $\omega_i$ ). Si no existe tal función  $h$ , la integral no es elemental. Si existe, es única salvo la adición de una constante, y la integral  $\int \omega$  es elemental si y sólo si  $\theta = dh$ .

**Ejemplo 4.7.31.** Si  $\omega$  es regular, ya tiene residuo nulo en todo punto. En tal caso  $\theta = \omega$ ; luego los desarrollos de Laurent  $\delta_p$  son idénticamente nulos y  $h = 0$ . Concluimos que la integral  $\int \omega$  es elemental si y sólo si  $\omega = 0$ . *Ninguna forma diferencial regular no nula tiene integral elemental.*

En particular, las integrales elípticas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-c)}} \quad , \quad c \neq 0, 1$$

no son elementales.

## 4.8. Apéndice: Teorema de representabilidad

Es bien conocido que los funtores representables  $F = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{M})$  son exactos por la izquierda.

Queremos demostrar el recíproco. Para construir el representante  $\mathcal{M}$  del functor contravariante por la izquierda  $F$ , vamos a caracterizar los submódulos  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$ , en términos de  $F$ , para concluir demostrando que  $\mathcal{M}$  es el límite inductivo de los submódulos  $\mathcal{N}$ .

Un submódulo de  $\mathcal{M}$  es un haz coherente  $\mathcal{N}$  y un morfismo  $\mu: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  inyectivo, es decir, un morfismo  $\mu$  que verifica que para todo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{M} \\ \delta \downarrow & \nearrow \mu' & \\ \mathcal{N}' & & \end{array}$$

si  $\delta$  es un epimorfismo,  $\delta$  ha de ser un isomorfismo.

**Definición 4.8.1.** Dado un functor contravariante  $F$  llamamos pareja a un  $\mathcal{O}_X$ -módulo coherente  $\mathcal{N}$  y un elemento  $\mu \in F(\mathcal{N})$ . Llamamos morfismo de parejas  $(\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\mathcal{N}', \mu')$  a un morfismo  $\delta: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$  tal que  $F(\delta): F(\mathcal{N}') \rightarrow F(\mathcal{N})$  aplica  $\mu'$  en  $\mu$ . Diremos que  $(\mathcal{N}, \mu)$  es una pareja mínima si todo epimorfismo  $(\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\mathcal{N}', \mu')$  de parejas es isomorfismo.

Pues bien, las parejas mínimas de un functor contravariante representable se corresponderán con los submódulos del representante del functor.

**Lema 4.8.2.** *Todo morfismo de parejas de una pareja mínima en otra pareja es inyectivo.*

*Demostración.* Sea  $\phi: (\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\mathcal{N}', \mu')$  un morfismo de parejas, siendo  $(\mathcal{N}, \mu)$  mínima. Sea  $i: \text{Im } \phi \hookrightarrow \mathcal{N}'$  la inclusión natural y  $\bar{\mu} = F(i)(\mu')$ . El morfismo de parejas natural  $(\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\text{Im } \phi, \bar{\mu})$  es un epimorfismo de parejas, luego  $\mathcal{N} = \text{Im } \phi$  y  $\phi$  es inyectivo.  $\square$

**Lema 4.8.3.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $F$  un functor contravariante sobre la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos coherentes y  $(P, \phi)$  una pareja de  $F$ . Existe un morfismo de parejas de  $(P, \phi)$  en una mínima.*

*Demostración.* Si  $(P, \phi)$  es una pareja mínima hemos concluido. Si no, existe un epimorfismo de parejas  $(P, \phi) \rightarrow (P_1, \phi_1)$ , que no es isomorfismo. Si  $(P_1, \phi_1)$  es mínima hemos acabado. Si no, existe un epimorfismo de parejas  $(P_1, \phi_1) \rightarrow (P_2, \phi_2)$ , que no es isomorfismo. Este proceso finitiza, porque la cadena  $\text{Ker } \phi_1 \subset \text{Ker}(\phi_1 \circ \phi_2) \subset \dots$  ha de ser finita por la noetherianidad de  $X$ .  $\square$

