

# Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica

Pedro Sancho de Salas

Enero de 2001



# Índice General

<b>0</b>	<b>Anillos y módulos</b>	<b>7</b>
0.1	Introducción . . . . .	7
0.2	Anillos. Ideales . . . . .	9
0.3	Espectro primo de un anillo . . . . .	13
0.4	Localización. Fórmula de la fibra . . . . .	18
0.5	Módulos . . . . .	21
0.5.1	Longitud de un módulo . . . . .	25
0.5.2	Localización de módulos . . . . .	26
0.5.3	Categorías. Funtor de homomorfismos . . . . .	31
0.5.4	Producto tensorial . . . . .	33
0.5.5	Módulos planos y proyectivos . . . . .	36
0.5.6	Límites proyectivos e inductivos . . . . .	40
0.6	Problemas . . . . .	45
<b>1</b>	<b>Variedades algebraicas</b>	<b>51</b>
1.1	Módulos noetherianos . . . . .	51
1.2	Anillos noetherianos . . . . .	52
1.3	Morfismos finitos . . . . .	53
1.4	Lema de normalización de Noether. Ceros de Hilbert . . . . .	57
1.5	Descomposición primaria . . . . .	60
1.6	Variedades proyectivas . . . . .	65
1.7	Problemas . . . . .	68
<b>2</b>	<b>Completación</b>	<b>71</b>
2.1	Introducción . . . . .	71
2.2	Completación . . . . .	71
2.3	Ejemplos de completaciones y graduados . . . . .	74
2.4	Topología $I$ -ádica. Completación $I$ -ádica . . . . .	75
2.5	Artin-Rees . . . . .	76
2.6	Completación y noetherianidad . . . . .	78
2.7	Teorema de Cohen . . . . .	80
2.8	Problemas . . . . .	82

<b>3</b>	<b>Teoría de la dimensión local</b>	<b>85</b>
3.1	Introducción . . . . .	85
3.2	Función de Hilbert . . . . .	85
3.3	Dimensión en anillos locales noetherianos . . . . .	87
3.4	Teoría de la dimensión en variedades algebraicas . . . . .	90
3.5	Problemas . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Anillos locales regulares</b>	<b>95</b>
4.1	Introducción . . . . .	95
4.2	Anillos locales regulares . . . . .	95
4.3	Anillos locales regulares de dimensión 1 y anillos de valoración . . . . .	98
4.4	Cierre entero y anillos de valoración . . . . .	100
4.5	Finitud del cierre entero . . . . .	103
4.6	Problemas . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Desingularización de curvas</b>	<b>109</b>
5.1	Introducción . . . . .	109
5.2	Explosión en un punto y desingularización . . . . .	109
5.3	Multiplicidad de un punto singular . . . . .	112
5.4	Multiplicidad de intersección . . . . .	115
5.5	Teoremas de Bézout y Max Noether . . . . .	117
5.6	Ramas analíticas . . . . .	119
5.7	Puntos cuspidales y contacto maximal . . . . .	120
5.7.1	Desingularización de curvas planas vía el contacto maximal . . . . .	121
5.8	Problemas . . . . .	123
	<b>Introducción</b>	<b>126</b>
<b>6</b>	<b>Esquemas</b>	<b>129</b>
6.1	Introducción . . . . .	129
6.2	Haces . . . . .	129
6.3	Espacio anillado . . . . .	134
6.3.1	Haz de localizaciones en abiertos de $\text{Spec } A$ . . . . .	135
6.4	Esquemas . . . . .	137
6.5	Ejemplos de esquemas . . . . .	138
6.5.1	Variedades algebraicas. Variedades proyectivas . . . . .	138
6.5.2	Variedad de Riemann . . . . .	140
6.5.3	Recollement de esquemas . . . . .	142
6.6	Problemas . . . . .	147
<b>7</b>	<b>Módulos cuasicoherentes y coherentes</b>	<b>149</b>
7.1	Haces cuasicoherentes sobre un espacio anillado . . . . .	149
7.1.1	Haces coherentes . . . . .	152
7.2	Haces cuasicoherentes sobre un esquema proyectivo . . . . .	154
7.3	Imagen directa e inversa de haces (cuasi)coherentes . . . . .	156
7.4	Divisores y haces de línea . . . . .	157
7.5	Teoremas de Bézout y Max Noether . . . . .	161
7.6	Problemas . . . . .	164

<b>8</b>	<b>Cohomología</b>	<b>167</b>
8.1	Introducción . . . . .	167
8.2	Cohomología de haces . . . . .	169
8.3	Aciclicidad en esquemas afines . . . . .	173
8.4	Caracterización cohomológica de la recta . . . . .	175
8.5	Dimensión de los grupos de cohomología . . . . .	177
8.5.1	Cohomología de los haces coherentes sobre la recta proyectiva . . . . .	177
8.5.2	Cohomología de los haces coherentes en curvas . . . . .	178
8.5.3	Cohomología de los haces coherentes en variedades proyectivas . . . . .	179
<b>9</b>	<b>Teoría de la dualidad en curvas</b>	<b>181</b>
9.1	Introducción . . . . .	181
9.2	Teorema de Riemann-Roch débil . . . . .	181
9.3	Teoremas de dualidad y Riemann-Roch fuerte . . . . .	183
9.4	Dualizante de una curva lisa . . . . .	185
9.5	Residuo y morfismo traza . . . . .	186
9.6	Dualizante de curvas singulares . . . . .	191
9.7	Aplicaciones de la teoría de dualidad . . . . .	192
9.7.1	Teorema de Hurwitz . . . . .	192
9.7.2	Morfismos en espacios proyectivos . . . . .	194
9.7.3	Curvas elípticas e hiperelípticas . . . . .	197
9.7.4	Curvas en $\mathbb{P}_3$ . . . . .	201
9.7.5	Integración por funciones elementales . . . . .	204
9.8	Apéndice: Teorema de representabilidad . . . . .	208
9.9	Problemas . . . . .	210
	<b>Índice de términos</b>	<b>212</b>

**Bibliografía:**

1. M. Atiyah, I.G. Macdonald: *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Ed. Reverté, Barcelona (1973).
2. W. Fulton: *Curvas Algebraicas*, Ed. Reverté, Barcelona (1971).
3. H. Matsumura: *Commutative Algebra*, W.A. Benjamin Co, New York (1970).
4. J.A. Navarro: *Álgebra Conmutativa Básica*, Manuales UNEX, n§ 19, (1996).
5. R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, GTM n§ 52, Springer Verlag (1977).



# Capítulo 0

## Anillos y módulos

### 0.1 Introducción

Desde un punto de vista aritmético, los anillos son las estructuras que recogen las operaciones de suma y producto, como las que tenemos en  $\mathbb{Z}$ . Ahora bien, los anillos pueden entenderse geoméricamente como anillos de funciones continuas de un espacio.

Intentemos justificar la introducción de los anillos desde un punto de vista geométrico.

Un físico, como cualquier ser vivo, estudia el universo con unos instrumentos, que le van dando información. Es decir, el físico cuenta con unas funciones, con el álgebra definida por esas funciones. El espacio se obtiene del anillo o álgebra de funciones.

De hecho, “el mirar moderno” del espacio es coordinándolo. Imaginamos tres ejes de coordenadas y todo punto del espacio viene definido por tres coordenadas. Los puntos vienen determinados por los valores de las funciones coordenadas en ellos. Además los objetos del espacio, por ejemplo un paraboloides, los solemos definir en implícitas. Dos objetos serán iguales si no los sabemos distinguir, es decir, con nuestra terminología, si no existe una función que valore distintamente en los dos objetos.

Dependiendo de las funciones que consideremos como “admisibles”, el espacio será de una forma u otra. Por ejemplo, dado  $\mathbb{R}^3$ , si consideramos que cualquier aplicación de conjuntos de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}$  es una observación o función admisible, estaremos considerando nuestro espacio como un conjunto discreto. Si consideramos sólo las funciones continuas, lo estaremos considerando como espacio topológico. Si consideramos el anillo generado algebraicamente por las tres coordenadas, lo consideraremos como espacio algebraico.

En este último caso, los objetos vienen definidos por el lugar geométrico definido por ecuaciones (compatibles) del tipo

$$p_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \dots, p_r(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (*)$$

Objetos que denominaremos subvariedades algebraicas. Como es obvio, si al sistema anterior le añadimos una ecuación del tipo  $\sum_i f_i \cdot p_i(x_1, x_2, x_3) = 0$  ésta es redundante. Así pues, el sistema de ecuaciones definido por los polinomios  $p_1(x_1, x_2, x_3), \dots, p_r(x_1, x_2, x_3)$  es equivalente al definido por el ideal  $(p_1(x_1, x_2, x_3), \dots, p_r(x_1, x_2, x_3))$ . Tenemos, pues, una correspondencia biunívoca entre los ideales y las subvariedades. Los puntos son las subvariedades más pequeñas, luego se corresponderán con los ideales maximales de  $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$  (nuestro anillo de funciones “admisibles”). Como veremos, las subvariedades irreducibles (es decir, las que no son unión de dos subvariedades propias)



la relación estrecha entre los ideales maximales de  $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]/I$  y el lugar geométrico de los puntos del sistema de ecuaciones (\*).

En este capítulo iniciaremos la comprensión geométrica de cualquier anillo conmutativo  $A$ , asociándole un espacio cuyos puntos se corresponden con los ideales primos de  $A$ . Espacio que denotaremos por  $\text{Spec } A$  y denominaremos espectro primo de  $A$ .

Tomamos como espacio todos los ideales primos y no sólo los maximales, por razones que se aclararán a lo largo del capítulo. Digamos ahora sólo que los ideales primos recogen mejor el concepto de primo (en el sentido del Lema de Euclides), que toda morfismo de anillos induce un morfismo entre los espectros (lo que no sucedería en general si sólo tomamos los ideales maximales) y que si una función se anula en todo primo entonces es nilpotente (lo que no sucede en general si sólo tomamos los ideales maximales). Además, hay una razón de índole topológica: Así como todo espacio topológico puede suponerse  $T_0$ , es decir, puede asignársele, de modo natural, un espacio  $T_0$ , también a todo espacio topológico puede asignársele un espacio topológico en el que cada cerrado irreducible (cerrados que no son unión de dos cerrados) es el cierre de un punto. Esto último es lo que hacemos en Geometría Algebraica cuando consideramos  $\text{Spec } A$  y no sólo el conjunto de los ideales primos maximales.

La teoría de ideales inicia el cumplimiento del sueño de Kronecker: la unificación de la Aritmética y la Geometría. Desde esta perspectiva los elementos de cualquier anillo conmutativo pueden entenderse como funciones sobre el espectro primo del anillo. Así, por ejemplo, los números enteros, los enteros de Gauss, etc., son verdaderas funciones y podemos aplicarles intuiciones y recursos geométricos. Los números primos podrán ser interpretados geoméricamente como los puntos o subvariedades irreducibles de un espacio, etc.

Las dos operaciones o procesos básicos estudiados en este capítulo, serán la localización y paso al cociente en anillos y módulos. Estos dos procesos pueden ser entendidos geoméricamente como los dos procesos de restricción a abiertos y restricción a cerrados. También estudiaremos el producto tensorial, que geoméricamente representa el producto de variedades algebraicas.

## 0.2 Anillos. Ideales

Comencemos con una revisión rápida de la definición y propiedades elementales de los anillos.

**1. Definición:** Un anillo  $A$  es un conjunto con dos operaciones  $A \times A \xrightarrow{+} A$ ,  $(a, a') \mapsto a + a'$ ,  $A \times A \xrightarrow{\cdot} A$ ,  $(a, a') \mapsto a \cdot a'$ , que denominamos suma y producto, tales que

1.  $A$  es un grupo abeliano con respecto a la suma (luego, tiene un elemento cero, que se denota por  $0$ , y cada  $a \in A$  tiene un opuesto que se denota por  $-a$ ).
2. La multiplicación es asociativa  $((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$  y distributiva  $(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$ .

Además sólo consideraremos anillos conmutativos con unidad, es decir, verificando

3.  $ab = ba$ , para todo  $a, b \in A$ .
4. Existe un elemento  $1 \in A$  tal que  $a1 = 1a = a$ , para todo  $a \in A$ .

A lo largo del libro entenderemos anillo por anillo conmutativo con unidad. Ejemplos de anillos son  $\mathbb{Z}$ , el anillo de funciones reales continuas  $C(X)$  de un espacio topológico  $X$ , los anillos de polinomios  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , los anillos de series formales  $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ , etc.

<sup>1</sup>Será usual utilizar la notación  $a \cdot a' = aa'$

**2. Definición:** Diremos que un anillo es un cuerpo si para cada  $a \in A$  no nulo, existe el inverso respecto de la multiplicación, que denotaremos  $a^{-1}$ .

Los anillos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  son cuerpos.

**3. Definición:** Una aplicación  $f: A \rightarrow B$  entre los anillos  $A$  y  $B$ , diremos que es un morfismo de anillos si cumple

1.  $f(a + a') = f(a) + f(a')$ , para toda  $a, a' \in A$ .
2.  $f(aa') = f(a)f(a')$ , para todo  $a, a' \in A$ .
3.  $f(1) = 1$ .

**4. Ejemplo:** La aplicación  $\mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p(x) \mapsto p(33)$ , es un morfismo de anillos. Dada una aplicación continua  $\phi: X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos, la aplicación  $\tilde{\phi}: C(Y) \rightarrow C(X)$ ,  $f \mapsto f \circ \phi$  es un morfismo de anillos.

La imagen  $\text{Im } f$  es un subanillo de  $B$ , es decir, un subconjunto de  $B$  que con las operaciones de  $B$  es anillo. La composición de morfismos de anillos es un morfismo de anillos.

**5. Definición:** Un subconjunto  $I \subseteq A$  diremos que es un ideal de  $A$  si es un subgrupo para la suma y cumple que  $a \cdot i \in I$ , para todo  $a \in A$  y todo  $i \in I$ .

La intersección de ideales es un ideal. Dado un subconjunto  $F \subseteq A$ , denotaremos por  $(F)$  al ideal mínimo de  $A$  que contiene a  $F$  (que es la intersección de todos los ideales que contienen a  $F$ ). Explícitamente  $(F) = \{a \in A: a = \sum_{i=0}^n a_i f_i \text{ con } f_i \in F, a_i \in A \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ variables}\}$ . Dado  $a \in A$ , también notaremos  $(a) = aA$ .

Como  $I$  es un subgrupo de  $A$ , podemos considerar el grupo cociente  $A/I$ , donde

$$A/I = \{\bar{a}, a \in A, \text{ de modo que } \bar{a} = \bar{a}' \iff a - a' \in I\}$$

Ahora bien, el producto  $\bar{a} \cdot \bar{a}' \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a \cdot a'}$  dota a  $A/I$  de estructura de anillo (compruébese) y es la única estructura de anillo que podemos definir en  $A/I$ , de modo que el morfismo de paso al cociente  $A \rightarrow A/I$ ,  $a \mapsto \bar{a}$ , sea un morfismo de anillos.

Dado un morfismo  $f: A \rightarrow B$  de anillos, el núcleo de  $f$ ,  $\text{Ker } f \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A: f(a) = 0\}$ , es un ideal. Si  $J \subseteq A$  es un ideal incluido en  $\text{Ker } f$ , entonces existe un único morfismo de anillos  $\bar{f}: A/J \rightarrow B$  (definido por  $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$ ) de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & A/J & \end{array}$$

es conmutativo, siendo  $\pi$  el morfismo de paso al cociente,  $\pi(a) = \bar{a}$ .

La antiimagen por un morfismo de anillos de un ideal es un ideal. Es inmediata la proposición siguiente.

**6. Proposición:** Sea  $I \subseteq A$  un ideal y  $\pi: A \rightarrow A/I$ ,  $a \mapsto \bar{a}$  el morfismo de paso al cociente. Se verifica la correspondencia biunívoca

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ideales de } A \text{ que} \\ \text{contienen a } I \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{\text{Ideales de } A/I\}$$

$$J \longrightarrow \pi(J)$$

$$\pi^{-1}(J') \longleftarrow J'$$

**7. Definición:** Un ideal  $\mathfrak{p} \subsetneq A$ , diremos que es un ideal primo de  $A$ , si cumple que si  $ab \in \mathfrak{p}$  entonces  $a \in \mathfrak{p}$  o  $b \in \mathfrak{p}$ .

Un elemento  $a \in A$ , diremos que es un divisor de cero, si existe  $b \in A$ , no nulo tal que  $ab = 0$ . Diremos que un anillo es íntegro si el único divisor de cero es el cero. Por ejemplo, los cuerpos son anillos íntegros.

**8. Proposición:** Un ideal  $\mathfrak{p} \subsetneq A$  es un ideal primo si y sólo si  $A/\mathfrak{p}$  es un anillo íntegro.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathfrak{p} \subset A$  es un ideal primo. Si  $\bar{a} \cdot \bar{a}' = 0$  en  $A/\mathfrak{p}$  entonces  $\overline{a \cdot a'} = 0$ , luego  $a \cdot a' \in \mathfrak{p}$ . Por tanto, o  $a \in \mathfrak{p}$  o  $a' \in \mathfrak{p}$ , luego o  $\bar{a} = 0$  o  $\bar{a}' = 0$ . En conclusión  $A/\mathfrak{p}$  es íntegro.

Recíprocamente, supongamos que  $A/\mathfrak{p}$  es íntegro. Si  $a \cdot a' \in \mathfrak{p}$ , entonces  $\overline{a \cdot a'} = 0$  en  $A/\mathfrak{p}$ . Por tanto,  $\bar{a} \cdot \bar{a}' = 0$ , luego o  $\bar{a} = 0$  o  $\bar{a}' = 0$ . Es decir, o  $a \in \mathfrak{p}$  o  $a' \in \mathfrak{p}$ . En conclusión,  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo.  $\square$

**9. Definición:** Diremos que un ideal  $\mathfrak{m} \subsetneq A$  es maximal si los únicos ideales que contienen a  $\mathfrak{m}$  son  $\mathfrak{m}$  y  $A$ .

**10. Proposición:** En todo anillo  $A \neq 0$  existen ideales maximales.

*Demostración.* Esta es una aplicación típica del lema de Zorn (que puede evitarse en anillos noetherianos, más tarde estudiados). Sea  $X$  el conjunto de los ideales de  $A$ , distintos de  $A$ . En  $X$  podemos definir una relación de orden: decimos que un ideal  $I$  es menor o igual que otro  $I'$  cuando  $I \subseteq I'$ . Observemos que toda cadena de ideales, distintos de  $A$  tiene una cota superior: la unión de los ideales de la cadena (que es distinto de  $A$ , pues el 1 no está en ninguno de ellos, ni por tanto en la unión). El lema de Zorn nos dice que existen elementos de  $X$  maximales, es decir, existen ideales maximales.  $\square$

**11. Ejercicio:** En todo anillo  $A \neq 0$  existen ideales primos minimales.

**12. Corolario:** Todo ideal  $I \subsetneq A$  está incluido en un ideal maximal.

*Demostración.* Sea  $\pi: A \rightarrow A/I$  el morfismo de paso al cociente. En la correspondencia biunívoca

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ideales de } A \\ \text{que contienen a } I \end{array} \right\} = \{\text{Ideales de } A/I\}$$

$$J \longrightarrow \pi(J)$$

$$\pi^{-1}(J') \longleftarrow J'$$

los ideales maximales de  $A$  que contienen a  $I$  se corresponden con los ideales maximales de  $A/I$ , que no es vacío por la proposición anterior.  $\square$

Un elemento  $a \in A$  es invertible si y sólo si  $(a) = A$  (suponemos  $A \neq 0$ ). Por tanto,  $a \in A$  es invertible si y sólo si no está incluido en ningún ideal maximal. En particular, un anillo es un cuerpo si y sólo si los únicos ideales del anillo son el  $(0)$  y todo el anillo.

**13. Proposición:** *Un ideal  $\mathfrak{m} \subsetneq A$  es maximal si y sólo si  $A/\mathfrak{m}$  es un cuerpo. En particular, los ideales maximales son ideales primos, por la proposición 0.2.8.*

*Demostración.*  $A/\mathfrak{m}$  es cuerpo si y sólo si el único ideal maximal es el  $(0)$ . Que equivale a decir que el único ideal maximal que contiene a  $\mathfrak{m}$  es  $\mathfrak{m}$ , es decir, que  $\mathfrak{m}$  es maximal.  $\square$

**14. Definición:** Sea  $k$  un cuerpo. Si  $i: k \rightarrow A$  es un morfismo de anillos diremos que  $A$  es una  $k$ -álgebra. Seguiremos la notación  $i(\lambda) \underset{\text{Not.}}{=} \lambda$ . Si  $A$  y  $B$  son  $k$ -álgebras, diremos que un morfismo  $\phi: A \rightarrow B$  de anillos es un morfismo de  $k$ -álgebras si  $\phi(\lambda) = \lambda$ , para todo  $\lambda \in k$ .

**15. Definición:** Diremos que un ideal  $\mathfrak{m}$  de una  $k$ -álgebra es racional si  $A/\mathfrak{m} \simeq k$  (como  $k$ -álgebras).

En particular, los ideales racionales son maximales.

**16. Proposición:** *Un ideal  $\mathfrak{m}$  de  $k[x_1, \dots, x_n]$  es racional si y sólo si  $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in k$  para todo  $i$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ . Veamos que  $\mathfrak{m}$  es racional. El núcleo del morfismo de  $k$ -álgebras  $k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k$ ,  $p(x_1, \dots, x_n) \mapsto p(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , es  $\mathfrak{m}$  (como puede comprobarse). Además el morfismo es epiyectivo, luego  $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \simeq k$ .

Recíprocamente, sea un isomorfismo  $\phi: k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \simeq k$  de  $k$ -álgebras. Consideremos la composición

$$k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi} k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \xrightarrow{\phi} k$$

donde  $\pi$  es el morfismo de paso al cociente. Sean  $\alpha_i = \phi(\bar{x}_i)$ . Por tanto,  $\phi \circ \pi(p(x_1, \dots, x_n)) = p(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Por un lado, como hemos visto más arriba, se cumple que  $\text{Ker}(\phi \circ \pi) = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ . Por otro lado,  $\text{Ker}(\phi \circ \pi) = (\phi \circ \pi)^{-1}(0) = \pi^{-1}(\phi^{-1}(0)) = \pi^{-1}(0) = \mathfrak{m}$ . En conclusión,  $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ .  $\square$

Así pues, existe una correspondencia biunívoca entre los ideales racionales de  $k[x_1, \dots, x_n]$  y los puntos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  del espacio afín  $\mathbb{A}_n(k)$ . Es decir, si “pensamos”  $k[x_1, \dots, x_n]$  como las funciones algebraicas del espacio afín  $\mathbb{A}_n(k)$ , el modo de recuperar  $\mathbb{A}_n(k)$  a partir de  $k[x_1, \dots, x_n]$  es considerando sus ideales racionales. En general, por las razones esbozadas en la introducción, dado un anillo consideraremos el espacio formado por el conjunto de todos los ideales primos (y no sólo los ideales racionales).

**17. Ejercicio:** Probar que los ideales racionales de  $k[x_1, \dots, x_n]/(p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_r(x_1, \dots, x_n))$ , se corresponden biyectivamente con los  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{A}_n(k)$  tales que  $p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ , para todo  $i$ .

## 0.3 Espectro primo de un anillo

**1. Definición:** Se llama espectro primo de un anillo  $A$  al conjunto  $\text{Spec } A$  de sus ideales primos.

**Notación:** Un ideal primo lo denotaremos por  $x$  cuando lo consideremos como punto de  $\text{Spec } A$ , y por  $\mathfrak{p}_x$  cuando lo consideremos como ideal de  $A$ .

Llamaremos funciones a los elementos del anillo  $A$  y puntos a los elementos de  $\text{Spec } A$ . Diremos que una función  $a \in A$  se anula en un punto  $x \in \text{Spec } A$  cuando  $a \in \mathfrak{p}_x$ , es decir, cuando  $0 = \bar{a} \in A/\mathfrak{p}_x$  (suele denotarse  $a(x) = \bar{a} \in A/\mathfrak{p}_x$ ). Como  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal primo se verifica:

1. La función 0 se anula en todos los puntos de  $\text{Spec } A$ .
2. Si dos funciones se anulan en un punto  $x$ , su suma también.
3. Si una función se anula en un punto  $x$ , sus múltiplos también.
4. Si un producto de funciones se anula en un punto  $x$ , algún factor se anula en  $x$ .

**2. Definición:** Sea  $A$  un anillo. Si  $f \in A$ , llamaremos ceros de la función  $f$  al subconjunto  $(f)_0 \subset \text{Spec } A$  formado por todos los puntos donde se anule  $f$ . Llamaremos ceros de un ideal  $I \subseteq A$  al subconjunto de  $\text{Spec } A$  formado por los puntos donde se anulen todas las funciones de  $I$  y lo denotaremos  $(I)_0$ , es decir,

$$(I)_0 = \bigcap_{f \in I} (f)_0 = \left[ \begin{array}{l} \text{Ideales primos } \mathfrak{p}_x \subset A \\ \text{tales que } I \subseteq \mathfrak{p}_x \end{array} \right]$$

**3. Ejercicio:** Probar que una función  $f \in A$  es invertible si y sólo si no se anula en ningún punto de  $\text{Spec } A$ . Probar que  $p(x, y)$  se anula en el ideal primo  $\mathfrak{m}_{\alpha, \beta} = (x - \alpha, y - \beta) \subset k[x, y]$  si y sólo si  $p(\alpha, \beta) = 0$ .

**4. Proposición:** Se verifican las siguientes igualdades:

1.  $(0)_0 = \text{Spec } A$  y  $(A)_0 = \emptyset$ .
2.  $(\sum_{j \in J} I_j)_0 = \bigcap_{j \in J} (I_j)_0$ .
3.  $(\bigcap_{j=1}^n I_j)_0 = \bigcup_{j=1}^n (I_j)_0$ .

*Demostración.* Todas las igualdades son de demostración inmediata, salvo quizás la 3. Para ésta, basta probar que  $(I_1 \cap I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$ . Veámoslo:

Obviamente,  $(I_1 \cap I_2)_0 \supseteq (I_1)_0 \cup (I_2)_0$ . Veamos la otra inclusión: Sea  $x \in (I_1 \cap I_2)_0$ . Si  $x \notin (I_1)_0$  y  $x \notin (I_2)_0$ , entonces existe  $f_1 \in I_1$  y  $f_2 \in I_2$  que no se anulan en  $x$ , luego  $f_1 \cdot f_2$  no se anula en  $x$ . Pero como  $f_1 \cdot f_2 \in I_1 \cap I_2$  llegamos a contradicción con que  $x \in (I_1 \cap I_2)_0$ . Por tanto,  $x \in (I_1)_0 \cup (I_2)_0$  y  $(I_1 \cap I_2)_0 \subseteq (I_1)_0 \cup (I_2)_0$ . □

**5. Ejercicio:** Demostrar que  $(I_1 \cdot I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$ , donde denotamos por  $I_1 \cdot I_2 = \{\sum_i a_i b_i \mid a_i \in I_1, b_i \in I_2\}$ .

**6. Definición:** Llamamos topología de Zariski de  $\text{Spec } A$ , a la topología sobre  $\text{Spec } A$  cuyos cerrados son los ceros de los ideales de  $A$ .

La proposición anterior nos dice que la topología de Zariski es efectivamente una topología.

**7. Ejercicio:** Determinar los puntos y la topología de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ .

Observemos que los cerrados de la topología de Zariski son intersecciones arbitrarias de ceros de funciones. Por tanto, una base de abiertos de la topología de Zariski de  $\text{Spec } A$  está formada por los complementarios de los ceros de funciones, es decir, por los abiertos

$$U_f = \text{Spec } A - (f)_0 = \{x \in \text{Spec } A : f \text{ no se anula en } x\}$$

llamados abiertos básicos. Obsérvese que

$$U_{fg} = U_f \cap U_g$$

Dado un punto  $x \in \text{Spec } A$  y un cerrado  $C = (I)_0$ , si  $x \notin C$  existe  $f \in I \subseteq A$  que no se anula en  $x$ , “las funciones de  $A$  separan puntos de cerrados en  $\text{Spec } A$ ”.

Obviamente dada una inclusión  $I_1 \subseteq I_2$  de ideales se tiene que  $(I_1)_0 \supseteq (I_2)_0$ . Dado un cerrado  $C$  se verifica que  $C = (I)_0$ , donde  $I$  es el ideal de todas las funciones que se anulan en  $C$ : Obviamente  $C \subseteq (I)_0$ . Por otra parte  $C = (J)_0$  para algún ideal  $J \subseteq A$ . Tenemos que las funciones de  $J$  se anulan en  $C$ , luego  $J \subseteq I$ . Por tanto,  $C = (J)_0 \supseteq (I)_0$ . Hemos concluido.

Si bien,  $C = (I)_0$ , donde  $I$  es el ideal de todas las funciones que se anulan en  $C$ , pueden existir ideales  $J \subsetneq I$  tales que  $C = (I)_0 = (J)_0$ . Por ejemplo,  $(4)_0 = (2)_0 \subset \text{Spec } \mathbb{Z}$ .

Dado un subconjunto  $Y$  de  $\text{Spec } A$ , denotamos por  $\bar{Y}$  el cierre de  $Y$  en  $\text{Spec } A$ .

**8. Proposición:** Dado  $x \in \text{Spec } A$  se verifica que  $\bar{x} = (\mathfrak{p}_x)_0$ .

En particular,  $\text{Spec } A$  es un espacio topológico  $T_0$  (puntos distintos tienen cierres distintos) y un punto  $x$  es cerrado si y sólo si  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal maximal.

*Demostración.* El cierre de  $x$ ,  $\bar{x}$  será de la forma  $\bar{x} = (I)_0$ , para cierto ideal  $I \subset A$ . Obviamente, como  $x \in \bar{x}$ , tenemos que  $I \subseteq \mathfrak{p}_x$ . Por tanto,  $(\mathfrak{p}_x)_0 \subseteq (I)_0$ . Ahora bien,  $(I)_0$  es el menor cerrado que contiene a  $x$  y  $x \in (\mathfrak{p}_x)_0$ , luego  $(\mathfrak{p}_x)_0 = (I)_0 = \bar{x}$ . □

**9. Definición:** Diremos que un espacio topológico es irreducible cuando no pueda descomponerse como unión de dos cerrados estrictamente menores. Llamaremos componentes irreducibles de un espacio topológico a los subespacios irreducibles maximales de  $X$ , es decir, los subespacios irreducibles no contenidos estrictamente en otro subespacio irreducible.

El cierre de un subespacio irreducible es irreducible, en particular las componentes irreducibles de un espacio son cerradas.

**10. Proposición:** *Cada cerrado irreducible del espectro de un anillo es el cierre de un único punto, llamado punto genérico de tal cerrado. En particular, las componentes irreducibles de  $\text{Spec } A$  son los cierres de los puntos definidos por los ideales primos minimales de  $A$ .*

*Demostración.* Sea  $C$  un cerrado irreducible. Sabemos que  $C = (I)_0$ , donde  $I$  es el ideal de todas las funciones que se anulan en  $C$ .

Basta ver que  $I$  es primo, porque si  $I = \mathfrak{p}_x$  entonces  $(I)_0 = \bar{x}$ . Si  $f \cdot g \in I$ , es decir,  $f \cdot g$  se anula en  $C$ , entonces

$$C = C \cap (fg)_0 = C \cap ((f)_0 \cup (g)_0) = (C \cap (f)_0) \cup (C \cap (g)_0)$$

luego, o bien  $f$  se anula en  $C$ , o bien  $g$ , porque  $C$  es irreducible. Es decir, o bien  $f \in I$ , o bien  $g \in I$ .  $\square$

**11. Ejercicio:** Calcular las componentes irreducibles de  $\text{Spec } k[x, y]/(xy)$ .

**12. Ejemplo:** Los ideales primos de  $k[x]$  son los ideales  $(p(x))$ , con  $p(x)$  primo o irreducible y el ideal  $(0)$ . Si  $k = \mathbb{C}$ , los ideales primos de  $\mathbb{C}[x]$  son  $\mathfrak{m}_\alpha = (x - \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  y  $(0)$ . Así que los ideales primos maximales de  $\mathbb{C}[x]$  se corresponden con los puntos de una recta afín. De aquí que se siga la notación  $\text{Spec } \mathbb{C}[x] = \mathbb{A}_1(\mathbb{C})$ . En resumen

$$\text{Spec } \mathbb{C}[x] = \begin{cases} \text{Puntos cerrados: } \alpha \equiv (x - \alpha), \text{ con } \alpha \in \mathbb{C}. \\ \text{Punto "genérico": } g \equiv (0). \end{cases}$$

En general, si  $k$  es un cuerpo, diremos que  $\text{Spec } k[x]$  es la recta afín sobre  $k$ .

Dado un ideal  $(p(x))$  los ceros de  $(p(x))$  se corresponden con las raíces de  $p(x)$ , salvo cuando  $p(x) = 0$ , en este caso los ceros es todo el espectro. Por tanto, los cerrados de la topología de Zariski de  $\text{Spec } \mathbb{C}[x]$ , a parte del vacío y el total, son los conjuntos finitos de puntos cerrados (de la recta afín).

**13. Ejemplo:** Sea  $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  y  $C(X)$  el anillo de funciones reales continuas definidas sobre  $X$ . Dado un punto  $p \in X$ , el ideal  $\mathfrak{m}_p$  de funciones que se anulan en  $p$  es un ideal maximal, porque  $C(X)/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{R}$ ,  $\bar{f} \mapsto f(p)$ .

Veamos el recíproco: dado un ideal maximal  $\mathfrak{m} \subset C(X)$ , si  $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_p$  para todo  $p \in X$ , entonces para cada  $p \in X$  existe una función  $f_p \in \mathfrak{m}$  que no se anula en  $p$ , luego tampoco en un entorno  $U_p$  de  $p$ . Como  $X$  es compacto, un número finito  $U_{p_1}, \dots, U_{p_n}$  recubren  $X$ . Por tanto,  $f = f_{p_1}^2 + \dots + f_{p_n}^2$  no se anula en ningún punto de  $X$ , luego es invertible y  $f \in \mathfrak{m}$ , contradicción.

Si denotamos por  $\text{Spec}_m A$  el subespacio de  $\text{Spec } A$  formado por los ideales primos maximales, es fácil comprobar que la biyección

$$X \xlongequal{\quad} \text{Spec}_m C(X), \quad p \mapsto \mathfrak{m}_p$$

es un homeomorfismo. Dado un ideal  $I$ , denotemos  $(I)_0^m = (I)_0 \cap \text{Spec}_m A$ . Bien, a través de la igualdad anterior, se cumple que  $\{x \in X, \text{tales que } f(x) = 0, \text{ para toda } f \in I\} = (I)_0^m$ .

**14. Teorema:** *El espectro primo de un anillo es un espacio topológico compacto.*

*Demostración.* Sea  $C_j = (I_j)_0$  una familia de cerrados de  $\text{Spec } A$ . Si  $\bigcap_j C_j = \emptyset$  entonces

$$\emptyset = \bigcap_j (I_j)_0 = \left( \sum_j I_j \right)_0$$

Por tanto,  $\sum_j I_j = A$ . Luego  $1 = f_1 + \cdots + f_n$  para ciertas  $f_1 \in I_{j_1}, \dots, f_n \in I_{j_n}$ . Luego, de nuevo  $I_{j_1} + \cdots + I_{j_n} = A$  y

$$(I_{j_1})_0 \cap \cdots \cap (I_{j_n})_0 = \emptyset$$

es decir,  $C_{j_1} \cap \cdots \cap C_{j_n} = \emptyset$  y  $\text{Spec } A$  es compacto.  $\square$

Sea  $j: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Si  $J$  es un ideal de  $B$ , entonces  $j^{-1}(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A: j(a) \in J\}$  es un ideal de  $A$ . Es fácil comprobar que si  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo de  $B$  entonces  $j^{-1}(\mathfrak{p})$  es un ideal primo de  $A$ . Obtenemos así una aplicación natural

$$j^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A, \quad j^*(\mathfrak{p}) = j^{-1}(\mathfrak{p})$$

**15. Teorema:** *La aplicación inducida en los espectros por cualquier morfismo de anillos es continua.*

*Demostración.* Consideremos los morfismos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & B \\ \text{Spec } A & \xleftarrow{j^*} & \text{Spec } B \end{array}$$

Sea  $(I)_0 \subset \text{Spec } A$  un cerrado. Entonces

$$\begin{aligned} j^{*-1}((I)_0) &= \{x \in \text{Spec } B: j^*(x) \in (I)_0\} = \{x \in \text{Spec } B: j^{-1}(\mathfrak{p}_x) \supseteq I\} \\ &= \{x \in \text{Spec } B: \mathfrak{p}_x \supseteq j(I)\} = ((j(I)))_0 \end{aligned}$$

y concluimos que  $j^*$  es continua.  $\square$

**16. Ejercicio:** Sea  $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  y  $C(X)$  el anillo de las funciones reales continuas definidas en  $X$ . Probar que la aplicación

$$\text{Hom}_{\text{cont.}}(X, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-alg}}(C(X), C(X)), \quad \phi \mapsto \phi^*: f \mapsto f \circ \phi$$

es biyectiva (usar el ejemplo 0.3.13 y que todo morfismo  $C(X) \rightarrow C(X)$  induce un morfismo entre los espectros).

**17. Teorema:** *Sea  $I$  un ideal de  $A$ . Consideremos los morfismos naturales*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & A/I \quad a \mapsto \bar{a} \\ \text{Spec } A & \xleftarrow{\pi^*} & \text{Spec } A/I \end{array}$$

*Se verifica que  $\pi^*$  es un homeomorfismo de  $\text{Spec } A/I$  con su imagen, que es el cerrado  $(I)_0$ .*

*Demostración.* Los ideales primos de  $A/I$  se corresponden con los ideales primos de  $A$  que contienen a  $I$ . Explícitamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ideales primos de } A \\ \text{que contienen a } I \end{array} \right\} \xlongequal{\quad} \{\text{Ideales primos de } A/I\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \xrightarrow{\quad} & \pi(\mathfrak{p}) \\ & & \searrow \\ & & \mathfrak{p}' \\ & \xleftarrow{\quad} & \pi^{-1}(\mathfrak{p}') \end{array}$$

que es justamente el morfismo

$$\text{Spec } A \supseteq (I)_0 \xlongequal{\pi^*} \text{Spec } A/I$$

Lo que demuestra la biyección buscada. Sabemos que  $\pi^*$  es continua, para ver que la biyección es un homeomorfismo, nos falta probar que  $\pi^*$  es cerrada. Igualmente, los ideales primos de  $A/I$  que contienen a un ideal  $J$ , se corresponden con los ideales primos de  $A$  que contienen a  $\pi^{-1}(J)$ . Es decir,  $\pi^*((J)_0) = (\pi^{-1}(J))_0$ . Por tanto,  $\pi^*$  es cerrada.  $\square$

**18. Ejercicio:** Sea  $Y$  un subespacio cerrado de un espacio topológico  $X$ . Probar que el subconjunto, del anillo de funciones reales continuas  $C(X)$  de  $X$ , formado por las funciones que se anulan en  $Y$  es un ideal. Si  $X$  es un espacio topológico normal probar que  $C(X)/I \simeq C(Y)$  (recuérdese que el teorema de extensión de Tietze afirma que toda función continua sobre un cerrado  $Y$  admite una extensión continua a todo  $X$ ).

**19. Corolario:**  $\text{Spec}(A \times B) = (\text{Spec } A) \amalg (\text{Spec } B)$ .

*Demostración.* Consideremos en el anillo  $A \times B$  los ideales  $I = A \times 0$ ,  $J = 0 \times B$ . Como  $I + J = A \times B$  y  $I \cap J = 0$ , tomando ceros tenemos  $(I)_0 \cap (J)_0 = \emptyset$  y  $(I)_0 \cup (J)_0 = \text{Spec}(A \times B)$ . Es decir,  $\text{Spec}(A \times B) = (I)_0 \amalg (J)_0$ .

Para concluir basta observar que, de acuerdo con el teorema anterior,

$$\begin{aligned} (I)_0 &= \text{Spec}(A \times B)/I = \text{Spec } B \\ (J)_0 &= \text{Spec}(A \times B)/J = \text{Spec } A \end{aligned}$$

Explícitamente, los ideales primos de  $A \times B$  son de la forma  $\mathfrak{p} \times B$  o  $A \times \mathfrak{q}$ , donde  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo de  $A$  y  $\mathfrak{q}$  es un ideal primo de  $B$ .  $\square$

**20. Ejercicio:** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y consideremos el espacio topológico  $X \amalg Y$ . Demostrar que

$$C(X \amalg Y) = C(X) \times C(Y)$$

Justificar la frase “ $A \times B$  es el anillo de funciones de  $\text{Spec } A \amalg \text{Spec } B$ ”.

## 0.4 Localización. Fórmula de la fibra

Nuestro primer objetivo es mostrar que el proceso algebraico de división se va a corresponder con el proceso topológico de localización.

Sea  $S$  un sistema multiplicativo de  $A$  (es decir,  $1 \in S$  y si  $s, s' \in S$  entonces  $s \cdot s' \in S$ ). Consideremos la localización de  $A$  por  $S$ ,  $A_S$ , es decir,

$$A_S = \left\{ \frac{a}{s}, a \in A \text{ y } s \in S : \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \text{ si existe un } s'' \in S \text{ tal que } s''(as' - a's) = 0 \right\}^2$$

Con la suma y producto ordinarios de fracciones  $A_S$  es un anillo.

Dado un morfismo de anillos  $j: A \rightarrow B$ , cuando no cause confusión, seguiremos las siguientes notaciones: Dado un ideal  $J$  de  $B$ , escribiremos  $j^{-1}(J) = J \cap A$ , dado un ideal  $I$  de  $A$  escribiremos  $(j(I)) = j(I) \cdot B = I \cdot B$ .

**1. Teorema:** Consideremos el morfismo  $j: A \rightarrow A_S$ ,  $a \mapsto \frac{a}{1}$ , de localización por  $S$ . La aplicación inducida  $j^*: \text{Spec } A_S \rightarrow \text{Spec } A$  establece un homeomorfismo de  $\text{Spec } A_S$  con su imagen, que está formada por los puntos donde no se anula ninguna función de  $S$ :

$$\text{Spec } A_S \underset{j^*}{=} \{ \text{ideales primos de } A \text{ que no cortan a } S \}$$

*Demostración.* Consideremos el morfismo de localización  $j: A \rightarrow A_S$ .

Las asignaciones

$$\text{Spec } A_S \longleftarrow \{ \text{Ideales primos de } A \text{ que no cortan a } S \} \subseteq \text{Spec } A$$

$$\mathfrak{p}' \xrightarrow{j^*} \mathfrak{p}' \cap A$$

$$\mathfrak{p} \cdot A_S \longleftarrow \mathfrak{p}$$

están bien definidas y son inversas entre sí, sin más que comprobar:

1. Si  $\mathfrak{p}'$  es un ideal primo de  $A_S$  entonces  $\mathfrak{p}' \cap A$  es un ideal primo de  $A$  que no corta con  $S$  y  $(\mathfrak{p}' \cap A) \cdot A_S = \mathfrak{p}'$ .
2. Si  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo de  $A$  que no corta con  $S$  entonces  $\mathfrak{p} \cdot A_S$  es un ideal primo de  $A_S$  y  $(\mathfrak{p} \cdot A_S) \cap A = \mathfrak{p}$ .

Para ver que esta biyección es un homeomorfismo basta observar que  $j^*((\frac{a}{s})_0) = j^*((\frac{a}{1})_0) = (a)_0 \cap \text{Im } j^*$ .

□

**Notación:** Sea  $A$  un anillo. Si  $f \in A$ , denotaremos  $A_f$  la localización de  $A$  por el sistema multiplicativo  $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$ .

Si  $x$  es un punto de  $\text{Spec } A$ , denotaremos por  $A_x$  la localización de  $A$  por el sistema multiplicativo  $S = A - \mathfrak{p}_x$ .

<sup>2</sup>Observemos que  $\frac{m}{s} = \frac{m}{s}$ , que si  $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$  entonces  $\frac{m'}{s'} = \frac{m}{s}$ , y que si  $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$  y  $\frac{m'}{s'} = \frac{m''}{s''}$  entonces  $\frac{m}{s} = \frac{m''}{s''}$ .

**2. Corolario:** *El espectro de  $A_f$  es igual  $\text{Spec } A - (f)_0$ :*

$$\text{Spec } A_f = U_f$$

*Demostración.* Por el teorema anterior,  $\text{Spec } A_f$  se corresponde con los ideales primos  $\mathfrak{p}_x$  de  $A$  que no cortan con  $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$ . Que equivale a decir que  $\text{Spec } A_f$  se corresponde con los ideales primos  $\mathfrak{p}_x$  de  $A$  que no contienen a  $f$ , es decir,  $U_f$ .  $\square$

**3. Ejercicio:** Sea  $C(\mathbb{R}^n)$  el anillo de funciones reales continuas sobre  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $C(U)$  el anillo de funciones reales continuas sobre  $U$  y  $S$  el sistema multiplicativo formado por las funciones que no se anulan en ningún punto de  $U$ . Probar que existe un isomorfismo natural  $C(\mathbb{R}^n)_S = C(U)$ . (Pista: Sea  $d$  la función distancia. Dada  $h \in C(U)$ ,  $s(x) = \frac{d(x, U^c)}{1+h^2(x)}$  no se anula en  $U$ ,  $s$  y  $f = h \cdot s$  son restricción de funciones continuas de  $\mathbb{R}^n$  y  $h = \frac{f}{s}$ ).