**Corolario 4.8.4.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $F$  un functor contravariante exacto por la izquierda y  $(P, \phi), (P', \phi')$  dos parejas de  $F$ . Existe un morfismo de parejas de estas dos parejas en una misma pareja mínima.*

*Demostración.* Observemos en primer lugar que  $F$ , por ser exacto por la izquierda, es aditivo, i.e.,  $F(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') = F(\mathcal{M}) \oplus F(\mathcal{M}')$ : De la sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow 0$  se deduce la exactitud de la sucesión  $0 \rightarrow F(\mathcal{M}') \rightarrow F(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') \rightarrow F(\mathcal{M})$ . Ahora bien, como el morfismo  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}'$  tiene retracts, entonces  $F(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') \rightarrow F(\mathcal{M})$  tiene sección y con todo  $F(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') = F(\mathcal{M}) \oplus F(\mathcal{M}')$ .

Por tanto, podemos considerar la pareja  $(P \oplus P', \phi \oplus \phi')$ . Por el lema anterior, existe un morfismo de esta pareja en una pareja mínima. Como tenemos morfismos naturales de  $(P, \phi)$  y  $(P', \phi')$  en  $(P \oplus P', \phi \oplus \phi')$  concluimos el corolario.  $\square$

**Lema 4.8.5.** *Si  $F$  es un funtor contravariante exacto por la izquierda, dos morfismos de parejas  $u, v: (\mathcal{N}', \mu') \xrightarrow{\quad} (\mathcal{N}, \mu)$  en una pareja mínima coinciden.*

*Demostración.* Consideremos el conúcleo de los dos morfismos  $u, v$ , es decir sea  $\text{Coker}(u - v)$  y denotemos por  $\pi: \mathcal{N} \rightarrow \text{Coker}(u - v)$  el morfismo de paso al cociente.

Como  $u, v$  son morfismos de parejas se verifica que  $F(u)(\mu) = F(v)(\mu) = \mu'$ . Como  $F$  es un funtor exacto por la izquierda, existe un  $\delta \in F(\text{Coker}(u - v))$  de modo que  $F(\pi)(\delta) = \mu$ . Por tanto  $\pi: (\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\text{Coker}(u - v), \delta)$  es un epimorfismo de parejas que ha de ser isomorfismo porque  $(\mathcal{N}, \mu)$  es mínima. Luego  $u = v$ . □

**Teorema 4.8.6** (de representabilidad). *Sea  $X$  un esquema noetheriano. La condición necesaria y suficiente para que un funtor contravariante, sobre la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos coherentes, sea representable por un haz cuasicoherente es que sea exacto por la izquierda.*

*Demostración.* La necesidad es bien conocida. Probemos que un funtor  $F$  contravariante y exacto por la izquierda es representable.

Por 4.8.3, 4.8.4 y 4.8.5, podemos definir el límite inductivo de las parejas mínimas, denotémoslo por  $R$ . Veamos que  $F = \text{Hom}(-, R)$ :

Si  $\mathcal{M}$  es un módulo coherente se define  $\alpha: F(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, R)$  así: Dado  $\xi \in F(\mathcal{M})$ , por el lema 4.8.3 existe un morfismo  $u: (\mathcal{M}, \xi) \rightarrow (\mathcal{N}, \mu)$  en una pareja mínima. Sea  $i: \mathcal{N} \rightarrow R$  el morfismo natural de  $\mathcal{N}$  en el límite inductivo. Definimos  $\alpha(\xi): \mathcal{M} \rightarrow R$ , por  $\alpha(\xi) = i \circ u$ . Es fácil comprobar que  $\alpha$  está bien definido y es funtorial en  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{M}$  es un módulo coherente se define  $\beta: \text{Hom}(\mathcal{M}, R) \rightarrow F(\mathcal{M})$  así: Dado  $\phi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, R)$ , factoriza a través de un morfismo  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{N}, \mu)$  en una pareja mínima. Se define  $\beta(\phi) = F(\varphi)(\mu)$ . Es fácil comprobar que  $\beta$  está bien definido y es funtorial en  $\mathcal{M}$ .