**4. Corolario:** *Los ideales primos de  $A_x$  se corresponden con los ideales primos de  $A$  contenidos en  $\mathfrak{p}_x$ . En particular,  $A_x$  tiene un único ideal maximal, que es  $\mathfrak{p}_x \cdot A_x$ .*

*Demostración.*  $\text{Spec } A_x$  se corresponde con los ideales primos de  $A$  que no cortan con  $A - \mathfrak{p}_x$ . Es decir, con los ideales primos de  $A$  contenidos en  $\mathfrak{p}_x$ .  $\square$

**5. Definición:** Los anillos con un único ideal maximal se les denomina anillos locales.

Observemos que el anillo de funciones que consideramos en  $U_f$  es  $A_f$ . Como es de desear, cuando nos pasamos a  $U_f$ , hacemos invertibles las funciones que no se anulan en ningún punto de  $U_f$ . Dado un punto  $x$ , es usual no querer fijar la atención en un entorno dado de  $x$ , sino considerar un entorno lo suficientemente pequeño, luego las funciones que no se anulan en  $x$  pasan a ser invertibles y consideraremos por tanto el anillo  $A_x$ . Así pues,  $A_x$  recoge el concepto impreciso de funciones en un entorno suficientemente pequeño de  $x$ .

**6. Definición:** Dado un anillo  $A$ , llamaremos radical de  $A$  al ideal formado por el conjunto de los elementos nilpotentes de  $A$ , es decir, si denotamos por  $\text{rad } A$  al radical de  $A$ , entonces

$$\text{rad } A = \{a \in A : a^n = 0, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

**7. Corolario:** *El radical de un anillo coincide con la intersección de todos los ideales primos del anillo:*

$$\text{rad } A = \bigcap_{x \in \text{Spec } A} \mathfrak{p}_x$$

*Es decir, una función es nilpotente si y sólo si se anula en todo punto del espectro.*

*Demostración.* Si  $f \in A$  es nilpotente, i.e.,  $f^n = 0$  para un  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  ha de pertenecer a todo ideal primo de  $A$ . Luego  $\text{rad } A \subseteq \bigcap_{x \in \text{Spec } A} \mathfrak{p}_x$ .

Sea ahora  $f \in \bigcap_{x \in \text{Spec } A} \mathfrak{p}_x$ . Por el corolario anterior,  $\text{Spec } A_f = \emptyset$ . Por tanto,  $A_f = 0$ , es decir,  $\frac{f}{1} = \frac{0}{1}$ . Luego existe un  $f^n \in \{1, f, f^2, \dots\}$ , de modo que  $f^n \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0$ . Entonces  $f^n = 0$  y  $f$  es nilpotente. En conclusión  $\text{rad } A \supseteq \bigcap_{x \in \text{Spec } A} \mathfrak{p}_x$  y hemos terminado.  $\square$

Dado un morfismo de anillos  $j: A \rightarrow B$  y un sistema multiplicativo  $S \subseteq A$ , escribiremos  $B_{j(S)} = B_S$ . Igualmente, dado un ideal primo  $\mathfrak{p}_x$  de  $A$ , escribiremos  $B_{j(A-\mathfrak{p}_x)} = B_x$ .

**8. Teorema fórmula de la fibra** Sea  $j: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos y  $j^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  el morfismo inducido. Dado un punto  $x \in \text{Spec } A$  se verifica

$$j^{*-1}(x) = \text{Spec } B_x/\mathfrak{p}_x \cdot B_x$$

Si  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal primo minimal se verifica

$$j^{*-1}(x) = \text{Spec } B_x$$

Si  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal primo maximal se verifica

$$j^{*-1}(x) = \text{Spec } B/\mathfrak{p}_x \cdot B$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} j^{*-1}(x) &= \{y \in \text{Spec } B: \mathfrak{p}_y \cap A = \mathfrak{p}_x\} \\ &= \{y \in \text{Spec } B: \mathfrak{p}_y \cap A \subseteq \mathfrak{p}_x \text{ y } \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \cap A\} \quad (*) \\ &= \{y \in \text{Spec } B: (\mathfrak{p}_y \cap A) \cap (A - \mathfrak{p}_x) = \emptyset \text{ y } \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \cap A\} \\ &= \{y \in \text{Spec } B_x: \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y \cap A\} = \text{Spec } B_x/\mathfrak{p}_x \cdot B_x \end{aligned}$$

Las dos afirmaciones siguientes de la proposición, se deducen de que en (\*) podemos prescindir de una de las dos condiciones, en la primera afirmación de la segunda condición y en la segunda afirmación de la primera condición. □

**9. Ejemplo:** Calculemos  $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ . Consideremos el morfismo  $i: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x, y], p(x) \mapsto p(x)$  y sea  $i^*: \text{Spec } \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x]$  el morfismo inducido en los espectros. Cada punto de  $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$  está en la fibra de un único punto de  $\text{Spec } \mathbb{C}[x]$ , así que vamos a calcular tales fibras.

Los ideales primos de  $\mathbb{C}[x]$  son el ideal (0) y los ideales maximales  $\mathfrak{m}_\alpha = (x - \alpha)$ . Según la fórmula de la fibra

$$i^{*-1}(\alpha) = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{m}_\alpha \mathbb{C}[x, y] = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]/(x - \alpha)$$

Ahora bien,  $\mathbb{C}[x, y]/(x - \alpha) \simeq \mathbb{C}[y], x \mapsto \alpha, y \mapsto y$ . Luego,

$$i^{*-1}(\alpha) = \text{Spec } \mathbb{C}[y] = \{(y - \beta), (0) \text{ con } \beta \in \mathbb{C}\}$$

que se corresponden con los ideales primos de  $\mathbb{C}[x, y], (x - \alpha, y - \beta), (x - \alpha)$ .

Sólo nos falta calcular la fibra de  $(0) = \mathfrak{p}_g$

$$i^{*-1}(g) = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]_{\mathbb{C}[x]-(0)} = \text{Spec } \mathbb{C}(x)[y]$$

Los ideales primos no nulos de  $\mathbb{C}(x)[y]$  están generados por un polinomio irreducible con coeficientes en  $\mathbb{C}(x)$  de grado mayor o igual que 1 en  $y$ . Por el Lema de Gauss se corresponden con los polinomios  $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$  irreducibles de grado mayor o igual que 1 en  $y$ . Por tanto,  $i^{*-1}(g)$  está formado por los ideales primos  $(p(x, y)), (0)$  (donde  $p(x, y)$  es un polinomio irreducible de grado mayor o igual que 1 en  $y$ )

En resumen, los puntos de  $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y] \underset{\text{Not}}{=} \mathbb{A}_2(\mathbb{C})$  son

1. Los puntos cerrados  $(\alpha, \beta)$ , es decir, los ideales primos  $(x - \alpha, y - \beta)$ .

2. Los puntos genéricos de las curvas irreducibles  $(p(x, y))_0 \equiv p(x, y) = 0$ , es decir, los ideales primos  $(p(x, y))$ ,  $p(x, y)$  irreducible.
3. El punto genérico del plano afín  $(0)_0 \equiv \mathbb{A}_2(\mathbb{C})$ , es decir, el ideal primo  $(0)$ .

**10. Ejemplo:** Calculemos  $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]/(q(x, y))$ . Consideremos la descomposición en producto de polinomios irreducibles  $q(x, y) = q_1(x, y)^{n_1} \cdots q_r(x, y)^{n_r}$ , que no difieran en factores constantes. Tenemos que  $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]/(q(x, y)) = (q(x, y))_0 = \bigcup_{i=1}^r (q_i(x, y))_0$  que son:

1. Los ideales maximales  $(x - \alpha, y - \beta)$  tales que  $(q(x, y)) \subseteq (x - \alpha, y - \beta)$ . Es decir, con otras notaciones, los puntos  $(\alpha, \beta)$  tales que  $q(\alpha, \beta) = 0$ .
2. Los puntos genéricos de las curvas irreducibles  $q_i(x, y) = 0$ .

## 0.5 Módulos

Los espacios vectoriales son el ejemplo más sencillo y usual de espacio geométrico. Muchos problemas se resuelven linealizándolos, lo que permite aplicarles además la intuición geométrica. Añadamos, en esta breve justificación de la introducción de los espacios vectoriales, que muchas de las estructuras usuales en Matemáticas son estructuras de espacios vectoriales.

Si  $I$  es un ideal de un anillo  $A$ , es un grupo conmutativo respecto de la suma de  $A$  y el producto de  $A$  define una aplicación  $A \times I \rightarrow I$  que verifica todos los axiomas de espacio vectorial, salvo la condición de que los escalares formen un cuerpo; lo que resumiremos diciendo que  $I$  es un  $A$ -módulo. En esta sección iniciaremos el estudio de la estructura de módulo sobre un anillo  $A$  y veremos que casi todas las definiciones del Álgebra Lineal (submódulos, cocientes, sumas y productos directos, producto tensorial, etc.) pueden generalizarse para los  $A$ -módulos; aunque la frecuente existencia de módulos que no admiten bases introduzca grandes modificaciones en la teoría de módulos. La posibilidad de efectuar muchas operaciones (cocientes, sumas directas, productos tensoriales, etc.) que carecen de sentido en los ideales hace que la teoría de módulos sea mucho más flexible y natural, que una teoría restringida únicamente a los ideales. Esta generalidad no complica las demostraciones, sino que la posibilidad de usar las operaciones básicas del Álgebra Lineal las aclara y simplifica.

Los módulos aparecen también con frecuencia en Matemáticas. Ya veremos que los grupos abelianos y los espacios vectoriales con un endomorfismo lineal son ejemplos de módulos, y que su clasificación es la clasificación de la estructura de módulos.

Hablando sin precisión ni rigor, el estudio de los módulos equivale al estudio de los fibrados vectoriales  $\pi: E \rightarrow X$ , es decir, de los epimorfismos continuos, de fibras espacios vectoriales. El estudio de  $\pi$  será equivalente al estudio del  $C(X)$ -módulo de las secciones de  $\pi$ . La extensión del concepto de espacio vectorial (sobre un punto) a un espacio topológico es el concepto de fibrado vectorial, o el concepto de módulo. Más adelante, profundizaremos en lo que en este párrafo apenas hemos esbozado.

**1. Definición:** Sea  $A$  un anillo y  $M$  un conjunto. Diremos que una operación  $M \times M \xrightarrow{+} M$ ,  $(m, m') \mapsto m + m'$  y una aplicación  $A \times M \xrightarrow{\cdot} M$ ,  $(a, m) \mapsto a \cdot m$  definen en  $M$  una estructura de  $A$ -módulo cuando cumplen

1.  $(M, +)$  es un grupo conmutativo.
2.  $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$ , para todo  $a \in A$  y  $m, n \in M$ .

3.  $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$ , para todo  $a, b \in A$  y  $m \in M$ .
4.  $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ , para todo  $a, b \in A$  y  $m \in M$ .
5.  $1 \cdot m = m$ , para todo  $m \in M$ .

Es decir, dada una aplicación  $A \times M \rightarrow M$ ,  $(a, m) \mapsto a \cdot m$ , cada elemento  $a \in A$  define una aplicación  $a \cdot : M \rightarrow M$ ,  $m \mapsto a \cdot m$ . El segundo punto expresa que  $a \cdot$  es morfismo de grupos. Los tres últimos puntos expresan que la aplicación  $\phi: A \rightarrow \text{End}(M)$ ,  $\phi(a) = a \cdot$ , es morfismo de anillos (donde  $\text{End}(M)$  son los endomorfismos de grupos del grupo conmutativo  $M$ ). Recíprocamente, si  $M$  es un grupo conmutativo, cada morfismo de anillos  $\phi: A \rightarrow \text{End}(M)$  define una estructura de  $A$ -módulo en  $M$  tal que  $a \cdot m \stackrel{\text{def}}{=} \phi(a)(m)$ .

**2. Ejemplo:** 1. Todo ideal  $I \subset A$  es un  $A$ -módulo, pues con la suma definida en  $A$  y con el producto por los elementos de  $A$  ya definido en  $A$ ,  $I$  tiene estructura de  $A$ -módulo. En particular,  $A$  es un  $A$ -módulo.

2. Si  $A$  es un cuerpo, entonces los  $A$ -módulos son los  $A$ -espacios vectoriales.
3. Si  $G$  es un grupo abeliano, entonces es un  $\mathbb{Z}$ -módulo de modo natural:  $n \cdot g = g + \dots + g$  si  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $n \cdot g = (-g) + \dots + (-g)$  si  $-n \in \mathbb{N}^+$ , y definimos  $0 \cdot g = 0$ . Recíprocamente, si  $G$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo, en particular es un grupo abeliano.
4. Si  $T: E \rightarrow E$  es un endomorfismo de  $k$ -espacios vectoriales entonces  $E$  tiene estructura natural de  $k[x]$ -módulo:  $(\sum \lambda_i x^i) \cdot e \stackrel{\text{def}}{=} \sum \lambda_i T^i(e)$ . Recíprocamente, dado un  $k[x]$ -módulo  $E$ , la aplicación  $T: E \rightarrow E$  definida por  $T(e) = x \cdot e$ , es un endomorfismo de  $k$ -espacios vectoriales.
5. Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de  $A$ -módulos con índices en un conjunto  $I$ . Su producto directo se denotará  $\prod_{i \in I} M_i$ , mientras que  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  denotará el subconjunto de  $\prod_{i \in I} M_i$  formado por los elementos  $(m_i)$  que tienen todas sus componentes nulas salvo un número finito de ellas, y se llamará suma directa de los  $\{M_i\}_{i \in I}$ . Tanto  $\prod_{i \in I} M_i$  como  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  son  $A$ -módulos con la siguiente suma y producto por elementos de  $A$ :

$$\begin{aligned} (m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} &\stackrel{\text{def}}{=} (m_i + m'_i)_{i \in I} \\ a \cdot (m_i)_{i \in I} &\stackrel{\text{def}}{=} (a \cdot m_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

**3. Definición:** Un subconjunto  $N$  de un  $A$ -módulo  $M$ , decimos que es un submódulo si con la operación  $+$  de  $M$  y con la multiplicación  $\cdot$  por elementos de  $A$ , es un  $A$ -módulo.

**Notación:** Alguna vez, escribiremos  $am$  en vez de  $a \cdot m$  por sencillez de escritura.

**4. Definición:** Una aplicación  $f: M \rightarrow M'$  entre  $A$ -módulos  $M, M'$ , diremos que es un morfismo de  $A$ -módulos si cumple

1.  $f(m + n) = f(m) + f(n)$ , para todo  $m, n \in M$ .
2.  $f(am) = af(m)$ , para todo  $a \in A$  y  $m \in M$ .

El conjunto de los elementos de un módulo  $M$ , que por un morfismo de  $A$ -módulos  $f: M \rightarrow M'$  van al cero, se denomina núcleo de  $f$  y denota por  $\text{Ker } f$ . Se cumple que  $\text{Ker } f$  es un submódulo de  $M$  y que  $f$  es inyectiva si y sólo si  $\text{Ker } f = 0$ . El conjunto de los elementos de la imagen,  $\text{Im } f$ , forman un submódulo de  $M'$ . Cuando  $f$  sea biyectiva diremos que  $f$  es un isomorfismo de  $A$ -módulos.

Denotaremos por  $\text{Hom}_A(M, N)$  al conjunto de morfismos de  $A$ -módulos de  $M$  en  $N$ . Con las definiciones de suma de morfismo y producto por elementos de  $A$  naturales:

$$(f + g)(m) \stackrel{\text{def}}{=} f(m) + g(m)$$

$$(af)(m) \stackrel{\text{def}}{=} a(f(m))$$

tenemos que  $\text{Hom}_A(M, N)$  es un  $A$ -módulo.

Si  $N$  es un submódulo de  $M$  entonces es un subgrupo conmutativo de  $M$ . Por tanto, podemos considerar el grupo cociente  $M/N$ , donde

$$M/N = \{\bar{m}, m \in M \text{ de modo que } \bar{m} = \bar{m}' \iff m - m' \in N\}$$

El producto  $a \cdot \bar{m} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a \cdot m}$  dota a  $M/N$  de estructura de  $A$ -módulo (compruébese) y es la única estructura de  $A$ -módulo que podemos definir en  $M/N$ , de modo que el morfismo de paso al cociente  $M \rightarrow M/N, m \mapsto \bar{m}$ , sea un morfismo de módulos.

**5. Ejercicio:** Dado un epimorfismo  $\pi: M \rightarrow M'$  de  $A$ -módulos, si  $\pi$  tiene sección (es decir, existe  $s: M' \rightarrow M$  de modo que  $\pi \circ s = \text{Id}$ ) entonces  $M \simeq \text{Ker } \pi \oplus M'$ . (Pista: Los morfismos  $\text{Ker } \pi \oplus M' \rightarrow M, (m, m') \mapsto (m + s(m'))$  y  $M \rightarrow \text{Ker } \pi \oplus M', m \mapsto (m - s(\pi(m)), \pi(m))$  son inversos entre sí).

Dado un morfismo  $i: N \rightarrow M$  inyectivo, si  $i$  tiene retracto (es decir, existe  $r: M \rightarrow N$  de modo que  $r \circ i = \text{Id}$ ) entonces  $M \simeq N \oplus M/N$ . (Pista: Los morfismos  $M \rightarrow N \oplus M/N, m \mapsto (r(m), \bar{m})$  y  $N \oplus M/N \rightarrow M, (n, \bar{m}) \mapsto n + (m - r(m))$  son inversos entre sí).

**6. Teorema:** Sea  $f: M \rightarrow M'$  un morfismo de  $A$ -módulos. Sea  $N \subseteq \text{Ker } f$  un  $A$ -submódulo. Existe un único morfismo  $\bar{f}: M/N \rightarrow M'$  (que vendrá definido por  $\bar{f}(\bar{m}) = f(m)$ ) de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & M/N & \end{array}$$

es conmutativo, siendo  $\pi$  el morfismo de paso al cociente.

**7. Teorema de isomorfía:** Sea  $f: M \rightarrow M'$  un morfismo de  $A$ -módulos. Se cumple que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow \pi & & \uparrow i \\ M/\text{Ker } f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im } f \end{array}$$

donde  $\pi(m) = \bar{m}$ ,  $\bar{f}(\bar{m}) = f(m)$  (que está bien definida) y  $i(m') = m'$ , es conmutativo,  $\bar{f}$  es un isomorfismo,  $\pi$  es epiyectiva e  $i$  inyectiva.

*Demostración.* Al lector. □

Dado un conjunto  $\{M_i\}_{i \in I}$  de submódulos de  $M$  denotaremos

$$\sum_{i \in I} M_i = \{m \in M : m = \sum_{i \in I} m_i$$

con  $m_i \in M_i$  nulos para casi todo  $i \in I\}$

que es el menor submódulo de  $M$  que contiene a los submódulos  $M_i$ . Diremos que dos submódulos  $M_1, M_2$  de  $M$  están en suma directa si  $M_1 \cap M_2 = 0$ , que equivale a decir que el morfismo  $M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1 + M_2$ ,  $(m_1, m_2) \mapsto m_1 + m_2$  es un isomorfismo. Se dice que  $M$  es la suma directa de dos submódulos  $M_1, M_2$  si  $M_1 \cap M_2 = 0$  y  $M_1 + M_2 = M$ , que equivale a decir que el morfismo  $M_1 \oplus M_2 \rightarrow M$ ,  $(m_1, m_2) \mapsto m_1 + m_2$  es un isomorfismo.

Dado un conjunto  $\{m_i\}_{i \in I}$  de elementos de un módulo  $M$ , denotaremos por

$$\langle m_i \rangle_{i \in I} = \left\{ m \in M : m = \sum_{i \in I} a_i m_i, \right. \\ \left. \text{con } a_i = 0 \text{ para todo } i \text{ salvo un número finito} \right\}$$

que es el menor submódulo de  $M$  que contiene a  $\{m_i\}_{i \in I}$ . Diremos que  $\{m_i\}_{i \in I}$  es un sistema generador de  $M$  si  $\langle m_i \rangle_{i \in I} = M$ . Evidentemente, todo módulo tiene sistemas generadores, por ejemplo el formado por todos los elementos de  $M$ . Si  $I$  es además finito diremos que el módulo es de tipo finito. Diremos que un conjunto de elementos  $\{m_i\}_{i \in I}$  es base de  $M$ , si es un sistema generador y si  $\sum_i a_i m_i = 0$  entonces  $a_i = 0$  para todo  $i$ .

Denotaremos  $M^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , siendo  $M_i = M$ . Se dice que un módulo es libre si es isomorfo a  $A^{(I)}$ .

Si denotamos  $1_j = (a_i) \in A^{(I)}$ , donde  $a_i = 0$  para todo  $i \neq j$  y  $a_j = 1$ , entonces  $\{1_j\}_{j \in I}$  forma una base de  $A^{(I)}$ . Los morfismos de  $A^{(I)}$  en un  $A$ -módulo  $M$  se corresponden con conjuntos  $\{m_i\}_{i \in I}$  de  $M$ . Sea  $\{m_i\}_{i \in I}$  un conjunto de elementos de  $M$ , y definamos el morfismo

$$\phi: A^{(I)} \rightarrow M, (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i m_i$$

Se cumple que  $\phi$  es epimorfismo si y sólo si  $\{m_i\}_{i \in I}$  es un sistema generador de  $M$ ,  $\phi$  es inyectivo si y sólo si  $\{m_i\}_{i \in I}$  son linealmente independientes. Por tanto,  $\phi$  es isomorfismo si y sólo si  $\{m_i\}_{i \in I}$  es una base de  $M$ . En consecuencia, todo módulo es cociente de un libre y un módulo es libre si y sólo si tiene bases.

El lema de Nakayama nos va a permitir calcular, mediante Álgebra Lineal, sistemas generadores.

Si  $M$  es un  $A$ -módulo e  $I \subseteq A$  es un ideal, denotaremos por  $I \cdot M = \{m \in M : m = \sum a_i m_i, \text{ con } a_i \in I \text{ y } m_i \in M\}$ , que es un  $A$ -submódulo de  $M$ . Se cumple que el  $A$ -módulo  $M/I \cdot M$  es de modo natural un  $A/I$ -módulo:  $\bar{a} \cdot \bar{m} = \overline{a \cdot m}$ . Es obvio que  $M' \subseteq M/IM$  es un  $A$ -submódulo de  $M/IM$ , si y sólo si es un  $A/I$ -submódulo, y que  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r \in M/IM$  es un sistema  $A$ -generador de  $M/IM$  si y sólo si es un sistema  $A/I$ -generador de  $M/IM$ . En el caso de que  $I = \mathfrak{m}$  sea un ideal maximal, tendremos que  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r \in M/\mathfrak{m}M$  es un sistema  $A$ -generador de  $M/\mathfrak{m}M$  si y sólo si es un sistema generador del  $A/\mathfrak{m}$ -espacio vectorial  $M/\mathfrak{m}M$ .

**8. Lema de Nakayama** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local de ideal maximal  $\mathfrak{m}$  y  $M$  un módulo finito generado. Denotemos  $\mathfrak{m}M = \{m \in M : m = \sum a_i m_i, \text{ con } a_i \in \mathfrak{m} \text{ y } m_i \in M\}$ . Se cumple que*

$$\mathfrak{m}M = M \iff M = 0$$

*Como consecuencia se obtiene que  $m_1, \dots, m_n \in M$  es un sistema generador de  $M$ , si sus clases  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n$  en  $M/\mathfrak{m}M$  son un sistema generador.*

*Demostración.* Sea  $n_1, \dots, n_r$  un sistema generador de  $M$  con el menor número posible de elementos. Si  $\mathfrak{m}M = M$  tendremos que  $n_1 = \sum_{i=1}^r a_i n_i$ , con  $a_i \in \mathfrak{m}$ . Entonces  $(1 - a_1)n_1 = \sum_{i=2}^r a_i n_i$ . Como  $(1 - a_1)$

no se anula en el único ideal maximal de  $\mathcal{O}$ , es invertible. Por tanto,  $n_1 = \frac{\sum_{i=2}^r a_i n_i}{1-a_1}$ , y  $\langle n_2, \dots, n_r \rangle = M$ , lo que es contradictorio salvo que  $r = 0$ , es decir,  $M = 0$ .

Veamos la consecuencia. Si  $\langle \bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n \rangle = M/\mathfrak{m}M$  entonces  $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle + \mathfrak{m}M$ . Haciendo cociente por  $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$  y denotando  $\bar{M} = M/\langle m_1, \dots, m_n \rangle$ , tenemos  $\bar{M} = 0 + \mathfrak{m}\bar{M}$ . Por tanto,  $\bar{M} = 0$ , es decir,  $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ .  $\square$

### 0.5.1 Longitud de un módulo

El concepto de longitud de un módulo se corresponde con el concepto de dimensión en espacios vectoriales. Usualmente, se define la dimensión de un espacio vectorial, como el número de vectores de sus bases. Pero esta definición no es la más natural o intuitiva. Si intuimos que  $\mathbb{R}^3$  es de dimensión 3 es porque observamos la cadena de inclusiones irrefinable: punto, recta, plano, espacio. Puede definirse la dimensión de un espacio vectorial, como la longitud de las cadenas irrefinables de subespacios vectoriales. El concepto de base es más elaborado, si bien es muy práctico en espacios vectoriales. En los  $A$ -módulos pueden no existir bases, e incluso existiendo, el número de vectores de las bases no coincidirá con la longitud de las cadenas irrefinables de submódulos.

**9. Definición:** Diremos que un  $A$ -módulo  $M \neq 0$  es simple cuando sus únicos submódulos son los triviales:  $0$  y  $M$ .

Si  $M$  es un  $A$ -módulo simple entonces  $M = \langle m \rangle$ , luego  $M \simeq A/\text{Anul}\langle m \rangle$ . Ahora bien, los submódulos de  $A/\text{Anul}\langle m \rangle$  se corresponden con los ideales de  $A$  que contienen a  $\text{Anul}\langle m \rangle$ . Por tanto,  $M$  es simple si y sólo si  $\text{Anul}\langle m \rangle$  es un ideal maximal, es decir,  $M$  es simple si y sólo si  $M \simeq A/\mathfrak{m}$ , donde  $\mathfrak{m}$  es un ideal maximal de  $A$ .

**10. Definición:** Diremos que una cadena de submódulos  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$  es una serie de composición si los cocientes sucesivos  $M_i/M_{i-1}$  son  $A$ -módulos simples. Diremos que la longitud de esta serie de composición es  $n$ .

Como los submódulos de  $M_i/M_{i-1}$  se corresponden biyectivamente con los submódulos de  $M_i$  que contienen a  $M_{i-1}$ , el que  $M_i/M_{i-1}$  sea simple equivale a que no existe una cadena  $M_{i-1} \subsetneq N \subsetneq M_i$ .

Por tanto, que una cadena de submódulos  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$  sea simple equivale a decir que no podemos añadirle más “eslabones”.

**11. Definición:** Llamaremos longitud de  $M$  a la mínima longitud de todas sus series de composición. Si no existe ninguna serie de composición diremos que la longitud de  $M$  es infinita. Denotaremos a la longitud de un módulo  $M$  por  $l(M)$ .

Sobre espacios vectoriales el concepto de longitud coincide con el de dimensión.

**12. Proposición:** *Todas las series de composición de un módulo tienen la misma longitud.*

*Demostración.* Si  $l(M) = \infty$  la proposición es obvia. Supongamos que  $l(M) = n < \infty$ .

Dado un submódulo propio  $N \subset M$  se cumple que  $l(N) < l(M)$ : Sea  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$  una serie de composición de longitud mínima de  $M$ . Si en  $0 = M_0 \cap N \subseteq M_1 \cap N \subseteq \dots \subset M_n \cap N = N$  quitamos los términos repetidos obtenemos una serie de composición en  $N$ , porque  $M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \hookrightarrow M_i/M_{i-1}$ , luego  $M_i \cap N/M_{i-1} \cap N = M_i/M_{i-1}$  pues  $M_i/M_{i-1}$  es simple. Por tanto,  $l(N) \leq l(M)$ . Si  $l(N) = l(M)$  entonces  $M_i \cap N/M_{i-1} \cap N \neq 0$  para todo  $i$ . Entonces,  $M_1 \cap N$  contiene estrictamente a  $M_0 \cap N = 0$  y está incluido en  $M_1$ , luego  $M_1 \cap N = M_1$ . Sigamos,  $M_2 \cap N$  contiene estrictamente a  $M_1 \cap N = M_1$  y está incluido en  $M_2$  luego  $M_2 \cap N = M_2$ . Recurrentemente,  $N = M_n \cap N = M_n = M$ , lo que es contradictorio.

Así pues, dada una serie de composición  $0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_m = M$ , tenemos que  $l(M) > l(M'_{m-1}) > \cdots > l(M'_1)$ , luego  $l(M) \geq m$ . Como  $m \geq n = l(M)$ , tenemos que  $m = n$ .  $\square$

Observemos que hemos demostrado que si un módulo es de longitud todo submódulo suyo es de longitud finita. Si un módulo es de longitud finita todo cociente suyo también lo es, pues toda serie de composición define por paso al cociente una serie de composición (eliminando las igualdades que aparezcan en la serie).

**13. Proposición:** *La longitud es una función aditiva, es decir, dada una sucesión exacta  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$  se cumple que  $l(M) = l(M') + l(M'')$ .*

*Demostración.* Si  $0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_{n'} = M'$  y  $0 = M''_0 \subset M''_1 \subset \cdots \subset M''_{n''} = M''$  son series de composición de  $M'$  y  $M''$  entonces

$$0 = i(M'_0) \subset i(M'_1) \subset \cdots \subset i(M'_{n'}) = i(M') = \pi^{-1}(M''_0) \subset \pi^{-1}(M''_1) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(M''_{n''}) = M$$

es una serie de composición de  $M$ , luego  $l(M) = n' + n'' = l(M') + l(M'')$ .  $\square$

En particular, si consideramos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M' \oplus M'' & \rightarrow & M'' \rightarrow 0 \\ & & m' & \mapsto & (m', 0) & & \\ & & & & (m', m'') & \mapsto & m'' \end{array}$$

tenemos que  $l(M' \oplus M'') = l(M') + l(M'')$ .

La sucesión de morfismos de módulos

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{s-1} \xrightarrow{f_s} M_s \xrightarrow{f_{s+1}} M_{s+1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow 0 \quad (*)$$

es exacta si y sólo si son exactas las sucesiones  $0 \rightarrow \text{Im } f_s \rightarrow M_s \xrightarrow{f_{s+1}} \text{Im } f_{s+1} \rightarrow 0$ . Así, si la sucesión  $*$  es exacta, tendremos que  $l(\text{Im } f_s) - l(M_s) + l(\text{Im } f_{s+1}) = 0$  y haciendo el sumatorio para todo  $s$  tenemos

$$l(M_0) - l(M_1) + \cdots + (-1)^n l(M_n) = 0$$

**14. Ejercicio:** Sea  $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n$  una cadena de  $A$ -submódulos de  $M$ . Probar que  $l(M/M_n) = \sum_{i=1}^n l(M_{i-1}/M_i)$ .

## 0.5.2 Localización de módulos

Sea  $S$  un sistema multiplicativo de un anillo  $A$  y  $M$  un  $A$ -módulo, denotaremos por  $M_S$ :

$$M_S = \left\{ \frac{m}{s}, m \in M, s \in S \text{ de modo que } \frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \text{ si existe un } s'' \in S \text{ tal que } s''(s'm - sm') = 0 \right\}^3$$

Con las operaciones (bien definidas)

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{s'm + sm'}{ss'} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{am}{ss'} \end{aligned}$$

$M_S$  tiene estructura de  $A_S$ -módulo y diremos que es la localización de  $M$  por  $S$ . La aplicación canónica

$$M \rightarrow M_S, m \mapsto \frac{m}{1}$$

es un morfismo de  $A$ -módulos y diremos que es el morfismo de localización. Dado un morfismo  $f: M \rightarrow N$  de  $A$ -módulos, induce de modo natural la aplicación (bien definida)

$$f_S: M_S \rightarrow N_S, \frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}$$

que es morfismo de  $A_S$ -módulos. Es inmediato comprobar que la localización de morfismos conserva composiciones y combinaciones  $A$ -lineales:

$$\begin{aligned} (f \circ g)_S &= f_S \circ g_S \\ (af + bg)_S &= af_S + bg_S \end{aligned}$$

**15. Proposición:** *Dado un morfismo  $f: M \rightarrow N$  de  $A$ -módulos y  $S$  un sistema multiplicativo de  $A$ , se cumple que*

$$(\text{Ker } f)_S = \text{Ker } f_S \quad \text{y} \quad (\text{Im } f)_S = \text{Im } f_S$$

*Demostración.* El morfismo  $(\text{Ker } f)_S \rightarrow M_S, \frac{m}{s} \mapsto \frac{m}{s}$  valora en  $\text{Ker } f_S$ , pues  $f_S(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s} = \frac{0}{s} = 0$  (para  $m \in \text{Ker } f$  y  $s \in S$ ). Tenemos que comprobar que el morfismo  $(\text{Ker } f)_S \rightarrow \text{Ker } f_S, \frac{m}{s} \mapsto \frac{m}{s}$  es un isomorfismo. Inyectivo: Si  $\frac{m}{s} = 0$  en  $\text{Ker } f_S \subseteq M_S$  entonces existe un  $s' \in S$  de modo que  $s'm = 0$ , luego  $\frac{m}{s} = 0$  en  $(\text{Ker } f)_S$ . Epiyectivo: Dado  $\frac{m}{s}$  en  $\text{Ker } f_S$ , entonces  $f_S(\frac{m}{s}) = 0$ , luego  $\frac{f(m)}{s} = 0$ . Por tanto, existe un  $s' \in S$  de modo que  $s'f(m) = 0$ , es decir,  $f(s'm) = 0$ . Luego  $\frac{m}{s} = \frac{s'm}{s's}$  con  $s'm \in \text{Ker } f$  y concluimos la epiyectividad.

Dejamos como ejercicio el probar que  $(\text{Im } f)_S = \text{Im } f_S$ . □

**16. Definición:** Diremos que una sucesión de morfismos de  $A$ -módulos

$$\cdots \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \rightarrow \cdots$$

es exacta cuando  $\text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n+1}$  para todo  $n$ .

Casos concretos:

1.  $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} M$  es una sucesión exacta si y sólo si  $i$  es inyectiva.
2.  $M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta si y sólo si  $\pi$  es un epimorfismo.
3.  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $i$  es inyectiva,  $\pi$  es epiyectiva y  $\text{Ker } \pi = \text{Im } i$ .

<sup>3</sup>El lector avisado se dará cuenta que hay que comprobar que  $\frac{m}{s} = \frac{m}{s}$ , que si  $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$  entonces  $\frac{m'}{s'} = \frac{m}{s}$ , y que si  $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$  y  $\frac{m'}{s'} = \frac{m''}{s''}$  entonces  $\frac{m}{s} = \frac{m''}{s''}$ .

Dado un módulo  $M$  tenemos un epimorfismo  $\pi: A^{(J)} \rightarrow M$ , igualmente dado  $\text{Ker } \pi$  podemos definir un epimorfismo  $A^{(J)} \rightarrow \text{Ker } \pi$ . Componiendo este último morfismo con la inclusión natural  $\text{Ker } \pi \hookrightarrow A^{(I)}$ , tenemos un morfismo natural  $s: A^{(J)} \rightarrow A^{(I)}$ , de modo que la sucesión

$$A^{(J)} \xrightarrow{s} A^{(I)} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

es exacta. Es decir  $M$  es isomorfo a  $\text{Coker } s$ , por tanto, el estudio de  $M$  se reduce al estudio de  $s$ , que es una aplicación  $A$ -lineal entre módulos libres.

**17. Proposición:** *Sea  $S$  un sistema multiplicativo de  $A$  y sea*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

*una sucesión exacta de  $A$ -módulos. Entonces es exacta la sucesión*

$$M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S$$

*Demostración.* Si  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$  una sucesión exacta de  $A$ -módulos entonces  $\text{Ker } g = \text{Im } f$ . Por tanto,  $\text{Ker } g_S = (\text{Ker } g)_S = (\text{Im } f)_S = \text{Im } f_S$  (explícitamente,  $\frac{m}{s} \mapsto \frac{m}{s}$ ) y  $M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S$  es exacta.  $\square$

**18. Ejercicio:** Probar

1.  $(M/N)_S = M_S/N_S$ .
2.  $(M \oplus N)_S = M_S \oplus N_S$ .
3.  $(M + N)_S = M_S + N_S$ .
4.  $(M \cap N)_S = M_S \cap N_S$ .

Uno de los procesos geométricos más básicos es el de localizar la atención en un entorno de un punto. Una propiedad es local cuando sólo depende del comportamiento en un entorno de cada punto. Por ejemplo, la continuidad de las funciones consideradas en Topología, la derivabilidad de las funciones consideradas en Análisis, la conexión local o compacidad local de los espacios topológicos, etc., son propiedades locales. Por el contrario, una propiedad es global cuando no es local, es decir, depende de todo el espacio considerado. Por ejemplo el concepto de función acotada no es local, ni el de espacio compacto o conexo.

Un resultado central de este capítulo será demostrar que la anulación de un módulo es una cuestión local y que por tanto, también son locales todos los problemas que puedan reducirse a la anulación de un módulo.

**19. Definición:** Sea  $M$  un  $A$ -módulo, llamaremos anulador de  $M$  al ideal

$$\text{Anul}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A: am = 0, \text{ para todo } m \in M\}$$

Dicho de otro modo, el anulador de  $M$  es el núcleo del morfismo de estructura  $A \rightarrow \text{End}(M)$ ,  $a \mapsto a \cdot$ . Se dice que  $M$  es un  $A$ -módulo fiel si  $\text{Anul}(M) = 0$ , es decir, si el morfismo  $A \rightarrow \text{End}(M)$  es inyectivo. Todo  $A$ -módulo  $M$  es de modo natural un  $A/\text{Anul}(M)$ -módulo fiel (donde  $\bar{a} \cdot m \stackrel{\text{def}}{=} am$ ).

Dado un elemento  $m \in M$ , llamaremos anulador de  $m \in M$  al ideal anulador del módulo  $\langle m \rangle = \{am, a \in A\}$ . Es decir, el ideal anulador de  $m$  es

$$\text{Anul}(m) = \{a \in A : am = 0\}$$

El epimorfismo de  $A$ -módulos  $A \rightarrow \langle m \rangle$ ,  $a \mapsto am$ , tiene de núcleo el ideal anulador de  $m$ . Por tanto, por el teorema de isomorfía  $A/\text{Anul}(m) \simeq \langle m \rangle$ .

Igual que hacíamos para los anillos, dada  $f \in A$  denotaremos  $M_f$  a la localización de  $M$  por el sistema multiplicativo  $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ . Dado un ideal primo  $\mathfrak{p}_x \subset A$  denotaremos por  $M_x$  a la localización de  $M$  por el sistema multiplicativo  $S = A - \mathfrak{p}_x$ .

**20. Definición:** Llamaremos soporte de un  $A$ -módulo  $M$ , al subespacio de  $\text{Spec } A$  formado por los puntos  $x$  donde  $M_x \neq 0$  y lo denotaremos por  $\text{Sop}(M)$ , i.e.,

$$\text{Sop}(M) = \{x \in \text{Spec } A : M_x \neq 0\}$$

**21. Teorema:** *El soporte de un  $A$ -módulo finito generado coincide con los ceros de su ideal anulador, i.e.,*

$$\text{Sop } M = (\text{Anul } M)_0$$

*Como consecuencia se tiene que la condición necesaria y suficiente para que un módulo  $M$  (finito generado o no) sea cero es que  $M_x = 0$ , para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ .*

*Demostración.* Empecemos probando que si  $M = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$  es un  $A$ -módulo finito generado, entonces  $M_S = 0$  si y sólo si existe un  $s \in S$  de modo que  $sM = 0$ : Si  $M_S = 0$  entonces  $\frac{m_i}{1} = 0$  para todo  $i$ , luego existen  $s_i \in S$  de modo que  $s_i m_i = 0$ . Por tanto,  $s = s_1 \cdots s_r \in S$  cumple que  $sM = 0$ . Recíprocamente, si existe  $s \in S$  de modo que  $sM = 0$ , entonces  $\frac{m}{s} = 0$  para todo  $\frac{m}{s} \in M_S$  y  $M_S = 0$ .

Ahora ya, dado  $x \in \text{Spec } A$ , tendremos que  $M_x \neq 0$  si y sólo si  $\text{Anul}(M) \cap (A - \mathfrak{p}_x) = \emptyset$ , es decir,  $\text{Anul}(M) \subseteq \mathfrak{p}_x$ . Luego  $\text{Sop}(M) = (\text{Anul } M)_0$ .

Por último, veamos la consecuencia. Probemos sólo la suficiencia. Si  $M_x = 0$  para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ , entonces para todo submódulo  $\langle m \rangle \subseteq M$  se cumple que  $\langle m \rangle_x = 0$ . Por tanto, el  $(\text{Anul}\langle m \rangle)_0$ , no contiene ningún punto cerrado de  $\text{Spec } A$ , es decir,  $\text{Anul}\langle m \rangle$  no está contenido en ningún ideal maximal. En conclusión,  $\text{Anul}(\langle m \rangle) = A$ , luego  $m = 1 \cdot m = 0$  y  $M = 0$ . □

**22. Proposición:** 1. *Una inclusión  $N \subseteq M$  de módulos es una igualdad si y sólo si  $N_x = M_x$ , para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ .*

2. *Dos submódulos  $N, N'$  de un módulo  $M$  son iguales si y sólo si  $N_x = N'_x$ , para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ .*

*Demostración.* 1.  $N = M \iff M/N = 0 \iff (M/N)_x = 0$ , para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A \iff M_x/N_x = 0$  para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A \iff M_x = N_x$ , para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ .

2. Veamos sólo que si  $N_x = N'_x$ , para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ , entonces  $N = N'$ . Tendremos que  $N_x = N_x + N'_x = (N + N')_x$ , para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ . Luego por el punto 1.  $N = N + N'$ , es decir,  $N' \subseteq N$ . Del mismo modo obtenemos la inclusión inversa y concluimos la igualdad. □

**23. Teorema :** Sea  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$  una sucesión de morfismos de  $A$ -módulos. Las siguientes condiciones son equivalentes

1.  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$  es una sucesión exacta.
2.  $M'_x \xrightarrow{f_x} M_x \xrightarrow{g_x} M''_x$  es exacta para todo punto  $x \in \text{Spec } A$ .
3.  $M'_x \xrightarrow{f_x} M_x \xrightarrow{g_x} M''_x$  es exacta para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ .

*Demostración.* La implicación  $1 \Rightarrow 2$  es un caso particular de 0.5.17. La implicación  $2 \Rightarrow 3$  es evidente.

Veamos que  $3 \Rightarrow 1$ . Si la sucesión es exacta en todo punto cerrado  $x$  entonces  $\text{Ker } g_x = \text{Im } f_x$ . Luego  $(\text{Ker } g)_x = (\text{Im } f)_x$ . Por tanto, por la proposición anterior,  $\text{Ker } g = \text{Im } f$  y la sucesión del punto 1. es exacta.  $\square$

Como corolario, dado que los morfismos inyectivos y epiyectivos son casos concretos de sucesiones exactas, tendremos que un morfismo es inyectivo (o epiyectivo) si y sólo si lo es localmente, para todo punto cerrado del espectro del anillo.

Si  $U$  es un abierto de  $\text{Spec } A$ , denotaremos por  $A_U$  la localización de  $A$  por el sistema multiplicativo de las funciones que no se anulan en ningún punto de  $U$ .

**24. Proposición :** Si  $\text{Spec } A$  es la unión disjunta de dos abiertos  $U_1, U_2$  entonces  $A = A_{U_1} \times A_{U_2}$ .

*Demostración.* Observemos que  $\text{Spec } A_{U_1} = U_1$  (igualmente  $\text{Spec } A_{U_2} = U_2$ ). En efecto,  $U_1 \subseteq \text{Spec } A_{U_1}$ , porque las funciones del sistema multiplicativo por las que localizamos no se anulan en ningún punto de  $U_1$ . Por otra parte, como  $U_1, U_2$  son cerrados, si denotamos  $I_i$  al ideal de funciones que se anulan en  $U_i$  tenemos que  $(I_1)_0 \cap (I_2)_0 = \emptyset$ , por tanto  $(I_1 + I_2)_0 = \emptyset$  y  $I_1 + I_2 = A$ . Así pues, existen  $f_i \in I_i$ , tales que  $f_1 + f_2 = 1$ . En conclusión,  $f_2 = 1 - f_1$  es una función que se anula en todo los puntos de  $U_2$  y no se anula en ningún punto de  $U_1$ , por tanto  $\text{Spec } A_{U_1} \subseteq U_1$  y  $\text{Spec } A_{U_1} = U_1$ .

Consideremos el morfismo natural

$$A \rightarrow A_{U_1} \times A_{U_2}, \quad a \mapsto \left( \frac{a}{1}, \frac{a}{1} \right)$$

Vamos a probar que este morfismo es isomorfismo. Por el teorema anterior, basta verlo localmente. Dado  $x \in U_1$ , tenemos que  $(A_{U_1})_x = (A_x)_{U_1} = A_x$  porque el sistema multiplicativo de las funciones que no se anulan en  $U_1$ , está incluido en el sistema multiplicativo de las funciones que no se anulan en  $x$ . Por otra parte,  $\text{Spec}(A_{U_2})_x = \emptyset$ , porque  $U_2 \cap \{y \in \text{Spec } A : \mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x, i.e., x \in \bar{y}\} = \emptyset$ , luego  $(A_{U_2})_x = 0$ . En conclusión,  $A_x = (A_{U_1} \times A_{U_2})_x$  si  $x \in U_1$ , e igualmente si  $x \in U_2$ . Hemos terminado.  $\square$

**25. Corolario :** Si  $\text{Spec } A = \{x_1, \dots, x_n\}$ , donde  $x_1, \dots, x_n$  son puntos cerrados, entonces

$$A = A_{x_1} \times \dots \times A_{x_n}$$

Llamamos radical de Jacobson de un anillo al ideal que es la intersección de todos los ideales primos maximales del anillo.

**26. Corolario :** Sea  $A$  un anillo e  $I \subset A$  un ideal incluido en el radical de Jacobson de  $A$ . Sea  $M$  un  $A$ -módulo finito generado. Se cumple que

$$M = IM \iff M = 0$$

*Demostración.*  $M = IM \iff M_x = I_x M_x$  para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ , e igualmente  $M = 0 \iff M_x = 0$ . Ahora bien,  $I_x \subseteq \mathfrak{p}_x A_x$  y por el lema de Nakayama concluimos trivialmente que  $M_x = I_x M_x \iff M_x = 0$ . Con todo, hemos terminado.  $\square$

### 0.5.3 Categorías. Funtor de homomorfismos

Dar una categoría  $\mathcal{C}$  es dar

1. Una familia arbitraria, cuyos elementos llamaremos objetos de  $\mathcal{C}$ .
2. Unos conjuntos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ , para cada par de objetos  $M, N$  de  $\mathcal{C}$ , cuyos elementos  $f$  llamaremos morfismos de  $M$  en  $N$  y denotaremos por el símbolo  $f: M \rightarrow N$ .
3. Una aplicación

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, P), \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

para cada terna  $M, N, P$  de objetos de  $\mathcal{C}$ . Satisfaciéndose

- (a)  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .
- (b) Para cada objeto  $M$  de  $\mathcal{C}$ , existe un morfismo  $\text{Id}_M: M \rightarrow M$  de modo que  $f \circ \text{Id}_M = f$  y  $\text{Id}_M \circ g = g$  para todo morfismo  $f: M \rightarrow N$  y  $g: N \rightarrow M$ .

Un morfismo  $f: M \rightarrow N$  se dice que es un isomorfismo si existe  $g: N \rightarrow M$  de modo que  $f \circ g = \text{Id}_N$  y  $g \circ f = \text{Id}_M$ .

La categoría  $\mathcal{C}_{Conj}$  de conjuntos, es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos entre los objetos son las aplicaciones de conjuntos. La categoría  $\mathcal{C}_{Mod}$  de  $A$ -módulos, es la categoría cuyos objetos son los  $A$ -módulos y los morfismos entre los objetos son los morfismos de módulos.

**27. Definición:** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  dos categorías. Dar un funtor covariante  $F: \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$  es asignar a cada objeto  $M$  de  $\mathcal{C}$  un objeto  $F(M)$  de  $\mathcal{C}'$ , y cada morfismo  $f: M \rightarrow N$  de  $\mathcal{C}$  un morfismo  $F(f): F(M) \rightarrow F(N)$  de  $\mathcal{C}'$ , de modo que se verifique que  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$  y  $F(\text{Id}_M) = \text{Id}_{F(M)}$ .

Análogamente se definen los funtores contravariantes  $F: \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$ , que asignan a cada objeto  $M$  de  $\mathcal{C}$  un objeto  $F(M)$  de  $\mathcal{C}'$ , y a cada morfismo  $f: M \rightarrow N$  de  $\mathcal{C}$  un morfismo  $F(f): F(N) \rightarrow F(M)$  de  $\mathcal{C}'$ , de modo que verifica  $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$  y  $F(\text{Id}_M) = \text{Id}_{F(M)}$ .

Un morfismo  $f: M \rightarrow M'$  induce la aplicación

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M'), \quad g \mapsto f_*(g) \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g$$

Estamos diciendo que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, -)$  es un funtor covariante de  $\mathcal{C}$  en la categoría de los conjuntos  $\mathcal{C}_{Conj}$ , es decir,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, -): \mathcal{C} &\rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj} \\ M &\rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M) \\ f &\rightsquigarrow f_* \\ (f \circ g) &\rightsquigarrow (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \end{aligned}$$

Un morfismo  $f: M \rightarrow M'$  induce la aplicación

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N), \quad g \mapsto f^*(g) \stackrel{\text{def}}{=} g \circ f$$

Luego  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, N)$  es un funtor contravariante

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, N): \mathcal{C} &\rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj} \\ M &\rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \\ f &\rightsquigarrow f^* \\ (f \circ g) &\rightsquigarrow (f \circ g)^* = g^* \circ f^* \end{aligned}$$

**28. Definición:** Dos funtores  $F, F': \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$  se dicen que son isomorfos, y escribimos  $F \stackrel{\theta}{\simeq} F'$ , si para cada objeto  $M$  de  $\mathcal{C}$  tenemos isomorfismos  $\theta_M: F(M) \simeq F'(M)$ , de modo que para cada morfismo  $f: M \rightarrow N$  el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F(f)} & F(N) \\ \parallel \theta_M & & \parallel \theta_N \\ F'(M) & \xrightarrow{F'(f)} & F'(N) \end{array}$$

es conmutativo.

**29. Proposición:** El funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$  es isomorfo al funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', -)$ , si y sólo si  $M \simeq M'$ .

*Demostración.* Veamos sólo la suficiencia. Empecemos observando que si tenemos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -) \stackrel{\theta}{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', -)$ , entonces este isomorfismo queda determinado por  $\theta_M(\text{Id}_M) = g$ . No es más que considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M) \xrightarrow{\theta_M} F(M) & & \text{Id}_M \xrightarrow{\theta_M} g \\ \left| f_* \right. & & \left| f_* \right. \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \xrightarrow{\theta_N} F(N) & & f \xrightarrow{\theta_N} f_*(g) = f \circ g \end{array}$$

Así pues, si tenemos un isomorfismo  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -) \stackrel{\theta}{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', -)$  y denotamos  $\theta_M(\text{Id}_M) = g$  y  $\theta_{M'}^{-1}(\text{Id}_{M'}) = f$  tendremos que

$$\begin{aligned} \text{Id}_M &\xrightarrow{\theta_M} g \xrightarrow{\theta_{M'}^{-1}} g_*(f) = g \circ f = \text{Id}_M \\ \text{Id}_{M'} &\xrightarrow{\theta_{M'}^{-1}} f \xrightarrow{\theta_M} f_*(g) = f \circ g = \text{Id}_{M'} \end{aligned}$$

□

**30. Teorema:** La condición necesaria y suficiente para que una sucesión de morfismos de  $A$ -módulos  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$  sea exacta es que para todo  $A$ -módulo  $N$  sea exacta la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{p_*} \text{Hom}_A(N, M'')$$

“Se dice que  $\text{Hom}_A(N, -)$  es un funtor exacto por la izquierda”.

*Demostración.* Es sencillo comprobar la necesidad de la condición. En cuanto a la suficiencia, basta tomar  $N = A$ , pues para todo  $A$ -módulo  $M$  tenemos un isomorfismo natural  $\text{Hom}_A(A, M) = M$ ,  $f \mapsto f(1)$ . □

También se tiene el teorema “dual” del anterior:

**31. Teorema:** La condición necesaria y suficiente para que una sucesión de morfismos de  $A$ -módulos  $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$  sea exacta es que para todo  $A$ -módulo  $N$  sea exacta la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_A(M', N)$$

“Se dice que  $\text{Hom}_A(-, N)$  es un funtor exacto por la derecha”.

*Demostración.* Es sencillo comprobar la necesidad de la condición. Veamos la suficiencia. Sea  $N = M''/\text{Im } p$ , y  $\pi: M'' \rightarrow N$  la proyección canónica. Tenemos que  $p^*(\pi) = \pi \circ p = 0$ , luego  $\pi = 0$  y  $p$  es epiyectiva. Si tomamos ahora  $N = M''$ , entonces  $0 = (p^* \circ i^*)(\text{Id}) = p \circ i$ , luego  $\text{Im } i \subseteq \text{Ker } p$ . Por último, si  $N = M/\text{Im } i$  y  $\pi: M \rightarrow M/\text{Im } i$  es la proyección canónica, entonces  $i^*(\pi) = \pi \circ i = 0$ . Luego existe un morfismo  $f: M'' \rightarrow N$  tal que  $f \circ p = p^*(f) = \pi$  y concluimos que  $\text{Ker } p = p^{-1}(0) \subseteq (f \circ p)^{-1}(0) = \pi^{-1}(0) = \text{Im } i$ .  $\square$

### 0.5.4 Producto tensorial

Sean  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos. Consideremos el  $A$ -módulo libre  $A^{(M \times N)}$ . Dado  $(m, n) \in M \times N$ , denotemos  $(m, n) = (a_i)_{i \in M \times N}$  al elemento de  $A^{(M \times N)}$  definido por  $a_{(m', n')} = 0$  si  $(m', n') \neq (m, n)$  y  $a_{(m', n')} = 1$  si  $(m', n') = (m, n)$ . Es decir, estamos identificando los elementos de  $M \times N$  con la base estándar de  $A^{(M \times N)}$ .

Sea  $R$  el submódulo de  $A^{(M \times N)}$  generado por los elementos de la forma

$$\begin{aligned} (m + m', n) - (m, n) - (m', n) \\ (m, n + n') - (m, n) - (m, n') \\ (am, n) - a(m, n) \\ (m, an) - a(m, n) \end{aligned}$$

**32. Definición:** Llamaremos producto tensorial de  $M$  y  $N$  sobre el anillo  $A$ , al  $A$ -módulo cociente  $A^{(M \times N)}/R$  y lo denotaremos  $M \otimes_A N$ . Cada clase  $\overline{(m, n)} \in A^{(M \times N)}/R = M \otimes_A N$  la denotaremos  $m \otimes n$ .

De acuerdo con la definición de  $R$  tenemos que

$$\begin{aligned} (m + m') \otimes n &= m \otimes n + m' \otimes n \\ m \otimes (n + n') &= m \otimes n + m \otimes n' \\ am \otimes n &= a(m \otimes n) \\ m \otimes an &= a(m \otimes n) \end{aligned}$$

propiedades que se expresan diciendo “el producto tensorial es  $A$ -bilineal”. En realidad, el formalismo seguido, ha sido para llegar a definir “el producto” ( $\otimes$ ) de elementos de  $M$  por  $N$ , con estas propiedades y sin más relaciones que las generadas por las relaciones de  $M$  y  $N$  y estas propiedades.

Dado que los elementos  $\{(m, n)\}_{(m, n) \in M \times N}$  forman una base de  $A^{(M \times N)}$  entonces los elementos  $\{m \otimes n\}_{(m, n) \in M \times N}$  forman un sistema generador de  $M \otimes_A N$ . Por las propiedades de bilinealidad recién escritas, si  $\{m_i\}$  y  $\{n_j\}$  son sistemas generadores de  $M$  y  $N$ , entonces  $\{m_i \otimes n_j\}$  es un sistema generador de  $M \otimes_A N$ .

Sea  $P$  un  $A$ -módulo.

**33. Definición:** Diremos que una aplicación  $f: M \times N \rightarrow P$  es  $A$ -bilineal si

$$\begin{aligned} f(m + m', n) &= f(m, n) + f(m', n) \\ f(m, n + n') &= f(m, n) + f(m, n') \\ f(am, n) &= af(m, n) \\ f(m, an) &= af(m, n) \end{aligned}$$

El conjunto de las aplicaciones  $A$ -bilineales de  $M \times N$  en  $P$  se denota  $\text{Bil}_A(M, N; P)$ . La condición de que una aplicación  $f: M \times N \rightarrow P$  sea  $A$ -bilineal expresa que la aplicación  $f_m: N \rightarrow P$ ,  $f_m(n) =$

$f(m, n)$ , es un morfismo de  $A$ -módulos para cada elemento  $m \in M$ . Obtenemos así, un isomorfismo natural

$$\text{Bil}_A(M, N; P) = \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P))$$

El morfismo natural  $\pi: M \times N \rightarrow M \otimes N$ ,  $(m, n) \mapsto m \otimes n$ , es bilineal.

**34. Teorema Propiedad universal del producto tensorial** *Si  $f: M \times N \rightarrow P$  es una aplicación bilineal, entonces existe un único morfismo de  $A$ -módulos  $\phi: M \otimes_A N \rightarrow P$ , de modo que  $f = \phi \circ \pi$ . Recíprocamente, dado un morfismo de  $A$ -módulos  $\phi: M \otimes N \rightarrow P$  entonces  $f = \phi \circ \pi$  es una aplicación bilineal de  $M \times N$  en  $P$ . Con concisión,*

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P) = \text{Bil}_A(M, N; P), \quad \phi \mapsto \phi \circ \pi$$

*Demostración.* Sea  $f: M \times N \rightarrow P$  una aplicación  $A$ -bilineal, entonces el morfismo de  $A$ -módulos

$$\varphi: A^{(M \times N)} \rightarrow P, \quad \varphi\left(\sum_i a_i(m_i, n_i)\right) = \sum_i a_i f(m_i, n_i)$$

se anula sobre los generadores del submódulo  $R$ , anteriormente definido. Por la tanto, induce el morfismo de  $A$ -módulos  $\phi: M \otimes_A N \rightarrow P$ ,  $m \otimes n \mapsto f(m, n)$ . Este morfismo cumple que  $f = \phi \circ \pi$  y si un morfismo  $\phi'$  cumple esta igualdad entonces  $\phi'(m \otimes n) = f(m, n)$  y coincide con  $\phi$ , pues los elementos  $m \otimes n$  generan  $M \otimes N$ .

Por último, es una simple comprobación ver que dado un morfismo de  $A$ -módulos  $\phi: M \otimes N \rightarrow P$  entonces  $f = \phi \circ \pi$  es una aplicación bilineal de  $M \times N$  en  $P$ . □

Así pues, este teorema nos dice que definir un morfismo de  $A$ -módulos  $\phi: M \otimes N \rightarrow P$ , es asignar a cada  $m \otimes n \in M \otimes_A N$  un elemento  $f(m \otimes n)$  de modo que  $f(am + m') \otimes n = af(m \otimes n) + f(m' \otimes n)$  y  $f(m \otimes (an + n')) = af(m \otimes n) + f(m \otimes n')$ .

**35. Observación:** Análoga construcción se puede hacerse para cualquier familia finita  $M_1, \dots, M_n$  de  $A$ -módulos, obteniéndose un  $A$ -módulo  $M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_n$  con una propiedad universal similar. Para definir un morfismo de  $A$ -módulos  $f: M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_n \rightarrow P$ , bastará definir las imágenes  $f(m_1 \otimes \dots \otimes m_n)$  de modo que

$$f(m_1 \otimes \dots \otimes a_i m_i + n_i \otimes \dots) = a_i f(m_1 \otimes \dots \otimes m_i \otimes \dots) + f(m_1 \otimes \dots \otimes n_i \otimes \dots)$$

**36. Teorema:** *Existen isomorfismos naturales*

1.  $(M \otimes_A N) \otimes_A P = M \otimes_A N \otimes_A P$ ,  $(m \otimes n) \otimes p \mapsto m \otimes n \otimes p$ .
2.  $M \otimes_A N = N \otimes_A M$ ,  $m \otimes n \mapsto n \otimes m$ .
3.  $A \otimes M = M$ ,  $a \otimes m \mapsto am$ .
4.  $(\bigoplus_i M_i) \otimes_A N = \bigoplus_i (M_i \otimes N)$ ,  $(m_i) \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)$ .
5.  $M \otimes_A A_S = M_S$ ,  $m \otimes \frac{a}{s} \mapsto \frac{am}{s}$ .
6.  $M \otimes_A A/I = M/IM$ ,  $m \otimes \bar{a} \mapsto \overline{am}$ .

*Demostración.* Dejamos al lector que defina los morfismos inversos. Veamos, sólo, que el morfismo de 1. está bien definido: Para cada  $p$  el morfismo  $M \otimes_A N \times p \rightarrow M \otimes_A (N \otimes_A P)$ ,  $(m \otimes n) \times p \mapsto m \otimes (n \otimes p)$  está bien definido. Luego tenemos un morfismo  $(M \otimes_A N) \times P \rightarrow M \otimes_A (N \otimes_A P)$ , que es bilineal e induce el morfismo definido en 1.  $\square$

Si  $f: A \rightarrow B$  es un morfismo de anillos entonces  $B$  es de modo natural un  $A$ -módulo. Se dice que  $B$  es una  $A$ -álgebra. Cada elemento  $b \in B$  define un endomorfismo  $1 \otimes b: M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B$ ,  $m \otimes b' \mapsto m \otimes \underset{\text{def}}{bb'}$ . Podemos definir así, una estructura de  $B$ -módulo en  $M \otimes_A B$  que viene dada por el siguiente producto

$$b \cdot \left( \sum_i m_i \otimes b_i \right) = \sum_i m_i \otimes bb_i$$

Se dice que el cambio de base de  $M$  por  $A \rightarrow B$  es  $M \otimes_A B$ .

**Notación:** Denotaremos  $M \otimes_A B = M_B$  y usualmente denotaremos  $f(a) = a$ .

**37. Proposición :** Sean  $A \rightarrow B$  y  $B \rightarrow C$  morfismos de anillos y  $M, M'$   $A$ -módulos y  $N$  un  $B$ -módulo. Existen isomorfismos naturales

1.  $M_B \otimes_B N = M \otimes_A N$ ,  $(m \otimes b) \otimes n \mapsto m \otimes bn$ .
2.  $(M \otimes_A M') \otimes_A B = M_B \otimes_B M'_B$ ,  $(m \otimes m') \otimes b \mapsto (m \otimes b) \otimes (m' \otimes 1)$ .
3.  $(M_B)_C = M_C$ , (i.e.,  $(M \otimes_A B) \otimes_B C = M \otimes_A C$ ),  $(m \otimes b) \otimes c \mapsto m \otimes bc$ .

*Demostración.* Defínanse los morfismos inversos.  $\square$

**38. Proposición :** Sea  $M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  una sucesión exacta y  $N$  un  $A$ -módulo. Se cumple que

$$M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M'' \otimes_A N \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Es decir, “ $-\otimes_A N$  es un funtor exacto por la derecha”.

*Demostración.* Sea  $M'$  la sucesión exacta inicial. De acuerdo con 0.5.31

$$\text{Hom}_A(M', \text{Hom}_A(N, P)) = \text{Bil}_A(M', N; P) = \text{Hom}_A(M' \otimes_A N, P)$$

es una sucesión exacta para todo  $A$ -módulo  $P$ . De nuevo 0.5.31 nos permite concluir que la sucesión  $M' \otimes_A N$  es exacta.  $\square$

Ahora, nuestro objetivo es definir el producto tensorial de  $A$ -álgebras.

Si  $B$  y  $C$  son  $A$ -álgebras, el  $A$ -módulo  $B \otimes_A C$  tiene una estructura de  $A$ -álgebra natural: El producto es el morfismo  $B \otimes_A C \times B \otimes_A C \rightarrow B \otimes_A C$ ,  $(b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto bb' \otimes cc'$  inducido por el correspondiente morfismo  $B \otimes_A C \otimes B \otimes_A C \rightarrow B \otimes_A C$ . Con este producto  $B \otimes_A C$  es un anillo. Por último, el morfismo  $A \rightarrow B \otimes_A C$ ,  $a \mapsto a \otimes 1 = 1 \otimes a$  es un morfismo de anillos.

**39. Proposición :** Sean  $B, C$  y  $D$   $A$ -álgebras. Se cumple el isomorfismo

$$\text{Hom}_{A\text{-alg}}(B \otimes_A C, D) \xlongequal{\quad} \text{Hom}_{A\text{-alg}}(B, D) \times \text{Hom}_{A\text{-alg}}(C, D)$$

$$\phi \xrightarrow{\quad} (\phi_1, \phi_2) \quad \phi_1(b) = \phi(b \otimes 1), \phi_2(c) = \phi(1 \otimes c)$$

$$\phi: (b \otimes c) \mapsto \phi_1(b)\phi_2(c) \xleftarrow{\quad} (\phi_1, \phi_2)$$

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} p_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots \\ p_r(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Sea  $I = (p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_r(x_1, \dots, x_n))$  y llamemos  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$  el anillo de funciones de la variedad de soluciones del sistema de ecuaciones anterior. Ya veremos que los puntos cerrados de  $\text{Spec } A$  se identifica con esta variedad y diremos que  $A$  es el anillo de funciones de  $\text{Spec } A$ . Observemos que  $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(A, \mathbb{C})$  se identifica con los puntos de la variedad de soluciones del sistema de ecuaciones anterior.

Dada otra variedad de ecuaciones

$$\begin{aligned} p'_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots \\ p'_s(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

denotemos  $I' = (p'_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p'_s(x_1, \dots, x_n))$  y  $A' = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I'$ . La proposición anterior nos dice que  $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(A \otimes_{\mathbb{C}} A', \mathbb{C})$  es el producto de la variedades de soluciones de los dos sistemas de ecuaciones anteriores. Este hecho justificará la definición  $\text{Spec } A \times_{\text{def}} \text{Spec } A' = \text{Spec}(A \otimes_{\mathbb{C}} A')$ .

**40. Proposición:** Sean  $B$  y  $C$   $A$ -álgebras. Se cumple el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(B, C) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_C(B_C, C) \\ \phi & \longrightarrow & \phi': \phi'(b \otimes c) = \phi(b) \cdot c \\ \phi'_B & \longleftarrow & \phi' \end{array}$$

**41. Ejercicio:** Calcular  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ .

### 0.5.5 Módulos planos y proyectivos

**42. Definición:** Diremos que un  $A$ -módulo  $P$  es plano, si para toda sucesión exacta  $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ , la sucesión  $0 \rightarrow N' \otimes_A P \rightarrow N \otimes_A P \rightarrow N'' \otimes_A P \rightarrow 0$  es exacta. Es decir, por la proposición 0.5.38, si para toda inyección  $N \hookrightarrow M$  entonces  $N \otimes_A P \rightarrow \otimes_A P$  también es inyectiva.

Dado que  $N \otimes_A A^{(I)} = N^{(I)}$ , es fácil comprobar que  $A^{(I)}$ -es un  $A$ -módulo plano. Como  $N \otimes_A (P \oplus P') = (N \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P')$ , es fácil comprobar que una suma directa de módulos es plana si y sólo si cada sumando es plano.

**43. Proposición:** Si  $P$  es un  $A$ -módulo plano y  $A \rightarrow B$  es un morfismo de anillos, entonces  $P_B$  es un  $B$ -módulo plano.

*Demostración.* Para todo  $B$ -módulo  $M$  tenemos que  $P_B \otimes_B M = P \otimes_A M$ , así que la exactitud del funtor  $P_B \otimes_B (-)$  es consecuencia de la exactitud del funtor  $P \otimes_A (-)$ .  $\square$

**44. Proposición:** La condición necesaria y suficiente para que un  $A$ -módulo  $P$  sea plano, es que  $P_x$  sea un  $A_x$ -módulo plano, para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ .

*Demostración.* Denotemos toda sucesión exacta  $0 \rightarrow N' \rightarrow N$  de  $A$ -módulos por  $N'$ .  $P$  es plano  $\iff$  para toda sucesión exacta  $N'$  entonces  $N' \otimes_A P$  es exacta  $\iff$  para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$  la sucesión  $(N' \otimes_A P)_x = N'_x \otimes_{A_x} P_x$  es exacta  $\iff P_x$  es un  $A_x$ -módulo plano para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$   $\square$

**45. Lema :** *Sea  $M$  un módulo finito generado sobre un anillo local  $\mathcal{O}$ . Si el morfismo natural  $I \otimes_A M \rightarrow M$ ,  $i \otimes m \mapsto im$ , es inyectivo para todo ideal finito generado  $I \subseteq A$ , entonces  $M$  es un  $\mathcal{O}$ -módulo libre.*

*Demostración.* Sea  $m_1, \dots, m_r$  un sistema de generadores de  $M$ , obtenido por Nakayama (es decir, de modo que  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r$  sea una base de  $M/\mathfrak{m}M$ , donde  $\mathfrak{m}$  es el ideal maximal de  $\mathcal{O}$ ). Dada una relación  $a_1 m_1 + \dots + a_r m_r = 0$ , consideremos el ideal  $I = (a_1, \dots, a_r)$ . Por hipótesis el morfismo natural  $I \otimes_{\mathcal{O}} M \rightarrow M$  es inyectivo, así que  $a_1 \otimes m_1 + \dots + a_r \otimes m_r = 0$ . En el  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ -espacio vectorial

$$\begin{aligned} (I \otimes_{\mathcal{O}} M)/\mathfrak{m}(I \otimes_{\mathcal{O}} M) &= (I \otimes_{\mathcal{O}} M) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m} = (I \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}) \otimes_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} (M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}) \\ &= I/\mathfrak{m}I \otimes_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M \end{aligned}$$

tendremos que  $\overline{a_1 \otimes m_1 + \dots + a_r m_r} = \bar{a}_1 \otimes \bar{m}_1 + \dots + \bar{a}_r \otimes \bar{m}_r = 0$ . Pero  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r$  es una base de  $M/\mathfrak{m}M$ , por tanto  $\bar{a}_1 = \dots = \bar{a}_r = 0$ . Luego  $I/\mathfrak{m}I = 0$  y por Nakayama  $I = 0$ . En conclusión,  $m_1, \dots, m_r$  es una base de  $M$  y  $M$  es libre.  $\square$

**46. Teorema:** *Un módulo finito generado es plano si y sólo si es localmente libre.*

*Demostración.* Es consecuencia del lema y proposición anteriores.  $\square$

**47. Teorema Criterio del ideal de plitud** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo finito generado. Si el morfismo natural  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo para todo ideal  $I \subseteq A$ , entonces  $M$  es un  $A$ -módulo plano.*

*Demostración.* En cada punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$  tenemos que el morfismo natural

$$I_x \otimes_{A_x} M_x = (I \otimes_A M)_x \rightarrow M_x$$

es inyectivo. Como cada ideal finito generado de  $A_x$  es localización de un ideal finito generado de  $A$ , el lema anterior permite concluir que  $M_x$  es un  $A_x$ -módulo libre y, por tanto, plano. Luego,  $M$  es un  $A$ -módulo plano.  $\square$

**48. Definición :** Se dice que un módulo  $M$  es fielmente plano, si cumple que toda sucesión es exacta si y sólo si lo es al tensorializarla por el módulo  $M$ .

**49. Proposición :** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1.  $M$  es un  $A$ -módulo fielmente plano.
2.  $M$  es un  $A$ -módulo plano y cumple que  $M \otimes_A N = 0 \iff N = 0$ .
3.  $M$  es un  $A$ -módulo plano y  $M/\mathfrak{m}_x M \neq 0$  para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ .

*Demostración.*  $1 \Rightarrow 2$ ) Si  $M$  es fielmente plano, es plano. Además, la sucesión  $0 \rightarrow N \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $0 \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow 0$  es exacta. Es decir,  $N = 0 \iff M \otimes_A N = 0$ .

$2 \Rightarrow 1$ ) Sea

$$N \xrightarrow{f} N' \xrightarrow{f'} N'' \quad *$$

una sucesión y consideremos la sucesión

$$N \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes 1} N' \otimes_A M \xrightarrow{f' \otimes 1} N'' \otimes_A M \quad **$$

Si  $M$  es plano entonces  $\text{Im } f \otimes_A M = \text{Im}(f \otimes 1)$ ,  $\text{Ker } f' \otimes_A M = \text{Ker}(f' \otimes 1)$  y

$$[(\text{Ker } f' + \text{Im } f)/\text{Im } f] \otimes_A M = (\text{Ker } f' \otimes 1 + \text{Im } f \otimes 1)/\text{Im } f \otimes 1$$

Así pues, tendremos que  $(\text{Ker } f' + \text{Im } f)/\text{Im } f = 0$  si y sólo si  $(\text{Ker } f' \otimes 1 + \text{Im } f \otimes 1)/\text{Im } f \otimes 1 = 0$ . Igualmente,  $(\text{Ker } f' + \text{Im } f)/\text{Ker } f' = 0$  si y sólo si  $(\text{Ker } f' \otimes 1 + \text{Im } f \otimes 1)/\text{Ker } f' \otimes 1 = 0$ . En conclusión,  $*$  es exacta si y sólo si  $**$  es exacta.

2  $\Rightarrow$  3)  $A/\mathfrak{m}_x \neq 0$ , luego  $A/\mathfrak{m}_x \otimes_A M = M/\mathfrak{m}_x M \neq 0$ .

3  $\Rightarrow$  2) Si  $N \neq 0$ , sea  $0 \neq n \in N$ . Se cumple que  $\langle n \rangle \simeq A/\text{Anul}(n)$ . Sea  $\mathfrak{m}_x \subset A$  un ideal maximal que contenga a  $\text{Anul}(n)$ . El epimorfismo  $A/\mathfrak{m}_x \rightarrow A/\text{Anul}(n)$  induce el epimorfismo  $A/\mathfrak{m}_x \otimes_A M \rightarrow A/\text{Anul}(n) \otimes_A M$ , es decir, un epimorfismo  $M/\mathfrak{m}_x M \rightarrow \langle n \rangle \otimes_A M$ . En conclusión, como  $M/\mathfrak{m}_x M \neq 0$ , entonces  $\langle n \rangle \otimes_A M \neq 0$  y  $N \otimes_A M$ , que contiene a  $\langle n \rangle \otimes_A M$ , es distinto de cero.  $\square$

**50. Definición:** Diremos que un morfismo de anillos  $f: A \rightarrow B$  es plano si  $B$  es un  $A$ -módulo plano. Diremos que un morfismo de anillos  $f: A \rightarrow B$  es fielmente plano si  $B$  es un  $A$ -módulo fielmente plano.

**51. Proposición:** *Un morfismo  $f: A \rightarrow B$  de anillos es fielmente plano si y sólo si es plano y el morfismo inducido en los espectros es epiyectivo.*

*Demostración.* Por la fórmula de la fibra, el morfismo  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es epiyectivo si y sólo si  $B_x/\mathfrak{p}_x B_x \neq 0$  para todo  $x \in \text{Spec } A$ . Así pues, por la proposición anterior, si  $f: A \rightarrow B$  es plano y el morfismo inducido en los espectros es epiyectivo, entonces  $f$  es fielmente plano.

Recíprocamente, la fielplitud es una propiedad local. De nuevo por la proposición anterior y la fórmula de la fibra probaremos que las fibras de un morfismo fielmente plano son no vacías, luego el morfismo inducido en los espectros por un morfismo fielmente plano es epiyectivo.  $\square$

**52. Definición:** Se dice que un  $A$ -módulo  $P$  es proyectivo, si para todo epimorfismo  $\pi: M \rightarrow M''$  entonces  $\pi_*: \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, M'')$  es un epimorfismo. Es decir (por el teorema 0.5.30),  $P$  es proyectivo si el funtor  $\text{Hom}_A(P, -)$  conserva sucesiones exactas (es decir, “ $\text{Hom}_A(P, -)$  es un funtor exacto”).

Como  $\text{Hom}_A(A^{(I)}, M) = \prod_I M$  es fácil demostrar que los  $A$ -módulos libres son proyectivos.

**53. Proposición:** *Un  $A$ -módulo es proyectivo si y sólo si es sumando directo de un libre.*

*Demostración.* Supongamos que  $P$  es un  $A$ -módulo proyectivo. Consideremos un epimorfismo  $\pi: A^{(I)} \rightarrow P$ . Si consideramos el morfismo  $\text{Id}: P \rightarrow P$  sabemos que levanta a un morfismo  $s: P \rightarrow A^{(I)}$ , tal que  $s \circ \pi = \text{Id}$ , por ser  $P$  proyectivo. Por el ejercicio 0.5.5,  $A^{(I)} = \text{Ker } \pi \oplus P$ .

Recíprocamente, sea  $M$  es un sumando directo de un libre, es decir,  $A^{(I)} = M \oplus M'$ .  $A^{(I)}$  es un módulo proyectivo, por tanto  $M \oplus M'$  es proyectivo. Ahora bien, como  $\text{Hom}_A(M \oplus M', -) = \text{Hom}_A(M, -) \times \text{Hom}_A(M', -)$  es fácil probar que una suma directa de módulos es un módulo proyectivo si y sólo si lo es cada sumando. En conclusión,  $M$  es proyectivo.  $\square$

**54. Proposición:** *Los módulos proyectivos son planos.*

*Demostración.* Los módulos proyectivos son sumandos directos de un libre, que es plano, luego los módulos proyectivos son planos.  $\square$

**55. Definición:** Un  $A$ -módulo  $M$  se dice que es de presentación finita si existe una sucesión exacta de la forma  $A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$ .

Si  $A$  es un anillo noetheriano (más adelante estudiados) un  $A$ -módulo es de presentación finita si y sólo si es finito generado.

**56. Ejercicio:** Los módulos proyectivos finito generados son de presentación finita.

**57. Proposición:** Sea  $M$  un  $A$ -módulo de presentación finita y  $S \subset A$  un sistema multiplicativo. Entonces para todo  $A$ -módulo  $N$  se cumple que

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_S = \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$$

*Demostración.* Si un  $A$ -módulo  $L \simeq A^r$  es libre entonces  $\mathrm{Hom}_A(L, N)_S = (N^r)_S = (N_S)^r = \mathrm{Hom}_{A_S}(L_S, N_S)$ .

Por hipótesis tenemos una sucesión exacta  $A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$ . Tomando  $\mathrm{Hom}_A(-, N)$  obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(A^n, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(A^m, N)$$

Localizando por  $S$  tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, N)_S & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A^n, N)_S & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A^m, N)_S \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_S}(A_S^n, N_S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_S}(A_S^m, N_S) \end{array}$$

Ahora bien, tomando  $\mathrm{Hom}_{A_S}(-, N_S)$  en la sucesión exacta  $A_S^m \rightarrow A_S^n \rightarrow M_S \rightarrow 0$ , concluimos que  $\mathrm{Ker} = \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$  y terminamos.  $\square$

**58. Teorema:** Un módulo  $P$  de presentación finita es proyectivo si y sólo si es localmente proyectivo. Es decir,  $P$  es un  $A$ -módulo proyectivo si y sólo si  $P_x$  es un  $A_x$ -módulo proyectivo, para todo punto cerrado  $x \in \mathrm{Spec} A$ .

*Demostración.* Denotemos la sucesión exacta  $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$  por  $N'$ . Digamos que un módulo  $P$  es proyectivo si y sólo si para toda sucesión exacta  $N'$  de  $A$ -módulos entonces la sucesión  $\mathrm{Hom}_A(P, N')$  es exacta. Con estas convenciones tenemos:  $P$  es proyectivo  $\iff$  para toda sucesión exacta  $N'$  de  $A$ -módulos  $\mathrm{Hom}_A(P, N')$  es exacta  $\iff$  para toda sucesión exacta  $N'$  de  $A$ -módulos  $\mathrm{Hom}_A(P, N')_x = \mathrm{Hom}_{A_x}(P_x, N'_x)$  es exacta para todo punto cerrado  $x \in \mathrm{Spec} A \iff P_x$  es un  $A_x$ -módulo proyectivo (pues toda sucesión exacta de  $A_x$ -módulos  $N''$  es localización de una sucesión exacta de  $A$ -módulos, explícitamente  $(N'')_x = N''$ ).  $\square$

**59. Teorema:** Sea  $M$  un módulo de presentación finita. Las condiciones de ser plano, localmente libre y proyectivo son equivalentes.

*Demostración.* Si  $M$  es plano, por 0.5.46, es localmente libre.

Si  $M$  es localmente libre entonces es localmente proyectivo. Como la propiedad de ser proyectivo es local será proyectivo.

Si  $M$  es proyectivo, por 0.5.54, es plano.  $\square$

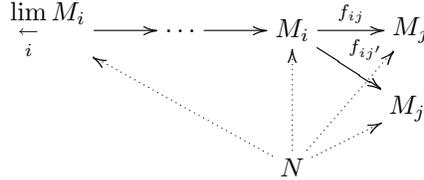


Si  $\lim_{\leftarrow i} M_i$  existe, entonces el morfismo  $\text{Id} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim_{\leftarrow i} M_i, \lim_{\leftarrow i} M_i)$  define morfismos  $\phi_i: \lim_{\leftarrow i} M_i \rightarrow M_i$ , de modo que

1.  $\phi_j = f_{ij}\phi_i$
2. Dados  $\{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i) \mid f_j = f_{ij}f_i \text{ para todo } i \leq j\}$ , entonces existe un morfismo  $f: N \rightarrow \lim_{\leftarrow i} M_i$ , de modo que  $f_i = \phi_i f$ .

Se tiene también el recíproco, si existe un objeto  $M$ , y morfismos  $\phi_i: M \rightarrow M_i$ , verificando estas dos condiciones, entonces  $M = \lim_{\leftarrow i} M_i$ .

Intuitivamente  $\lim_{\leftarrow i} M_i$  es “la fuente del río de flechas, la cota inferior máxima”



**63. Teorema:** En la categoría de conjuntos los límites proyectivos existen, explícitamente

$$\lim_{\leftarrow i} M_i = \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j \text{ para todo } i \leq j\}$$

y  $\phi_i: \lim_{\leftarrow i} M_i \rightarrow M_i, \phi_i((m_j)) = m_i$ .

*Demostración.* Denotemos  $M = \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j \text{ para todo } i \leq j\}$ . Dados  $\{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}(N, M_i) \mid f_j = f_{ij}f_i \text{ para todo } i \leq j\}$ , entonces la aplicación  $f: N \rightarrow M, f(n) = (f_i(n))$  está bien definida y cumple que  $f_i = \phi_i f$ .

Recíprocamente, dado  $f: N \rightarrow M$ , las aplicaciones  $f_i = \phi_i f$  cumplen que  $f_j = f_{ij}f_i$  para todo  $i \leq j$ .

Estas asignaciones son inversas entre sí, luego hemos concluido. □

**64. Teorema:** En la categoría de  $A$ -módulos los límites proyectivos existen, explícitamente

$$\lim_{\leftarrow i} M_i = \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j \text{ para todo } i \leq j\}$$

y  $\phi_i: \lim_{\leftarrow i} M_i \rightarrow M_i, \phi_i((m_j)) = m_i$ .

*Demostración.* Repítase la demostración anterior. □

Dado un sistema proyectivo  $\{M_i, f_{ij}\}_{i \in I}$  de objetos de una categoría  $\mathcal{C}$  y un objeto  $N \in \mathcal{C}$ , entonces  $\{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i), f_{ij*}\}_{i \in I}$  forma un sistema proyectivo de conjuntos.

**65. Proposición:**  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \varprojlim_i M_i) = \varprojlim_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i)$

*Demostración.* Tenemos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \varprojlim_i M_i) &= \{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} f_i \text{ para todo } i \leq j\} \\ &= \varprojlim_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es por la definición de límite proyectivo, y la segunda igualdad por la construcción del límite proyectivo de conjuntos.  $\square$

**66. Definición:** Un morfismo  $f$  entre dos sistemas proyectivos de objetos  $\{M_i, f_{ij}\}$  y  $\{N_i, g_{ij}\}$ , con el mismo conjunto ordenado de índices, es una familia de morfismos  $f_i: M_i \rightarrow N_i$  tales que  $f_j f_{ij} = g_{ij} f_i$ , cuando  $i \leq j$ .

Todo morfismo  $f$  entre dos sistemas proyectivos induce morfismos  $\varprojlim_i M_i \rightarrow \varprojlim_i N_i$ , que induce un morfismo  $\widehat{f}: \varprojlim_i M_i \rightarrow \varprojlim_i N_i$ , que explícitamente, en la categoría de conjuntos o de módulos, está definido por  $\widehat{f}((m_i)) = (f_i(m_i))$ .

**67. Definición:** Diremos que una sucesión de morfismos de sistemas proyectivos de módulos  $\{M'_i\} \rightarrow \{M_i\} \rightarrow \{M''_i\}$  es exacta, si lo es la sucesión  $M'_i \rightarrow M_i \rightarrow M''_i$ , para todo  $i$ .

**68. Proposición:** *La toma de límites proyectivos es exacta por la izquierda. Es decir, si  $0 \rightarrow \{M'_i\} \rightarrow \{M_i\} \rightarrow \{M''_i\}$  son sucesiones exactas de sistemas proyectivos de  $A$ -módulos, entonces la sucesión de  $A$ -módulos*

$$0 \rightarrow \varprojlim_i M'_i \rightarrow \varprojlim_i M_i \rightarrow \varprojlim_i M''_i$$

*es exacta*

*Demostración.* Es una sencilla comprobación, conocida la construcción explícita de los límites proyectivos de módulos.  $\square$

**69. Ejercicio:** Sea  $\{k[x]/(x^n)\}$  el sistema proyectivo de  $k[x]$ -módulos, de morfismos  $k[x]/(x^{n+1}) \rightarrow k[x]/(x^n)$  los morfismos naturales de paso al cociente. Probar que  $\varprojlim_i k[x]/(x^n) = k[[x]]$ .

Pasemos ahora a la definición del límite inductivo, que es el concepto dual de límite proyectivo.

Sea  $I$  un conjunto ordenado, diremos que es filtrante creciente si para cada par  $i, j \in I$  existe algún  $k \in I$  que cumple que  $k \geq i$  y  $k \geq j$ .

**70. Definición:** Sea  $I$  un conjunto filtrante creciente. Un conjunto de objetos  $\{M_i\}_{i \in I}$  de una categoría  $\mathcal{C}$ , junto con morfismos  $f_{ij}: M_i \rightarrow M_j$ , para cada  $i \leq j$ , diremos que es un sistema inductivo de objetos de  $\mathcal{C}$  si satisface las siguientes condiciones

1.  $f_{ii} = \text{Id}$ , para todo  $i$ .
2.  $f_{jk} f_{ij} = f_{ik}$  siempre que  $i \leq j \leq k$ .

**71. Definición:** Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  un sistema inductivo de objetos. Diremos que  $M$  (si existe) es el límite inductivo de este sistema inductivo, y lo denotaremos  $\varinjlim M_i$ , si cumple una igualdad funtorial

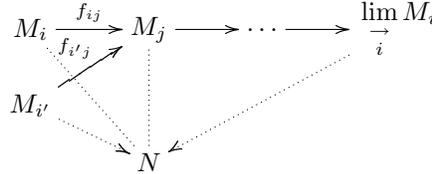
$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim M_i, N) = \{(f_i) \in \bigoplus_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N) \mid f_i = f_j f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\}$$

Si  $\varinjlim M_i$  existe, entonces el morfismo  $\text{Id} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim M_i, \varinjlim M_i)$  define morfismos  $\phi_i: M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ , de modo que

1.  $\phi_i = \phi_j f_{ij}$
2. Dados  $\{(f_i) \in \bigoplus_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N) \mid f_i = f_j f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\}$ , entonces existe un morfismo  $f: \varinjlim M_i \rightarrow N$ , de modo que  $f_i = f \phi_i$ .

Se tiene también el recíproco, si existe un objeto  $M$ , y morfismos  $\phi_i: M_i \rightarrow M$ , verificando estas dos condiciones, entonces  $M = \varinjlim M_i$ .

Intuitivamente  $\varinjlim M_i$  es “la desembocadura del río de flechas, la cota superior mínima”



**72. Teorema:** En la categoría de conjuntos los límites inductivos existen, explícitamente

$$\varinjlim M_i = \{\coprod_i M_i / \sim: m_i \sim m_j \text{ si existe un } k \text{ de modo que } f_{ik}(m_i) = f_{jk}(m_j)\}$$

y  $\phi_j: M_j \rightarrow \varinjlim M_i$ ,  $\phi_j(m_j) = \bar{m}_j$ .

*Demostración.* Denotemos  $M = \coprod_i M_i / \sim$ . Dados  $\{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}(M_i, N) \mid f_i = f_j f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\}$ , entonces la aplicación  $f: M \rightarrow N$ ,  $f(\bar{m}_i) = f_i(m_i)$  está bien definida y cumple que  $f_i = f \phi_i$ .

Recíprocamente, dado  $f: M \rightarrow N$ , las aplicaciones  $f_i = f \phi_i$  cumplen que  $f_i = f_j f_{ij}$  para todo  $i \leq j$ .

Estas asignaciones son inversas entre sí, luego hemos concluido.  $\square$

**73. Teorema:** En la categoría de  $A$ -módulos los límites inductivos existen, explícitamente

$$\varinjlim M_i = \{\coprod_i M_i / \sim: m_i \sim m_j \text{ si existe un } k \text{ de modo que } f_{ik}(m_i) = f_{jk}(m_j)\}$$

y  $\phi_j: M_j \rightarrow \varinjlim M_i$ ,  $\phi_j(m_j) = \bar{m}_j$ .

*Demostración.* Repítase la demostración anterior y pruébese que los conjuntos definidos son  $A$ -módulos y los morfismos de  $A$ -módulos.  $\square$

Dado un sistema inductivo  $\{M_i, f_{ij}\}_{i \in I}$  de objetos de una categoría  $\mathcal{C}$  y un objeto  $N \in \mathcal{C}$ , entonces  $\{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N), f_{ij}^*\}_{i \in I}$  forma un sistema proyectivo de conjuntos.

**74. Proposición :**  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim M_i, N) = \varprojlim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M_i)$

*Demostración.* Tenemos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim M_i, N) &= \{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N) \mid f_i = f_j f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\} \\ &= \varprojlim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es por la definición de límite inductivo, y la segunda igualdad por la construcción del límite proyectivo de conjuntos.  $\square$

**75. Definición :** Un morfismo  $f$  entre dos sistemas inductivos de objetos  $\{M_i, f_{ij}\}$  y  $\{N_i, g_{ij}\}$ , con el mismo conjunto ordenado de índices, es una familia de morfismos  $f_i: M_i \rightarrow N_i$  tales que  $f_j f_{ij} = g_{ij} f_i$ , cuando  $i \leq j$ .

Todo morfismo  $f$  entre dos sistemas inductivos induce morfismos  $M_i \rightarrow \varinjlim N_i$ , que induce un morfismo  $f: \varinjlim M_i \rightarrow \varinjlim N_i$ , que explícitamente, en la categoría de conjuntos o de módulos, está definido por  $f(\bar{m}_i) = \overline{f_i(m_i)}$ .

**76. Definición :** Diremos que una sucesión de morfismos de sistemas inductivos de módulos  $\{M'_i\} \rightarrow \{M_i\} \rightarrow \{M''_i\}$  es exacta, si lo es la sucesión  $M'_i \rightarrow M_i \rightarrow M''_i$ , para todo  $i$ .

**77. Proposición :** *La toma de límites inductivos es exacta. Es decir, si  $0 \rightarrow \{M'_i\} \xrightarrow{f_i} \{M_i\} \xrightarrow{g_i} \{M''_i\} \rightarrow 0$  son sucesiones exactas de sistemas inductivos de  $A$ -módulos, entonces la sucesión de  $A$ -módulos*

$$0 \rightarrow \varinjlim M'_i \xrightarrow{f} \varinjlim M_i \xrightarrow{g} \varinjlim M''_i \rightarrow 0$$

*es exacta*

*Demostración.* 1.  $(gf)(\bar{m}'_i) = g(\overline{f_i(m'_i)}) = \overline{g_i(f_i(m'_i))} = 0$ .