Comprobando que  $\alpha \circ \beta$  y  $\beta \circ \alpha$  son la identidad sobre sus respectivos dominios se concluye. □

## 4.9. Problemas

Supondremos siempre que el cuerpo base es algebraicamente cerrado y que las curvas consideradas son completas no singulares, salvo mención expresa contraria.

1. Sea  $k$  de característica cero. Sea  $C$  una curva proyectiva plana no singular de grado  $n$ . Probar que el número de tangentes que se pueden trazar desde un punto  $p \notin C$  del plano proyectivo a la curva es  $2n + 2g - 2$ , siendo  $n$  el grado de la curva y  $g$  el género de la curva. Calcular el número de tangentes que se pueden trazar desde un punto  $p \in C$ .
2. En el ejercicio anterior admitamos que  $C$  tenga puntos singulares de multiplicidad 2 que desingularizan con la primera explosión. Entonces el número de tangentes es  $2n + 2g - 2 - K$ , siendo  $K$  el número de cúspides de  $C$ .
3. Sea  $C \subset \mathbb{P}_2$  una curva proyectiva plana no singular de grado  $d$ , sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Para cada punto  $x \in C$ , sea  $T_x C$  la recta tangente a  $C$  en  $x$ . Consideremos  $T_p C$  como un punto del plano proyectivo dual  $\mathbb{P}_2^*$ . El morfismo  $\phi: C \rightarrow \mathbb{P}_2^*$ ,  $\phi(x) = T_x C$ , define un morfismo de  $C$  en su curva dual  $C^*$ . Calcular el grado de  $C^*$ . Calcular el número de puntos de inflexión de  $C$ , considérese para ello el morfismo  $C \rightarrow R$ ,  $x \mapsto T_x C \cap R$ , donde  $R$  es cualquier recta de  $\mathbb{P}_2$ .

4. Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un revestimiento de Galois entre curvas, sobre un cuerpo de característica cero. Sea  $G$  el grupo de Galois de  $\pi$  y  $n = \#G$ . Sean  $p_1, \dots, p_s$  un conjunto maximal de puntos de ramificación de  $C$  cuyas imágenes por  $\pi$  sean distintas. Sean  $r_i = e_{p_i}$  los índices de ramificación de los  $p_i$ . Probar que

$$\frac{2g-2}{n} = 2g_{C'} - 2 + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$$

Probar que si  $g_C \geq 2$  el valor mínimo de  $2g_{C'} - 2 + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$  es  $\frac{1}{42}$  y concluir que  $n \leq 84(g_C - 1)$ . Probar que el orden del grupo de automorfismos de una curva de género  $g$  mayor o igual que dos es menor igual que  $84(g_C - 1)$ .