2. Si  $g(\bar{m}_i) = 0$  entonces  $\overline{g_i(m_i)} = 0$ . Por tanto, existe un  $k$ , de modo que  $0 = f'_{ik}(g_i(m_i)) = g_k(f_{ik}(m_i))$ . Luego,  $f_{ik}(m_i) = f_k(m'_k)$ , para cierto  $m'_k \in M'_k$ . Por tanto,  $\bar{m}_i = \overline{f_k(m'_k)} = f(\bar{m}'_k)$ .

3. Obviamente  $g$  es epiyectiva: Dado  $\bar{m}''_i \in \varinjlim M''_i$ , entonces existe  $m_i$  tal que  $g_i(m_i) = m''_i$  y  $g(\bar{m}_i) = \bar{m}''_i$ .

4. Por último,  $f$  es inyectiva: si  $0 = f(\bar{m}'_i) = \overline{f_i(m'_i)}$  entonces existe un  $k$ , tal que  $f_{ik}(f_i(m'_i)) = 0$ . Por tanto,  $f_i(f'_{ik}(m'_i)) = 0$  y  $f'_{ik}(m'_i) = 0$ , porque  $f_i$  es inyectiva. Luego  $\bar{m}'_i = 0$ .  $\square$

**78. Proposición:** *El límite inductivo conmuta con el producto tensorial. Es decir,*

$$\left(\lim_{\rightarrow i} M_i\right) \otimes_A N = \lim_{\rightarrow i} (M_i \otimes_A N)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A\left(\left(\lim_{\rightarrow i} M_i\right) \otimes_A N, R\right) &= \text{Hom}_A\left(\lim_{\rightarrow i} M_i, \text{Hom}_A(N, R)\right) = \lim_{\leftarrow i} \text{Hom}_A(M_i, \text{Hom}_A(N, R)) \\ &= \lim_{\leftarrow i} \text{Hom}_A(M_i \otimes_A N, R) = \text{Hom}_A\left(\lim_{\rightarrow i} (M_i \otimes_A N), R\right) \end{aligned}$$

□

## 0.6 Problemas

1. Demostrar que  $\mathbb{C}[x, y]/(x) \simeq \mathbb{C}[y]$ . Probar que  $\mathbb{C}[x, y, z]/(y - x^2, y^3 + z^3) \simeq \mathbb{C}[x, z]/(x^6 + z^3)$ .
2. Sea  $A$  un anillo y  $S \subset A$  un sistema multiplicativo de  $A$ . Los elementos de  $S$  son invertibles en  $A$  si y sólo si el morfismo de localización  $A \rightarrow A_S$  es un isomorfismo.
3. Sea  $f: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos y  $S \subset A$  un sistema multiplicativo. Si  $f(S)$  son elementos invertibles de  $B$  entonces existe un único morfismo  $f_S: A_S \rightarrow B$  tal que  $f$  sea la composición de los morfismos  $A \rightarrow A_S \xrightarrow{f_S} B$ .
4. Probar que  $(A_S)_{S'} = A_{S \cdot S'}$ , donde  $S \cdot S' \stackrel{\text{textdef}}{=} \{s \cdot s' \mid s \in S, s' \in S'\}$ .
5. Probar que  $k[x, y]/(xy - 1) \simeq k[x]_{1, x, x^2, \dots}$ .
6. Probar que  $\mathbb{C}[x]_{\mathbb{R}[x]_{-0}} \simeq \mathbb{C}(x)$ .
7. Probar que el morfismo de localización  $i: A \rightarrow A_S$  es un isomorfismo si y sólo si  $i^*: \text{Spec } A_S \rightarrow \text{Spec } A$  es un homeomorfismo. Pruébese que si  $\text{Spec } A_S = \text{Spec } A_{S'}$  (en  $\text{Spec } A$ ) entonces  $A_S = A_{S'}$ .
8. Calcular  $\text{Spec } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3))_x$ .
9. Calcular  $\text{Spec } \mathbb{Z}[x]$ ,  $\text{Spec } \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ .
10. Calcular  $\text{Spec } \mathbb{R}[x, y]$ .
11. Si  $\text{Spec } A$  es la unión disjunta de dos abiertos  $U_1, U_2$  probar que  $U_1 = \text{Spec } A_{U_1}$ .
12. Sean  $I, I' \subseteq A$  dos ideales. Probar que  $(I)_0 = (I')_0$  si y sólo si  $r(I) = r(I')$ , donde denotamos  $r(I) = \{a \in A: a^n \in I \text{ para cierto } n \in \mathbb{N}\}$ .
13. Probar que los elementos de los ideales primos minimales de un anillo son divisores de cero (Pista: localícese en los ideales primos minimales).
14. Probar que si  $f: A \hookrightarrow B$  es un morfismo de anillos inyectivo, entonces  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es una aplicación continua densa.

15. Probar que la intersección de dos rectas paralelas  $(ax + by + c)_0$ ,  $(ax + by + c')_0$  ( $c \neq c'$ ) es vacía.
16. Dado  $i: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$ , calcular el morfismo  $i^*: \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x]$ , calcular las fibras de  $i^*$ .
17. Calcular el morfismo  $f: \mathbb{C}[x, y]/(x - 1) \rightarrow \mathbb{C}[x, y]/(y - x^3)$  que en espectros aplica cada punto (cerrado)  $(\alpha, \beta)$  de la cúbica  $y = x^3$  en el punto de la recta  $x = 1$  que se obtiene como corte de la recta que pasa por el origen y  $(\alpha, \beta)$ , con la recta  $x = 1$ .
18. Sea  $I \subseteq A$  un ideal y  $M$  un  $A$ -módulo probar que  $IM \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M : m = \sum a_i m_i, \text{ con } a_i \in I \text{ y } m_i \in M\}$  es un  $A$ -módulo.  
Si  $M'$  es otro  $A$ -módulo probar que  $I(M \oplus M') = IM \oplus IM'$ . Si  $M$  y  $M'$  son submódulos de un módulo probar que  $I(M + M') = IM + IM'$ .
19. Sean  $N \subseteq M$  y  $N' \subseteq M'$  submódulos. Probar que  $N \oplus N'$  es un submódulo de modo natural de  $M \oplus M'$ , de modo que  $(M \oplus M')/(N \oplus N') = M/N \oplus M'/N'$ .
20. Si  $N, N'$  son submódulos de un módulo  $M$  probar que

$$(N + N')/N' = N/(N \cap N')$$

Si denotamos por  $\bar{N} = \{\bar{n} \in M/N' : n \in N\}$ , probar que

$$(M/N')/\bar{N} = M/(N + N')$$

21. Sea  $f: M \rightarrow M'$  un morfismo de  $A$ -módulos. Sean  $N_1, N_2$  dos submódulos de  $M$  probar que  $f(N_1 + N_2) = f(N_1) + f(N_2)$  (denotamos por  $f(N) = \{f(n) \in M', \text{ con } n \in N\}$ ). Sea  $I$  un ideal, probar que  $f(I \cdot N_1) = I \cdot f(N_1)$ .
22. Sea  $f: M \rightarrow M'$  un morfismo de  $A$ -módulos y  $m' = f(m)$ . Probar que  $f^{-1}(m') = m + \text{Ker } f \stackrel{\text{def}}{=} \{m + n \text{ con } n \in \text{Ker } f\}$ . Sea  $N$  un submódulo de  $M$ , probar que  $f^{-1}(f(N)) = N + \text{Ker } f$ .
23. Probar la igualdad  $\text{Hom}_A(A/I, M) = \{m \in M : Im = 0\}$ . Probar que  $\text{Hom}_A(A^n, M) = M \oplus \dots \oplus M$ .
24. Calcular los siguientes  $\mathbb{Z}$ -módulos:  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q})$  y  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ .
25. Probar que si un endomorfismo  $f: M \rightarrow M$ , cumple que  $f^2 = f$  entonces  $M = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$ .
26. Probar que el anulador del  $A$ -módulo  $A/I$  es  $I$ .
27. Probar que si  $M$  es un  $A$ -módulo libre entonces  $\text{Anul}(M) = 0$ .
28. Sea el  $\mathbb{Z}$ -módulo  $M = \bigoplus_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Probar que  $\text{Anul } M = (0)$  ¿Existe algún  $m \in M$  de modo que  $\text{Anul}(\langle m \rangle) = 0$ ?
29. Probar que si  $M \simeq M_1 \oplus \dots \oplus M_n$  entonces  $\text{Anul}(M) = \bigcap_i \text{Anul}(M_i)$ . Calcular el ideal anulador del  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ .

30. Sea  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$  una sucesión exacta de  $A$ -módulos. Demostrar que  $\text{Anul}(M_2) \supseteq \text{Anul}(M_1) \cdot \text{Anul}(M_3)$ .
31. ¿Es  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  un  $\mathbb{Z}$ -módulo libre? ¿Es un  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -módulo libre? Definir un sistema generador de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}$ -módulo.
32. Sea  $M = \{\frac{a}{2^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ . Probar que  $M$  es un  $\mathbb{Z}$ -submódulo de  $\mathbb{Q}$  y que no es finito generado.
33. Probar que todo cociente de un módulo finito generado es finito generado. Probar que la suma de dos submódulos finito generados es finito generado.
34. Sea  $C(\mathbb{R})$  el anillo de todas las funciones reales continuas de variable real. Demostrar que el conjunto de las funciones reales continuas de variable real que se anulan en algún entorno del cero forman un ideal de  $C(\mathbb{R})$ , que no es finito generado.
35. Probar que todo  $\mathbb{Z}$ -submódulo finito generado de  $\mathbb{Q}$  no nulo, es libre generado por un elemento. Probar que  $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Z}$ .
36. Hallar una base (si existe) de  $\mathbb{Z}[x]$  como  $\mathbb{Z}$ -módulo.
37. Probar que todo epimorfismo de un módulo en un libre tiene sección.
38. Sea  $i: N \hookrightarrow M$  un morfismo inyectivo de  $A$ -módulos. Si  $r: M \rightarrow N$  es un retracts de  $i$ , es decir,  $r \circ i = \text{Id}$ , probar que  $M \simeq N \oplus \text{Ker } r$  (defínase  $N \oplus \text{Ker } r \rightarrow M$ ,  $(n, n') \mapsto i(n) + n'$ ).  
Sea  $\pi: M \rightarrow M'$  un epimorfismo de módulos, de modo que exista una sección  $s$  de  $\pi$ , es decir,  $\pi \circ s = \text{Id}$ . Probar que  $M \simeq \text{Ker } \pi \oplus M'$ .
39. Sea  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$  una sucesión exacta de  $A$  módulos. Se dice que la sucesión exacta rompe o está escindida si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \text{Id} & & \phi & & \text{Id} & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M' \oplus M'' & \xrightarrow{\pi} & M'' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde  $\phi$  es un isomorfismo,  $i(m') = (m', 0)$  y  $\pi(m', m'') = m''$ .

Probar que si  $r: M \rightarrow M'$  es un retracts de  $f$ , i.e.,  $r \circ f = \text{Id}$  entonces la sucesión exacta rompe. Probar que si  $s: M'' \rightarrow M$  es una sección de  $g$ , i.e.,  $g \circ s = \text{Id}$ , entonces la sucesión exacta rompe.

40. Probar que  $(\text{Anul}_A(M))_S = \text{Anul}_{A_S}(M_S)$ .
41. Sea  $f: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Sea  $S \subset A$  un sistema multiplicativo. Sabemos que  $B$  es de modo natural un  $A$ -módulo, por tanto, podemos definir  $B_S$ . Por otra parte,  $f(S) \subset B$  es un sistema multiplicativo. Demostrar que  $B_S = B_{f(S)}$ .
42. Sea  $I \subseteq A$  un ideal y  $\mathfrak{p}_x \subset A$  un ideal primo. Probar que  $I_x = A_x$  si y sólo si  $x \notin (I)_0$ .
43. Probar que  $(I \cdot M)_S = I_S \cdot M_S = I \cdot M_S$ .

44. Sea  $A$  un anillo íntegro, e  $I \neq 0$  un ideal. Probar que  $I$  es libre si y sólo si  $I = aA$  ( $a \neq 0$ ).
45. Sea  $M$  un  $A$ -módulo finito generado y  $S \subset A$  un sistema multiplicativo de  $A$ . Probar que si  $M_S = 0$  entonces existe un  $s \in S$  tal que  $s \cdot m = 0$  para todo  $m \in M$ .
46. Sea  $I \subseteq A$  un ideal y  $M$  un  $A$ -módulo finito generado. Probar que  $IM = M \iff M_{1+I} = 0$ .
47. Probar que si un endomorfismo  $T: M \rightarrow M$  de un  $A$ -módulo finito generado es epiyectivo entonces es un isomorfismo.
48. Demostrar que  $\mathbb{Z}^n$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo isomorfo a  $\mathbb{Z}^m$  si y sólo si  $n = m$ .
49. Demostrar que  $A^n$  es un  $A$ -módulo isomorfo a  $A^m$  si y sólo si  $n = m$ .
50. Sea  $M$  un  $A$ -módulo finito generado. Probar que si  $M \simeq M \oplus N$  entonces  $N = 0$  ¿Es siempre cierto este resultado si  $M$  no es finito generado?
51. Sea  $m_1, \dots, m_s$  un sistema generador de un  $A$ -módulo libre  $A^n$ . Probar que  $s \geq n$ .
52. Probar que todo sistema de  $n$  generadores de un módulo libre  $A^n$  es base.
53. Sean  $M$  y  $M'$  dos  $A$ -módulos de tipo finito. Sea  $f: M \rightarrow M'$  un morfismo de  $A$ -módulos. Probar que si los morfismos  $\bar{f}_x: M/\mathfrak{m}_x M \rightarrow M'/\mathfrak{m}_x M'$ ,  $\bar{m} \mapsto \overline{f(m)}$  son epiyectivos, para todo punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$ , entonces el morfismo  $f$  es epiyectivo.
54. Demostrar que si existe un morfismo  $A^m \hookrightarrow A^n$  inyectivo de  $A$ -módulos entonces  $m \leq n$ .
55. Demostrar que la longitud del  $k[x]$ -módulo  $k[x]/(x^n)$  es  $n$ .
56. Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Sea  $\Delta$  el núcleo del morfismo  $B \otimes_A B \rightarrow B$ ,  $b \otimes b' \mapsto bb'$ . Probar que  $\Delta$  es un ideal de  $B \otimes_A B$  y que  $\Delta = \langle b \otimes 1 - 1 \otimes b \rangle_{b \in B}$ .  
Si  $M$  y  $M'$  son  $B$ -módulos, probar que
- $$M \otimes_B M' \simeq (M \otimes_A M')/\Delta \cdot (M \otimes_A M')$$
57. Probar que  $\mathbb{R}[x]/(p(x)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[x]/(p(x))$ .
58. Probar que  $(A[x_1, \dots, x_n]/I) \otimes_A B = B[x_1, \dots, x_n]/I \cdot B[x_1, \dots, x_n]$ .
59. Probar que  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  como  $\mathbb{C}$ -álgebra.
60. Probar que  $\text{Hom}_{k\text{-álg.}}(A, k)$  es igual al conjunto de ideales primos maximales de  $A$ , de conúcleo  $k$ .
61. Sea  $A$  íntegro y  $M$  un  $A$ -módulo finito generado. Probar que existe un abierto  $U \subseteq \text{Spec } A$  no vacío tal que  $M_U$  es un  $A_U$ -módulo libre.
62. Sea  $A$  un anillo íntegro y  $M$  un  $A$ -módulo plano. Probar que  $T(M) = 0$ .
63. Probar que si  $M$  y  $N$  son  $A$ -módulos planos, también lo es  $M \otimes_A N$ . Probar que si  $B$  es una  $A$ -álgebra plana y  $M$  es un  $B$ -módulo plano, entonces  $M$  es un  $A$ -módulo plano.
64. Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo de anillos fielmente plano. Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Probar que si  $M \otimes_A B$  es un  $B$ -módulo finito generado, entonces  $M$  es un  $A$ -módulo finito generado.

65. Probar que  $k[x, y]/(x)$  no es un  $k[x, y]$ -módulo plano. Sea  $k[x] \rightarrow k[x, y]/(y^2 - x)$  el morfismo natural, probar que  $k[x, y]/(y^2 - x)$  es una  $k[x]$ -álgebra plana.
66. Sea  $A$  un dominio de ideales principales y  $M$  un  $A$ -módulo sin torsión. Probar que  $M$  es unión de módulos libres finito generados.
67. Si  $I$  es un conjunto filtrante creciente e  $i \in I$  es máximo, probar que  $\varinjlim_{j \in I} M_j = M_i$ .
68. Demostrar que todo módulo es el límite inductivo de sus submódulos finito generados.
69. Probar que todo anillo es límite inductivo de  $\mathbb{Z}$ -álgebras de tipo finito. Probar que todo anillo es límite inductivo de subanillos noetherianos.
70. Sea  $M$  un  $A$ -módulo de presentación finita. Probar  $\text{Hom}_A(M, \varinjlim_n N_n) = \varinjlim_n \text{Hom}_A(M, N_n)$ .
71. Sea  $M$  un  $A$ -módulo y  $a \in A$ . Probar que  $\varinjlim_n \text{Hom}_A((a^n), M) = M_a$ .
72. Demostrar que el límite inductivo de módulos planos es plano.
73. Sea  $x \in \text{Spec } A$  y  $M$  un  $A$ -módulo. Demostrar que  $M_x = \varinjlim_{\{x \in U_a\}} M_a$ .
74. Sea  $x$  un punto de un espacio topológico  $X$ . Sea  $I$  el conjunto de entornos abiertos de  $x$ , ordenados del siguiente modo:  $U \leq V$  si  $U \subseteq V$ . Sea  $C(U)$  las funciones reales continuas sobre  $U$ , tenemos un sistema inductivo de anillos  $\{C(U)\}$ , donde los morfismos  $C(U) \rightarrow C(V)$  son los de restricción. Probar que  $\varinjlim_{x \in U} C(U)$  es el anillo de gérmenes de funciones continuas en  $x$ .
- Supongamos ahora que  $X$  es un espacio normal. Sea  $\tilde{C}(U) = C(X)_{S_U}$ , donde  $S_U$  es el sistema multiplicativo de las funciones que no se anulan en ningún punto de  $U$ . Si  $U \subseteq V$  consideremos el morfismo natural  $\tilde{C}(V) \rightarrow \tilde{C}(U)$ ,  $\frac{f}{s} \mapsto \frac{f}{s}$ . Probar que  $\varinjlim_{x \in U} \tilde{C}(U)$  es el anillo de gérmenes de funciones continuas en  $x$ .
75. Sea  $N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \cdots$  una sucesión decreciente de  $A$ -submódulos de  $N_0$ . Probar que  $\varprojlim_n N_n = \bigcap_n N_n$ .
76. Sea  $I$  un conjunto filtrante decreciente y  $J \subseteq I$  un subconjunto con la propiedad de que dado  $i \in I$  existe  $j \in J$  tal que  $j \leq i$ . Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  un sistema proyectivo de objetos. Probar que  $\varprojlim_{i \in I} M_i = \varprojlim_{j \in J} M_j$ .
77. Probar que  $\varprojlim_{i \in I} (M_i \times N_i) = (\varprojlim_{i \in I} M_i) \times (\varprojlim_{i \in I} N_i)$ , en la categoría de  $A$ -módulos, por ejemplo.



# Capítulo 1

## Variedades algebraicas

### 1.1 Módulos noetherianos

En Geometría Algebraica los espacios estudiados son objetos definidos por un número finito de ecuaciones (la finitud es una condición natural). Es decir, los ideales que se consideran son los generados por un número finito de funciones. Los anillos cuyos ideales son finitos generados se denominan noetherianos. Como veremos los anillos que usualmente aparecen en Geometría Algebraica y la Aritmética son noetherianos, de forma que estos anillos proporcionan el marco natural para desarrollar su estudio.

Será natural comenzar estudiando los módulos finitos generados, cuyos submódulos sean finitos generados, en vez de limitarnos simplemente a los anillos cuyos ideales son finitos generados. Las operaciones básicas como producto tensorial, cocientes etc., se realizan de un modo mucho más flexible y claro con los módulos, y muchos de los objetos usuales en Matemáticas tienen estructura de módulo.

**1. Definición:** <sup>1</sup> Un  $A$ -módulo  $M$  se dice que es un  $A$ -módulo noetheriano si todo submódulo suyo (propio o no) es finito generado.

**2. Definición:** <sup>2</sup> Un  $A$ -módulo  $M$  se dice que es noetheriano si toda cadena ascendente de submódulos de  $M$

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots M_n \subseteq \cdots$$

estabiliza, es decir existe  $m \gg 0$  de modo que  $M_m = M_{m+1} = \cdots$ .

**3. Proposición:** *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

*Demostración.* **def<sup>1</sup>  $\Rightarrow$  def<sup>2</sup>:** Sea una cadena ascendente de submódulos de  $M$ ,  $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$ .

Sea  $M' = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subseteq M$ . Como  $M'$  es un submódulo de  $M$ , es finito generado. Escribamos  $M' = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ , con  $m_j \in M_{i_j}$ . Sea  $m$  el máximo de todos los  $i_j$ . Entonces trivialmente se obtiene que  $M' = M_m$ , luego  $M_m = M_{m+1} = \cdots$ .

**def<sup>2</sup>  $\Rightarrow$  def<sup>1</sup>:** Sea  $M' \subseteq M$ . Sea  $m_1 \in M'$  y consideremos el submódulo de  $M$ ,  $M_1 = \langle m_1 \rangle$ . Si  $M_1 \neq M'$ , sea  $m_2 \in M' - M_1$ . Consideremos el submódulo de  $M$ ,  $M_2 = \langle m_1, m_2 \rangle$ . Repitiendo el proceso, obtenemos una cadena de inclusiones estrictas

$$\langle m_1 \rangle \subset \langle m_1, m_2 \rangle \subset \cdots$$

que ha de ser finita, porque por la segunda definición toda cadena estabiliza. Por tanto, existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\langle m_1, \dots, m_m \rangle = M'$ .

□

**4. Ejemplo :** Los  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita son  $k$ -módulos noetherianos.

**5. Proposición :** *Todo submódulo de un módulo noetheriano es noetheriano.*

**6. Proposición :** *Todo cociente de un módulo noetheriano es noetheriano.*

*Demostración.* Sea  $M$  noetheriano y  $\pi: M \rightarrow M/N$  un cociente. Dado un submódulo  $\bar{M} \subset M/N$ , tenemos que  $\pi^{-1}\bar{M} = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ . Por tanto,  $\bar{M} = \langle \pi(m_1), \dots, \pi(m_r) \rangle$ . □

**7. Proposición :** *Sea*

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \rightarrow 0$$

*una sucesión exacta de  $A$ -módulos. Se verifica que  $M_2$  es noetheriano  $\Leftrightarrow M_1$  y  $M_3$  son noetherianos.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Esto es lo que afirman las dos proposiciones anteriores.

$\Leftarrow$ ) Sea  $M' \subseteq M_2$ . El diagrama siguiente es conmutativo y las filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' \cap M_1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \pi(M') & \longrightarrow & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \cap & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\pi} & M_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tenemos que  $M' \cap M_1 = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$  y que  $\pi(M') = \langle \pi(n_1), \dots, \pi(n_s) \rangle$ . Por tanto, tenemos la igualdad  $M' = \langle m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s \rangle$ . □

**8. Ejercicio :** Probar que  $M$  y  $M'$  son noetherianos si y sólo si  $M \oplus M'$  es noetheriano.

## 1.2 Anillos noetherianos

**1. Definición :** Se dice que un anillo es noetheriano si como  $A$ -módulo es noetheriano, es decir si todo ideal es finito generado, o equivalentemente, si toda cadena ascendente de ideales estabiliza.

**2. Ejemplo :** Los cuerpos, los anillos de ideales principales, como  $\mathbb{Z}$ ,  $k[x]$ , son noetherianos.

Un ejemplo de anillo no noetheriano, es el anillo de funciones diferenciales en la recta real:

Sea  $I_n$  el ideal de las funciones que se anulan en  $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos que  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$  es una cadena ascendente estricta de ideales en el anillo, luego no estabiliza. Por tanto, el anillo no es noetheriano.

**3. Corolario :** *Si  $A$  es noetheriano entonces todo  $A$ -módulo finito generado es noetheriano.*

*Demostración.* Si  $A$  es noetheriano  $A^n$  es un  $A$ -módulo noetheriano, por el ejercicio que sigue a la proposición 1.1.7. Ahora bien, como todo módulo finito generado es cociente de un libre finito generado, concluimos que los módulos finitos son noetherianos. □

Por tanto, sobre los dominios de ideales principales todo módulo finito generado es noetheriano.

**4. Ejercicio :** Si  $A$  es noetheriano  $A_S$  es noetheriano

**5. Ejercicio :** Demostrar que  $\mathbb{Q}[x, x_1, \dots, x_n, \dots]/((x-n)x_n)_{\{n \in \mathbb{N}\}}$  es localmente noetheriano pero no es noetheriano.

**6. Proposición:** Si  $A$  es un anillo noetheriano, entonces  $\text{Spec } A$  es un espacio topológico noetheriano. (Un espacio topológico se dice que es noetheriano si toda cadena descendente de cerrados estabiliza).

*Demostración.* Sea  $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq \cdots$  una cadena descendente de cerrados. Sean  $I_i$  los ideales de funciones que se anulan en  $C_i$ . Luego  $(I_i)_0 = C_i$  y tenemos la cadena

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

Cadena que estabiliza por ser  $A$  noetheriano. Es decir, existe  $m \in \mathbb{N}$  de modo que  $I_m = I_{m+1} = \cdots$ . Luego,  $C_m = C_{m+1} = \cdots$ . □

**7. Ejercicio:** Demostrar

1. Todo espacio topológico noetheriano es compacto.
2. Todo abierto de un espacio topológico noetheriano es noetheriano.
3. Llamemos cerrado irreducible a todo cerrado que no es unión de dos cerrados propios. Todo espacio topológico noetheriano es unión de un número finito de cerrados irreducibles.

**8. Ejercicio:** Probar que en un anillo noetheriano el número de ideales primos minimales es finito.

## 1.3 Morfismos finitos

**1. Definición:** Un morfismo de anillos  $f: A \rightarrow B$  se dice que es finito si  $B$  es un  $A$ -módulo finito, con la estructura natural de  $A$ -módulo que define  $f$  en  $B$  ( $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} f(a) \cdot b$ ). En este caso, también se dice que  $B$  es una  $A$ -álgebra finita.

**2. Ejemplo:**  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$  es un morfismo finito.

**3. Proposición:** La composición de morfismos finitos es finito.

*Demostración.* Sean  $A \xrightarrow{\text{finito}} B \xrightarrow{\text{finito}} C$ . Es decir,  $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$  y  $C = Bc_1 + \cdots + Bc_m$ . Luego,

$$C = (Ab_1 + \cdots + Ab_n)c_1 + \cdots + (Ab_1 + \cdots + Ab_n)c_m = \sum_{i=1, j=1}^{n, m} Ab_i c_j$$

En conclusión,  $A \rightarrow C$  es un morfismo finito. □

**4. Proposición:** Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo finito y  $A \rightarrow C$  un morfismo de anillos. Se verifica que  $C = A \otimes_A C \rightarrow B \otimes_A C$  es un morfismo finito.

**5. Corolario:** Si  $A \rightarrow B$  es un morfismo finito entonces  $A_S \rightarrow B_S$  y  $A/I \rightarrow B/I \cdot B$  son morfismos finitos

**6. Definición:** Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Se dice que  $b \in B$  es entero sobre  $A$  si verifica una relación del tipo

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad \text{con } a_i \in A$$

**7. Proposición:** Sean  $f: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos y  $b \in B$ . Denotemos  $A[b] = \{p(b) \in B, \text{ para } p(x) \in A[x]\}$ . El morfismo  $A \rightarrow A[b]$  es finito  $\Leftrightarrow b$  es entero sobre  $A$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $b_1, \dots, b_n$  un sistema generador del  $A$ -módulo  $A[b]$ . Consideremos el endomorfismo de  $A$ -módulos

$$\begin{aligned} A[b] &\xrightarrow{\cdot b} A[b] \\ c &\longmapsto c \cdot b \end{aligned}$$

Sea  $(a_{ij})$  una matriz asociada  $\cdot b$  en el sistema generador  $b_1, \dots, b_n$ . Sea  $p_c(x) = |(a_{ij} - x \cdot \text{Id})| = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ , con  $a_i \in A$ . Se verifica que  $p_c(\cdot b) = 0$ , luego  $p_c(b) = p_c(\cdot b)(1) = 0$  y  $b$  es entero sobre  $A$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ , con  $a_i \in A$ , tal que  $p(b) = 0$ . El epimorfismo  $A[x]/(p(x)) \rightarrow A[b]$ ,  $q(x) \mapsto q(b)$  está bien definido. Por tanto, sólo tenemos que demostrar que  $A[x]/(p(x))$  es un  $A$ -módulo finito generado.

Veamos que  $\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1}$  es un sistema generador de  $A[x]/(p(x))$  (de hecho, es una base):

$$\begin{aligned} \bar{x}^n &= -(a_1 \bar{x}^{n-1} + \dots + a_n) \in \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1} \rangle \\ \bar{x}^{n+1} &= -(a_1 \bar{x}^n + \dots + a_n \bar{x}) \in \langle \bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^n \rangle \subseteq \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1} \rangle \\ &\dots \end{aligned}$$

□

**Observación:** Para la demostración de  $\Rightarrow$ ) sólo es necesario suponer que  $A[b]$  está incluido en una  $A$ -álgebra finita.

**8. Definición:** Dada una extensión de cuerpos  $k \rightarrow K$  y  $\alpha \in K$ , decimos que  $\alpha$  es algebraico sobre  $k$ , si es entero sobre  $k$ , que equivale a decir que  $\alpha$  es raíz de un polinomio con coeficientes en  $k$ .

**9. Ejemplo:** Si  $\alpha$  es una raíz  $n$ -ésima de la unidad, entonces  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$  es un morfismo finito.

**10. Ejemplo:** El morfismo  $\text{Spec } k[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3) \rightarrow \text{Spec } k[x]$  definido por  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha$  es un morfismo finito.

**11. Proposición:** Sea  $f: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. El conjunto de elementos de  $B$  enteros sobre  $A$  forman una  $A$ -subálgebra de  $B$ .

*Demostración.* Sean  $b_1, b_2 \in B$  enteros sobre  $A$ . Tenemos que  $A \rightarrow A[b_1]$  es un morfismo finito, y  $A[b_1] \rightarrow A[b_1, b_2]$  es un morfismo finito porque si  $b_2$  verifica una relación entera con coeficientes en  $A$ , en particular la verifica con coeficientes en  $A[b_1]$ . Por tanto, por la proposición 1.3.3  $A \rightarrow A[b_1, b_2]$  es un morfismo finito. Luego, por la observación anterior, todo elemento  $p(b_1, b_2) \in A[b_1, b_2] \in B$ , con  $p(x, y) \in A[x, y]$ , es entero sobre  $A$ . Hemos concluido.

□

**12. Lema:** Sea  $k$  un cuerpo. Las  $k$ -álgebras finitas íntegras son cuerpos.

*Demostración.* Sea  $A$  una  $k$ -álgebra finita íntegra. Dado  $a \in A$  no nula, la homotecia  $A \xrightarrow{\cdot a} A$ ,  $b \mapsto b \cdot a$  es inyectivo por la integridad de  $A$ . Por tanto, por dimensiones, es isomorfismo. Luego  $a$  es invertible y  $A$  es cuerpo.

□

**13. Lema:** Sea  $k$  un cuerpo. El espectro de una  $k$ -álgebra finita es un número finito de puntos cerrados.

*Demostración.* Las  $k$ -álgebras finitas son anillos noetherianos luego tienen un número finito de ideales primos minimales. Si hacemos cociente por un ideal primo minimal obtenemos una  $k$ -álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo por el lema anterior. Por tanto, los ideales primos minimales son maximales y hemos concluido.  $\square$

**14. Corolario :** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra finita y  $\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Spec } A$ . Se cumple que el morfismo natural

$$A \rightarrow A_{x_1} \times \cdots \times A_{x_n}$$

es un isomorfismo. Luego toda  $k$ -álgebra finita es un producto de un número finito de  $k$ -álgebras finitas locales.

*Demostración.* Para probar que un morfismo es isomorfismo basta verlo localmente.  $(A_{x_1} \times \cdots \times A_{x_n})_{x_i} = A_{x_i}$  porque  $(A_{x_j})_{x_i} = 0$  si  $i \neq j$  y  $(A_{x_i})_{x_i} = A_{x_i}$ . Se concluye inmediatamente.  $\square$

**15. Lema :** Si  $f: A \hookrightarrow B$  es un morfismo finito e inyectivo, entonces el morfismo inducido  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es epiyectivo.

*Demostración.* Dado  $x \in \text{Spec } A$ , el morfismo  $A_x \rightarrow B_x$  es finito e inyectivo. Por Nakayama,  $\mathfrak{p}_x B_x \neq B_x$ , luego  $\text{Spec } B_x / \mathfrak{p}_x B_x \neq \emptyset$ . Es decir, la fibra de  $x$  es no vacía, luego  $f^*$  es epiyectivo.  $\square$

**16. Definición :** Llamaremos dimensión de Krull de un anillo  $A$  al supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos de  $A$ , o equivalentemente al supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles de  $\text{Spec } A$ . Denotaremos a la dimensión (de Krull) de  $A$  por  $\dim A$ .

**17. Ejercicio :** Demostrar que la dimensión de Krull de  $\mathbb{C}[x, y]$  es dos.

**18. Teorema :** Si  $f: A \rightarrow B$  es un morfismo finito entonces el morfismo inducido  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es una aplicación cerrada de fibras de dimensión cero y finitas.

*Demostración.* Sea  $C = (J)_0$  un cerrado de  $\text{Spec } B$ . Debemos demostrar que  $f^*(C)$  es un cerrado de  $\text{Spec } A$ . Consideremos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/J \cap A & \longrightarrow & B/J \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } A & \xleftarrow{f^*} & \text{Spec } B \\ \uparrow & & \uparrow \\ (J \cap A)_0 = \text{Spec } A/J \cap A & \xleftarrow{f^*|_C} & \text{Spec } B/J = C \end{array}$$

Basta ver que  $f^*|_C$  es epiyectiva. Ahora bien, como  $A/J \cap A \hookrightarrow B/J$  es un morfismo finito inyectivo, por el lema anterior concluimos que  $f^*|_C$  es epiyectiva.

La fibra de un punto  $x \in \text{Spec } A$  es  $f^{*-1}(x) = \text{Spec } B_x / \mathfrak{p}_x B_x$ . Observemos que si  $f^{*-1}(x) \neq \emptyset$  entonces  $B_x / \mathfrak{p}_x B_x$  es una  $A_x / \mathfrak{p}_x$ -álgebra finita. Concluimos por el lema 1.3.13  $\square$

**19. Ejercicio :** Probar que la inclusión natural  $k[x] \hookrightarrow k[x, y]/(xy - 1)$  no es un morfismo finito.

**20. Teorema del ascenso :** Sea  $f: A \rightarrow B$  un morfismo finito. Sean  $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_{x'} \subset A$  y  $\mathfrak{p}_y \subset B$  ideales primos, de modo que  $f^{-1}(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x$ . Existe un ideal primo  $\mathfrak{p}_{y'} \subset B$ , de modo que  $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_{y'}$  y  $f^{-1}(\mathfrak{p}_{y'}) = \mathfrak{p}_{x'}$ .

*Demostración.* Por el teorema anterior  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es una aplicación cerrada. Por tanto,  $f^*(\bar{y}) = \bar{x}$ . Luego como  $x' \in \bar{x}$ , existe un  $y' \in \bar{y}$  tal que  $f^*(y') = x'$ . Es decir,  $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_{y'}$  y  $f^{-1}(\mathfrak{p}_{y'}) = \mathfrak{p}_{x'}$ .  $\square$

**21. Corolario:** Si  $f: A \hookrightarrow B$  es un morfismo finito de modo que  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es epiyectivo (por ejemplo, si  $f$  es inyectivo) entonces  $\dim A = \dim B$ .

*Demostración.* Dada una cadena estricta de cerrados irreducibles  $\bar{y}_1 \subset \bar{y}_2 \subset \cdots \subset \bar{y}_n$  de  $\text{Spec } B$ ,  $f^*(\bar{y}_1) \subset f^*(\bar{y}_2) \subset \cdots \subset f^*(\bar{y}_n)$  es una cadena de cerrados irreducibles estricta de  $\text{Spec } A$ , pues las fibras son de dimensión cero (1.3.18). Por tanto,  $\dim B \leq \dim A$ .

Sea ahora una cadena estricta de cerrados irreducibles  $\bar{x}_1 \subset \bar{x}_2 \subset \cdots \subset \bar{x}_n$  de  $\text{Spec } A$ . Sea  $y_n \in \text{Spec } B$ , tal que  $f^*(y_n) = x_n$ . Por el teorema del ascenso, existe  $y_{n-1} \in \bar{y}_n$  tal que  $f^*(y_{n-1}) = x_{n-1}$ . Así sucesivamente, obtendremos una cadena estricta de cerrados irreducibles  $\bar{y}_1 \subset \bar{y}_2 \subset \cdots \subset \bar{y}_n$  de  $\text{Spec } B$  (de imagen por  $f^*$ , la cadena de  $\text{Spec } A$ ). Por tanto,  $\dim A \leq \dim B$ , luego  $\dim A = \dim B$ .  $\square$

**22. Proposición:** Sea  $G$  un grupo finito de automorfismos de un anillo  $B$ . Se verifica que

$$\text{Spec } B^G = (\text{Spec } B)/G$$

donde  $B^G = \{b \in B: g(b) = b, \text{ para todo } b \in B\}$  y  $(\text{Spec } B)/G$  es el espacio topológico cociente de  $\text{Spec } B$  por la relación de equivalencia  $x \sim x'$ , si existe un  $g \in G$  tal que  $x' = gx$  (es decir,  $\mathfrak{p}_{x'} = g(\mathfrak{p}_x)$ ).

En consecuencia, el morfismo natural  $\pi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B^G$  es abierto, y el morfismo  $B^G \hookrightarrow B$  cumple el teorema del descenso de ideales: dados dos ideales primos  $\mathfrak{p}_{y'} \subseteq \mathfrak{p}_y \subseteq B^G$ , y un ideal primo  $\mathfrak{p}_x \subseteq B$  tal que  $\mathfrak{p}_x \cap B^G = \mathfrak{p}_y$ , entonces existe un ideal primo  $\mathfrak{p}_{x'} \subseteq \mathfrak{p}_x$  tal que  $\mathfrak{p}_{x'} \cap B^G = \mathfrak{p}_{y'}$ .

*Demostración.* Empecemos observando que dada  $f \in B$ , el polinomio  $\prod_{g \in G} (x - g(f))$  es un polinomio mónico con coeficientes en  $B^G$ . Por tanto,  $B^G \hookrightarrow B^G[f]$  es un morfismo finito. Por tanto,  $B^G \hookrightarrow B$  es un morfismo entero, luego epiyectivo y cerrado en espectros.

Sólo nos falta ver que las fibras del morfismo  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B^G$  son órbitas por la acción de  $G$ .

$G$  actúa transitivamente sobre las fibras del morfismo  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B^G$ : Obviamente, dado un ideal primo  $\mathfrak{p}_x \subset B$ ,  $g(\mathfrak{p}_x)$  corta a  $B^G$  en el mismo ideal primo que  $\mathfrak{p}_x$ . Es decir,  $G$  actúa en las fibras. Sea  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal primo de  $B$  distinto de  $g(\mathfrak{p}_{x'}) = \mathfrak{p}_{g(x')}$  para todo  $g \in G$ . Supongamos que  $x, x'$  tienen la misma imagen por el morfismo  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B^G$ , digamos  $y$ . Sabemos que  $\mathfrak{p}_x$  no está incluido en ninguno de los  $g(\mathfrak{p}_{x'})$ , luego existe una  $f \in B$  que se anula en  $x$  y no se anula en ninguno de los  $g(x')$ . Entonces  $N(f) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{g \in G} g(f) \in B^G$  se anula en  $x$  y no se anula en ninguno de los  $g(x')$ .

Llegamos a contradicción, porque por un lado  $N(f)$  ha de anularse en  $y$  y por el otro no.

Vayamos con la consecuencia. Sea  $U \subseteq \text{Spec } B$  un abierto. Se cumple que  $V = \bigcup_{g \in G} g(U)$  es un abierto y que  $\pi^{-1}(\pi(U)) = V$ , luego  $\pi(U)$  es un abierto. Por último, sea  $x'' \in \text{Spec } B$  tal que  $\pi(x'') = y'$ . Hemos dicho más arriba que  $\pi$  es un morfismo cerrado, por tanto,  $\pi(\bar{x}'') = \bar{y}'$ . Luego existe  $x_1 \in \bar{x}''$ , tal que  $\pi(x_1) = y$ . Como las fibras de  $\pi$  son órbitas, tenemos que  $x = gx_1$ , para cierto  $g \in G$ . Ahora es fácil ver que  $\pi(gx'') = y'$  y  $x = gx_1 \in \bar{gx}''$ , i.e.,  $\mathfrak{p}_{gx''}$  es el ideal  $\mathfrak{p}_{x'}$  buscado.  $\square$

**23. Teorema Descenso. Cohen-Seidenberg** Sea  $A$  un anillo íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Sea  $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$  una extensión finita de cuerpos y  $A'$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma'$ . El morfismo  $\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$  es abierto y  $A \hookrightarrow A'$  cumple el teorema del descenso de los ideales.

*Demostración.* Sea  $\Sigma''$  la envolvente normal de  $\Sigma'$ , sobre  $\Sigma$ . Sea  $A''$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma''$ . Observemos los morfismos

$$A \hookrightarrow A' \hookrightarrow A'', \quad \text{Spec } A \leftarrow \text{Spec } A' \leftarrow \text{Spec } A''$$

Los morfismos inyectivos enteros, como los finitos, son epiyectivos en espectros. Por tanto, si  $\text{Spec } A'' \rightarrow \text{Spec } A$  es abierto entonces  $\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$  es abierto. Igualmente, si  $A \hookrightarrow A''$  cumple el teorema del descenso de ideales, entonces  $A \hookrightarrow A'$  también.

En conclusión, podemos suponer que  $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$  es una extensión normal, digamos de grupo de Galois  $G$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma'^G$ . Es fácil ver que  $\bar{A} = A'^G$ . Por la proposición anterior, se cumple Cohen-Seidenberg para el morfismo  $\bar{A} = A'^G \hookrightarrow A'$ . Para concluir, basta demostrar Cohen-Seidenberg para

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & \bar{A} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Sigma & \hookrightarrow & \Sigma'^G \end{array}$$

$\Sigma'^G$  es puramente inseparable, sobre  $\Sigma$ , luego para todo  $b \in \Sigma'^G$ , existe un  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $b^{p^n} \in \Sigma$  (donde  $0 < p = \text{car } \Sigma$ ). Por tanto, para todo  $b \in \bar{A}$ , existe un  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $b^{p^n} \in A$  (pues  $b^{p^n}$  es entero sobre  $A$ ). Se concluye, pues ha de verificarse que  $\text{Spec } A = \text{Spec } \bar{A}$ , con las asignaciones

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A & \xlongequal{\quad} & \text{Spec } \bar{A} \\ \mathfrak{p} & \longrightarrow & \mathfrak{p}' = \{b \in \bar{A} : b^{p^n} \in \mathfrak{p}\} \\ \mathfrak{p}' \cap A & \longleftarrow & \mathfrak{p}' \end{array}$$

□

## 1.4 Lema de normalización de Noether. Ceros de Hilbert

Entendamos ahora variedad y subvariedad desde un punto de vista puramente geométrico, es decir, como el conjunto de soluciones sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, de un sistema de ecuaciones algebraicas. En esta sección probaremos el teorema fuerte de los ceros de Hilbert, que dice que hay una correspondencia biunívoca, “salvo nilpotentes”, entre los ideales del anillo de funciones algebraicas de una variedad algebraica y las subvariedades de la variedad algebraica. La descomposición primaria en anillos noetherianos, nos permitirá decir con todo rigor, que los ideales del anillo de funciones algebraicas de una variedad se corresponden con los conjuntos de funciones del anillo que se anulan en ciertas subvariedades algebraicas de la variedad y verifican ciertas condiciones infinitesimales a lo largo de un número finito de subvariedades de las subvariedades. En conclusión, tenemos una comprensión geométrica acabada de los ideales, es decir, de los sistemas de ecuaciones algebraicas.

**1. Definición:** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra. Diremos que las funciones  $\xi_1, \dots, \xi_n \in A$  son algebraicamente independientes sobre  $k$  cuando el morfismo de  $k$ -álgebras  $k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A, p(x_1, \dots, x_n) \mapsto p(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sea inyectivo; es decir, cuando cualquier relación algebraica  $\sum_{i_1 \dots i_n} a_{i_1 \dots i_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} = 0$ , con coeficientes en  $k$ , tenga todos sus coeficientes nulos.

**2. Lema de normalización de Noether:** Sea  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  una  $k$ -álgebra de tipo finito. Supongamos que  $k$  tiene un número infinito de elementos<sup>1</sup>. Existe un morfismo finito inyectivo

$$k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow A$$

“*Toda variedad algebraica afín se proyecta de modo finito en un espacio afín*”.

*Demostración.* Vamos a hacerlo por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$ , no hay nada que decir ( $k = k$ ). Supongamos que el teorema es cierto hasta  $n - 1$ .

Sea  $r$  el número máximo de  $\{\xi_i\}$  algebraicamente independientes entre sí. Si  $r = n$ , entonces  $k[\xi_1, \dots, \xi_n] = k[x_1, \dots, x_n]$ . Podemos suponer entonces que  $\xi_n$  es algebraico sobre  $k[\xi_1, \dots, \xi_{n-1}]$ . Luego existe un  $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ , donde la variable  $x_n$  aparece, de modo que  $p(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ .

Escribamos  $p(x_1, \dots, x_n) = p_s(x_1, \dots, x_n) + p_{s-1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + p_0(x_1, \dots, x_n)$  como suma de polinomios  $p_i(x_1, \dots, x_n)$  homogéneos de grado  $i$ . Sean  $x_i = x'_i + \lambda_i x_n$ , entonces

$$p(x'_1 + \lambda_1 x_n, \dots, x'_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n, x_n) = p_s(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)x_n^s + \text{polinomio en } x'_1, \dots, x'_{n-1}, x_n \text{ de grado en } x_n \text{ menor que } s$$

Así pues, si eligimos  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in k$  de modo que  $p_s(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$ , tendremos que  $\xi_n$  es entero sobre  $k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}]$ . Por tanto, la composición

$$k[x_1, \dots, x_r] \xrightarrow[\text{Hip.ind.}]{\text{finito}} k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}] \xrightarrow{\text{finito}} k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}, \xi_n] = k[\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n]$$

es el morfismo finito buscado. □

**3. Definición:** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra, diremos que  $x \in \text{Spec } A$  es un punto racional si  $A/\mathfrak{p}_x = k$ .

**4. Proposición:** Sea  $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$  e  $I = (p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_m(x_1, \dots, x_n))$ . Se cumple que los puntos racionales de  $\text{Spec } A$  se corresponden biyectivamente con las soluciones del sistema de ecuaciones

$$p_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, p_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

*Demostración.* Sea  $x \in \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ . Si  $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}_x = k$ , entonces  $\bar{x}_i = \alpha_i \in k$ . Por tanto,  $x_i - \alpha_i \in \mathfrak{p}_x$  y se cumple que  $\mathfrak{p}_x = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ . Además, se cumple la inclusión  $I = (p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_m(x_1, \dots, x_n)) \subseteq \mathfrak{p}_x$  si y sólo si  $p_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \dots, p_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ . En conclusión, como los puntos racionales de  $A$ , se corresponden con los puntos racionales de  $k[x_1, \dots, x_n]$  que contienen a  $I$ , los puntos racionales de  $A$  se corresponden biyectivamente con las soluciones del sistema de ecuaciones

$$p_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, p_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

□

**5. Teorema de los ceros de Hilbert:** Sea  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  una  $k$ -álgebra de tipo finito y  $\mathfrak{m}$  un ideal maximal. Entonces  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]/\mathfrak{m}$  es una extensión finita de  $k$ . En particular, si  $k$  es algebraicamente cerrado  $k = k[\xi_1, \dots, \xi_n]/\mathfrak{m}$ . “*Todo punto cerrado de una variedad algebraica afín sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es racional*”.

<sup>1</sup>Esta hipótesis no es necesaria, sólo la imponemos porque la demostración del lema es algo más sencilla.

*Demostración.* Obviamente  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]/\mathfrak{m}$  es una  $k$ -álgebra de tipo finito sobre  $k$ . Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito

$$k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow k[\xi_1, \dots, \xi_n]/\mathfrak{m}$$

Por tanto, el término de la izquierda de la flecha ha de tener dimensión cero, luego  $r = 0$  y concluimos.  $\square$

**6. Ejercicio:** Calcular los ideales maximales de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  y los de  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$ .

**7. Ejercicio:** Sean  $X = \text{Spec } A$  y  $Y = \text{Spec } B$  dos variedades algebraicas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $k$ . Definamos  $X \times_k Y = \text{Spec } A \otimes_k B$ . Probar que los puntos cerrados de la variedad algebraica  $X \times_k Y$  son el producto cartesiano de los puntos cerrados de  $X$  con los de  $Y$ .

**8. Proposición:** Sea  $f^*: X = \text{Spec } B \rightarrow Y = \text{Spec } A$  un morfismo entre variedades algebraicas afines. La imagen por  $f^*$  de un punto cerrado es un punto cerrado.

*Demostración.* Dado un punto cerrado  $x \in X$  y  $f^*(x) = y$ , tenemos que  $\mathfrak{p}_y = f^{-1}\mathfrak{p}_x$ , luego el morfismo  $A/\mathfrak{p}_y \hookrightarrow B/\mathfrak{p}_x$  es inyectivo. Por el teorema de los ceros de Hilbert,  $B/\mathfrak{p}_x$  es una extensión finita de  $k$ , por tanto  $A/\mathfrak{p}_y$  también, luego es un cuerpo. Es decir,  $f^*(x) = y$  es un punto cerrado.  $\square$

**9. Corolario:** Sea  $U \subset X$  un abierto de una variedad algebraica afín. Los puntos cerrados de  $U$  se corresponden con los puntos cerrados de  $X$  que yacen en  $U$ .

*Demostración.* Sea  $x \in U$  un punto cerrado, sea  $U_a = \text{Spec } A_a \subset X = \text{Spec } A$  un abierto básico conteniendo a  $x$ , tal que  $U_a \subseteq U$ . Obviamente  $x$  es un punto cerrado de  $U_a$ .  $A_a = A[\frac{1}{a}]$  es una  $k$ -álgebra de tipo finito, luego  $U_a = \text{Spec } A_a$  es una variedad algebraica. Por la proposición anterior aplicada a la inclusión  $U_a \subset X$ , tenemos que  $x$  es un punto cerrado de  $X$ . Hemos concluido.  $\square$

**10. Corolario fuerte de los ceros de Hilbert:** Sea  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  una  $k$ -álgebra de tipo finito y  $f \in k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ . Si  $f$  se anula en todo ideal maximal entonces es nilpotente. En particular, si una función se anula en todos los puntos racionales de una variedad algebraica afín íntegra, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces es nula.

*Demostración.* Por el corolario anterior, el conjunto de los ideales maximales de  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]_f$  se corresponde biyectivamente con el conjunto de los ideales maximales de  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  que no contienen a  $f$ . Como este último conjunto es vacío, tenemos que  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]_f = 0$ , es decir,  $f$  es nilpotente.  $\square$

**11. Definición:** Diremos que  $X = \text{Spec } A$  es íntegra si  $A$  es un anillo íntegro.

**12. Corolario:** Las subvariedades algebraicas íntegras están determinadas por sus puntos cerrados.

*Demostración.* Sea  $X = \text{Spec } A$  una variedad algebraica y  $Y \subseteq X$  una subvariedad algebraica íntegra. Sea  $\mathfrak{p}$  el ideal primo de las funciones que se anulan en  $Y$ . Basta ver

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\bar{x}=x \\ \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_x}} \mathfrak{m}_x$$

Obviamente el primer término de la igualdad está incluido en el segundo. Haciendo cociente por  $\mathfrak{p}$ , tenemos  $0 \subseteq \bigcap_{\bar{x}=x} \mathfrak{m}_x$  en  $A/\mathfrak{p}$ . Por el corolario anterior  $\bigcap_{\bar{x}=x} \mathfrak{m}_x$  son los nilpotentes. Ahora bien  $A/\mathfrak{p}$  es íntegra, luego  $0 = \bigcap_{\bar{x}=x} \mathfrak{m}_x$ . Hemos concluido.  $\square$

## 1.5 Descomposición primaria

Queremos demostrar que todo ideal de un anillo noetheriano viene definido por condiciones infinitesimales en un número finito de puntos del espectro. Resultado que puede entenderse aritméticamente como el teorema de Euclides para anillos noetherianos. Comencemos con los ideales primarios que serán los definidos por condiciones infinitesimales en un punto.

**1. Definición:** Sea  $A$  un anillo. Un ideal  $\mathfrak{q} \neq A$  es primario si

$$ab \in \mathfrak{q}, a \notin \mathfrak{q} \Rightarrow b^n \in \mathfrak{q} \text{ para algún } n \geq 1$$

Es decir, cuando en  $A/\mathfrak{q}$  todo divisor de cero sea nilpotente.

**2. Ejemplo:** 1. Los ideales primos son primarios.

2. Si  $p \in \mathbb{Z}$  es un número primo entonces  $(p^n)$  es un ideal primario de  $\mathbb{Z}$ . Igualmente si  $p(x) \in k[x]$  es un polinomio irreducible entonces  $(p(x)^n)$  es un ideal primario de  $k[x]$

**3. Definición:** Dado un ideal  $I \subseteq A$ , llamaremos radical de  $I$ , que denotaremos  $r(I)$ , a

$$r(I) = \{a \in A : a^n \in I \text{ para cierto } n \in \mathbb{N}\}$$

Observemos que si  $\pi: A \rightarrow A/I$  es el morfismo de paso al cociente, entonces  $\pi^{-1}(\text{rad}(A/I)) = r(I)$ .

El radical de un ideal primario es un ideal primo. En efecto, sea  $\mathfrak{p}$  el radical de un ideal primario  $\mathfrak{q}$ . Si  $ab \in \mathfrak{p}$  y  $a \notin \mathfrak{p}$ , entonces  $a^n b^n \in \mathfrak{q}$  para algún  $n \geq 1$ . Como  $a^n \notin \mathfrak{q}$ , se sigue que alguna potencia de  $b^n$  ha de estar en  $\mathfrak{q}$ , lo que implica que  $b \in \mathfrak{p} = r(\mathfrak{q})$ .

Sea  $\mathfrak{q}$  un ideal primario. Diremos que  $\mathfrak{q}$  es un ideal  $\mathfrak{p}$ -primario ó que  $\mathfrak{p}$  es el ideal primo asociado a  $\mathfrak{q}$  cuando  $\mathfrak{p}$  es el radical de  $\mathfrak{q}$ . En tal caso, si  $B \rightarrow A$  es un morfismo de anillos, es sencillo comprobar que  $B \cap \mathfrak{q}$  es un ideal  $(B \cap \mathfrak{p})$ -primario de  $B$ .

Sea  $\mathfrak{m}$  un ideal maximal de un anillo  $A$ . Los ideales  $\mathfrak{m}$ -primarios de  $A$  son los ideales de radical  $\mathfrak{m}$ . En efecto, si  $\mathfrak{m}$  es el radical de un ideal  $I$ , entonces es el único ideal primo de  $A$  que contiene a  $I$ . Se sigue que el anillo  $A/I$  tiene un único ideal primo; luego todo elemento de  $A/I$  es invertible o nilpotente y concluimos que en  $A/I$  todo divisor de cero es nilpotente. En particular, todas las potencias  $\mathfrak{m}^n$  son ideales  $\mathfrak{m}$ -primarios.

Si el anillo  $A$  es noetheriano, cada ideal contiene una potencia de su radical, así que todo ideal  $\mathfrak{m}$ -primario es de la forma  $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})$  para algún ideal  $\bar{\mathfrak{q}}$  de  $A/\mathfrak{m}^r$  (donde  $\pi: A \rightarrow A/\mathfrak{m}^r$  es el morfismo de paso al cociente). En el caso del anillo  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , si consideramos el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  formado por todos los polinomios que se anulan en cierto punto racional  $(a_1, \dots, a_n)$  y ponemos  $t_i = x_i - a_i$ , entonces

$$A/\mathfrak{m}^r = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]/(t_1, \dots, t_n)^r = \left[ \begin{array}{l} \text{Polinomios de grado} \\ < r \text{ en } t_1, \dots, t_n \end{array} \right]$$

y la reducción módulo  $\mathfrak{m}^r$  de cualquier polinomio coincide con el clásico desarrollo de Taylor hasta el orden  $r - 1$  en el punto  $(a_1, \dots, a_n)$ . Por tanto, el ideal  $\mathfrak{m}$ -primario  $\mathfrak{q}$  está formado por todas las funciones  $f \in A$  cuyo desarrollo de Taylor  $\bar{f} \in A/\mathfrak{m}^r$ , en el punto definido por  $\mathfrak{m}$ , satisface las relaciones impuestas por cierto ideal  $\bar{\mathfrak{q}}$  de  $A/\mathfrak{m}^r$ . Por lo que diremos que los ideales primarios de radical maximal  $\mathfrak{m}_x$  son los ideales definidos por condiciones infinitesimales en el punto cerrado  $x$ .

Una base del  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial dual de  $A/\mathfrak{m}^r$ , la constituyen las formas lineales  $\{\omega_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}, \alpha_1 + \dots + \alpha_n < r\}$ , que vienen definidas por  $\omega_\alpha(\bar{f}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}(a_1, \dots, a_n)$ . Por tanto, todo ideal de  $A/\mathfrak{m}^r$  está definido por un sistema de  $s$ -ecuaciones

$$\sum_{\alpha} \lambda_{i,\alpha} \omega_\alpha(\bar{f}) = 0, \quad 1 \leq i \leq s$$

Es decir, los ideales  $\mathfrak{m}$ -primarios son ideales formados por las funciones  $f$  que verifican un sistema de  $s$ -ecuaciones

$$\sum_{\alpha} \lambda_{i,\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} (a_1, \dots, a_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq s$$

(variando  $s, \lambda_{i,\alpha}$  se obtienen todos los ideales  $\mathfrak{m}$ -primarios)

Por tanto, cada ideal  $\mathfrak{m}$ -primario viene definido por ciertas relaciones entre las derivadas parciales iteradas en el punto  $(a_1, \dots, a_n)$ .

**4. Proposición:** *Sea  $S$  un sistema multiplicativo de un anillo  $A$  y sea  $\mathfrak{q}$  un ideal  $\mathfrak{p}_x$ -primario.*

1. Si  $\mathfrak{p}_x$  corta a  $S$ , entonces  $\mathfrak{q}A_S = A_S$ .

2. Si  $\mathfrak{p}_x$  no corta a  $S$ , entonces  $\mathfrak{q}A_S$  es un ideal  $\mathfrak{p}_x A_S$ -primario y  $\mathfrak{q} = A \cap (\mathfrak{q}A_S)$ . En particular:

$$\mathfrak{q} = A \cap (\mathfrak{q}A_x)$$

Por tanto, para que dos ideales  $\mathfrak{p}_x$ -primarios coincidan es suficiente que coincidan al localizar en  $x$ .

*Demostración.* 1. Si  $s \in S \cap \mathfrak{p}_x$ , entonces  $\mathfrak{q}$  contiene alguna  $s^n$ , que es invertible en  $A_S$ ; luego  $\mathfrak{q}A_S = A_S$ .

2. Si  $S \cap \mathfrak{p}_x = \emptyset$ , entonces  $\mathfrak{p}_x A_S$  es un ideal primo de  $A_S$  y es fácil comprobar que  $\mathfrak{q}A_S$  es un ideal  $\mathfrak{p}_x A_S$ -primario. Por último, veamos que  $\mathfrak{q} = A \cap (\mathfrak{q}A_S)$ . Si  $f \in A \cap (\mathfrak{q}A_S)$ , entonces  $sf \in \mathfrak{q}$  para algún  $s \in S$ . Ninguna potencia de  $s$  está en  $\mathfrak{q}$ , por tanto,  $f \in \mathfrak{q}$ . Concluimos que  $A \cap (\mathfrak{q}A_S) \subseteq \mathfrak{q}$ . La inclusión  $\mathfrak{q} \subseteq A \cap (\mathfrak{q}A_S)$  es evidente.  $\square$

En general, sea  $\mathfrak{p}_x$  el ideal primo de un punto  $x \in \text{Spec } A$ . Los ideales de  $A_x$  de radical  $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_x A_x$  son precisamente los ideales  $\mathfrak{p}_x$ -primarios, porque  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal maximal de  $A_x$  (ideales que deben llamarse ideales de condiciones infinitesimales en el punto  $x$ , pues en el caso noetheriano vienen determinados por los ideales de los anillos  $A_x/\mathfrak{p}_x^{r+1}A_x$ ). Por tanto, si  $\mathfrak{q}_x$  es uno de estos ideales,  $A \cap \mathfrak{q}_x$  es un ideal  $\mathfrak{p}_x$ -primario de  $A$ . Denotamos  $\pi: A \rightarrow A_x/\mathfrak{p}_x^r A_x$  por el morfismo natural, como hemos dicho, si  $A$  es noetheriano, todo ideal  $\mathfrak{p}_x$ -primario es de la forma  $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})$ , donde  $\bar{\mathfrak{q}}$  es un ideal de  $A_x/\mathfrak{p}_x^r A_x$ .

**5. Ejemplo:** Si un ideal primo  $\mathfrak{p}$  no es maximal, pueden existir ideales de radical  $\mathfrak{p}$  que no son primarios. Fijemos en un plano afín un punto racional y una recta que pase por él. Sea  $\mathfrak{m}$  el ideal maximal del punto y  $\mathfrak{p}$  el ideal primo del punto genérico de la recta. Consideremos ahora el ideal  $I = \mathfrak{m}^2 \cap \mathfrak{p}$  formado por los polinomios que se anulan en el punto genérico de la recta y sus derivadas parciales se anulan en el punto fijado. El radical de  $I$  es

$$r(I) = r(\mathfrak{m}^2) \cap r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$$

pero el ideal  $I$  no es primario: el producto de la ecuación de la recta fijada por la de otra recta que pase por el punto, está en  $I$ ; la ecuación de la recta fijada, no está en  $I$  y la ecuación de la otra recta no está en  $\mathfrak{p} = r(I)$ . Esto se debe a que el ideal  $I$  no está definido por condiciones infinitesimales en un solo punto del espectro sino en dos: en el punto fijado y en el punto genérico de la recta dada.

Incluso puede darse el caso de que una potencia de un ideal primo no sea un ideal primario. Por ejemplo, sea  $A = k[x, y, z]/(x^2 + y^2 - z^2)$  el anillo de las funciones algebraicas sobre un cono en  $\mathbb{A}_3$  y sea  $\mathfrak{p}_x = (x, y - z)$  el ideal primo de  $A$  definido por una generatriz.

El ideal  $\mathfrak{p}_x^2$  no viene definido por condiciones infinitesimales en el punto genérico de tal generatriz; es decir,  $\mathfrak{p}_x^2$  no coincide con  $A \cap \mathfrak{p}_x^2 A_x$  sino que involucra además condiciones en el vértice del cono, pues las funciones de  $\mathfrak{p}_x^2$  deben cumplir además la condición de estar en  $\mathfrak{m}^2$ , donde  $\mathfrak{m}$  denota el ideal maximal del vértice del cono. En efecto, la ecuación del plano tangente al cono a lo largo de la directriz,  $y - z = 0$ , está en  $A \cap \mathfrak{p}_x^2 A_x$ ; pero no está en  $\mathfrak{p}_x^2$  porque no pertenece a  $\mathfrak{m}^2$ . Luego el ideal  $\mathfrak{p}_x^2$  no es primario.

**6. Definición:** Sea  $I$  un ideal de un anillo  $A$ . Diremos que una descomposición  $I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$  como intersección de ideales primarios de  $A$  es una descomposición primaria reducida de  $I$  cuando no tenga componentes redundantes ( $I \neq \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \widehat{\mathfrak{q}_i} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$  para todo  $1 \leq i \leq n$ ) ni componentes asociadas a un mismo ideal primo ( $r(\mathfrak{q}_i) \neq r(\mathfrak{q}_j)$  cuando  $i \neq j$ ).

**7. Proposición:** Si  $\mathfrak{q}$  y  $\mathfrak{q}'$  son dos ideales  $\mathfrak{p}_x$ -primarios entonces  $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}'$  es  $\mathfrak{p}_x$ -primario.

*Demostración.* Al lector. □

Si un ideal de un anillo puede descomponerse como intersección finita de ideales primarios, agrupando los términos de igual radical, obtenemos una descomposición primaria en que todos los términos tienen radicales diferentes. Eliminando entonces términos redundantes, si los hubiera, se obtiene una descomposición primaria reducida: *si un ideal admite una descomposición primaria, admite una descomposición primaria reducida.*

**8. Definición:** Diremos que un ideal  $\mathfrak{q}$  de un anillo  $A$  es irreducible si no es intersección de dos ideales estrictamente mayores; es decir, si el ideal 0 del anillo cociente  $A/\mathfrak{q}$  no es intersección de dos ideales no nulos.

**9. Lema Fundamental:** Sea  $A$  un anillo noetheriano. Todo ideal irreducible  $\mathfrak{q} \neq A$  es primario.

*Demostración.* Para ver que  $\mathfrak{q}$  es primario, tenemos que probar que los divisores de cero de  $A/\mathfrak{q}$  son nilpotentes. Sea  $b \in A/\mathfrak{q}$  divisor de cero. Consideremos los núcleos de los morfismos de  $A$ -módulos  $b^n \cdot : A/\mathfrak{q} \rightarrow A/\mathfrak{q}$ :

$$0 \neq \text{Ker } b \subseteq \text{Ker } b^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Ker } b^n \subseteq \dots$$

Como  $A/\mathfrak{q}$  es noetheriano,  $\text{Ker } b^n = \text{Ker } b^{n+1}$  para algún exponente  $n$ . Luego  $(\text{Ker } b) \cap (\text{Im } b^n) = 0$ . Por ser  $\mathfrak{q}$  irreducible y  $\text{Ker } b \neq 0$   $\text{Im } b^n$  es nulo. Entonces  $0 = b^n \cdot 1 = b^n$  y  $b$  es nilpotente en  $A/\mathfrak{q}$ . Concluimos que el ideal  $\mathfrak{q}$  es primario. □

**10. Teorema de existencia:** Sea  $A$  un anillo noetheriano. Todo ideal  $I \neq A$  es intersección finita de ideales primarios de  $A$ ; es decir, está definido por condiciones infinitesimales en un número finito de puntos de  $\text{Spec } A$ .

*Demostración.* Si  $I$  no es un ideal primario, por el lema anterior, no es irreducible. Entonces  $I = I_1 \cap J_1$  con  $I \subsetneq I_1, J_1$ . Queremos demostrar que puede tomarse  $I_1$  primario. Si  $I_1$  no es primario, de nuevo, existirán  $I_2, J_2$  tales que  $I_1 = I_2 \cap J_2$  con  $I_1 \subsetneq I_2, J_2$  y  $I = I_2 \cap (J_2 \cap J_1)$ . Si  $J_2 \cap J_1 \neq I$ , tenemos  $I$  como intersección propia de los dos ideales  $I_2, (J_2 \cap J_1)$  y  $I_1 \subsetneq I_2$ . Si  $J_2 \cap J_1 = I$ , renotaremos  $J_2 = I_2$  y de nuevo tenemos  $I = I_2 \cap J_1$ , con  $I_1 \subsetneq I_2$ . Si  $I_2$  no es primario repetimos el proceso. Así tendremos una cadena

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots \subsetneq I_n$$

que por noetherianidad ha de ser finita. Luego, para  $n \gg 0$ ,  $I_n$  es primario.

En conclusión, podemos escribir  $I = I_1 \cap J_1$  con  $I \subsetneq I_1, J_1$ , e  $I_1$  primario. Si  $J_1$  no es primario, de nuevo,  $J_1 = I_2 \cap J_2$  con  $J_1 \subsetneq I_2, J_2$ , e  $I_2$  primario. Por tanto,  $I = I_1 \cap I_2 \cap J_2$ , con  $I_1, I_2$  primario y  $I \subsetneq J_1 \subsetneq J_2$ . Repitiendo este proceso, obtenemos la cadena

$$I \subsetneq J_1 \subsetneq J_2 \subsetneq \dots \subsetneq J_n$$

que ha de ser finita, por noetherianidad. Luego, para  $n \gg 0$ ,  $J_n$  es primario y  $I = I_1 \cap \dots \cap I_{n-1} \cap J_n$ , que es una intersección de ideales primarios.

Demos otra demostración, menos algorítmica, pero argumentalmente más simple. De acuerdo con el lema anterior, bastará probar que todo ideal  $I$  de  $A$  es intersección finita de ideales irreducibles. Si  $I$  no es intersección de un número finito de ideales irreducibles entonces  $I = I_1 \cap I_2$  con  $I \subsetneq I_1$ ,  $I \subsetneq I_2$  y  $I_1$  ó  $I_2$  (digamos  $I_1$ ) no es intersección de un número finito de ideales irreducibles. De nuevo,  $I_1 = I_{11} \cap I_{12}$  con  $I_1 \subsetneq I_{11}$ ,  $I_1 \subsetneq I_{12}$  y  $I_{11}$  ó  $I_{12}$  (digamos  $I_{11}$ ) no es intersección de un número finito de ideales irreducibles. Obtenemos así una cadena de inclusiones estrictas

$$I_1 \subsetneq I_{11} \subsetneq I_{111} \subsetneq \dots$$

lo que contradice la noetherianidad de  $A$ . Luego  $I$  es intersección de un número finito de ideales irreducibles. □

**11. Corolario:** *Sea  $A$  un anillo noetheriano.  $\text{Spec } A$  es unión de un número finito de componentes irreducibles. En particular,  $A$  tiene un número finito de ideales primos minimales.*

*Demostración.* Basta considerar una descomposición primaria reducida del ideal 0:

$$\text{Spec } A = (0)_0 = (\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n)_0 = (\mathfrak{q}_1)_0 \cup \dots \cup (\mathfrak{q}_n)_0 = (r(\mathfrak{q}_1))_0 \cup \dots \cup (r(\mathfrak{q}_n))_0$$

□

**12. Teorema de unicidad de las componentes no-sumergidas** *Sea  $I$  un ideal de un anillo  $A$  y sea  $\mathfrak{p}_x$  el ideal primo de una componente irreducible de  $(I)_0$ . Si  $I$  admite una descomposición primaria reducida  $I = \cap_i \mathfrak{q}_i$ , entonces  $\mathfrak{p}_x$  es el radical de alguna componente  $\mathfrak{q}_i$  y*

$$\mathfrak{q}_i = A \cap (IA_x)$$

*Luego tal componente  $\mathfrak{q}_i$  no depende de la descomposición elegida.*

*Demostración.* Cuando  $j \neq i$ , tenemos que  $\mathfrak{q}_j A_x = A_x$ , porque  $r(\mathfrak{q}_j)$  corta al sistema multiplicativo  $A - \mathfrak{p}_x$  por el que localizamos. Luego

$$IA_x = \bigcap_{j=1}^n \mathfrak{q}_j A_x = \mathfrak{q}_i A_x$$

y, por 1.5.4, concluimos que  $\mathfrak{q}_i = A \cap (\mathfrak{q}_i A_x) = A \cap (IA_x)$ . □

Sea  $I = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$  una descomposición primaria reducida de un ideal  $I$  de un anillo  $A$ . Según 1.5.12, si un ideal primo  $\mathfrak{p}$  es minimal entre los ideales primos de  $A$  que contienen a  $I$ , entonces  $\mathfrak{p}$  es el radical de alguna componente  $\mathfrak{q}_i$  y diremos que  $\mathfrak{q}_i$  es una componente no sumergida. Es decir, una componente  $\mathfrak{q}_j$  está sumergida cuando sus ceros están contenidos estrictamente en los ceros de alguna otra componente:  $(\mathfrak{q}_j)_0 \subset (\mathfrak{q}_i)_0$ . Las componentes no-sumergidas corresponden a los puntos genéricos de las componentes irreducibles de  $(I)_0$ , mientras que las componentes sumergidas están asociadas a puntos más pequeños de  $(I)_0$ .

**13. Corolario:** *Si los ceros de un ideal  $I$  de un anillo noetheriano son puntos aislados, la descomposición primaria reducida de  $I$  es única salvo el orden.*

Las componentes sumergidas no son únicas pero sí lo son sus radicales, como vamos a demostrar. Sea  $a \in A$  e  $I \subset A$  un ideal. Denotaremos

$$(I : a) = \{b \in A : a \cdot b \in I\}$$

**14. Proposición:** *Sea  $\mathfrak{q} \subset A$  un ideal  $\mathfrak{p}$ -primario. Se cumple que*

$$(\mathfrak{q} : a) = \begin{cases} A & \text{si } a \in \mathfrak{q} \\ \mathfrak{q}' & \text{si } a \notin \mathfrak{q} \end{cases}$$

siendo  $\mathfrak{q}'$  un ideal  $\mathfrak{p}$ -primario, que contiene a  $\mathfrak{q}$ .

*Demostración.* Es una sencilla comprobación. □

**15. Proposición:** *Sea  $I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$  una descomposición primaria reducida de  $I$ . Un ideal primo  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo asociado a la descomposición primaria de  $I$  si y sólo si existe  $a \in A$  de modo que  $(I : a) = \mathfrak{p}$ .*

*En particular, los primos asociados a dos descomposiciones primarias reducidas de un ideal, son los mismos.*

*Demostración.* Observemos que  $(I : a) = (\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i : a) = \bigcap_{i=1}^n (\mathfrak{q}_i : a)$ . Ahora por la proposición anterior, es fácil concluir que si  $(I : a) = \mathfrak{p}$  entonces  $\mathfrak{p}$  ha de ser un ideal primo asociado a la descomposición primaria.

Supongamos  $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q}_1)$ . Sea  $a \in \bigcap_{i=2}^n \mathfrak{q}_i$  y  $a \notin \mathfrak{q}_1$ , por la proposición anterior  $(I : a) = (\mathfrak{q}_1 : a)$  y es un ideal  $\mathfrak{p}$ -primario. Si  $(\mathfrak{q}_1 : a) \neq \mathfrak{p}$ , sea  $\mathfrak{p}'$  la primera potencia contenida en  $(\mathfrak{q}_1 : a)$  y sea  $b \in \mathfrak{p}'^{-1}$ ,  $b \notin (\mathfrak{q}_1 : a)$ . Se cumple que  $(I : ab) = \mathfrak{p}$ . □

**16. Definición:** Sea  $A$  un anillo noetheriano. Llamaremos ideales primos asociados a un ideal  $I$  a los radicales de las componentes de cualquier descomposición primaria reducida de  $I$ .

Veamos que los  $A$ -módulos  $A/\mathfrak{p}_x$ ,  $x \in \text{Spec } A$ , son los “ladrillos” de la categoría de los  $A$ -módulos noetherianos.

**17. Teorema:** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo noetheriano. Existe una cadena  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$  de submódulos tal que  $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_{x_i}$ , con  $x_i \in \text{Spec } A$ , para todo  $i$ .*

*Demostración.* En efecto, sea  $A/\alpha \simeq \langle m \rangle \subset M$ . Existe  $\bar{a} \in A/\alpha$  cuyo anulador es  $\mathfrak{p}_1$ , siendo  $\mathfrak{p}_1$  un primo asociado a  $\alpha$ . Luego  $A/\mathfrak{p}_1 \subset M$ . Tomando  $M_1 = A/\mathfrak{p}_1$  y repitiendo el argumento para  $M/M_1$  se obtiene  $A/\mathfrak{p}_2 \subset M/M_1$ . Sea  $M_2 = \pi^{-1}(A/\mathfrak{p}_2)$ ,  $\pi: M \rightarrow M/M_1$ ; así sucesivamente se concluye por noetherianidad. □

## 1.6 Variedades proyectivas

En Geometría Lineal el marco “afín” pronto se muestra excesivamente estrecho y es necesario la introducción de los espacios proyectivos. Lo mismo sucede en Geometría Algebraica, donde habrá que introducir el concepto de variedad proyectiva. Por poner un ejemplo de esta necesidad, digamos que el teorema de Bézout, que afirma que dos curvas planas de grados  $n$  y  $m$ , se cortan en  $n \cdot m$  puntos, es un enunciado en el plano proyectivo, pues es necesario para la validez de este teorema considerar los puntos del infinito.

Del modo más simple, podemos decir que la Geometría Algebraica es el estudio de las soluciones de un sistema de ecuaciones polinómicas en un espacio proyectivo, es decir, el estudio de las variedades algebraicas proyectivas.

En Geometría lineal se define el espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial como el conjunto de rectas del espacio vectorial (que pasan por el origen). En Geometría Algebraica vamos a definir de modo equivalente, a partir de  $\mathbb{A}_n = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , el espacio proyectivo. Las únicas subvariedades  $V$  que queremos considerar en  $\mathbb{A}_n$  son las variedades homogéneas, es decir, las que contengan para todo punto cerrado  $p \in V$  las rectas que pasan por  $p$  y el origen. Así, las subvariedades homogéneas de dimensión menor serán las rectas que pasan por el origen, que se corresponderán con los puntos cerrados del espacio proyectivo que queremos asociarle a  $\mathbb{A}_n$ .

Si  $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$  es una función que se anula en la variedad homogénea  $V$ , escribamos  $p(x_1, \dots, x_n) = p_s(x_1, \dots, x_n) + \dots + p_m(x_1, \dots, x_n)$  como suma de polinomios homogéneos. Tendremos que

$$p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^s p_s(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda^m p_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{en } V, \text{ para todo } \lambda$$

Por tanto,  $p_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  en  $V$ , para todo  $i$ . En conclusión,  $V = (I)_0$ , donde  $I$  es un ideal generado por polinomios homogéneos. Es fácil ver el recíproco, es decir, si  $V = (I)_0$  donde  $I$  es un ideal generado por polinomios homogéneos, entonces para todo punto cerrado  $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V$  las rectas que pasan por  $p$  y el origen están contenidas en  $V$ . En particular, las subvariedades homogéneas  $V \subseteq \mathbb{A}_n$  minimales son las rectas que pasan por el origen.

Diremos que el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_{n-1} = \text{Proj } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  asociado a  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  es el subconjunto de  $\mathbb{A}_n$  de los ideales primos de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  generados por polinomios homogéneos. Si consideramos en  $\mathbb{P}_{n-1}$  la topología inducida por  $\mathbb{A}_n$ , tendremos que los puntos cerrados de  $\mathbb{P}_{n-1}$  se corresponden con las variedades homogéneas de  $\mathbb{A}_n$  de dimensión más pequeña, que son justamente las rectas de  $\mathbb{A}_n$  que pasan por el origen.

En Geometría Proyectiva se demuestra que  $\mathbb{P}_{n-1}$  está recubierto por los subconjuntos  $U_{x_i}^h = \{\text{rectas de } \mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}\} \text{ que pasan por el origen y no yacen en el hiperplano } x_i = 0\}$  y que éstos se corresponden con los puntos del espacio afín  $\mathbb{A}_{n-1}$ , del modo siguiente: El morfismo

$$\mathbb{A}_n - \{x_i = 0\} \rightarrow \mathbb{A}_{n-1}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \right)$$

tiene por fibras las rectas que pasan por el origen y no yacen en el hiperplano  $x_i = 0$ , es decir, induce la igualdad

$$U_{x_i}^h = \{\text{rectas } \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \neq 0\} \xlongequal{\quad} \mathbb{A}_{n-1}$$

$$\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \right)$$

En Álgebra Conmutativa, se prueba que  $U_{x_i}^h = \{x \in \text{Proj } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \text{ que no yacen en } (x_i)_0\}$  se identifica con  $\text{Proj } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_i}$ ; y la composición de los morfismos morfismo

$$\begin{array}{ccc} U_{x_i}^h \hookrightarrow \mathbb{A}_n - (x_i)_0 & \longrightarrow & \mathbb{A}_{n-1} \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \longrightarrow & (\frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i}) \\ \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_i} \longleftarrow \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}] & & \end{array}$$

induce un homeomorfismo  $U_{x_i}^h = \text{Proj } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_i} \simeq \text{Spec } \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$ . Además se prueba que  $\mathbb{P}_{n-1} = \bigcup_i U_{x_i}^h$ .

Procedamos con todo rigor y generalidad.

**1. Definición:** Diremos que un anillo  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$  es un álgebra graduada, si los  $R_i$  son subgrupos de  $R$  con la suma y si para cada  $r_i \in R_i$  y  $r_j \in R_j$ , entonces  $r_i \cdot r_j \in R_{i+j}$

Diremos que  $r_i \in R_i$  es un elemento homogéneo de grado  $i$ .

**2. Definición:** Sea  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$  un álgebra graduada. Diremos que un ideal  $I \subset R$  de un álgebra graduada es homogéneo, si está generado por elementos homogéneos, es decir,  $I = (i_j)_{j \in J}$  con  $i_j \in R_{n_j}$ .

**3. Ejercicio:** Probar que un ideal  $I \subseteq R$  es homogéneo si cumple que si  $f = f_s + f_{s+1} + \dots + f_n \in I$  ( $f_i$  elemento homogéneo de grado  $i$ ) entonces  $f_i \in I$  para todo  $i$ .

Llamaremos ideal irrelevante de  $R$  al ideal  $(\bigoplus_{n \neq 0} R_n)$ .

**4. Definición:** Llamaremos espectro proyectivo de  $R$ , y lo denotaremos  $\text{Proj } R$ , al conjunto de ideales primos homogéneos que no contienen al ideal irrelevante.

Evidentemente  $\text{Proj } R \subset \text{Spec } R$ . Consideraremos  $\text{Proj } R$  como espacio topológico con la topología inicial heredada de la topología de Zariski de  $\text{Spec } R$ . Si denotamos  $(f)_0^h$  a los ideales primos homogéneos que contienen a  $f \in R$  y escribimos  $f = f_n + f_{n+1} \dots + f_m$ , es obvio que  $(f)_0^h = (f_n, \dots, f_m)_0^h = (f_n)_0^h \cap \dots \cap (f_m)_0^h$ . Por tanto, una base de abiertos de la topología de  $\text{Proj } R$  son los abiertos

$$U_f^h = \{x \in \text{Proj } R, f \notin \mathfrak{p}_x\}, \quad (f \text{ homogéneo})$$

Si  $f_m \in R_m$  es un elemento homogéneo, entonces  $R_{f_m}$  es una álgebra homogénea, diciendo que el grado de  $\frac{g_n}{f_m} \in R_{f_m}$  es  $n - mr$ , para cada  $g_n \in R_n$ .

**5. Definición:** Diremos que un morfismo de álgebras  $\phi: R \rightarrow R'$  graduadas es un morfismo graduado de grado  $m \in \mathbb{N}$ , si para cada  $f_n \in R_n$  entonces  $\phi(f_n) \in R'_{nm}$ .

Si  $\phi: R \rightarrow R'$  es un morfismo graduado entonces el morfismo inducido  $\phi^*: \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R$ , aplica ideales primos homogéneos en ideales primos homogéneos. Si suponemos que la imagen del ideal irrelevante por  $\phi$  no está contenido en más ideal primo homogéneo que los que contengan al irrelevante, tenemos definido un morfismo

$$\phi^*: \text{Proj } R' \rightarrow \text{Proj } R, x \mapsto \phi^*(x), \text{ donde } \mathfrak{p}_{\phi^*(x)} = \phi^{-1}(\mathfrak{p}_x)$$

**6. Ejemplo:** Sea  $\phi: k[x_0, x_1, x_2] \rightarrow k[x_0, x_1, x_2]$ ,  $\phi(x_i) = \sum_j \lambda_{ij} x_j$ , de modo que  $|\lambda_{ij}| \neq 0$ . Se cumple que  $\phi$  es un isomorfismo graduado de grado 1, que induce un isomorfismo  $\phi^*: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ . Diremos que  $\phi$  es un cambio de coordenadas homogéneo.

Dejamos que el lector demuestre

**7. Proposición:** 1. Se cumple que  $R \rightarrow R_{f_m}$  es un morfismo de grado uno y

$$U_{f_m}^h = \text{Proj } R_{f_m}$$

2. Si  $I$  es un ideal homogéneo de  $R$  entonces  $R/I$  es un álgebra graduada homogénea, de modo que el morfismo  $R \rightarrow R/I$  es un morfismo graduado de grado uno y

$$\text{Proj}(R/I) = (I)_0^h$$

Dada un álgebra graduada  $R$  denotaremos por  $R_0$  a la subálgebra de  $R$  formada por los elementos de grado cero de  $R$ .

Por sencillez supondremos a partir de ahora que  $R = R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$ , donde cada  $\xi_i$  es de grado 1.

**8. Teorema:** Se verifica

$$1. \text{ Proj } R = \bigcup_{i=0}^n (\text{Proj } R - (\xi_i)_0^h).$$

$$2. (\text{Proj } R - (\xi_i)_0^h) \simeq_* \text{Spec } R_0[\frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i}], \text{ donde } \simeq_* \text{ es un homeomorfismo.}$$

*Demostración.* 1.  $\text{Proj } R = \bigcup_{i=0}^n U_{\xi_i}^h$ , ya que  $\bigcap_{i=0}^n (\xi_i)_0^h = (\xi_0, \dots, \xi_n)_0^h = \emptyset$  (pues  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  es el ideal irrelevante).

2. Hemos sobrentendido que  $R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  es el subanillo obvio de  $R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \xi_i^n \cdot R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ .

La composición de los dos morfismos naturales  $\text{Proj } R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} \hookrightarrow \text{Spec } R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} \rightarrow \text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ ,  $\mathfrak{p} \mapsto (\mathfrak{p} \cap R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i])$ , va a ser el homeomorfismo buscado.

Es obvio que todo primo homogéneo  $\mathfrak{p}$  de  $R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i}$  está determinado por sus elementos homogéneos de grado cero, es decir, por  $\mathfrak{p} \cap R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ . Es fácil comprobar que dado un ideal primo  $\mathfrak{q} \subset R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  entonces  $\mathfrak{q} \cdot R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} = \bigoplus \xi_i^n \cdot \mathfrak{q}$  es un ideal primo homogéneo de  $R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i}$ . Con lo que obtenemos una biyección

$$\text{Proj } R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} \stackrel{*}{=} \text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$$

$$\mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p} \cap R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$$

$$\mathfrak{q} \cdot R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} \longleftarrow \mathfrak{q}$$

A través de esta identificación  $(f_n)_0^h = (f_n/\xi_i^n)_0^* = (f_n/\xi_i^n)_0$  en  $\text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ . Es decir,  $\stackrel{*}{=}$  es un homeomorfismo. □

Diremos que  $U_{\xi_i}^h$  es un abierto afín de  $\text{Proj } R$ .

**9. Ejercicio:** Demostrar que  $R_0[\frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i}] \simeq R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]/(\xi_i - 1)$  y que por tanto,  $U_{\xi_i}^h \simeq (\xi_i - 1)_0$ . Probar que  $U_{\xi_i}^h \times (\mathbb{A}_1 - \{0\}) = U_{\xi_i}$ . Dar una interpretación geométrica de estos resultados.

**10. Ejercicio:** Demostrar que el conjunto de puntos cerrados de  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  es biyectivo con el conjunto  $\mathbb{C}^{n+1}/\sim$ , donde  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \sim (\alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$  si  $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_n) = (\lambda \cdot \alpha_0, \dots, \lambda \cdot \alpha_n)$ .

**11. Ejercicio:** 1. En cada uno de los abiertos “afines” de la curva proyectiva compleja plana  $\text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$  complementario de los cerrados  $(x_i)_0^h$ , escribir las ecuaciones de la curva (“deshomogeneizar”).

2. Demostrar que el epimorfismo  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$  define una inmersión cerrada  $\text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \hookrightarrow \mathbb{P}_2$

3. Definir una curva proyectiva plana que en uno de los abiertos afines sea la curva plana “afín”  $y + x^2 = 0$ . ¿Corta la recta  $x = 0$ , a la curva  $y + x^2 = 0$ , en algún punto del “infinito”?

**12. Ejemplo:**  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_n = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]$ . En general,  $\text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]/I$ , donde  $I$  es un ideal homogéneo; recordemos que  $(I)_0^h = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]/I$ .

## 1.7 Problemas

1. Probar que si  $A$  es un anillo íntegro entonces  $(0)$  es irreducible. Probar que los ideales primos son irreducibles.
2. Probar que en  $k[x, y]$  se cumple que  $(x) \cap (x, y)^2 = (x) \cap (y, x^2)$  ¿Son las descomposiciones primarias únicas?
3. Sea  $\mathfrak{m} \subset A$  un ideal maximal y  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$  un ideal primo tal que  $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$  ¿Puede ser  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2$  un ideal primario?
4. Probar que los ideales primos asociados al ideal cero de un anillo noetheriano  $A$ , son los ideales primos de  $A$  que coinciden con el anulador de algún elemento de  $A$ .
5. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo noetheriano local de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Sea  $I \subset \mathcal{O}$  un ideal tal que  $r(I) = \mathfrak{m}$ . Probar que  $\mathfrak{m}^r \subseteq I$  precisamente cuando  $\overline{\mathfrak{m}^r} \subseteq \bar{I}$  en  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{r+1}$ .
6. Calcular la descomposición primaria de  $I = (xy, -y + x^2 + y^2)$  en  $\mathbb{C}[x, y]$ .
7. Calcular una descomposición primaria reducida de los ideales
  - (a)  $I = (x, y) \cdot (x, y - 1)$  en  $\mathbb{C}[x, y]$ .
  - (b)  $I = (x) \cdot (x, y) \cdot (x, y - 1)$  en  $\mathbb{C}[x, y]$ .
8. Hallar la descomposición primaria del ideal generado en  $\mathbb{C}[x, y]$  por las ecuaciones de:
  - (a) Un par de rectas y una recta.
  - (b) Una recta doble y una recta.
  - (c) Una cónica no singular y una recta.
  - (d) Una cónica no singular y un par de rectas.
  - (e) Una cónica no singular y una recta doble.
9. Calcular la multiplicidad de intersección en el origen de la curva  $y^2 = x^2 + y^3$  con la curva  $y^3 + x^2 = 0$ . Es decir, calcular  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 - y^3, y^3 + x^2))_x$ , donde  $x$  es el origen.

10. Definir el grupo multiplicativo  $G_m$  de los elementos no nulos de un cuerpo  $k$ , como variedad algebraica sobre  $k$ , así como los morfismos  $G_m \times G_m \rightarrow G_m$  y  $G_m \rightarrow G_m$  correspondientes al producto y paso al inverso. Análogamente para el grupo aditivo  $G_a$  de los elementos de  $k$  con la operación de la suma de  $k$ .
11. Sea  $\mu_6 = \text{Spec } k[x]/(x^6 - 1)$  el grupo de las raíces sextas de la unidad sobre un cuerpo  $k$ . Determinar si es una variedad íntegra o reducida, y calcular el número de componentes irreducibles cuando  $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .
- Definir los morfismos  $\mu_6 \times \mu_6 \rightarrow \mu_6, \mu_6 \rightarrow \mu_6$  correspondientes a la noción intuitiva de producto y paso al inverso en este grupo. Definir el concepto de morfismo de grupos  $\mu_6 \rightarrow \mu_6$  y del núcleo del mismo. Probar entonces que  $\psi: \mu_6 \rightarrow \mu_6, \alpha \mapsto \alpha^2$ , es morfismo de grupos y calcular el núcleo.
12. Sea  $X$  una variedad algebraica afín íntegra. Si dos morfismos de  $X$  en otra variedad algebraica afín coinciden en un abierto no vacío de  $X$ , probar que coinciden en  $X$ .
13. Poner un ejemplo de variedad algebraica que sea la unión de dos componentes no disjuntas, una de dimensión 2, la otra de dimensión 1.
14. Sean  $X, Y$  variedades algebraicas íntegras sobre un cuerpo  $k$  y sean  $\Sigma_X, \Sigma_Y$  sus respectivos cuerpos de funciones racionales. Si  $\phi: Y \rightarrow X$  es un morfismo que transforma el punto genérico de  $Y$  en el punto genérico de  $X$  (lo que equivale a que tenga imagen densa), induce un morfismo de  $k$ -álgebras  $\Sigma_X \rightarrow \Sigma_Y$ . Diremos que  $\phi$  es un morfismo de *grado  $n$*  cuando  $\Sigma_Y$  sea una extensión finita de grado  $n$  de  $\Sigma_X$ . Los morfismos de grado 1 se llaman morfismos birracionales. Diremos que  $X$  e  $Y$  son birracionalmente equivalentes si sus cuerpos de funciones racionales son extensiones de  $k$  isomorfas:  $\Sigma_X \simeq \Sigma_Y$ . Las variedades algebraicas birracionalmente equivalentes a un espacio afín se llaman racionales. Es decir, una variedad algebraica sobre  $k$  es racional si su cuerpo de funciones racionales es isomorfo a un cuerpo de fracciones racionales  $k(x_1, \dots, x_n)$  con coeficientes en  $k$ .
- (a) Sea  $C$  la cúbica plana  $y^2 = x^2 + x^3$ . El haz de rectas  $y = tx$  define un morfismo birracional  $\mathbb{A}_1 \rightarrow C, x = t^2 - 1, y = t^3 - t$ . Calcular el área del “ojo del lazo” definido por la curva  $y^2 = x^2 + x^3$ .
- (b) Sea  $C$  la cúbica plana  $y^2 = x^3$ . El haz de rectas  $y = tx$  define un morfismo birracional  $\mathbb{A}_1 \rightarrow C, x = t^2, y = t^3$ .
15. Supóngase conocido el siguiente resultado: “Si  $k \hookrightarrow K$  es una extensión finita de cuerpos de característica cero, entonces existe un  $\xi \in K$  de modo que  $K = k(\xi)$ ”. Demostrar que toda variedad algebraica íntegra, sobre  $\mathbb{C}$ , es birracionalmente isomorfa a una hipersuperficie de un espacio afín.
16. Sea  $k \hookrightarrow K$  una extensión finita de cuerpos y  $X = \text{Spec } A$  una  $k$ -variedad algebraica. Probar que el morfismo natural  $X_K = \text{Spec } A \otimes_k K \rightarrow X = \text{Spec } A$  de cambio de base es epiyectivo y cerrado.
17. Sea  $A$  un anillo íntegro y  $a \in A$  no invertible, ni nula. Probar que el morfismo de localización  $A \rightarrow A_a$  no es finito.

18. Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo de anillos de modo que  $B = \cup B_i$ , donde  $B_i$  son  $A$ -álgebras finitas (es decir, " $A \rightarrow B$  es un morfismo entero"). Probar que el morfismo  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es cerrado de fibras de dimensión cero.
19. Sean  $p(x, y)$  y  $q(x, y)$  polinomios de  $k[x, y]$  sin factores comunes. Demostrar que  $k[x, y]/(p(x, y), q(x, y))$  es una  $k$ -álgebra finita.
20. Sea  $\mathfrak{m} \subset k[x_1, \dots, x_n]$  un ideal maximal. Probar que  $\mathfrak{m}$  está generado por  $n$  funciones ¿Puede estar generado por  $n - 1$  funciones?
21. Sea  $\pi: X = \text{Spec } A \rightarrow \mathbb{A}_1 = \text{Spec } k[x]$  un morfismo finito y supongamos que  $X$  es una variedad algebraica íntegra (de dimensión 1). Probar que el número de puntos de las fibras de  $\pi$  es constante.
22. Probar que el morfismo  $k[x] \hookrightarrow k[x, y]/(p(x, y))$  es finito si y sólo si la curva  $p(x, y) = 0$  no tiene asíntotas verticales.
23. Calcular las asíntotas imaginarias de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .
24. Probar que el conjunto de rectas que pasan por un punto ("haz de rectas") del plano afín se corresponde con el conjunto de puntos racionales de una recta proyectiva.
25. Probar que el conjunto de cónicas que pasan por cuatro puntos no alineados del plano afín se corresponden con los puntos racionales de una recta proyectiva.
26. Probar que el conjunto de cónicas que pasan tres puntos no alineados del plano afín y es tangente en uno de ellos a una recta fijada que pasa por el punto se corresponden con los puntos racionales de una recta proyectiva.
27. Probar que el conjunto de curvas de grado  $n$  de  $\mathbb{P}_2$  se corresponden con los puntos racionales de un espacio proyectivo.
28. Probar que el conjunto de curvas afines de grado menor o igual que  $n$  de  $\mathbb{A}_2$  se corresponden con los puntos racionales de un abierto de un espacio proyectivo.
29. Se dice que en general los puntos de una variedad algebraica irreducible cumplen una propiedad si existe un abierto de la variedad cuyos puntos cumplen la propiedad. Probar que en general las curvas planas afines de grado  $n$  son irreducibles.
30. Demostrar que en general las matrices cuadradas son invertibles. Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas de orden  $n$ , probar que  $c_{A \cdot B}(x) = c_{B \cdot A}(x)$ .

# Capítulo 2

## Completación

### 2.1 Introducción

Vamos a iniciar el estudio local, en un entorno de un punto, de las variedades algebraicas. Es decir, del estudio del anillo local de los gérmenes de las funciones algebraicas de una variedad en un punto.

En las siguientes secciones abordamos la completación de un anillo en un punto. Esta técnica consiste en tomar los desarrollos de Taylor de las funciones en el punto. Así, el proceso de completación puede entenderse como una aproximación algebraico-analítica al estudio de las variedades. El completado del anillo de funciones algebraicas de una variedad en un punto reflejará las propiedades locales de la variedad en el punto. Si bien el proceso de completación es más drástico que el de localización. Por ejemplo, los anillos locales de una recta afín y los de una cúbica plana sin puntos singulares no son isomorfos pues no lo son sus cuerpos de funciones, sin embargo, los completados de sus anillos locales si son isomorfos (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado).

Demostraremos, mediante Artin-Rees, que el morfismo de completación  $A \rightarrow \widehat{A}$  es plano. La estructura de  $\widehat{A}$  es más sencilla que la de  $A$ . Así, gracias a la platitud del morfismo de completación, muchos problemas se pueden simplificar estudiándolos en  $\widehat{A}$ .

Nuestros objetivos serán demostrar las propiedades de exactitud de la completación, que la completación de un anillo noetheriano es noetheriano, que el morfismo de completación es plano y el teorema de Cohen. El teorema de Cohen es un teorema de estructura de los anillos completos. Afirma que, en general, la completación de un anillo local noetheriano es un cociente de un anillo de series formales, como sucede con los anillos de funciones de las variedades algebraicas.

### 2.2 Completación

**1. Definición:** Una filtración de un  $A$ -módulo  $M$  es una cadena de submódulos

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

Dada una filtración  $\{M_i\}$  podemos definir una topología en  $M$ : Una base de entornos de cada  $m \in M$  es  $\{m + M_i\}$ .

Esta topología viene definida por la pseudométrica  $d$ :

$$d(m_1, m_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-n} & \text{si } m_1 - m_2 \in M_n, \text{ y } m_1 - m_2 \notin M_{n+1} \\ 0 & \text{si } m_1 - m_2 \in M_n \text{ para todo } n \end{cases}$$

Una vez que hemos definido  $d$ , podemos hablar de sucesiones convergentes, de sucesiones de Cauchy y la completación de  $M$  por  $d$ .

**2. Definición:** Se define la completación de  $M$  respecto de la topología definida por una filtración como el  $A$ -módulo  $\widehat{M}$

$$\widehat{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{Mód. de sucesiones de Cauchy}\} / \{\text{Mód. de sucesiones converg. a cero}\}$$

**3. Proposición:**  $\widehat{M} = \varprojlim_{j \in \mathbb{N}} M/M_j$ .

*Demostración.* Sea  $(\bar{m}_i) \in \varprojlim_{j \in \mathbb{N}} M/M_j$  (luego  $\bar{m}_{i+r} = \bar{m}_i$  en  $M/M_i$ ). La sucesión  $(m_i)$  es de Cauchy, porque dado  $e^{-j}$  entonces  $d(m_r, m_s) < e^{-j}$ , para todo  $r, s \geq j$ . Así pues, tenemos definido el morfismo

$$\varprojlim_{j \in \mathbb{N}} M/M_j \rightarrow \widehat{M}, (\bar{m}_i) \mapsto [(m_i)]$$

Dejamos como ejercicio la comprobación de que está bien definido.

Recíprocamente. Sea  $(m_i)$  una sucesión de Cauchy. Dado  $e^{-j}$ , existe  $n_j \in \mathbb{N}$  de modo que  $d(m_r, m_s) < e^{-j}$ , para todo  $r, s \geq n_j$ . Es decir,  $m_r - m_s \in M_j$  para todo  $r, s \geq n_j$ , i.e.,  $\bar{m}_r = \bar{m}_s \in M/M_j$  para todo  $r, s \geq n_j$ .

Observemos que el morfismo

$$\{\text{Mód. de sucesiones de Cauchy}\} \rightarrow M/M_j, (m_i) \mapsto \bar{m}_{n_j}$$

no depende del  $n_j \gg 0$  escogido. En particular, dada una sucesión  $(m_i)$  convergente a cero, se tiene que  $\bar{m}_{n_j} = 0$ . Por tanto, los morfismos

$$\widehat{M} \rightarrow M/M_j, [(m_i)] \mapsto \bar{m}_{n_j}$$

están bien definidos y definen el morfismo

$$\widehat{M} \rightarrow \varprojlim_{j \in \mathbb{N}} M/M_j, [(m_i)] \mapsto (\bar{m}_{n_j})$$

Dejamos como ejercicio la comprobación de que estas asignaciones son inversas entre sí. □

**4. Observación:** Un ejemplo de sucesión de Cauchy lo constituyen las series  $\sum_{i=0}^{\infty} m_i$  ( $m_i \in M_i$ ). Es más, toda sucesión de Cauchy es equivalente a una serie de esta forma: Por la proposición anterior, basta verlo para la sucesión de Cauchy  $(n_i)$ , con  $(\bar{n}_i) \in \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} M/M_i$  ( $\bar{n}_{i+1} = \bar{n}_i \in M/M_i$ ). Tenemos que

$n_{i+1} - n_i = m_i \in M_i$ . Por tanto,  $n_1 = m_0$ ;  $n_2 = m_1 + n_1 = m_1 + m_0$ ;  $n_3 = m_2 + n_2 = m_2 + m_1 + m_0$ , etc. Así pues,

$$\widehat{M} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} m_i, m_i \in M_i \right\} / \{\text{Series converg. a cero}\}$$

**5. Proposición:**  $M$  con la filtración  $\{M_n\}$  es separado  $\iff \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0 \iff M \hookrightarrow \widehat{M}$ .

*Demostración.* El núcleo del morfismo  $M \rightarrow \widehat{M} = \varprojlim_i M/M_i$  es  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0$ . Luego,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0$

$\Leftrightarrow M \hookrightarrow \widehat{M}$ .

Si  $M$  es separado, dado  $m \in M$  existe un entorno  $M_n$  del cero que no contiene a  $m$ , es decir,  $m \notin M_n$ . Luego  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0$ .

Si  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0$ , entonces  $d$  es una distancia, porque si  $d(m, m') = 0$  esto significa que  $m - m' \in M_n$  para todo  $n$ , es decir que  $m - m' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0$ , luego  $m = m'$ . Luego  $M$  es separado.  $\square$

Dadas dos filtraciones de  $A$ -módulos  $\{M_i\}$  y  $\{N_i\}$  de  $M$  y  $N$  respectivamente, un morfismo de filtraciones es un morfismo de  $A$ -módulos  $f: M \rightarrow N$  tal que  $f(M_n) \subseteq N_n$ . Evidentemente un morfismo  $f: M \rightarrow N$  de filtraciones induce un morfismo

$$\widehat{f}: \widehat{M} = \varprojlim_i M/M_i \rightarrow \widehat{N} = \varprojlim_i N/N_i$$

**6. Teorema:** Sea  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$  una sucesión exacta de  $A$ -módulos y  $\{M_i\}$  una filtración de  $M$ . Si se consideran en  $M'$  y  $M''$  las filtraciones inducidas  $\{M' \cap M_i\}$ ,  $\{\pi(M_i)\}$ , la sucesión de completados

$$0 \rightarrow \widehat{M}' \rightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widehat{M}'' \rightarrow 0$$

es exacta. “Completar conserva sucesiones exactas”.

*Demostración.* Tenemos las sucesiones exactas de sistemas proyectivos

$$0 \rightarrow M'/M' \cap M_i \rightarrow M/M_i \xrightarrow{\pi} M''/\pi(M_i) \rightarrow 0$$

Por tanto, como el límite proyectivo es exacto por la izquierda tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \widehat{M}' \rightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widehat{M}''$$

Sólo nos falta ver la epiyectividad de  $\widehat{\pi}$ : Dada una serie  $\sum_{i=0}^{\infty} m_i''$ , con  $m_i'' \in \pi(M_i)$ , sean  $m_i \in M_i$  tales que  $\pi(m_i) = m_i''$ . Es obvio que  $\widehat{\pi}(\sum_{i=0}^{\infty} m_i) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i''$ , luego por la observación anterior hemos concluido.  $\square$

**7. Corolario:**  $\widehat{M}_n$  es un submódulo de  $\widehat{M}$  y  $\widehat{M}/\widehat{M}_n = M/M_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Por el teorema  $\widehat{M}_n \hookrightarrow \widehat{M}$  y  $\widehat{M}/\widehat{M}_n = (\widehat{M}/\widehat{M}_n)$ . Ahora bien,  $(\widehat{M}/\widehat{M}_n) = \varprojlim_i (M/M_n)/[M_i] = \varprojlim_{i > n} (M/M_n)/[M_i] = \varprojlim_{i > n} M/M_n = M/M_n$ , con lo que concluimos.  $\square$

**8. Corolario:**  $\widehat{M}$  es completo y separado, respecto de la topología definida por la filtración  $\{\widehat{M}_n\}$ , es decir,  $\widehat{\widehat{M}} = \widehat{M}$ .

*Demostración.* Es una consecuencia directa del corolario anterior y 2.2.5.  $\square$

**9. Definición:** Se define el graduado de  $M$  por la filtración  $\{M_n\}$  como el módulo  $GM = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i/M_{i+1}$ .

**10. Corolario:** Si consideramos en  $M$  una filtración  $\{M_n\}$  y en  $\widehat{M}$  la filtración  $\{\widehat{M}_n\}$ , se verifica que  $GM = G\widehat{M}$ .

*Demostración.* Completando  $0 \rightarrow M_{n+1} \rightarrow M_n \rightarrow M_n/M_{n+1} \rightarrow 0$  obtenemos que  $M_n/\widehat{M}_{n+1} = \widehat{M}_n/\widehat{M}_{n+1}$ . Como  $M_n/\widehat{M}_{n+1} = M_n/M_{n+1}$ , tenemos que  $M_n/M_{n+1} = \widehat{M}_n/\widehat{M}_{n+1}$ . En conclusión,  $GM = G\widehat{M}$ .  $\square$

## 2.3 Ejemplos de completaciones y graduados

**1. Ejemplo:**  $\lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_\alpha^n = \mathbb{R}[[x - \alpha]]$ , donde el  $\mathfrak{m}_\alpha$  es el ideal de funciones diferenciables que se anulan en  $\alpha \in \mathbb{R}$ . El morfismo natural  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_\alpha^n = \mathbb{R}[[x - \alpha]]$  asigna a cada función su desarrollo de Taylor en  $\alpha$ .

**2. Ejemplo:**  $\lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} k[x]/(x)^n = k[[x]]$ . El morfismo  $k[x] \rightarrow \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} k[x]/(x)^n = k[[x]]$ , es el morfismo que considera cada polinomio como una serie.

**3. Ejemplo:** Números  $p$ -ádicos  $\hat{\mathbb{Z}}_p \stackrel{\text{Not}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p^n, 0 \leq a_i < p \}$ . El morfismo natural  $\mathbb{N} \rightarrow \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p^n, 0 \leq a_i < p \}$  asigna a cada número natural su desarrollo como suma de potencias de  $p$ .

El espacio tangente a una variedad diferenciable en un punto es un concepto intrínseco, que no depende de la inmersión de la variedad diferenciable en un  $\mathbb{R}^n$ . El espacio tangente a una variedad en un punto se define en términos de su anillo de funciones diferenciables. Ya sabemos que la diferencial de una función en un punto y los módulos de diferenciales de Kähler son conceptos algebraicos. En esta sección, dado un anillo local, definiremos el espacio tangente en el punto cerrado. Será trivial observar que si el anillo local es noetheriano su espacio tangente es una variedad algebraica. Más adelante, con la ayuda imprescindible del polinomio de Samuel, desarrollaremos la teoría de la dimensión de los anillos locales noetherianos, a través de sus espacios tangentes.

Comencemos con un ejemplo sencillo. Consideremos el nodo en el plano afín  $y^2 - x^2 + x^3 = 0$ . El cono tangente en el origen del nodo es aquella variedad homogénea que mejor se aproxima al nodo. El nodo “infinitesimalmente” en el origen es equivalente a  $y^2 - x^2 = 0$ . Así pues, diremos que el cono tangente a  $y^2 - x^2 + x^3 = 0$  en el origen es  $y^2 - x^2 = 0$ . En general, si una subvariedad  $X \subset \mathbb{A}_n$ , viene definida por los ceros de un ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , entonces el cono tangente  $C_x X$  en el origen es la variedad definida por el ideal  $I_h = (f_r)_{f \in I}$ , donde  $f_r$  es la parte homogénea de grado más pequeño de  $f$ . Es decir, si pensamos que  $X$  es la intersección de las variedades  $f = 0$ , con  $f \in I$ , entonces el cono tangente es la intersección de las variedades homogéneas  $f_r = 0$ .<sup>1</sup>

¿Cómo construir  $I_h$ ? Consideremos el ideal maximal  $\mathfrak{m}_x = (x_1, \dots, x_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]/I$  de las funciones de  $X$  que se anulan en el origen. Se verifica que

$$\mathfrak{m}_x^r/\mathfrak{m}_x^{r+1} = \{\text{Polinomios homogéneos } p(x_1, \dots, x_n) \text{ de grado } r\} / \{f_r\}_{f=f_r+\dots+f_n \in I}$$

Por tanto,  $\bigoplus_r \mathfrak{m}_x^r/\mathfrak{m}_x^{r+1} = k[x_1, \dots, x_n]/I_h$ . Hemos llamado a  $\text{Spec} \bigoplus_r \mathfrak{m}_x^r/\mathfrak{m}_x^{r+1}$  el cono tangente de  $X$  en  $x$ .

<sup>1</sup>Debemos advertir que debemos tomar todas las  $f \in I$  y que no basta con tomar un sistema generador

Demos ahora las definiciones con toda precisión y mayor generalidad.

**4. Definición:** Sea  $\mathfrak{m}_x \subset A$  un ideal maximal, se define el cono tangente en  $x$  de  $\text{Spec } A = X$ , como  $C_x X := \text{Spec } GA = \text{Spec } \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}_x^i / \mathfrak{m}_x^{i+1}$ .

**5. Ejemplo:** El cono tangente de un espacio afín en el origen es isomorfo al espacio afín.

**6. Ejemplo:** El cono tangente en el origen de la curva  $\text{Spec } k[x, y, z]/(y + x + x^3 + y^4, y - x + x^2)$  es la recta  $\text{Spec } k[x, y, z]/(y + x, y - x) = \mathbb{A}_1$

**7. Ejemplo:** El espacio tangente de la intersección de dos hipersuperficies transversales es la intersección de los espacios tangentes. Con más precisión:

Consideremos en el espacio afín  $\mathbb{A}_3 = \text{Spec } k[x_1, x_2, x_3]$  las superficies  $f_1(x, \dots, x_3) = 0, f_2(x, \dots, x_3) = 0$ . Sea  $f_{1,n}, f_{2,m}$  las componentes homogéneas de grado menor de  $f_1, f_2$ . Si  $f_{1,m}$  y  $f_{2,m}$  son primos entre sí, entonces el cono tangente, en el origen, de la intersección de las superficies es la intersección de los conos tangentes de las superficies (véase 5.3.3).

## 2.4 Topología $I$ -ádica. Completación $I$ -ádica

Todos los ejemplos de completación que hemos dado son casos particulares de completación  $I$ -ádica. Restrinjámonos a esta situación.

Sea  $I$  un ideal de un anillo  $A$  y  $\{M_n\}$  una filtración de un  $A$ -módulo  $M$ . Diremos que  $\{M_n\}$  es una  $I$ -filtración si se verifica  $IM_n \subseteq M_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Diremos que la  $I$ -filtración es  $I$ -estable si existe un  $h \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > h$  se verifica que  $IM_n = M_{n+1}$ .

**1. Proposición:** *Todas las filtraciones  $I$ -estables de un  $A$ -módulo  $M$  definen la misma topología. Es más, se verifica que dadas dos filtraciones  $\{M_n\}, \{M'_n\}$   $I$ -estables de  $M$ , existe un  $h$  tal que*

$$\begin{cases} M_{n+h} \subseteq M'_n & \text{para todo } n \\ M'_{n+h} \subseteq M_n & \text{para todo } n \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $h \in \mathbb{N}$  de modo que para todo  $n \geq h$  se verifique que  $IM_n = M_{n+1}$  y  $IM'_n = M'_{n+1}$ . Entonces,  $M_{n+h} = I^n M_h \subseteq I^n M \subseteq M'_n$  y  $M'_{n+h} = I^n M'_h \subseteq I^n M \subseteq M_n$ .  $\square$

**2. Definición:** Dado un ideal  $I \subset A$  y un  $A$ -módulo  $M$ , diremos que la filtración  $I$ -estable  $M \supseteq IM \supseteq I^2 M \supseteq \dots \supseteq I^n M \supseteq \dots$  es la filtración  $I$ -ádica.

La topología definida por cualquier filtración  $I$ -estable se denomina la topología  $I$ -ádica.

De ahora en adelante, completar se entenderá que es completar respecto de la topología  $I$ -ádica.

**3. Proposición:** *Si  $I$  es un ideal finito generado, por ejemplo si  $A$  es un anillo noetheriano, entonces  $\widehat{I^n M} = I^n \widehat{M}$ .*

*Demostración.* Sabemos que  $\widehat{I^n M} \subseteq \widehat{M}$  por 2.2.7. Veamos que  $I^n \widehat{M} \subseteq \widehat{I^n M}$ : Dado  $b \in I^n$  y  $\sum_{j=0}^{\infty} m_j \in \widehat{M}$ , con  $m_j \in I^j M$ , entonces  $b \cdot \sum_{j=0}^{\infty} m_j = \sum_{j=0}^{\infty} b m_j \in \widehat{I^n M}$ .

Nos falta probar  $\widehat{I^n M} \subseteq I^n \widehat{M}$ : Tenemos que  $\widehat{I^n M} = \{ \sum_{j \geq n} m_j, m_j \in I^j M \}$ . Como  $I$  es finito generado entonces  $I^n$  es finito generado. Escribamos  $I^n = (b_1, \dots, b_r)$ . Luego dado  $m_j \in I^j M = I^n I^{j-n} M$  tendremos que  $m_j = b_1 m'_{j_1} + \dots + b_r m'_{j_r}$ , con  $m'_{j_i} \in I^{j-n} M$ . Por tanto,

$$\sum_{j \geq n} m_j = b_1 \sum_{j \geq n} m'_{j_1} + \dots + b_r \sum_{j \geq n} m'_{j_r} \in I^n \widehat{M}$$

y hemos concluido.  $\square$

**4. Corolario :** Si  $I$  es un ideal finito generado, por ejemplo si  $A$  es un anillo noetheriano, el completado de un módulo por la topología  $I$ -ádica es completo y separado para la topología  $I$ -ádica, i.e.,  $\widehat{\widehat{M}} = \widehat{M}$ . Además,  $\widehat{M}/I^n\widehat{M} = M/I^nM$  y  $G\widehat{M} = GM$ .

*Demostración.* Es una consecuencia directa de la proposición anterior y 2.2.7, 2.2.8, 2.2.10.  $\square$

## 2.5 Artin-Rees

El teorema de Artin-Rees será fundamental para demostrar que la completación  $I$ -ádica es exacta (para módulos finito generados), para demostrar que el morfismo de completación es plano y en la teoría de la dimensión para demostrar, mediante el polinomio de Samuel, el teorema del ideal principal de Krull.

**1. Definición :** Dado un ideal  $I \subset A$ , llamaremos

$$DA = A \oplus I \oplus I^2 \dots$$

“dilatado de  $A$  por  $I$  o anillo de Rees en  $I$ ”. En general dado un  $A$ -módulo  $M$  y una  $I$ -filtración  $\{M_n\}$ , llamaremos dilatado de  $M$  por la  $I$ -filtración a  $DM = M \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$ .

**2. Definición :** Diremos que  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es un anillo graduado si los  $A_i$  son subgrupos aditivos de  $A$  y para cada  $a_i \in A_i$  y  $a_j \in A_j$  entonces  $a_i \cdot a_j \in A_{i+j}$ .

Observemos que  $DA$  es un anillo graduado. Si  $A$  es noetheriano entonces  $I = (\xi_1, \dots, \xi_r)$  es finito generado. El morfismo

$$\begin{array}{ccc} A[x_1, \dots, x_r] & \rightarrow & DA = A \oplus I \oplus \dots \oplus I^n \oplus \dots \\ x_i & \mapsto & \xi_i \end{array}$$

es epiyectivo, luego  $DA$  es noetheriano.

**3. Definición :** Sea  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$  un anillo graduado. Diremos que un  $A$ -módulo  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$  es un  $A$ -módulo graduado si para cada  $a_i \in A_i$  y  $m_j \in M_j$  entonces  $a_i m_j \in M_{i+j}$ .

Observemos que  $DM$  es un  $DA$ -módulo graduado.

**4. Lema :** Sea  $A$  noetheriano,  $M$  un  $A$ -módulo finito generado y  $\{M_n\}$  una  $I$ -filtración. La filtración es  $I$ -estable  $\iff DM$  es un  $DA$ -módulo finito generado.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\{M_n\}$  es  $I$ -estable, i.e., existe un  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $\{M_n\} = \{M_0, \dots, M_r, IM_r, I^2M_r, \dots\}$ . Observemos que el  $DA$ -submódulo de  $DM$  generado por  $M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \subset DM$  es  $M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \oplus IM_r \oplus I^2M_r \oplus \dots$ . Por tanto,  $DM = \langle M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \rangle$  es finito generado, porque  $M, M_1, \dots, M_r$  son  $A$ -módulos finito generados.

$\Leftarrow$ ) Recíprocamente. Supongamos que  $DM = \langle n_1, \dots, n_s \rangle$  es finito generado. Podemos suponer que los  $n_i$  son homogéneos. Sea  $r = \max\{\text{gr } n_i, 1 \leq i \leq s\}$ . Entonces  $DM = \langle n_1, \dots, n_s \rangle = \langle M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \rangle = M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \oplus IM_r \oplus I^2M_r \oplus \dots$ . Luego la filtración es  $I$ -estable.  $\square$

**5. Teorema de Artin-Rees** Sea  $A$  noetheriano,  $M$  un  $A$ -módulo finito generado y  $M' \subset M$  un submódulo. Consideremos en  $M$  la topología  $I$ -ádica. Se verifica que la topología inicial de  $M'$ , por la inclusión  $M' \subset M$  es la topología  $I$ -ádica de  $M'$ . Es más, la filtración  $\{M' \cap I^n M\}$  es  $I$ -estable.

*Demostración.* Consideremos en  $M'$  la  $I$ -filtración  $\{M' \cap I^n M\}$  y en  $M$  la  $I$ -ádica.  $DM'$  es un  $DA$ -submódulo de  $DM$ , donde  $DA$  es noetheriano y  $DM$  es finito generado, por el lema anterior. Entonces  $DM'$  es finito generado y de nuevo, por el lema anterior,  $\{M' \cap I^n M\}$  es  $I$ -estable.  $\square$

**6. Corolario :** Sea  $A$  noetheriano. La completación  $I$ -ádica de sucesiones exactas de  $A$ -módulos finito generados es exacta, i.e., si

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de  $A$ -módulos finito generados entonces

$$0 \rightarrow \widehat{M}' \rightarrow \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}'' \rightarrow 0$$

es exacta.

*Demostración.* Sabemos que si completamos  $M'$  por la filtración  $\{M' \cap I^n M\}$ ,  $M$  por la filtración  $\{I^n M\}$  y  $M''$  por la filtración  $\{I^n M''\}$ , entonces la sucesión completada es exacta. Ahora bien, por Artin-Rees la filtración  $\{M' \cap I^n M\}$  es  $I$ -estable, luego completar por ella es completar por la  $I$ -ádica y hemos terminado.  $\square$

**7. Ejercicio :** Consideremos en el anillo  $k[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$  el ideal maximal  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Probar que  $k[x, y]/(\widehat{y^2 - x^2 + x^3}) = k[[x, y]]/(y^2 - x^2 + x^3)$ . Probar que  $y^2 - x^2 + x^3$  descompone en producto de dos series ("ramas"), que se corresponden con los dos ideales primos minimales del anillo completo considerado.

**8. Ejercicio :** Calcular la completación de  $k[x_1, \dots, x_n]/(p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_r(x_1, \dots, x_n))$  por el ideal  $(x_1, \dots, x_n)$ .

**9. Corolario :** Sea  $A$  noetheriano y  $M$  un  $A$ -módulo finito generado,

$$M \otimes_A \widehat{A} = \widehat{M}$$

*Demostración.* Si  $M$  es finito generado existe un epimorfismo

$$A \oplus \dots \oplus A = A^n \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

$\text{Ker } \pi$  es un submódulo de  $A^n$ , luego es finito generado y existe un epimorfismo  $A^m \rightarrow \text{Ker } \pi \rightarrow 0$ . En conclusión, existe una sucesión exacta

$$A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (*)$$

Tensorializando por  $\otimes_A \widehat{A}$  tenemos la sucesión exacta

$$A^m \otimes_A \widehat{A} = \widehat{A}^m \rightarrow A^n \otimes_A \widehat{A} = \widehat{A}^n \rightarrow M \otimes_A \widehat{A} \rightarrow 0$$

Ahora bien, como la completación de  $(*)$  es la sucesión exacta

$$\widehat{A}^m = \widehat{A}^m \rightarrow \widehat{A}^n = \widehat{A}^n \rightarrow \widehat{M} \rightarrow 0$$

obtenemos que  $M \otimes_A \widehat{A} = \widehat{M}$ .  $\square$

**10. Corolario:** Si  $A$  es noetheriano, el morfismo  $A \rightarrow \widehat{A}$  es plano.

*Demostración.* Tenemos que ver que dada una sucesión exacta de  $A$ -módulos

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

entonces

$$0 \rightarrow M' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M'' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow 0$$

es exacta. Como tensorializar es exacto por la derecha, sólo tenemos que ver que dada la sucesión exacta  $0 \rightarrow M' \rightarrow M$  entonces  $0 \rightarrow M' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M \otimes_A \widehat{A}$  es exacta.

Si  $M'$  y  $M$  fuesen finitamente generados, lo tendríamos demostrado, por el corolario anterior, porque  $\otimes_A \widehat{A}$  es completación.

$M = \varinjlim_i M_i$ , siendo  $M_i$  los submódulos finitamente generados de  $M$ . Tenemos que  $M' = \varinjlim_i (M' \cap M_i)$ , pues  $M' \cap M_i$ , son los submódulos (con repeticiones) finitamente generados de  $M'$ . Tenemos que  $0 \rightarrow M' \cap M_i \rightarrow M_i$  es exacta, con  $M' \cap M_i$  y  $M_i$  finitamente generados. Entonces  $0 \rightarrow (M' \cap M_i) \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M_i \otimes_A \widehat{A}$  son exactas. Luego  $0 \rightarrow \varinjlim_i ((M' \cap M_i) \otimes_A \widehat{A}) \rightarrow \varinjlim_i (M_i \otimes_A \widehat{A})$  es exacta. Por la conmutación del límite inductivo con producto tensoriales concluimos que

$$0 \rightarrow \varinjlim_i (M' \cap M_i) \otimes_A \widehat{A} = M' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow \varinjlim_i M_i \otimes_A \widehat{A} = M \otimes_A \widehat{A}$$

es exacta. Hemos terminado.  $\square$

**11. Corolario Krull:** Sea  $M$  un anillo  $A$ -módulo noetheriano y  $I \subset A$  un ideal incluido en el radical de Jacobson de  $A$ . Se verifica que  $M$  es separado para la topología  $I$ -ádica, i.e.,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = 0$ .

*Demostración.* Sea  $N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M \subset M$ . Por Artin-Rees sabemos que la filtración  $\{N \cap I^n M = N\}$  es  $I$ -estable. Por tanto,  $IN = N$  y por Nakayama  $N = 0$ .  $\square$

## 2.6 Completación y noetherianidad

Queremos probar que el completado de un anillo noetheriano es noetheriano. Un anillo noetheriano y su completado tienen el mismo graduado y éste es noetheriano. Probaremos que si el graduado de un anillo completo y separado es noetheriano el anillo es noetheriano y así obtendremos que el completado de un anillo noetheriano es noetheriano.

Un teorema básico en Análisis y Geometría Diferencial, es el teorema de la función inversa. Toda aplicación diferenciable  $f: X \rightarrow Y$ , entre variedades diferenciales, induce una aplicación entre los anillos  $C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$  y los espacios cotangentes  $f^*: \mathfrak{m}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}^2 \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . El teorema de la función inversa afirma que si  $f^*$  es un isomorfismo entonces  $f$  es un isomorfismo en un entorno de  $x$ . Ahora bien,  $f^*$  es un isomorfismo si y sólo si el morfismo inducido entre los graduados  $G_{\mathfrak{m}_{f(x)}} C^\infty(Y) \rightarrow G_{\mathfrak{m}_x} C^\infty(X)$  lo es. Analíticamente, si el morfismo  $G_{\mathfrak{m}_{f(x)}} C^\infty(Y) \rightarrow G_{\mathfrak{m}_x} C^\infty(X)$  es un isomorfismo entonces el morfismo  $\widehat{C^\infty(Y)} \rightarrow \widehat{C^\infty(X)}$  es un isomorfismo. Hablemos ahora en Álgebra y con toda precisión.

**1. Teorema formal de la función inversa** Sean  $\{M_n\}$  y  $\{M'_n\}$  filtraciones de  $M$  y  $M'$  respectivamente. Supongamos que  $M$  y  $M'$  son completos y separados. Sea  $T: M \rightarrow M'$  un morfismo de filtraciones y consideremos el morfismo  $GT: GM \rightarrow GM'$  inducido.  $GT$  es isomorfismo (resp. epiyectivo, inyectivo) entonces  $T: M \rightarrow M'$  es isomorfismo (resp. epiyectivo, inyectivo).

*Demostración.* Supongamos que  $GT$  es epiyectivo.

Sea  $m' \in M'$ . Como  $M/M_1 \xrightarrow{\bar{T}} M'/M'_1$  es epiyectivo existe  $m_0 \in M$ , tal que  $m' = T(m_0) + m'_1$ , con  $m'_1 \in M'_1$ . Como  $M_1/M_2 \xrightarrow{\bar{T}} M'_1/M'_2$  es epiyectivo existe  $m_1 \in M_1$ , tal que  $m'_1 = T(m_1) + m'_2$ , con  $m'_2 \in M'_2$ . Es decir  $m' = T(m_0) + T(m_1) + m'_2$ . Así sucesivamente, obtenemos una serie  $m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i$ , con  $m_i \in M_i$ , de modo que la serie  $T(m) = T(\sum_{i=0}^{\infty} m_i) = \sum_{i=0}^{\infty} T(m_i)$  converge a  $m'$ . Como  $M'$  es completo,  $T(m) = m'$  y  $T$  es epiyectivo.

Supongamos ahora que  $GT$  es inyectivo.

Sea  $m \in M$ . Como  $M$  es separado existe  $r \in \mathbb{N}$  de modo que  $m \in M_r$  y  $m \notin M_{r+1}$ . Entonces  $0 \neq \bar{m} \in M_r/M_{r+1}$ .  $GT(\bar{m}) = \overline{T(m)} \neq 0$ , porque  $GT$  es inyectivo. Luego  $T(m) \neq 0$  y  $T$  es inyectivo.

En particular, si  $GT$  es isomorfismo,  $T$  es isomorfismo. □

**2. Lema:** Sea  $A$  un anillo completo y separado por la topología  $I$ -ádica definida por un ideal  $I \subset A$ . Si  $GA$  es noetheriano entonces  $A$  es noetheriano.

*Demostración.* Dado un ideal  $\mathfrak{q} \subset A$  tenemos que ver que  $\mathfrak{q}$  es finito generado.

Consideremos en  $\mathfrak{q}$  la filtración  $\{\mathfrak{q} \cap I^n\}$ . Entonces tenemos una inclusión natural

$$G\mathfrak{q} = \bigoplus_n (\mathfrak{q} \cap I^n) / (\mathfrak{q} \cap I^{n+1}) \hookrightarrow \bigoplus_n I^n / I^{n+1}$$

Observemos que  $G\mathfrak{q}$  es un ideal de  $GA$  de modo natural: Dado  $\bar{q} \in (\mathfrak{q} \cap I^n) / (\mathfrak{q} \cap I^{n+1})$  y  $\bar{p} \in I^m / I^{m+1}$  entonces  $\bar{p}\bar{q} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{pq} \in (\mathfrak{q} \cap I^{m+n}) / (\mathfrak{q} \cap I^{m+n+1})$ .

Como  $GA$  es noetheriano, tendremos que  $G\mathfrak{q}$  está generado por un número finito de elementos. Escribamos  $G\mathfrak{q} = (\bar{f}_{n_1}, \dots, \bar{f}_{n_r})$ , donde puedo suponer que los  $\bar{f}_{n_i} \in (\mathfrak{q} \cap I^{n_i}) / (\mathfrak{q} \cap I^{n_i+1})$ .

Consideremos en  $A$  la siguiente filtración para cada  $i$ :  $A \supseteq A \supseteq \dots \supseteq A \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq \dots$ . El graduado de  $A$  por esta filtración es  $GA[-n_i] = \bigoplus_n I^n / I^{n+1}$ , que es igual al anillo  $GA$ , pero decimos que los elementos de grado  $n$  de  $GA[-n_i]$  son los elementos de grado  $n - n_i$  de  $GA$ . De modo natural definimos una filtración en la suma directa  $A \oplus \dots \oplus A$ . Definamos el morfismo, de filtraciones,

$$\begin{array}{ccc} A \oplus \dots \oplus A & \xrightarrow{T} & \mathfrak{q} \\ (1, 0, \dots, 0) & \mapsto & \bar{f}_{n_1} \\ (0, 0, \dots, 1) & \mapsto & \bar{f}_{n_r} \end{array}$$

Tomando graduados, obtenemos que el morfismo

$$\begin{array}{ccc} GA[-n_1] \oplus \dots \oplus GA[-n_r] & \xrightarrow{GT} & G\mathfrak{q} \\ (1, 0, \dots, 0) & \mapsto & \bar{f}_{n_1} \in (\mathfrak{q} \cap I^{n_1}) / (\mathfrak{q} \cap I^{n_1+1}) \subset G\mathfrak{q} \\ (0, 0, \dots, 1) & \mapsto & \bar{f}_{n_r} \in (\mathfrak{q} \cap I^{n_r}) / (\mathfrak{q} \cap I^{n_r+1}) \subset G\mathfrak{q} \end{array}$$

es epiyectivo. Por el lema anterior,  $\widehat{T}: A \oplus \dots \oplus A \rightarrow \widehat{\mathfrak{q}}$  es epiyectivo. Ahora bien, como  $\mathfrak{q}$  es separado, porque es un subespacio de  $A$ , que es separado, tenemos que el morfismo de completación  $i: \mathfrak{q} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{q}}$

es inyectivo. Por tanto,  $T$  ha de ser epiyectivo porque  $\widehat{T} = i \circ T$  es epiyectivo. En conclusión,  $\mathfrak{q}$  es finito generado.  $\square$

**3. Teorema:** *Si  $A$  es noetheriano entonces  $\widehat{A}$  es noetheriano.*

*Demostración.* Si  $A$  es noetheriano y  $I \subset A$  es un ideal, entonces  $I = (\xi_1, \dots, \xi_r)$  es finito generado. El morfismo

$$\begin{array}{ccc} (A/I)[x_1, \dots, x_r] & \rightarrow & GA = A/I \oplus I/I^2 \oplus \dots \oplus I^n/I^{n+1} \oplus \dots \\ x_i & \mapsto & \xi_i \end{array}$$

es epiyectivo, luego  $GA$  es noetheriano.

Por 2.4.4 tenemos que  $G\widehat{A} = GA$ . Por el lema anterior,  $\widehat{A}$  es noetheriano.  $\square$

**4. Corolario:** *Si  $A$  es noetheriano entonces  $A[[x_1, \dots, x_n]]$  es noetheriano.*

*Demostración.* Por el teorema de la base de Hilbert, si  $A$  es noetheriano entonces  $A[x_1, \dots, x_r]$  es noetheriano. Completando  $A[x_1, \dots, x_r]$  por el ideal  $I = (x_1, \dots, x_r) \subset A[x_1, \dots, x_r]$ , tenemos por el teorema anterior que  $A[[x_1, \dots, x_n]]$  es noetheriano.  $\square$

## 2.7 Teorema de Cohen

**1. Teorema Cohen:** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , completo y separado por la topología  $\mathfrak{m}$ -ádica. Si  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo, existe una sección del morfismo natural  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ .*

*Demostración.* a) Supongamos que  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo de característica cero. Por tanto,  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{O}$ . Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O} = \widehat{\mathcal{O}} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3 & \rightarrow & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 & \rightarrow & \mathcal{O}/\mathfrak{m} \\ & & & & & & & & \parallel \text{Not} \\ & & & & & & & & K \end{array}$$

Vamos a ir levantando el morfismo  $K = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$  a  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ , posteriormente a  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ , y así sucesivamente hasta  $\widehat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ .

Sea  $K_1$  una  $\mathbb{Q}$ -subextensión de  $K$  maximal con la condición de que exista un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}/\mathfrak{m} = K \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & K_1 \end{array}$$

Veamos que  $K_1 = K$ :

Dado  $\bar{a} \in K$ , entonces  $\bar{a}$  es trascendente sobre  $K_1$ , o es algebraico sobre  $K_1$ . Si  $\bar{a}$  es trascendente, entonces sea  $a \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  tal que  $\pi(a) = \bar{a}$ . El morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ ,  $\bar{a} \mapsto a$  está bien definido. Luego por la maximalidad de  $K_1$ ,  $\bar{a} \in K_1$ . Si  $\bar{a}$  es algebraico sobre  $K_1$ , sea  $p(x) \in K_1[x]$  su polinomio mínimo anulador. Sea  $a \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  tal que  $\pi(a) = \bar{a}$ . Para definir bien el morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ ,  $\bar{a} \mapsto a$ , es necesario que  $p(a) = 0$ . Sea  $h \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \subset \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ . Desarrollando por Taylor obtenemos

$$p(a+h) = p(a) + p'(a)h + c \cdot h^2 = p(a) + p'(a)h$$

Observemos que  $\pi(p(a)) = p(\bar{a}) = 0$ , luego  $p(a) \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , Observemos también que  $p'(a)$  es invertible, porque  $(p(x), p'(x)) = (1)$  luego  $(p(a), p'(a)) = (1)$  y como  $p(a)$  es nilpotente,  $p'(a)$  es invertible. En conclusión, si escribimos  $h = -p(a)/p'(a)$  entonces  $h \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ,  $\pi(a+h) = \bar{a}$  y  $p(a+h) = 0$ . Así pues, cambiando  $a$  por  $a+h$ , tenemos que el morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ ,  $\bar{a} \mapsto a$  está bien definido. Por la maximalidad de  $K_1$ ,  $\bar{a} \in K_1$ .

En conclusión,  $K_1 = K$ .

Sea ahora  $K_1$  una  $\mathbb{Q}$ -subextensión de  $K$  maximal con la condición de que exista un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3 & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 \\ & \nearrow & \uparrow \\ & & K \\ & \searrow & \uparrow \\ & & K_1 \end{array}$$

Veamos que  $K_1 = K$ :

Dado  $\bar{a} \in K$ , entonces  $\bar{a}$  es trascendente sobre  $K_1$ , o es algebraico sobre  $K_1$ . Si  $\bar{a}$  es trascendente, entonces sea  $a \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$  tal que  $\pi'(a) = \bar{a}$ . El morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ ,  $\bar{a} \mapsto a$  está bien definido. Luego por la maximalidad de  $K_1$ ,  $\bar{a} \in K_1$ . Si  $\bar{a}$  es algebraico sobre  $K_1$ , sea  $p(x) \in K_1[x]$  su polinomio mínimo anulador. Sea  $a \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$  tal que  $\pi'(a) = \bar{a}$ . Para definir bien el morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ ,  $\bar{a} \mapsto a$ , es necesario que  $p(a) = 0$ . Sea  $h \in \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \subset \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ . Desarrollando por Taylor obtenemos

$$p(a+h) = p(a) + p'(a)h + c \cdot h^2 = p(a) + p'(a)h$$

Observemos que  $\pi'(p(a)) = p(\bar{a}) = 0$ , luego  $p(a) \in \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ , Además,  $p'(a)$  es invertible, porque  $(p(x), p'(x)) = (1)$  luego  $(p(a), p'(a)) = (1)$  y como  $p(a)$  es nilpotente,  $p'(a)$  es invertible. En conclusión, si escribimos  $h = -p(a)/p'(a)$  entonces  $h \in \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ ,  $\pi(a+h) = \bar{a}$  y  $p(a+h) = 0$ . Así pues, cambiando  $a$  por  $a+h$ , tenemos que el morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ ,  $\bar{a} \mapsto a$  está bien definido. Por la maximalidad de  $K_1$ ,  $\bar{a} \in K_1$ .