5. Probar que la condición necesaria y suficiente para que una curva tenga estructura de grupo es que sea de género 1.
6. Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Sea  $C$  una cúbica proyectiva plana no singular. Probar que cada par de puntos de  $C$  es un par de los tres puntos de contacto de cuatro cónicas tritangentes a  $C$ .
7. Sea  $C$  una cónica irreducible del plano proyectivo. Probar que todo automorfismo de  $C$  levanta a un automorfismo del plano proyectivo.
8. Probar que la inclusión de una curva no singular plana proyectiva de grado 4 en el plano proyectivo es la inmersión canónica.
9. Sea  $C$  la curva hiperelíptica birracional a  $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - \alpha_i)$ . Probar que  $\Gamma(C, \Omega_{C/k}) = \left\{ \sum_{i=0}^{g-1} \lambda_i \frac{x^i dx}{y} \right\}$ . Expresar en coordenadas el morfismo canónico de  $C$ .
10. Sea  $C$  una cúbica proyectiva plana. Probar que desde un punto  $p$  (que no sea de inflexión) de la cúbica se pueden trazar cuatro tangentes. Demostrar que la cónica que pasa por los cuatro puntos de tangencia y  $p$ , es tangente a la cúbica en  $p$ .
11. Sea  $C$  una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Probar que si existe una función  $f \in \Sigma_C$ , de modo que  $f$  y  $df$  sólo tienen único polo y un único cero en los mismos puntos, entonces  $C = \mathbb{P}_1$ .
12. Sea  $C$  una curva de género  $g$  y  $x \in C$ . Probar que existen exactamente  $g$  números naturales  $0 \leq n_1 < \dots < n_g < 2g$  de modo que no existe una función meromorfa con un único polo, de orden  $n_i$  en  $x$ . Se dice que  $x$  es de Weierstrass si y sólo si  $n_g \neq g$ . Demostrar que  $x$  es de Weierstrass si y sólo si existe una diferencial holomorfa con un cero de orden  $g$  en  $x$ .
13. Probar que toda curva se puede meter como una curva cerrada en un espacio proyectivo  $\mathbb{P}_3$ .
14. Sea  $C$  una cúbica alabeada de  $\mathbb{P}_3$ . Sea  $C'$  otra curva y  $\phi: C \rightarrow C'$  un morfismo de grado 3. Demostrar que cada fibra de  $\phi$  es la intersección de  $C$  con cada uno de los planos de un haz de planos.
15. Sea  $C$  una curva plana de ecuación  $x^4 + y^4 - 1 = 0$ . Demostrar que 4 puntos de la curva son el divisor de ceros de una diferencial holomorfa si y sólo si están alineados. (car  $k \neq 2$ ).

16. Sea  $C$  la desingularización de  $y^5 + 3x^4y + x^2 + xy = 0$ . Dados 4 puntos arbitrarios de la curva existe una diferencial holomorfa que tiene ceros en esos cuatro puntos. Existe una diferencial holomorfa con ceros en 8 puntos si y sólo si los 8 puntos yacen en una cónica que pasa por el origen.
17. Toda cuártica de género 1 en  $\mathbb{P}_3$  es intersección de dos cuádricas.

# Índice alfabético

- Anillo íntegramente cerrado, 20
- Anillo normal, 20
  
- Cierre entero, 20
- Curva, 18
- Curvas elípticas, 74
- Curvas hiperelípticas, 74
  
- Datos de construcción, 25, 26
- Datos de construcción efectivos, 25, 27
- Dimensión de un esquema, 18
- Divisores canónicos, 65
- Divisores de una curva, 38
  
- Equivalencia lineal de divisores, 39
- Espacio étale, 11
- Espacio anillado, 13
- Espacio anillado en anillos locales, 13
- Esquema, 16
- Esquema irreducible, 16
- Esquema reducido, 16
  
- Fibra de un prehaz, 9
  
- Género aritmético de una curva, 64
- Género geométrico de una curva, 64
- Gérmenes de secciones, 9
- Grado de un divisor, 38
- Grupo de Picard, 41
- Grupos de cohomología de un haz, 49
  
- Haz, 10
- Haz acíclico, 51
- Haz de diferenciales relativas, 68
- Haz de línea, 39
- Haz de localizaciones homogéneas, 17
- Haz de morfismos de haces, 31
- Haz dualizante de una curva, 64
- Haz flasgo, 50
  
- Imagen directa de haces, 12
  
- Morfismo afín, 23
- Morfismo birracional, 23
- Morfismo de espacios anillados, 13
- Morfismo de espacios anillados en anillos locales, 13
- Morfismo de esquemas, 16
- Morfismo de prehaces, 9
- Morfismo finito, 23
  
- Parte de torsión de un haz cuasicoherente, 62
- Prehaz, 7
- Prehaz de módulos, 8
- Producto tensorial de haces de módulos, 32
  
- Rango de un módulo coherente, 62
- Resolución de Godement, 49
- Revestimiento no ramificado, 71
  
- Soporte de un divisor, 38
- Soporte de un haz, 53
  
- Teorema de De Rham, 52
- Teorema de Pappus, 45
- Teorema de Pascal, 45
  
- Variedad algebraica, 18
- Variedad completa, 21
- Variedad de Riemann, 22
- Variedades proyectivas, 18