Así sucesivamente, vamos obteniendo morfismos  $K \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$ , que por paso al límite proyectivo define el morfismo  $K \rightarrow \hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$  buscado.

b) Supongamos que  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo de característica  $p > 0$ .

Procedamos del mismo modo que en el apartado a).

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}/\mathfrak{m} \\ & & \parallel \\ & & K \end{array}$$

Sea  $L$  el máximo subcuerpo de  $\pi^{-1}(K) = \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  con la condición de contener a  $(\pi^{-1}(K))^p$ . Observemos que  $\pi^{-1}(K) = \pi^{-1}(K-0) \cup \pi^{-1}(0)$ , donde los elementos de  $\pi^{-1}(K-0)$  son invertibles porque no son nilpotentes, y  $\pi^{-1}(0) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Por tanto,  $(\pi^{-1}(K))^p = \pi^{-1}(K-0)^p \cup 0$ , que es un cuerpo. Luego el epimorfismo  $\pi: (\pi^{-1}(K))^p \rightarrow K^p$  es un isomorfismo.

Probemos que  $\pi: L \hookrightarrow K$  es un isomorfismo. Dado  $\bar{a} \in K$ , sea  $a \in \pi^{-1}(K)$ , tal que  $\pi(a) = \bar{a}$ . Se verifica que  $a^p \in L$ . Consideremos el epimorfismo

$$L[x]/(x^p - a^p) \rightarrow L[a], x \mapsto a$$

Si  $\sqrt[p]{a^p} \notin L$  entonces  $x^p - a^p$  es irreducible en  $L[x]$ , luego  $L[x]/(x^p - a^p)$  es cuerpo y el epimorfismo es isomorfismo. Contradicción porque  $L$  es máximo y  $L \subset L[a]$ . Si  $\sqrt[p]{a^p} \in L$  entonces  $\pi(\sqrt[p]{a^p}) = a$ . Luego  $\pi$  es un isomorfismo.

Tenemos el morfismo  $K \stackrel{\pi^{-1}}{=} L \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  buscado.

Consideremos ahora, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3 & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 \\ & & \uparrow \\ & & K \end{array}$$

De nuevo, sea  $L$  el máximo subcuerpo de  $\pi'^{-1}(K)$  con la condición de contener a  $(\pi'^{-1}(K))^p$ . Observemos que  $\pi'^{-1}(K) = \pi'^{-1}(K - 0) \cup \pi'^{-1}(0)$ , donde los elementos de  $\pi'^{-1}(K - 0)$  son invertibles porque no son nilpotentes, y  $\pi'^{-1}(0) = \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ . Por tanto,  $(\pi'^{-1}(K))^p = \pi'^{-1}(K - 0)^p \cup 0$ , que es un cuerpo. Luego el epimorfismo  $\pi': (\pi'^{-1}(K))^p \rightarrow K^p$  es un isomorfismo.

Probemos que  $\pi': L \hookrightarrow K$  es un isomorfismo. Dado  $\bar{a} \in K$ , sea  $a \in \pi'^{-1}(K)$ , tal que  $\pi'(a) = \bar{a}$ . Se verifica que  $a^p \in L$ . Consideremos el epimorfismo

$$L[x]/(x^p - a^p) \rightarrow L[a], x \mapsto a$$

Si  $\sqrt[p]{a^p} \notin L$  entonces  $x^p - a^p$  es irreducible en  $L[x]$ , luego  $L[x]/(x^p - a^p)$  es cuerpo y el epimorfismo es isomorfismo. Contradicción porque  $L$  es máximo y  $L \subset L[a]$ . Si  $\sqrt[p]{a^p} \in L$  entonces  $\pi'(\sqrt[p]{a^p}) = a$ . Luego  $\pi'$  es un isomorfismo.

Tenemos el morfismo  $K \stackrel{\pi'^{-1}}{=} L \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$  buscado.

Así sucesivamente, vamos obteniendo morfismos  $K \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$ , que por paso al límite proyectivo define el morfismo  $K \rightarrow \hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$  buscado. □

**2. Corolario :** Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , completo por la topología  $\mathfrak{m}$ -ádica. Si  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo se verifica un isomorfismo

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$$

*Demostración.* Por el teorema de Cohen, existe una sección  $\mathcal{O}/\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathcal{O}$  del cuerpo residual de  $\mathfrak{m}$ . Sea  $\xi_1, \dots, \xi_n$  un sistema generador de  $\mathfrak{m}$ . El morfismo

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m}[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \mathcal{O}, s(x_1, \dots, x_n) \mapsto s(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

es un epimorfismo porque en los graduados lo es. Por tanto,

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$$

□

## 2.8 Problemas

1. Sea  $\dots \rightarrow X_n \rightarrow \dots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$  una sucesión de aplicaciones de entre conjuntos finitos no vacíos. Pruébese que  $\lim_{\leftarrow i} X_i$  es no vacío.

2. Sea  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$  y  $p \in \mathbb{Z}$ . Probar que la condición necesaria y suficiente para que  $p(x)$  tenga una raíz en  $\hat{\mathbb{Z}}_p$  es que tenga alguna raíz en cada  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , para todo  $n > 0$ .
3. Probar que  $\text{Spec}(\varinjlim A_i) = \varprojlim \text{Spec} A_i$ . Probar que si  $A \hookrightarrow B$  es un morfismo entero (es decir,  $B$  es límite inductivo de subálgebras finitas sobre  $A$ ) entonces la aplicación  $\text{Spec} B \rightarrow \text{Spec} A$  es epiyectiva y  $\dim B = \dim A$ .
4. Calcular el inverso de  $1+x$  en  $k[[x]]$ . Probar que el único ideal maximal de  $k[[x]]$  es  $(x)$  ¿Existe la raíz cuadrada de  $1+x$  en  $k[[x]]$ ?
5. Sea  $I$  un ideal de un anillo noetheriano  $A$ , probar que

$$\text{Spec}_{\max} \hat{A} = \text{Spec}_{\max}(A/I)$$

6. Sea  $x \in \text{Spec} A$  un punto cerrado. Probar
- El completado es un concepto local: El completado  $\mathfrak{m}_x$ -ádico de  $A$  coincide con el completado  $\mathfrak{m}_x A_x$ -ádico de  $A_x$ .
  - El cono tangente es un concepto local:  $G_{\mathfrak{m}_x} A = G_{\mathfrak{m}_x A_x} A_x$ .
7. (a) Demostrar que la completación  $I$ -ádica de  $M$  coincide con la completación  $I$ -ádica de  $M_{1+I}$ .  
 (b) Probar que  $\text{Spec}_{\max} A_{1+I} = \text{Spec}_{\max} A/I$ .
8. Supongamos que  $A$  es un anillo noetheriano y  $M$  es finito generado. Probar que el núcleo del morfismo  $M \rightarrow \hat{M}$  coincide con el núcleo del morfismo  $M \rightarrow M_{1+I}$ .
9. Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro,  $I \subset A$  un ideal propio. Probar que  $A$  es separado con la topología  $I$ -ádica.
10. Sea  $A$  un anillo noetheriano. Probar  $\bigcap_{x,n} \mathfrak{m}_x^n = 0$ .
11. Sea  $A$  un anillo noetheriano y  $M$  un  $A$ -módulo finito generado. Probar que  $M = 0$  si y sólo si sus completaciones en todo punto cerrado de  $\text{Spec} A$  son nulas.
12. Sean  $A$  y  $B$  dos  $k$ -álgebras y  $x \in \text{Spec} A = X$ ,  $y \in \text{Spec} B = Y$  dos puntos racionales. Probar que

$$C_{(x,y)}(X \times_k Y) = C_x X \times_k C_y Y$$



## Capítulo 3

# Teoría de la dimensión local

### 3.1 Introducción

A continuación estudiamos el concepto de dimensión para anillos locales noetherianos, que incluye tanto a los anillos locales de las funciones de variedades algebraicas, como sus completaciones (por ejemplo los anillos de series formales). El concepto de dimensión es esencialmente local.

Geoméricamente decimos que una superficie tiene dimensión 2 porque observamos la cadena de cerrados irreducibles punto, curva, superficie. Cadena que tiene dos eslabones y no podemos conseguir una cadena de cerrados irreducibles con más eslabones. En términos del anillo de las funciones algebraicas de la superficie, estamos diciendo que en este anillo las cadenas de ideales primos más largas son de longitud 2. Por otra parte, para determinar un punto de la superficie como los ceros de  $n$  funciones, necesitaremos de dos funciones algebraicas, por lo menos.

Llamaremos dimensión de un anillo local noetheriano al supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos y veremos que coincide con el número mínimo de parámetros necesarios para determinar el punto cerrado.

En general, el espectro  $\text{Spec } A$  de un anillo noetheriano no es una variedad algebraica, pero se puede definir el espacio tangente a  $\text{Spec } A$  en un punto y éste es una variedad algebraica. Variedad a la que asociaremos el polinomio de Samuel, que nos permitirá desarrollar con éxito la teoría de la dimensión local en anillos locales noetherianos.

Por último aplicaremos la teoría de la dimensión en anillos locales noetherianos a las variedades algebraicas.

### 3.2 Función de Hilbert

Sea  $A = R_0[\xi_1, \dots, \xi_r]$  un anillo graduado,  $R_0$  un anillo de longitud finita (de grado cero) y los  $\xi_i$  de grado 1. Por ser  $R_0$  un anillo de longitud finita es noetheriano y por tanto  $A$  también es noetheriano.

Sea  $M = \bigoplus M_n$  un  $A$ -módulo graduado finito generado. Obsérvese que el  $A$ -submódulo de  $M$  generado por  $M_n$  es finito generado, por la noetherianidad de  $M$ . Por tanto,  $M_n$  es un  $R_0$ -módulo de finito generado. Como  $R_0$  es de longitud finita,  $M_n$  es un  $R_0$ -módulo de longitud finita.

**1. Definición:** Se llama función de Hilbert de  $M$  a  $H_M(n) \stackrel{\text{def}}{=} l(M_n)$ .

**2. Definición:** Se llama función de Samuel de  $M$  a  $S_M(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} l(M_i)$ .

Observemos que  $\Delta S_M(n) = S_M(n+1) - S_M(n) = H_M(n)$ .

**3. Proposición:** *Sea  $R_0$  un anillo de longitud finita y consideremos el anillo graduado  $R_0[x_1, \dots, x_r]$ . Se cumple que*

$$S_{R_0[x_1, \dots, x_r]}(n) = l(R_0) \cdot \binom{n+r-1}{r}$$

*Demostración.* Es un problema de combinatoria: Considérese variables  $\{x_1, \dots, x_r\}$ ,  $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$  y escribamos (monomios con las  $x$  ordenadas y las  $y$  ordenadas)

$$y_1 \cdots y_{i_1} x_1 y_{i_1+1} \cdots y_{i_2} x_2 \cdots x_r y_{i_r+1} \cdots y_{n-1} \equiv x_1^{i_1} x_2^{i_2-i_1} \cdots x_r^{i_r-i_{r-1}}$$

El número de todas las combinaciones posibles es  $\binom{n+r-1}{r}$ . Como  $R_0[x_1, \dots, x_r]/(x_1, \dots, x_r)^n = \bigoplus_{i_r < n} R_0 \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2-i_1} \cdots x_r^{i_r-i_{r-1}}$ , obtenemos  $S_{R_0[x_1, \dots, x_r]}(n) = l(R_0) \cdot \binom{n+r-1}{r}$ . □

**4. Lema:** *Dada una función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  denotemos por  $\Delta f(n)$  la función  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ . Si  $\Delta f(n)$  es un polinomio para  $n > n_0$  entonces  $f(n)$  es un polinomio para  $n > n_0$ .*

*Demostración.* Procedamos por inducción sobre el grado de  $\Delta f(n)$ . Sigamos la convención  $\text{gr } 0 = -1$ .

Si  $\text{gr } \Delta f(n) = -1$  para  $n > n_0$ , es decir  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = 0$  para  $n > n_0$ , entonces  $f(n)$  es constante para  $n > n_0$  y hemos terminado.

Supongamos que  $\text{gr } \Delta f(n) = r$ , para  $n > n_0$ . Es decir,  $f(n) = a_0 n^r + a_1 n^{r-1} + \cdots + a_r$ , para  $n > n_0$ , con  $a_0 \neq 0$ . Se verifica que

$$\begin{aligned} \Delta\left(f - \frac{a_0}{r+1} n^{r+1}\right)(n) &= \Delta f(n) - \frac{a_0}{r+1} ((n+1)^{r+1} - n^{r+1}) \\ &= \Delta f(n) - [a_0 n^r + \text{pol. de grado menor que } r] \end{aligned}$$

Por tanto,  $\Delta\left(f - \frac{a_0}{r+1} n^{r+1}\right)(n)$  es un polinomio de grado menor que  $r$ , para  $n > n_0$ . Luego, por hipótesis de inducción,  $f(n) - \frac{a_0}{r+1} n^{r+1}$  es un polinomio, para  $n > n_0$  y concluimos que  $f(n)$  es un polinomio para  $n > n_0$ . □

**5. Teorema:** *Para  $n$  suficientemente grande, la función de Hilbert es un polinomio en  $n$  (polinomio que llamaremos polinomio de Hilbert).*

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre el número de generadores de  $A$ .

Si  $r = 0$ , como  $M$  es finito generado  $M_n = 0$  para  $n > n_0$ , con  $n_0 \gg 0$ . Por tanto,  $H_M(n) = 0$  para  $n > n_0$  y concluimos.

Supongamos cierto el teorema para  $A = R_0[\xi_1, \dots, \xi_{r-1}]$  y consideremos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \text{Ker}_n \rightarrow M_n \xrightarrow{\xi_r} M_{n+1} \rightarrow \text{Coker}_{n+1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Ker} = \bigoplus_n \text{Ker}_n \rightarrow M \xrightarrow{\xi_r} M \rightarrow \text{Coker} = \bigoplus_n \text{Coker}_n \rightarrow 0$$

Como  $\xi_r$  anula a  $\text{Ker}$  y  $\text{Coker}$ , ambos son  $R_0[\xi_1, \dots, \xi_{r-1}]$ -módulos finitos graduados. Por tanto, por hipótesis de inducción

$$\Delta H_M(n) = H_M(n+1) - H_M(n) = H_{\text{Coker}}(n+1) - H_{\text{Ker}}(n)$$

es un polinomio para  $n > n_0$ . Por tanto,  $H_M(n)$  es un polinomio para  $n > n_0$ , por el lema anterior. □

La función de Samuel es un polinomio para  $n \gg 0$ , ya que  $\Delta S_M(n) = H_M(n)$  (polinomio que denominaremos polinomio de Samuel).

### 3.3 Dimensión en anillos locales noetherianos

**1. Proposición:**  $M$  es de longitud finita  $\Leftrightarrow M$  es noetheriano y  $\text{Sop}(M)$  es un número finito de puntos cerrados.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Recordemos que los módulos simples son isomorfos a  $A/\mathfrak{m}$ , siendo  $\mathfrak{m}$  un ideal maximal. Si  $\mathfrak{m}_x$  es un ideal maximal y  $\mathfrak{p}_{x'}$  es un ideal primo distinto de  $\mathfrak{m}_x$  entonces  $(A/\mathfrak{m}_x)_{x'} = 0$ . Ahora ya, dada una serie de composición

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

tenemos que  $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{m}_{x_i}$ , siendo  $\mathfrak{m}_{x_i}$  ideales maximales. Por tanto,  $(M_i/M_{i-1})_x \simeq (A/\mathfrak{m}_{x_i})_x = 0$ , para todo punto  $x \in \text{Spec } A$  distinto de los  $x_i$ . Luego  $M_x = (M_n)_x = \cdots = (M_0)_x = 0$ , para todo punto  $x \in \text{Spec } A$  distinto de los  $x_i$ . En conclusión, el soporte de  $M$  es subconjunto de  $\{x_i\}$ . Además,  $M_i/M_{i-1} \simeq \langle \bar{m}_i \rangle$ , para todo  $i$ . Luego  $M = \langle m_n \rangle + M_{n-1} = \langle m_n \rangle + \langle m_{n-1} \rangle + M_{n-1} = \cdots = \langle m_n, \dots, m_1 \rangle$ . Luego  $M$  es finito generado. Como todo submódulo de  $M$  es de longitud finita entonces es finito generado. En conclusión,  $M$  es noetheriano.

$\Leftarrow$ )  $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ , luego  $M$  es un cociente de  $\langle m_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle m_n \rangle$ . Si probamos que los  $\langle m_i \rangle$  son de longitud finita entonces  $M$  es de longitud finita. Tenemos que  $\langle m_i \rangle$  son  $A$ -módulos noetherianos, con soporte en un número finito de puntos cerrados, por ser submódulos de  $M$ . En conclusión, podemos suponer que  $M = \langle m \rangle$ . Es decir,  $M = A/I$ . Como  $\text{Spec } A/I = \text{Sop } A/I$  es un número finito de puntos cerrados  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , tenemos que  $A/I = (A/I)_{x_1} \times \cdots \times (A/I)_{x_n}$ . Tenemos que probar que  $(A/I)_{x_i}$  son  $A$ -módulos de longitud finita. Sea  $\mathfrak{m}_{x_i} \subset A$  el ideal maximal correspondiente a  $x_i$ . Tenemos que  $\mathfrak{m}_{x_i} \cdot (A/I)_{x_i}$  es el único ideal primo del anillo noetheriano  $(A/I)_{x_i}$ , por tanto, es nilpotente. Tenemos pues una cadena

$$(A/I)_{x_i} \supseteq \mathfrak{m}_{x_i} (A/I)_{x_i} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}_{x_i}^m (A/I)_{x_i} = 0$$

Observemos que  $\mathfrak{m}_{x_i}^i (A/I)_{x_i} / \mathfrak{m}_{x_i}^{i+1} (A/I)_{x_i}$  es un  $A/\mathfrak{m}_{x_i}$  espacio vectorial de dimensión finita, luego son  $A$ -módulos de longitud finita. En conclusión,  $(A/I)_{x_i}$  es un  $A$ -módulo de longitud finita.  $\square$

Supondremos que  $\mathcal{O}$  es un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , e  $I$  un ideal  $\mathfrak{m}$ -primario.

Si  $I$  es un ideal  $\mathfrak{m}$ -primario, entonces  $\text{Spec } \mathcal{O}/I = \{\mathfrak{m}\}$ , y  $l(\mathcal{O}/I) < \infty$ , por 3.3.1. Escribamos  $I = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ . El graduado de  $\mathcal{O}$  por  $I$ ,  $G_I \mathcal{O} = \mathcal{O}/I[\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r]$  es un anillo graduado, con  $\mathcal{O}/I$  de longitud finita y  $\bar{\xi}_i$  de grado 1.

Sea  $M$  un  $\mathcal{O}$ -módulo finito y consideremos en él una filtración  $I$ -estable,  $\{M_n\}$ . Sabemos que el dilatado  $DM$  es un  $D_I \mathcal{O} = \oplus I^n$ -módulo finito. Por tanto, el graduado  $GM$  de  $M$  por la filtración es un  $D_I \mathcal{O}$ -módulo finito, luego es un  $G_I \mathcal{O}$ -módulo finito.

Denotaremos

$$S_M(n) = S_{GM}(n) = l(M/M_1) + l(M/M_2) + \cdots + l(M_{n-1}/M_n) = l(M/M_n)$$

**2. Proposición:** El grado y el primer coeficiente de  $S_M(n)$  no depende de la filtración  $I$ -estable considerada en  $M$ .

*Demostración.* Sean  $\{M_n\}$  y  $\{\bar{M}_n\}$  dos filtraciones  $I$ -estables de  $M$ . Denotemos por  $S_M(n) = l(M/M_n)$  y  $S_{\bar{M}}(n) = l(M/\bar{M}_n)$ . Por 2.4.1 sabemos que existe un  $h$  tal que

$$\begin{aligned} M_{n+h} &\subseteq \bar{M}_n && \text{por tanto, } S_M(n+h) \geq S_{\bar{M}}(n) \\ \bar{M}_{n+h} &\subseteq M_n && \text{por tanto, } S_{\bar{M}}(n+h) \geq S_M(n) \end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración □

**3. Proposición:** *El grado de  $S_M(n)$  no depende de la filtración  $I$ -estable considerada en  $M$ , ni del ideal  $\mathfrak{m}$ -primario  $I$ .*

*Demostración.* Consideremos las filtraciones  $\{I^n M\}$  y  $\{\mathfrak{m}^n M\}$ . Basta probar, por la proposición anterior, que  $S_{M,I}(n) = l(M/I^n M)$  y  $S_{M,\mathfrak{m}}(n) = l(M/\mathfrak{m}^n M)$  tienen el mismo grado. Existe un  $k$ , tal que  $\mathfrak{m}^k \subseteq I$ . Por tanto,

$$S_{M,\mathfrak{m}}(kn) = l(M/\mathfrak{m}^{kn} M) \geq l(M/I^n M) = S_{M,I}(n), \quad S_{M,I}(n) = l(M/I^n M) \geq l(M/\mathfrak{m}^n M) = S_{M,\mathfrak{m}}(n)$$

De donde se deduce que  $S_{M,I}(n)$  y  $S_{M,\mathfrak{m}}(n)$  son dos polinomios de igual grado. □

La siguiente proposición hará las veces del teorema del ideal principal de Krull.

**4. Proposición:** *Si  $a \in \mathcal{O}$  no es divisor de cero en  $M$ , entonces  $\text{gr } S_{M/aM}(n) < \text{gr } S_M(n)$ .*

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow aM \rightarrow M \xrightarrow{\pi} N = M/aM \rightarrow 0$$

La filtraciones  $\{aM \cap M_n\}$ ,  $\{\pi(M_n)\}$  inducidas en  $aM$  y  $N$  por la filtración  $M_n$   $I$ -estable de  $M$ , son por el teorema de Artin-Rees  $I$ -estables. De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow aM/aM \cap M_n \rightarrow M/M_n \rightarrow N/\pi(M_n) \rightarrow 0$$

se deduce que  $S_{M/aM}(n) = S_N(n) = S_M(n) - S_{aM}(n)$ . Ahora bien, como  $M \stackrel{a}{\cong} aM$  porque  $a$  no es divisor de cero, por 3.3.2, el grado y primer coeficiente de  $S_M(n)$  es igual al de  $S_{aM}(n)$ . Luego  $\text{gr } S_{M/aM}(n) < S_M(n)$ . □

**5. Definición:** Llamaremos dimensión de Krull de un anillo al máximo de las longitudes de sus cadenas de ideales primos.

**6. Ejemplo:**  $\mathbb{Z}$  y  $k[x]$  son anillos de dimensión de Krull 1.  $\mathbb{C}[x, y]$  es un anillo de dimensión de Krull 2.

Como los ideales primos de un anillo  $A$  se corresponden con los cerrados irreducibles de  $\text{Spec } A$ , tenemos que la dimensión de Krull de  $A$  es igual a la máxima longitud de las cadenas de cerrados irreducibles de  $\text{Spec } A$ .

**7. Definición:** Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Diremos que  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}$  es un sistema de parámetros en  $\mathcal{O}$  si  $(f_1, \dots, f_n)_0 = \{\mathfrak{m}\}$ .

Denotaremos que  $S_{\mathcal{O},I}(n) = l(\mathcal{O}/I^n)$ . Diremos que  $S_{\mathcal{O}}(n) = l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$  es el polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}$ .

**8. Teorema :** Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Los siguientes números son iguales

1. Dimensión de Krull de  $\mathcal{O}$ .
2. Número mínimo de parámetros de los sistemas de parámetros de  $\mathcal{O}$ .
3. Grado del polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}$ .

*Demostración.*

a) Dimensión de Krull de  $\mathcal{O} \geq$  Número mínimo de parámetros de los sistemas de parámetros de  $\mathcal{O}$ :

Sea  $f_1$  un elemento no invertible de  $\mathcal{O}$  que no se anule en ningún ideal primo minimal (existe: si  $\{\mathfrak{p}_i\}$  son los ideales primos minimales de  $\mathcal{O}$  y  $g_i$  se anula en todos los  $\mathfrak{p}_j$  salvo en  $\mathfrak{p}_i$ , entonces  $f_1 = \sum_i g_i$ ). Por tanto,  $\dim \mathcal{O} > \dim \mathcal{O}/(f_1)$ . Sea ahora  $f_2$  otro elemento que no se anula en ningún ideal primo minimal de  $\mathcal{O}/(f_1)$ , entonces  $\dim \mathcal{O} > \dim \mathcal{O}/(f_1) > \dim \mathcal{O}/(f_1, f_2)$ . Así sucesivamente, obtenemos una cadena

$$\begin{aligned} 0 \subset (f_1) \subset (f_1, f_2) \subset \cdots \subset (f_1, \dots, f_n) \subset \dots \\ \dim \mathcal{O} > \dim \mathcal{O}/(f_1) > \dim \mathcal{O}/(f_1, f_2) > \cdots > \dim \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n) > \dots \end{aligned}$$

que ha de finitizar para un  $n$ , por la noetherianidad de  $\mathcal{O}$ , y lo hará cuando  $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n)$  sea de dimensión cero. Por tanto, tenemos que  $(f_1, \dots, f_n)$  es un sistema de parámetros y  $\dim \mathcal{O} \geq n$ .

b) Número mínimo de parámetros de los sistemas de parámetros de  $\mathcal{O} \geq$  grado del polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}$ :

Sea  $(f_1, \dots, f_r) = I$  un sistema de parámetros. Tenemos que

$$(\mathcal{O}/I)[x_1, \dots, x_r] \longrightarrow G_I \mathcal{O} = \mathcal{O}/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots$$

$$x_i \longrightarrow \bar{f}_i$$

es un epimorfismo. Luego  $S_{\mathcal{O}, I}(n) \leq l(\mathcal{O}/I[x_1, \dots, x_r]/(x_1, \dots, x_r)^n) = l(\mathcal{O}/I) \cdot \dim\{\text{polinomios en } r \text{ variables de grado menor que } n\} \stackrel{3.2.3}{=} l(\mathcal{O}/I) \cdot \binom{n+r-1}{r}$ . Observemos que  $\binom{n+r-1}{r}$  es un polinomio de grado  $r$ , luego  $\text{gr } S_{\mathcal{O}, \mathfrak{m}}(n) = \text{gr } S_{\mathcal{O}, I}(n) \leq r$ . Hemos concluido.

c) Grado del polinomio de Samuel de  $\mathcal{O} \geq$  dimensión de Krull de  $\mathcal{O}$ :

Procedamos por inducción sobre  $\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n)$ . Si  $\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) = 0$  entonces  $l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$  es constante. Por tanto,  $l(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = 0$ , es decir  $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ . Por Nakayama  $\mathfrak{m}^n = 0$ , luego  $\dim \mathcal{O} = 0$ .

Supongamos ya que  $\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) > 0$ . Sea  $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$  una cadena de ideales primos de  $\mathcal{O}$ . Sea  $f \in \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1$ . Tenemos

$$\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) \geq \text{gr } S_{\mathcal{O}/\mathfrak{p}_1}(n) \stackrel{3.3.4}{>} \text{gr } S_{\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_1, f)}(n) \geq m - 1$$

donde la última desigualdad es debido a la hipótesis de inducción y a que  $\bar{\mathfrak{p}}_2 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_m$  es una cadena de ideales primos de  $\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_1, f)$ . Por tanto,  $\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) \geq m$  y concluimos.  $\square$

**9. Ejercicio :** Probar que el anillo local de  $k[x_1, \dots, x_n]$  en el origen es un anillo de dimensión de Krull  $n$ .

**10. Corolario :** *La dimensión de Krull de un anillo local noetheriano es finita y coincide con el grado del polinomio de Samuel.*

No es cierto que si un anillo es noetheriano, pero no local, su dimensión de Krull sea finita.

**11. Corolario ideal principal de Krull** *Sea  $f \in \mathcal{O}$  no invertible. Se verifica*

$$\dim(f)_0 \geq \dim \mathcal{O} - 1$$

*Además, si  $f$  no es divisor de cero entonces*

$$\dim(f)_0 = \dim \mathcal{O} - 1$$

*Demostración.* Sea  $(f_1, \dots, f_m)$  un ideal  $\bar{\mathfrak{m}}$ -primario de  $\mathcal{O}/(f)$ , generado por el número mínimo de parámetros. Por el teorema anterior  $\dim \mathcal{O}/(f) = m$ . Por otra parte,  $(f, f_1, \dots, f_m)$  es un ideal  $\mathfrak{m}$ -primario de  $\mathcal{O}$ , luego  $\dim \mathcal{O} \leq m + 1 = \dim \mathcal{O}/(f) + 1 = \dim(f)_0 + 1$ . Por tanto,  $\dim(f)_0 \geq \dim \mathcal{O} - 1$ .

Si  $f$  no es divisor de cero, entonces  $\dim \mathcal{O}/(f) = \text{gr } S_{\mathcal{O}/(f)}(n) \stackrel{3.3.4}{<} \text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) = \dim \mathcal{O}$  y se concluye.  $\square$

**12. Corolario :** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Sea  $\widehat{\mathcal{O}}$  la completación  $\mathfrak{m}$ -ádica de  $\mathcal{O}$ . Se verifica*

$$\dim \mathcal{O} = \dim \widehat{\mathcal{O}}$$

*Demostración.* Sabemos que  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n = \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$ , por tanto  $S_{\mathcal{O}}(n) = S_{\widehat{\mathcal{O}}}(n)$  y  $\dim \mathcal{O} = \dim \widehat{\mathcal{O}}$ .  $\square$

**13. Ejercicio :** Probar que  $\dim k[[x_1, \dots, x_n]] = n$ .

### 3.4 Teoría de la dimensión en variedades algebraicas

**1. Proposición :** *Para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}_x \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , se cumple que  $\dim k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x} = n$ . En particular,  $\dim k[x_1, \dots, x_n] = n$ .*

*Demostración.* Por 1.4.5  $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}_x$  es una  $k$ -extensión finita de  $k$ . Por tanto, el morfismo  $i: k[x_1] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}_x$ ,  $i(p(x_1)) = \overline{p(x_1)}$  tiene de núcleo un ideal primo no nulo  $\text{Ker } i = (p(x_1))$ . Ahora ya,

$$\dim k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x} \stackrel{3.3.11}{=} \dim k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x}/(p(x_1)) + 1 = \dim k[x_1]/(p(x_1))[x_2, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x} + 1 = (n-1) + 1$$

donde la última igualdad se obtiene por inducción sobre  $n$ .  $\square$

**2. Teorema :** *La dimensión de Krull de una  $k$ -álgebra  $A$  de tipo finito íntegra es igual al grado de trascendencia de su cuerpo de funciones. “La dimensión de una variedad algebraica íntegra coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de funciones”.*

*Demostración.* Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito íntegra. Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito  $k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A$ . Luego  $\dim A = n$ . Localizando tenemos el morfismo finito  $k(x_1, \dots, x_n) \hookrightarrow A_{k[x_1, \dots, x_n]_{-\{0\}}}$ . Por tanto,  $A_{k[x_1, \dots, x_n]_{-\{0\}}}$  es una  $k(x_1, \dots, x_n)$ -álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo que ha de ser  $A_{A-\{0\}}$ . Por tanto, el grado de trascendencia de  $A_{A-\{0\}}$  es  $n$ .  $\square$

Observemos que  $\dim(A/\text{rad } A) = \dim A$ . Por tanto, para calcular la dimensión de una variedad irreducible  $\text{Spec } A$ , basta calcular la dimensión de  $\text{Spec}(A/\text{rad } A)$ , que es una variedad algebraica íntegra. En general, toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles y la dimensión de la variedad es el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles de la variedad.

**3. Proposición:** *Sea  $X = \text{Spec } A$  una variedad algebraica irreducible y  $x \in X$  un punto cerrado. Se cumple que  $\dim X = \dim A_x$ .*

*Demostración.* Haciendo cociente por los nilpotentes, es decir, por el ideal primo minimal, podemos suponer que  $A$  es un anillo íntegro.

Por el lema de normalización de Noether existe un morfismo finito  $k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A$ . Tenemos que  $\dim X = \dim k[x_1, \dots, x_n] = n$ . Sea  $\mathfrak{m}_y = k[x_1, \dots, x_n] \cap \mathfrak{m}_x$ . Sólo nos falta ver que  $\dim A_x = \dim k[x_1, \dots, x_n]_y = n$ : Dada una cadena de ideales primos  $\mathfrak{m}_x \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_m$ , entonces  $\mathfrak{m}_y \supsetneq k[x_1, \dots, x_n] \cap \mathfrak{p}_1 \supsetneq \dots \supsetneq k[x_1, \dots, x_n] \cap \mathfrak{p}_m$  es una cadena de ideales primos de inclusiones estrictas, porque en los morfismos finitos las fibras son de dimensión cero. Luego,  $\dim A_x \leq \dim k[x_1, \dots, x_n]_y$ . Dada una cadena de ideales primos  $\mathfrak{m}_y \supsetneq \mathfrak{p}'_1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}'_n$ , por el teorema de descenso podemos construir una cadena  $\mathfrak{m}_x \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_m$  de modo que  $\mathfrak{p}'_i = k[x_1, \dots, x_n] \cap \mathfrak{p}_i$ . Luego,  $\dim A_x \geq \dim k[x_1, \dots, x_n]_y$  y  $\dim A_x = \dim k[x_1, \dots, x_n]_y$ .  $\square$

**4. Teorema del ideal principal de Krull** *Sea  $X = \text{Spec } A$  una variedad algebraica íntegra. Sea  $f \in A$ , no nula y no invertible. Se verifica que la dimensión de toda componente irreducible de  $(f)_0$  es  $\dim X - 1$ .*

*Demostración.* Escribamos  $(f)_0 = C_1 \cup \dots \cup C_s$  como unión de componentes irreducibles. Sea  $y \in C_1 - (C_2 \cup \dots \cup C_s)$  un punto cerrado. Observemos que  $\text{Spec}(A/fA)_y$  son puntos  $x \in X$  tales que  $x \in (f)_0$  y  $y \in \bar{x}$ . Luego  $\text{Spec}(A/fA)_y$  son los puntos  $x \in Y_1$ , tales que  $y \in \bar{x}$ . Por 3.4.3,  $\dim Y_1 = \dim(A/fA)_y = \dim A_y - 1 = \dim X - 1$ .  $\square$

**5. Definición:** Una cadena de cerrados irreducibles diremos que es maximal si no está incluida en ninguna otra mayor.

**6. Corolario:** *Toda cadena de cerrados irreducibles maximal de una variedad algebraica irreducible tiene la misma longitud.*

*Demostración.* Sea  $X = \text{Spec } A$  la variedad algebraica irreducible. Sea  $x$  el punto genérico de  $X$ . Obviamente  $X$  es homeomorfo como espacio topológico a  $\text{Spec } A/\mathfrak{p}_x$ . Por tanto, podemos suponer que la variedad algebraica es íntegra. Demostraremos el corolario por inducción sobre la dimensión de Krull.

Sea  $X \supset X_1 \supset \dots \supset X_m$  una cadena de cerrados irreducibles maximal. Sea  $f \in A$  una función no nula, que se anule en  $X_1$ . Sea  $(f)_0 = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$  la descomposición de  $(f)_0$  en cerrados irreducibles, obviamente  $X_1$  es una de las componentes de la descomposición. Por el teorema anterior  $\dim X_1 = \dim X - 1$ , luego por inducción sobre la dimensión  $m - 1 = \dim X_1 = \dim X - 1$ , y por tanto  $m = \dim X$ .  $\square$

**7. Definición:** Se dice que una variedad algebraica es catenaria si toda cadena de cerrados irreducibles maximal con extremos cualesquiera prefijados tiene la misma longitud.

**8. Corolario:** *Las variedades algebraicas son catenarias.*

*Demostración.* Sean  $Y \supset Y'$  cerrados irreducibles de una variedad algebraica  $X$ . Sea  $Y' \supset Y'_1 \supset \dots \supset Y'_m$  una cadena de cerrados irreducible maximal de  $Y'$ . Toda cadena de cerrados irreducibles maximal de extremos  $Y, Y'$ , junto con esta cadena, define una cadena maximal de  $Y$  “ampliada”. Como las cadenas “ampliadas” son todas de la misma longitud, por el corolario anterior aplicado a  $Y$ , concluimos que toda las cadenas maximales de cerrados irreducibles de extremos  $Y, Y'$ , tienen la misma longitud.  $\square$

### 3.5 Problemas

1. Sea  $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n$  una cadena de  $A$ -submódulos de  $M$ . Probar que  $l(M/M_n) = \sum_{i=1}^n l(M_{i-1}/M_i)$ .

2. Sea  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  una  $k$ -álgebra de tipo finito y sea  $\mathcal{O} = A_x$ , donde  $x \in \text{Spec } A$  es un punto cerrado. Probar que si  $M$  es un  $\mathcal{O}$ -módulo de longitud finita entonces es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita y

$$\dim_k M = l(M) \cdot \dim_k \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$$

3. Sea  $A$  un anillo íntegro y  $f, g \in A$  no nulas. Probar que

$$l_A(A/(fg)) = l_A(A/(f)) + l_A(A/(g))$$

4. Probar que si  $A$  es un anillo con un número finito de elementos, entonces es un anillo noetheriano de dimensión cero.

5. Escribamos el polinomio  $p(x, y) = p_n(x, y) + p_{n+1}(x, y) + \dots + p_m(x, y)$  como suma de polinomios homogéneos  $p_i(x, y)$  de grado  $i$ . Sea  $\mathcal{O} = (k[x, y]/p(x, y))_{x_0}$ , con  $\mathfrak{m}_{x_0} = (x, y)$ . Demostrar que  $G_{\mathfrak{m}_{x_0}} \mathcal{O} = k[x, y]/(p_n(x, y))$ . Calcular el polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}$ .

6. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano. Probar que la dimensión de Krull de  $\mathcal{O}$  es igual a la dimensión del cono tangente  $G_{\mathfrak{m}} \mathcal{O} = \bigoplus_n \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$  en el origen (que es el ideal maximal  $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$ ).

7. Sea  $A$  un anillo noetheriano. Probar que  $\dim A[x] = 1 + \dim A$  (Obsérvese que si  $\mathfrak{p} \subset A$  es un ideal primo entonces  $\mathfrak{p}A[x]$  es un ideal primo de  $A[x]$ ).

8. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de dimensión de Krull 2. Probar que el conjunto  $\text{Spec } \mathcal{O}$  tiene infinitos puntos.

9. Sea  $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$  un anillo de polinomios de infinitas variables. Sean  $\mathfrak{p}_i = (x_{2^i}, \dots, x_{2^{i+1}-1})$  y  $S = A - \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ .

(a) Probar que  $\text{Spec}_{max} A_S = \{\mathfrak{p}_i \cdot A_S\}_i$ .

(b) Probar que toda función no nula de  $A_S$  pertenece a un número finito de ideales maximales.

(c) Probar que  $A_S$  es un anillo noetheriano.

(d) Probar que  $\dim A_S = \infty$ . (Nagata)

10. Sean  $X, Y$  variedades algebraicas. Probar que

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

(Utilícese el Lema de Normalización de Noether).

11. Sean  $Y, Y'$  subvariedades irreducibles de  $\mathbb{A}^n$ . Supongamos que  $Y \cap Y' \neq \emptyset$ . Demuéstrese que

$$\operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Y' \geq \operatorname{codim}(Y \cap Y')$$

12. Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo entre variedades algebraicas irreducibles. Sea  $y \in f(X)$  un punto cerrado. Demuéstrese que

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim \overline{f(X)}$$



# Capítulo 4

## Anillos locales regulares

### 4.1 Introducción

Los anillos de funciones algebraicas de la cúspide  $y^2 - x^3 = 0$ , el nodo  $y^2 - x^2 + x^3 = 0$ , el cono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  son no regulares en el origen y regulares en cualquier otro punto.

El objetivo de este capítulo es caracterizar localmente los anillos de funciones de las variedades algebraicas sin singularidades. Diremos que una variedad algebraica de dimensión  $n$  es regular en un punto si y sólo si existen  $n$  hipersuperficies que se cortan transversalmente en el punto (contando multiplicidades). Esta definición equivaldrá a que el cono tangente a la variedad sea un espacio afín y a que la completación del anillo de funciones algebraicas en el punto sea un anillo de series formales. Daremos también criterios diferenciales que caractericen la regularidad.

Por último, para el problema de la “regularización” de una variedad introduciremos los anillos de valoración. El procedimiento de regularización de las curvas por explosión, se estudiará en el siguiente capítulo.

### 4.2 Anillos locales regulares

**1. Definición:** Diremos que un anillo  $\mathcal{O}$  local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$  es regular, si  $\dim \mathcal{O} = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . A  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  se le denomina espacio cotangente de Zariski.

En Geometría Diferencial, si  $V$  es una variedad diferenciable,  $x \in V$  y  $\mathfrak{m}_x$  es el ideal de las funciones diferenciables que se anulan en  $x$ , entonces  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^*V$  es el espacio cotangente a  $V$  en  $x$ . Si bien, el anillo de gérmenes de una variedad diferenciable no es un anillo noetheriano, se cumple que la dimensión de la variedad diferenciable coincide con la dimensión del espacio cotangente en todo punto. En este sentido se puede decir que las variedades diferenciables son regulares en todo punto.

**2. Definición:** Diremos que  $X = \text{Spec } A$  es regular en  $x \in X$  si  $A_x$  es un anillo local regular.

**3. Ejemplo:** Los anillos íntegros locales de ideales principales son anillos regulares. Por tanto, las localizaciones de  $\mathbb{Z}$  en sus puntos cerrados son anillos regulares.

Recordemos que dado  $f \in \mathfrak{m}$  decimos que es un parámetro. Observemos que para todo anillo  $\mathcal{O}$  local noetheriano  $\dim \mathcal{O} \leq \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , porque si  $\dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n$  y  $f_1, \dots, f_n$  es un sistema de parámetros obtenido por Nakayama, sabemos que  $\dim \mathcal{O} \leq n$ . Por tanto,

$$\mathcal{O} \text{ es regular} \Leftrightarrow \dim \mathcal{O} \geq \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

**4. Proposición :** *Un anillo  $\mathcal{O}$  local noetheriano de dimensión  $n$ , es regular si y sólo si existe un sistema de parámetros  $f_1, \dots, f_n$  que generan el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$ .*

*Demostración.* Si  $\mathcal{O}$  es un anillo regular entonces  $n = \dim \mathcal{O} = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Si  $f_1, \dots, f_n$  es un sistema generador de  $\mathfrak{m}$  obtenido por Nakayama, éste será el sistema de parámetros buscado. Recíprocamente, si  $f_1, \dots, f_n$  es un sistema de parámetros que generan  $\mathfrak{m}$  entonces  $\dim \mathcal{O} \geq \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , luego  $\mathcal{O}$  es regular.  $\square$

Aunque no hayamos definido la multiplicidad de intersección, digamos que esta proposición se interpreta geoméricamente del siguiente modo: “Una variedad algebraica irreducible  $X = \text{Spec } A$  de dimensión  $n$ , es regular en un punto cerrado  $x \in X$  si y sólo si existen  $n$  hipersuperficies,  $f_i = 0$ , que se cortan con multiplicidad 1 en  $x$ ”.

**5. Proposición :** *El anillo local de  $k[x_1, \dots, x_n]$  en el origen es un anillo regular de dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Denotemos  $\mathfrak{m}_x = (x_1, \dots, x_n)$ . Por 3.4.1,  $\dim k[x_1, \dots, x_n]_x = n$ . Por la proposición anterior,  $k[x_1, \dots, x_n]_x$  es regular.  $\square$

**6. Ejercicio :** Probar que para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}_x \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , entonces  $k[x_1, \dots, x_n]_x$  es regular. “El espacio afín es regular en todo punto”.

**7. Teorema :**  *$\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$ . “ $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si el cono tangente en el punto cerrado es isomorfo a un espacio afín.”*

*Demostración.* Antes empezar con la demostración, observemos que el graduado de  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$  en el ideal definido por el ideal maximal  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$  es isomorfo a  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ . Como por Samuel, la dimensión de un anillo local  $\mathcal{O}$  viene determinada por su graduado  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ , tendremos que la dimensión de Krull de  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$  localizado en el ideal maximal  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$ , escribamos simplemente  $\dim G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ , es igual a  $\dim \mathcal{O}$ .

Si  $\mathcal{O}$  es un anillo regular de dimensión  $n$ , existe un sistema de parámetros  $f_1, \dots, f_n$  que genera el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$ . Consideremos el epimorfismo graduado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n] & \rightarrow & G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots \\ x_i & \mapsto & \bar{f}_i \end{array}$$

Veamos que es un isomorfismo:  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$  es un anillo de dimensión  $n$  en el origen. Si hubiese núcleo, la dimensión del anillo imagen, es decir la de  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ , en el punto definido por el ideal maximal  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$  sería menor que  $n = \dim \mathcal{O}$ . Contradicción.

Recíprocamente, si  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$ , entonces  $\dim G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = n$ , luego  $\dim \mathcal{O} = n$ . Además, tenemos también que

$$\dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} (x_1, \dots, x_n)/(x_1, \dots, x_n)^2 = n$$

Luego,  $\dim \mathcal{O} = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  y  $\mathcal{O}$  es regular.  $\square$

**8. Corolario :** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano, de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Sea  $\widehat{\mathcal{O}}$  el completado  $\mathfrak{m}$ -ádico de  $\mathcal{O}$ . Se cumple que  $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $\widehat{\mathcal{O}}$  es regular.*

*Demostración.* El corolario es consecuencia del teorema anterior y de que  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = G_{\widehat{\mathfrak{m}}}\widehat{\mathcal{O}}$ .  $\square$

**9. Proposición :** *Si  $\mathcal{O}$  es un anillo regular entonces es íntegro.*

*Demostración.* Sean  $f, g \in \mathcal{O}$ . Sea  $\mathfrak{m}$  el ideal maximal de  $\mathcal{O}$ . Recordemos que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = 0$ . Por tanto, existen  $r, s \in \mathbb{N}$  de modo que  $f \in \mathfrak{m}^r$ ,  $f \notin \mathfrak{m}^{r+1}$ ,  $g \in \mathfrak{m}^s$  y  $g \notin \mathfrak{m}^{s+1}$ . Es decir,  $\bar{f} \in \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$  y  $\bar{g} \in \mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$  son no nulas.

Si  $\mathcal{O}$  es regular entonces  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$ .  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$  es un anillo íntegro. Por lo tanto,  $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{fg} \in \mathfrak{m}^{r+s}/\mathfrak{m}^{r+s+1}$  no es nulo. Luego  $f \cdot g$  no es nulo y  $\mathcal{O}$  es íntegro.  $\square$

**10. Proposición :** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local regular de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , completo por la topología  $\mathfrak{m}$ -ádica. Si  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo se verifica un isomorfismo*

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}[[x_1, \dots, x_n]]$$

*Demostración.* Por el teorema de Cohen, existe una sección  $\mathcal{O}/\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathcal{O}$  del cuerpo residual de  $\mathfrak{m}$ . Sea  $\xi_1, \dots, \xi_n$  un sistema generador de  $\mathfrak{m}$  obtenido por el Lema de Nakayama. El morfismo

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m}[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \mathcal{O}, s(x_1, \dots, x_n) \mapsto s(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

es un isomorfismo porque en los graduados lo es (recuérdese 3.2.7). Por tanto,

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}[[x_1, \dots, x_n]]$$

$\square$

Escribamos  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$  y sea  $f \in \mathfrak{m}_x$ . Denotaremos a  $\bar{f} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  como  $d_x f$ , y diremos que  $d_x f$  es la diferencial de  $f$  en  $x$ . Por ejemplo, si consideramos  $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{m}_x = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , entonces por desarrollando por Taylor en  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , tenemos que

$$d_x p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d_x x_1 + \dots + \frac{\partial p}{\partial x_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d_x x_n$$

En el caso de que el anillo  $A$  una  $k$ -álgebra y  $A/\mathfrak{m}_x = k$ , dado  $f \in \mathfrak{m}_x$ , se define  $d_x f = \overline{f - f(x)} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ , donde  $f(x) = \bar{f} \in A/\mathfrak{m}_x = k$ .

**11. Teorema :** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local regular de ideal maximal  $\mathfrak{m}_x$ . Sea  $I \subset \mathcal{O}$  un ideal.  $\mathcal{O}/I$  es un anillo regular  $\Leftrightarrow I$  está generado por un sistema de parámetros de diferenciales en  $x$  linealmente independientes.*

*Demostración.* Denotemos por  $\bar{\mathfrak{m}}_x$  la clase de  $\mathfrak{m}_x$  en  $\mathcal{O}/I$ .

$\Leftarrow$ ) Sabemos que  $I = (f_1, \dots, f_r)$  de modo que  $\{d_x f_1, \dots, d_x f_r\}$  son linealmente independientes en  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . Consideremos la sucesión exacta

$$I \hookrightarrow \mathfrak{m}_x \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x \rightarrow 0$$

Tensorializando por  $\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$  obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow I/\mathfrak{m}_x I \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x/\bar{\mathfrak{m}}_x^2 \rightarrow 0$$

que es exacta por la izquierda, porque  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$  es un sistema generador de  $I/\mathfrak{m}_x I$  linealmente independiente en  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . Por tanto,

$$\dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}_x} \bar{\mathfrak{m}}_x/\bar{\mathfrak{m}}_x^2 = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}_x} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 - r = \dim \mathcal{O} - r \leq \dim \mathcal{O}/I$$

Luego  $\mathcal{O}/I$  es regular (de dimensión  $\dim \mathcal{O} - r$ ).

$\Rightarrow$ )  $\mathcal{O}/I$  es regular. Escribamos  $\dim \mathcal{O} = n$  y  $\dim \mathcal{O}/I = n - r$ . Consideremos la sucesión exacta

$$I \hookrightarrow \mathfrak{m}_x \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x \rightarrow 0$$

Tensorializando por  $\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$  obtenemos la sucesión exacta

$$I/\mathfrak{m}_x I \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x/\bar{\mathfrak{m}}_x^2 \rightarrow 0$$

Sean pues  $f_1, \dots, f_r \in I$ , de modo que  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$  sea una base del núcleo del epimorfismo  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x/\bar{\mathfrak{m}}_x^2$ .

El epimorfismo  $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_r) \rightarrow \mathcal{O}/I$  es un isomorfismo:  $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_r)$  es un anillo regular por  $\Leftrightarrow$ ), de dimensión  $n - r$ . Si hubiese núcleo, la dimensión de la imagen sería menor que  $n - r$ , porque  $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_r)$  es íntegro por ser un anillo regular. Por tanto, la dimensión de  $\mathcal{O}/I$  sería menor que  $n - r$ , contradicción.

Por tanto,  $I = (f_1, \dots, f_r)$  con  $d_x f_1, \dots, d_x f_r$  linealmente independientes. □

**12. Ejercicio:** Calcular los puntos regulares de  $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$ .

Los anillos locales de la Geometría Diferencial, si bien no son noetherianos, pueden considerarse, si no somos rigurosos, como anillos regulares, pues sus completados son anillos de series formales. En Geometría Diferencial, es conocido que dada una variedad diferenciable  $X$  y  $\{f_1, \dots, f_r\} \in \mathcal{C}^\infty(X)$ , si  $d_x f_1, \dots, d_x f_r$  son linealmente independientes para todo  $x \in \{f_1 = 0, \dots, f_n = 0\}$  entonces  $\{f_1 = 0, \dots, f_n = 0\}$  es una subvariedad diferenciable de  $X$ .

### 4.3 Anillos locales regulares de dimensión 1 y anillos de valoración

Los anillos locales regulares de dimensión cero son los cuerpos. En la teoría de Galois, se ha profundizado en su estudio. Nuestro objetivo es el estudio de los anillos locales regulares de dimensión uno. Los anillos de dimensión uno de la Geometría Algebraica son los anillos de funciones algebraicas de las curvas. En la clasificación de las curvas algebraicas es fundamental el caracterizar los puntos singulares (los puntos no regulares) de las curvas y la regularización o desingularización de éstas. Como veremos, los anillos locales regulares de dimensión uno son los anillos de valoración discreta, y la intersección de los anillos de valoración que contienen a un anillo es su cierre entero, en el caso de anillos de curvas es el anillo de su desingularización.

**1. Teorema:** Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de dimensión 1. Se verifica que  $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $\mathcal{O}$  es un anillo de ideales principales.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Si  $\mathcal{O}$  es regular de dimensión 1, su ideal maximal está generado por un parámetro  $t \in \mathfrak{m}$ . Si  $f$  es un elemento no nulo de  $\mathcal{O}$ , entonces  $f = t^n \cdot i$ , con  $i \in \mathcal{O}$  invertible para un  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto  $f\mathcal{O} = t^n \mathcal{O}$ . Dado un ideal  $I$ , tendremos que  $I = t^m \mathcal{O}$  con  $m = \min\{n : f\mathcal{O} = t^n \mathcal{O}, \text{ con } f \in I\}$ .

$\Leftarrow$ ) Tenemos que  $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$ . Luego  $\dim \mathcal{O} \geq \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  y  $\mathcal{O}$  es regular. □

**2. Definición:** Sea  $\Sigma$  un cuerpo. Una valoración discreta de  $\Sigma$  es una aplicación epiyectiva  $v: \Sigma - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  que verifica

1.  $v(fg) = v(f) + v(g)$ .

$$2. v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$$

Dado un anillo  $\mathcal{O}$  local regular de ideal maximal  $\mathfrak{m}$  y cuerpo de fracciones  $\Sigma$ , podemos definir una valoración discreta en  $\Sigma$  (la valoración  $\mathfrak{m}$ -ádica): Dada  $f \in \Sigma$  tenemos que  $f = \frac{a}{b}$ , con  $a, b \in \mathcal{O}$ . Sea  $t$  un generador de  $\mathfrak{m}$ . Se verifica que  $a = t^n \cdot i$  y  $b = t^m \cdot i'$  donde  $i, i'$  son invertibles de  $\mathcal{O}$ . Entonces  $f = t^{n-m} \cdot i''$ , con  $i''$  invertible de  $\mathcal{O}$ . Pues bien, si definimos  $v(f) = n - m$ , es fácil comprobar que  $v$  es una valoración discreta. Además  $\mathcal{O}$  coincide con las  $f \in \Sigma$  de valor mayor o igual que cero.

Recíprocamente, veamos que dada una valoración discreta  $v$  entonces  $\mathcal{O}_v = \{f \in \Sigma : v(f) \geq 0\}$  es un anillo local regular de dimensión 1 de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ .

Sea  $v: \Sigma - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  una valoración. Observemos que  $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$  luego  $v(1) = 0$ . Por tanto,  $0 = v(1) = v(f \cdot f^{-1}) = v(f) + v(f^{-1})$ , luego  $v(f^{-1}) = -v(f)$ .

Cada ideal  $I \subset \mathcal{O}_v$  está generado por un elemento de valor mínimo: Sea  $f \in I$  de valor mínimo, dado  $g \in I$  tenemos que  $v(g) \geq v(f)$  luego  $v(g/f) = v(g) - v(f) \geq 0$ . Luego  $g/f \in \mathcal{O}_v$  y  $g = g/f \cdot f$ , es decir  $I = (f)$ .

Así pues,  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de ideales principales, luego noetheriano.  $\mathcal{O}_v$  es un anillo local que no es un cuerpo, porque los invertibles son precisamente  $\{f \in \mathcal{O}_v : v(f) = 0\}$  y el ideal maximal es  $\mathfrak{p}_v = \{f \in \mathcal{O}_v : v(f) > 0\}$ . Por tanto,  $\mathcal{O}_v$  es un anillo local regular de dimensión 1. Además, para toda  $f \in \Sigma$  o bien  $f \in \mathcal{O}_v$  o bien  $f^{-1} \in \mathcal{O}_v$ , es decir,  $v(f) \geq 0$  o  $v(f^{-1}) = -v(f) \geq 0$  (esta propiedad junto con la noetherianidad va a caracterizar los anillos de valoración discreta  $\mathcal{O}_v$ ). Por tanto, el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}_v$  es  $\Sigma$ .

Hemos obtenido la siguiente proposición.

**3. Proposición:** *La correspondencia que asigna a cada valoración discreta  $v$  de  $\Sigma$  el anillo  $\mathcal{O}_v = \{f \in \Sigma : v(f) \geq 0\}$  es una correspondencia biunívoca entre el conjunto de valoraciones discretas y los subanillos locales regulares de dimensión 1 de  $\Sigma$  de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ .*

Dada una valoración discreta  $v$  diremos que  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración discreta.

**4. Definición:** Sea  $\Sigma$  un cuerpo, diremos que un subanillo  $\mathcal{O}_v \subset \Sigma$  es de valoración si verifica que para todo  $f \in \Sigma$  o bien  $f \in \mathcal{O}_v$  o bien  $f^{-1} \in \mathcal{O}_v$ .

Todo subanillo de valoración de  $\Sigma$  es íntegro y su cuerpo de fracciones es  $\Sigma$ . Diremos que  $\Sigma$  es el anillo de valoración trivial de  $\Sigma$ .

**5. Proposición:** *Sea  $\mathcal{O}_v$  un anillo de valoración y  $I_1, I_2$  ideales de  $\mathcal{O}_v$ . Entonces  $I_1 \subseteq I_2$  o  $I_2 \subseteq I_1$ .*

*Demostración.* Si  $I_1 \not\subseteq I_2$  y  $I_2 \not\subseteq I_1$ , entonces existen  $f_1 \in I_1, f_1 \notin I_2$  y  $f_2 \in I_2, f_2 \notin I_1$ . Sabemos que  $f_1/f_2 \in \mathcal{O}_v$  (o equivalentemente  $f_2/f_1 \in \mathcal{O}_v$ ). Por tanto,  $f_1 = f_1/f_2 \cdot f_2 \in I_2$ , contradicción.  $\square$

**6. Corolario:** *Todo anillo de valoración es local.*

Al ideal maximal se le denota  $\mathfrak{p}_v$  y se le denomina el ideal de valoración.

**7. Proposición:** *Si  $\mathcal{O}_v$  es un anillo noetheriano de valoración, no trivial, entonces  $\mathcal{O}_v$  es un anillo local regular de dimensión 1.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{O}_v$  es noetheriano, todo ideal es principal, pues dado  $I = (f_1, \dots, f_n)$  tenemos que  $(f_1) \subset (f_2)$  (o recíprocamente), luego  $I = (f_2, \dots, f_n)$ . Recurrentemente obtendremos que  $I$  es principal. Por tanto, si  $\mathcal{O}_v$  no es trivial, es un anillo local regular de dimensión 1.  $\square$

Dado un anillo de valoración  $\mathcal{O}_v$  de  $\Sigma$ , denotemos por  $\mathcal{O}_v^*$  el grupo de los invertibles de  $\mathcal{O}_v$ . La relación definida en el grupo  $\Sigma^*/\mathcal{O}_v^*$  por  $\bar{f} \geq \bar{g}$  si  $f \cdot g^{-1} \in \mathcal{O}_v$ , es una relación de orden total. Denotemos por  $v: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*/\mathcal{O}_v^*$  el morfismo de paso al cociente. Se verifica que

$$1. v(fg) = v(f) + v(g) \text{ (denotamos la operación de } \Sigma^*/\mathcal{O}_v^* \text{ aditivamente).}$$

$$2. v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$$

Recíprocamente, dado un grupo  $G$  aditivo totalmente ordenado y  $v: \Sigma^* \rightarrow G$  una aplicación verificando las dos condiciones anteriores,  $\mathcal{O}_v = \{f \in \Sigma : v(f) \geq 0\}$  es un anillo de valoración.

## 4.4 Cierre entero y anillos de valoración

El objetivo principal del resto del curso es el estudio de la desingularización de las curvas. Resulta que la desingularización  $\tilde{C}$  de una curva  $C$  es un morfismo  $\tilde{C} \rightarrow C$  finito y birracional (las fibras son finitas y en un abierto es isomorfismo) y  $\tilde{C}$  no admite a su vez tales morfismos (salvo los isomorfismos). Es decir, si escribimos  $C = \text{Spec } A$  y  $\tilde{C} = \text{Spec } \tilde{A}$ , resulta que  $A \rightarrow \tilde{A}$  es un morfismo finito y birracional y  $\tilde{A}$  no admite tales morfismos (salvo los isomorfismos). Como veremos los anillos de valoración están caracterizados por no admitir morfismos birracionales “dominantes” y  $\tilde{A}$  coincide con la intersección de los anillos de valoración del cuerpo de fracciones de  $A$  que contienen a  $A$ .

**1. Definición:** Diremos que un anillo  $A$  íntegro, es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ , si cumple que si una función  $f \in \Sigma$  es entera sobre  $A$  entonces  $f \in A$ . También se dice que  $A$  es normal.

Sea  $A \hookrightarrow B$  un morfismo de anillos. Llamaremos cierre entero de  $A$  en  $B$  al subanillo de  $B$  formado por todos los elementos de  $B$  enteros sobre  $A$ .

Dejamos que el lector pruebe que el cierre entero de un anillo íntegro en su cuerpo de fracciones es un anillo íntegramente cerrado.

**2. Proposición:** *Los dominios de factorización única son íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones.*

*Demostración.* Sea  $A$  un dominio de factorización única y  $\Sigma$  su cuerpo de fracciones. Sea  $\frac{a}{b} \in \Sigma$  una fracción de modo que  $b$  sea primo con  $a$ . Si  $\frac{a}{b}$  es entero sobre  $A$  verifica una relación

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Multiplicando por  $b^n$  tendremos  $a^n + \dot{b} = 0$ . Luego, como  $b$  es primo con  $a$ , habrá de ser invertible y  $f \in A$ . En conclusión, los únicos elementos enteros de  $\Sigma$  sobre  $A$  son los de  $A$ . □

**3. Ejemplo:**  $\mathbb{Z}, k[x], k[x_1, \dots, x_n]$  son anillos íntegramente cerrados en sus cuerpos de fracciones.

**4. Lema:** *Los anillos de valoración son íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{O}_v$  un anillo de valoración y  $\Sigma$  su cuerpo de fracciones. Sea  $f \in \Sigma$  entero sobre  $\mathcal{O}_v$ . Por tanto, verifica una relación entera

$$f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_i \in \mathcal{O}_v$$

Si  $f^{-1} \in \mathcal{O}_v$ , entonces  $f = -a_1 - a_2 f^{-1} - \dots - f^{1-n} \in \mathcal{O}_v$ . Si  $f^{-1} \notin \mathcal{O}_v$  entonces  $f \in \mathcal{O}_v$ , pues  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración. En conclusión,  $\mathcal{O}_v$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de funciones.

De otro modo:  $nv(f) = v(f^n) = v(-a_1 f^{n-1} - \dots - a_n) \geq \min\{v(-a_1 f^{n-1}), \dots, v(-a_{n-1} f), v(-a_n)\} \geq \min\{(n-1)v(f), \dots, v(f), 0\}$  de lo que se deduce que  $v(f) \geq 0$ . □

Si consideramos el nodo  $C \equiv y^2 - x^2 + x^3 = 0$  y consideramos la curva  $\tilde{C}$  que se obtiene de “despegar” las dos ramas y el morfismo natural  $\tilde{C} \rightarrow C$  “pegar”, resulta que este morfismo fuera del nodo es isomorfismo (birracional) y es un morfismo finito. Parece claro intuitivamente que para las curvas regulares en todo punto, no existen más morfismos birracionales finitos que los isomorfismos. En términos matemáticos precisos:

**5. Teorema:** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo íntegro local noetheriano de dimensión 1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\mathcal{O}$  es regular.
2.  $\mathcal{O}$  es un anillo de valoración.
3.  $\mathcal{O}$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ .

*Demostración.* Sólo nos falta probar  $(3 \Rightarrow 1)$ .

Sea  $f$  un elemento no nulo del ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$ .  $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$  es un anillo local de dimensión cero. Por tanto, el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  en  $\mathcal{O}/f\mathcal{O}$  es nilpotente. Es decir, existe un  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $\mathfrak{m}^n \subseteq f\mathcal{O}$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  mínimo verificando  $\mathfrak{m}^n \subseteq f\mathcal{O}$ . Sea  $g \in \mathfrak{m}^{n-1}$  de modo que  $g \notin f\mathcal{O}$ . Basta probar que  $\mathfrak{m} = \frac{f}{g} \cdot \mathcal{O}$ , pues tendríamos que  $\mathfrak{m}$  es un  $\mathcal{O}$ -módulo principal y  $\mathcal{O}$  un anillo regular. Basta probar, pues, que  $\frac{g}{f} \cdot \mathfrak{m} = \mathcal{O}$ . Se verifica que  $\frac{g}{f} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \frac{1}{f} \cdot \mathfrak{m}^n \subseteq \mathcal{O}$ . Si  $\frac{g}{f} \cdot \mathfrak{m} \neq \mathcal{O}$ , tendremos que  $\frac{g}{f} \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$ . Por tanto,  $\frac{g}{f} \cdot$  es un endomorfismo de  $\mathfrak{m}$ , que ha de satisfacer el correspondiente polinomio característico. Luego  $\frac{g}{f}$  es entero sobre  $\mathcal{O}$ , así pues  $\frac{g}{f} \in \mathcal{O}$ . Contradicción porque  $g \notin f\mathcal{O}$ . □

**6. Definición:** Un anillo  $A$  se dice que es un dominio de Dedekind si es noetheriano de dimensión 1 e íntegramente cerrado.

**7. Lema:** *Un anillo  $A$  íntegro, es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones si y sólo si es localmente íntegramente cerrado.*

*Demostración.* Sea  $A$  íntegramente cerrado. Dado  $x \in \text{Spec } A$  veamos que  $A_x$  es íntegramente cerrado: Sea  $f \in \Sigma$  entero sobre  $A_x$ . Por tanto, existe una relación entera

$$f^n + a_1/s_1 \cdot f^{n-1} + \cdots + a_n/s_n = 0 \quad \text{con } a_i, s_i \in A \text{ y } s_i(x) \neq 0$$

Sea  $t = s_1 \cdots s_n$  (luego  $t(x) \neq 0$ ). Multiplicando la relación anterior por  $t^n$  obtenemos una relación entera con coeficientes en  $A$  de  $tf$ , luego  $tf \in A$  y  $f \in A_x$ .

Recíprocamente, supongamos que  $A$  es localmente íntegramente cerrado. Sea  $f \in \Sigma$  entero sobre  $A$ . El morfismo  $A \rightarrow A[f]$  es finito, luego localmente es finito, es más es isomorfismo (porque  $A$  es localmente íntegramente cerrado). Por tanto,  $A = A[f]$  y  $f \in A$ , es decir,  $A$  es íntegramente cerrado. □

**8. Proposición:** *Si  $A$  es un dominio de Dedekind e  $I \subset A$  un ideal no nulo, entonces  $I$  se escribe de modo único como producto de ideales primos.*

*Demostración.* Sean  $\{x_1, \dots, x_m\} = (I)_0$ . Sabemos por el teorema y lema anteriores que  $A_{x_i}$  es un anillo de ideales principales. Por tanto,  $I_{x_i} = \mathfrak{p}_{x_i}^{n_i} A_{x_i}$ , para cierto  $n_i \in \mathbb{N}$  único. El ideal

$$\mathfrak{p}_{x_1}^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_{x_m}^{n_m}$$

es igual localmente a  $I$ , luego son iguales globalmente. Evidentemente los exponentes  $n_i$  están determinados porque lo están al localizar. □

**9. Definición:** Un morfismo  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}'$  inyectivo entre anillos locales de ideales maximales  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$  se dice que es dominante si  $\mathfrak{m}'$  contiene a  $\mathfrak{m}$ , es decir, si  $\mathfrak{m}' \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}$ .

**10. Lema:** Sea  $A$  un anillo íntegro y  $\Sigma$  su cuerpo de fracciones. Se verifica que  $\xi \in \Sigma$  es entero sobre  $A$  si y sólo si  $\xi \in A[\xi^{-1}]$ .

*Demostración.* Si  $\xi$  es entero sobre  $A$  entonces existe una relación entera

$$\xi^n + \cdots + a_1\xi + a_0 = 0, \quad \text{con } a_i \in A$$

Multiplicando por  $\xi^{-n+1}$  obtenemos  $\xi^1 + a_{n-1} + \cdots + a_0\xi^{-n+1} = 0$ . Luego  $\xi \in A[\xi^{-1}]$ .

Si  $\xi \in A[\xi^{-1}]$  entonces  $\xi = \sum_{i=0}^n a_i(\xi^{-1})^i$ . Multiplicando por  $\xi^n$  tendremos

$$\xi^{n+1} - a_0\xi^n - \cdots - a_n = 0$$

Es decir,  $\xi$  es entero sobre  $A$ . □

**11. Proposición:** Un anillo  $\mathcal{O}$  local íntegro, de cuerpo de fracciones  $\Sigma$  es de valoración si y sólo si el único anillo local  $\mathcal{O}' \subset \Sigma$  que contiene a  $\mathcal{O}$  de modo que la inclusión  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}'$  sea un morfismo dominante es  $\mathcal{O}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{O}$  es de valoración. Sea  $\mathcal{O}' \subset \Sigma$  un anillo local que contenga estrictamente a  $\mathcal{O}$  y sea  $\xi \in \mathcal{O}' - \mathcal{O}$ . Entonces  $\xi^{-1} \in \mathcal{O}$ , por ser  $\mathcal{O}$  de valoración. Es más,  $\xi^{-1}$  pertenece al ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$ , porque  $\xi \notin \mathcal{O}$ . En particular,  $\xi^{-1} \in \mathcal{O}'$ , luego  $\xi^{-1}$  no puede pertenecer a su ideal maximal  $\mathfrak{m}'$ , pues  $\xi \in \mathcal{O}'$ . En conclusión,  $\xi^{-1} \in \mathfrak{m}$  y  $\xi^{-1} \notin \mathfrak{m}'$ , luego  $\mathcal{O}'$  no domina a  $\mathcal{O}$ .

Supongamos ahora que en  $\Sigma$  no hay anillos locales que dominen a  $\mathcal{O}$ . Sea  $\xi \in \Sigma$ . Si  $\xi$  es entero sobre  $\mathcal{O}$ , entonces el morfismo  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}[\xi]$  es finito. Sea  $\mathfrak{m}_x$  un ideal maximal de  $\mathcal{O}[\xi]$  tal que  $\mathfrak{m}_x \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}$ , que existe porque los morfismos finitos inyectivos inducen una epiyección entre los espectros (1.3.15). Entonces el morfismo  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}[\xi]_x$  es dominante, luego  $\mathcal{O} = \mathcal{O}[\xi]_x$  y  $\xi \in \mathcal{O}$ . Si  $\xi$  no es entero sobre  $\mathcal{O}$ , por el lema anterior  $\xi \notin \mathcal{O}[\xi^{-1}]$ , luego  $(\xi^{-1}) \subsetneq \mathcal{O}[\xi^{-1}]$ . Es más, como  $\mathcal{O}[\xi^{-1}]/(\xi^{-1}) = \mathcal{O}/I$ ,  $(\mathfrak{m}, \xi^{-1}) = \mathfrak{m}_x$  es un ideal maximal de  $\mathcal{O}[\xi^{-1}]$ . El morfismo  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}[\xi^{-1}]_x$  es dominante, luego  $\mathcal{O} = \mathcal{O}[\xi^{-1}]_x$  y  $\xi^{-1} \in \mathcal{O}$ . □

**12. Teorema:** Sea  $A$  un anillo íntegro y  $\Sigma$  un cuerpo que contiene a  $A$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma$ . Entonces

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subseteq \mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v$$

donde  $\mathcal{O}_v$  son subanillos de valoración de  $\Sigma$ .

*Demostración.* a)  $\bar{A} \subseteq \bigcap_{A \subseteq \mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v$ : Dado  $\xi \in \bar{A}$  es entero sobre  $A$ , luego es entero sobre cualquier anillo  $\mathcal{O}_v$  que contenga a  $\bar{A}$ . Ahora bien, los anillos de valoración son íntegramente cerrados, luego  $\xi$  pertenece a todo anillo  $\mathcal{O}_v$  que contenga a  $A$ , es decir,  $\xi \in \bigcap_{A \subseteq \mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v$ .

b)  $\bar{A} \supseteq \bigcap_{A \subseteq \mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v$ : Si  $\xi \in \Sigma$  no es entero sobre  $A$ , entonces por el lema anterior,  $\xi^{-1}A[\xi^{-1}] \subsetneq A[\xi^{-1}]$ . Por tanto, existe un ideal maximal  $\mathfrak{m}_x \subset A[\xi^{-1}]$  que contiene a  $\xi^{-1}$ . Consideremos el anillo local  $A[\xi^{-1}]_x$ . Sea  $\mathcal{O}_v$  un anillo local maximal con la condición de que domine a  $A[\xi^{-1}]_x$  (que existe por el lema de Zorn).  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración porque no admite morfismos dominantes. Se verifica que  $\xi^{-1} \in \mathfrak{p}_v$ , donde  $\mathfrak{p}_v$  es el ideal de valoración de  $\mathcal{O}_v$ , luego  $\xi \notin \mathcal{O}_v$ . En conclusión,  $\bigcap_{A \subseteq \mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v \subseteq \bar{A}$ . □

**13. Ejercicio:** Sea  $A$  un subanillo de un cuerpo  $K$  y  $\bar{k}$  un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea  $f: A \rightarrow \bar{k}$  un morfismo de anillos. Existe un subanillo  $\mathcal{O}_v$  de valoración de  $K$  que contiene a  $A$  y un morfismo  $f': \mathcal{O}_v \rightarrow \bar{k}$ , de modo que  $f'$  es una extensión de  $f$  y  $\text{Ker } f' = \mathfrak{p}_v$ .

*Resolución:* Sea  $A'$  un anillo local cumpliendo las propiedades exigidas a  $\mathcal{O}_v$  y no dominado por ningún otro anillo local cumpliendo las propiedades.

Pruébese que  $A'$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.

Sea  $\xi \in K$ . Si  $\xi^{-1} \notin A'$  entonces no es entero sobre  $A'$ . Por tanto, por el lema,  $\xi A'[\xi] \neq A'[\xi]$ . Por tanto,  $\xi A'[\xi] \cap A'$  está incluido en el ideal maximal de  $A'$  y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & A'[\xi] & \longrightarrow & A'[\xi]/(\xi A'[\xi]) = A'/(\xi A'[\xi] \cap A') \\ & & & \searrow f' & \downarrow \\ & & & & \bar{k} \end{array}$$

Con lo que llegaremos a contradicción, por la definición de  $A'$ , salvo que  $\xi \in A'$ . En conclusión,  $A'$  es de valoración.

## 4.5 Finitud del cierre entero

**1. Lema:** Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro, íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Sea  $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}$  una extensión finita separable de cuerpos. Entonces el cierre entero  $\bar{A}$  de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  es un  $A$ -módulo finito.

*Demostración.* Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \bar{A} \\ \cap & & \cap \\ \Sigma & \longrightarrow & \bar{\Sigma} \end{array}$$

$\bar{\Sigma}$  es el cuerpo de fracciones de  $\bar{A}$ : Dado  $f \in \bar{\Sigma}$ , verifica una relación algebraica con coeficientes en  $\Sigma$ , digamos  $x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$ , con  $b_i \in \Sigma$ . Escribamos  $b_i = a_i/a'_i$ , con  $a_i, a'_i \in A$  y sea  $a' = a'_1 \dots a'_n$ . Es fácil comprobar que  $a' \cdot f$  es entero sobre  $A$ , es decir  $a' \cdot f \in \bar{A}$ . Por tanto,  $f$  pertenece al cuerpo de fracciones de  $\bar{A}$  y concluimos.

Consideremos en  $\bar{\Sigma}$  la métrica  $T_2$  de la traza,  $T_2(f, g) = \text{tr}(f \cdot g)$ .

Recordemos que  $\text{tr}(h)$  es la traza de la homotecia multiplicar por  $h$  en  $\bar{\Sigma}$ , que  $\text{tr}(h) = \sum_{g \in G} g(h)$ ,

donde  $G = \text{Hom}_{k\text{-álgebra}}(\bar{\Sigma}, \bar{\Sigma})$  y  $\bar{\Sigma}$  es la envolvente de Galois de  $\bar{\Sigma}$ . Recordemos también que  $\bar{\Sigma}$  es separable si y sólo si  $T_2$  es no singular.

Sea  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \bar{A}$  una base del  $\Sigma$ -espacio vectorial  $\bar{\Sigma}$ . Sea  $w_1, \dots, w_n \in \bar{\Sigma}^*$  la base dual de  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ . A través del isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Sigma} & \xrightarrow{iT_2} & \bar{\Sigma}^* = \text{Hom}_{\Sigma}(\bar{\Sigma}, \Sigma) \\ h & \mapsto & iT_2: h' \mapsto T_2(h, h') = \text{tr}(h \cdot h') \end{array}$$

se verifica que  $iT_2: \bar{A} \hookrightarrow A w_1 + \dots + A w_n$ : Dado  $h \in \bar{A}$ , escribamos  $iT_2(h) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ , con  $\lambda_i \in \Sigma$ . Tenemos que ver que  $\lambda_i \in A$ . Se tiene que

$$\lambda_i = iT_2(h)(\bar{a}_i) = \text{tr}(h \cdot \bar{a}_i) = \sum_{g \in G} g(h \cdot \bar{a}_i)$$

Ahora bien,  $h \cdot \bar{a}_i \in \bar{A}$ , luego  $g(h \cdot \bar{a}_i) \in \bar{A}$ , luego  $\lambda_i = \sum_{g \in G} g(h \cdot \bar{a}_i) \in \bar{A}$ . Recordemos que  $\lambda_i \in \Sigma$  y  $A$  es íntegramente cerrado, luego  $\lambda_i \in A$ .

En conclusión,  $\bar{A}$  está incluido en un  $A$ -módulo finito, luego por la noetherianidad de  $A$ , es un  $A$ -módulo finito.  $\square$

**2. Ejercicio:** Probar que  $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$  no es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.

**3. Ejercicio:** Demostrar que el cierre entero de  $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$  en  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$  es finito sobre  $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ . (Pista:  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$  es finito y  $\mathbb{Z}$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones).

**4. Teorema:** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito íntegra de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Sea  $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}$  una extensión finita de cuerpos. Entonces el cierre entero  $\bar{A}$  de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  es un  $A$ -módulo finito, de cuerpo de fracciones  $\bar{\Sigma}$ .

*Demostración.* Sea por el lema de normalización de Noether un morfismo finito  $k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A$ . Como el cierre entero de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  coincide con el cierre entero de  $k[x_1, \dots, x_n]$  en  $\bar{\Sigma}$ , podemos suponer que  $A = k[x_1, \dots, x_n]$ .

Sea  $\bar{\Sigma}$  la envolvente normal de  $\bar{\Sigma}$ . El cierre entero de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  contiene a  $\bar{A}$ . Luego si demostramos que el cierre entero de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  es un  $A$ -módulo finito tendremos que  $\bar{A}$  también lo es. Así pues, podemos suponer que  $\bar{\Sigma}$  es una extensión normal de  $\Sigma$ .

Sea  $G$  el grupo de Galois de  $\bar{\Sigma}$ . Sea  $\bar{\Sigma}^G$  los elementos de  $\bar{\Sigma}$  invariantes por  $G$ . Denotemos por  $A'$  al cierre entero de  $A$  en  $\bar{\Sigma}^G$ .  $\bar{A}$  coincide con el cierre entero de  $A'$  en  $\bar{\Sigma}$ , luego  $\bar{A}$  es un  $A'$ -módulo finito por el lema anterior, pues  $\bar{\Sigma}^G \hookrightarrow \bar{\Sigma}$  es una extensión separable (de Galois). Así pues, para demostrar que  $\bar{A}$  es un  $A$ -módulo finito basta ver que  $A'$  es un  $A$ -módulo finito. Observemos que  $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}^G$  es un morfismo puramente inseparable.

En conclusión, podemos suponer que  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  y que  $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}$  es una extensión finita puramente inseparable de cuerpos.

Sea  $\text{car } k = p > 0$  y escribamos  $\bar{\Sigma} = \Sigma[\xi_1, \dots, \xi_r]$ . Existe  $m \gg 0$  de modo que  $\xi_i^{p^m} \in \Sigma = k(x_1, \dots, x_n)$ , para todo  $i$ . Escribamos  $\xi_i^{p^m} = p_i/q_i$ , con  $p_i = \sum_i \lambda_i x^i \in k[x_1, \dots, x_n]$  y  $q_i = \sum_i \mu_i x^i \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Sea  $k' = k(\sqrt[p^m]{\lambda_i}, \sqrt[p^m]{\mu_i})_i$  y  $\Sigma' = k'(\sqrt[p^m]{x_1}, \dots, \sqrt[p^m]{x_n})$ . Se verifica que  $\xi_i = \sqrt[p^m]{p_i/q_i} \in \Sigma'$ , luego  $\bar{\Sigma} \subseteq \Sigma'$ . De nuevo, podemos suponer para demostrar el teorema que  $\bar{\Sigma} = \Sigma'$ . Ahora bien, el cierre entero  $k[x_1, \dots, x_n]$  en  $\Sigma'$  es  $k'[\sqrt[p^m]{x_1}, \dots, \sqrt[p^m]{x_n}]$ , pues  $k'[\sqrt[p^m]{x_1}, \dots, \sqrt[p^m]{x_n}]$  es un  $k[x_1, \dots, x_n]$ -módulo finito y es íntegramente cerrado (porque es un anillo de polinomios). Hemos concluido.  $\square$

**5. Definición:** Diremos que  $\text{Spec } A$  es una curva íntegra afín si  $A$  es una  $k$ -álgebra de tipo finito íntegra de dimensión 1.

**6. Ejemplo:** La recta afín  $\mathbb{A}_1 = \text{Spec } k[x]$ , la circunferencia  $\text{Spec } k[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ .

Los cerrados propios de la topología de Zariski de una curva íntegra son los conjuntos finitos de puntos cerrados. El punto genérico es el único punto denso.

**7. Definición:** Diremos que un punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$  es no singular si  $A_x$  es un anillo regular. Diremos que es singular si  $A_x$  no es regular.

**8. Ejemplo:**  $\text{Spec } k[x, y]/(y^2 - x^3)$  tiene un único punto singular, el origen.

**9. Teorema:** El número de puntos singulares de una curva íntegra es finito.

*Demostración.* Sea  $C = \text{Spec } A$  la curva íntegra y  $\Sigma$  el cuerpo de fracciones de  $A$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma$ , que como sabemos, es un  $A$ -módulo finito, de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{A}/A \rightarrow 0$$

Localizando en el punto genérico de la curva, tenemos que  $\bar{A}/A$  es cero. Luego  $\bar{A}/A$  es cero al localizar en todos los puntos salvo en un número finito de puntos cerrados. Por tanto,  $A = \bar{A}$  al localizar en todos los puntos salvo un número finito de puntos cerrados. Por el lema 3.4.7, dado  $x \in \text{Spec } A$ ,  $A_x = \bar{A}_x$  si y sólo si  $A_x$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones, es decir si y sólo si  $A_x$  es regular, es decir, si y sólo si  $x$  es no singular. En conclusión, los puntos singulares de  $C = \text{Spec } A$  coinciden con los puntos del soporte de  $\bar{A}/A$ , que es un número finito de puntos.  $\square$

## 4.6 Problemas

1. Calcular el polinomio de Samuel de un anillo local regular de dimensión 2.
2. Probar que un anillo local noetheriano  $\mathcal{O}$  es un anillo regular de dimensión  $r$  si y sólo si  $S_{\mathcal{O}}(n) = \binom{n+r-1}{r}$ . Para la suficiencia seguir los pasos:
  - (a)  $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$  es un anillo regular en el origen.
  - (b) Si  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  es una  $k$ -álgebra y  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  y  $\bar{k}$  es el cierre algebraico de  $k$ , probar que  $A$  es regular en  $\mathfrak{m}_x$  si y sólo si  $A \otimes_k \bar{k}$  es regular en  $\mathfrak{m}_x \otimes_k \bar{k}$ .
  - (c) Si  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  es una  $k$ -álgebra graduada, con  $\text{gr } \xi_i = 1$  y  $k$  con infinitos elementos, demostrar que existe un morfismo graduado finito  $k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow A$ .
  - (d) Probar que el morfismo anterior es isomorfismo si y sólo si  $S_A(n) = \binom{n+r-1}{r}$ .
3. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano, e  $I = (f_1, \dots, f_r) \subset \mathcal{O}$  un ideal tal que  $\mathcal{O}/I$  es un anillo regular de dimensión de Krull  $\dim \mathcal{O} - r$ . Probar que  $\mathcal{O}$  es un anillo regular.
4. Probar que la localización de  $\mathbb{Z}[x]$  en cualquier punto es un anillo regular.
5. Probar que un anillo noetheriano  $A$  es regular en todo punto si y sólo si  $A[x]$  es regular en todo punto.
6. Calcular los puntos de  $\mathbb{Z}[\sqrt[2]{5}]$  en los que no es regular.
7. Sea  $\mathfrak{m}_x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathcal{O} = (k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r))_x$ . Supongamos que  $\dim \mathcal{O} = n - r$ . Probar que  $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $\text{rg}(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}(0)) = r$ .
8. Sean  $X$  e  $Y$  dos  $k$ -variedades algebraicas y  $x \in X$  e  $y \in Y$  dos puntos racionales regulares. Probar que  $X \times_k Y$  es regular en  $(x, y)$ .
9. Sea  $A$  un anillo incluido en un cuerpo  $\Sigma$ . Probar que  $f \in \Sigma$  es entero sobre  $A$  si y sólo si es entero sobre  $A[f^{-1}]$ .
10. Calcular los anillos de valoración de  $\mathbb{Q}$ .
11. Calcular los anillos de valoración de  $\mathbb{C}(x)$ , que contengan a  $\mathbb{C}$ .

12. Consideremos el morfismo  $\mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[[\theta]]$ ,  $x \mapsto \theta, y \mapsto sen\theta$ . Demostrar que  $\mathcal{O}_v = \mathbb{C}(x, y) \cap \mathbb{C}[[\theta]]$  es un anillo de valoración discreta, tal que  $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v = \mathbb{C}$ .
13. Sea  $\mathcal{O}_v$  un subanillo de valoración del cuerpo  $\Sigma$ . Pruébese
- Si  $B$  es un subanillo de valoración de  $\Sigma$  contenido en  $\mathcal{O}_v$ , entonces existe un ideal primo  $\mathfrak{p}_x$  de  $B$  de modo que  $\mathcal{O}_v = B_x$ .
  - Si  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal primo del anillo de valoración  $B$ , entonces  $B/\mathfrak{p}_x$  es un subanillo de valoración de su cuerpo de fracciones.
  - Sea  $\pi: \mathcal{O}_v \rightarrow \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$  el morfismo de paso al cociente. Si  $\bar{B}$  es un subanillo de valoración de  $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$  entonces  $\pi^{-1}(\bar{B})$  es un subanillo valoración.
  - Existe una correspondencia biunívoca entre los subanillos de valoración contenidos en  $\mathcal{O}_v$  y los subanillos de valoración de  $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$ .
14. Sea  $\mathcal{O}_v$  un anillo de valoración discreta de  $\mathbb{C}(x, y)$  trivial sobre  $\mathbb{C}$ .
- Demostrar que  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathbb{C}[x, y]$ , o a  $\mathbb{C}[\frac{1}{x}, \frac{y}{x}]$ , o a  $\mathbb{C}[\frac{1}{y}, \frac{x}{y}]$ .
  - Si  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathbb{C}[x, y]$  y  $\mathfrak{p}_v \cap \mathbb{C}[x, y] = \mathfrak{p}_x$  es una curva, demostrar que  $\mathcal{O}_v = \mathbb{C}[x, y]_x$ .
  - Si  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathbb{C}[x, y]$  y  $\mathfrak{p}_v \cap \mathbb{C}[x, y] = \mathfrak{m}_x$  es un ideal maximal, por ejemplo  $\mathfrak{m}_x = (x, y)$ , demostrar que  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathbb{C}[x_1, y_1]$  con  $x_1 = x, y_1 = \frac{y}{x}$  o  $x_1 = \frac{x}{y}, y_1 = y$ .
  - Con las notaciones obvias a partir del apartado anterior. Supongamos que  $\mathfrak{p}_v \cap \mathbb{C}[x_n, y_n]$  es un ideal maximal para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Demostrar que existe un  $m \in \mathbb{N}$ , de modo que  $v(x_m)$  (o  $v(y_m)$ ) es mínimo entre todos los  $v(x_n), v(y_n)$ . Demostrar que  $\hat{\mathcal{O}}_v = \lim_{\leftarrow i} \mathcal{O}_v/(\mathfrak{p}_v^i) = \mathbb{C}[[x_m]]$  y que por tanto  $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v = \mathbb{C}$ .
15. Sea  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con el orden lexicográfico. Fijemos  $q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ . Consideremos la aplicación  $v: \mathbb{C}[x, y] - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , definida por,  $v(p(x, y)) = (n, m)$ , donde  $p(x, y) = q(x, y)^n \cdot r(x, y)$  ( $r(x, y)$  no divisible por  $q(x, y)$ ) y  $m$  es la multiplicidad de  $p(x, y)$  en un punto  $q$  de  $q(x, y)$ , dado. Demostrar que  $v$  extiende a una valoración de  $\mathbb{C}(x, y)$ .
16. Sea  $\alpha$  un número irracional positivo. Demostrar que la aplicación  $v: \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ , definida por  $v(\sum c_{n,m}x^n y^m) = \min\{n + m\alpha | c_{n,m} \neq 0\}$  extiende a una valoración de  $\mathbb{C}(x, y)$ .
17. Sea  $\Sigma$  un cuerpo. Un valor absoluto en  $\Sigma$  es una aplicación  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaciendo los siguientes axiomas
- $f(x) = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .
  - $f(xy) = f(x)f(y)$ , para todo  $x, y \in \Sigma$ .
  - $f(x + y) \leq C \max\{f(x), f(y)\}$  para todo  $x, y \in \Sigma$  y cierto  $C \in \mathbb{R}^+$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>En Bourbaki, Commutative Algebra, puede verse: Se verifica que  $C \geq 1$ . Si  $C \leq 2$  la condición tercera, supuestas las dos primeras, equivale a  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ . Todo valor absoluto define la topología donde la base de entornos de un punto  $x \in \Sigma$  es  $\{y \in \Sigma | f(x - y) < \epsilon\}$ , para  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ . Si identificamos dos valores absolutos si definen la misma topología, podremos suponer que  $C = 1$  o  $C = 2$  (tomando  $f^\alpha$ , para cierto  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ), denominado valor absoluto "arquimediano". Así puede verse que los valores absolutos de  $\mathbb{Q}$  están en correspondencia con el conjunto de números primos positivos junto con el valor absoluto "arquimediano" estándar de  $\mathbb{Q}$ . El teorema de Gelfand-Mazur, dice que si  $\Sigma$  es una  $\mathbb{R}$ -extensión de cuerpos, y posee una norma compatible con la estructura de álgebra de  $\Sigma$ , entonces  $\Sigma$  es  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . El teorema de Ostrowski dice que si  $f$  es un valor absoluto arquimediano, entonces  $\Sigma$  es una subextensión densa de  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  y  $f$  es equivalente al valor absoluto estándar.

Pruébese que existe una correspondencia biunívoca entre los valores absolutos con  $C = 1$  (“no arquimedianos”) y las valoraciones de  $\Sigma$  con valores en  $\mathbb{R}$ . (Pista: Dado un valor absoluto  $f$ , pruébese que  $\log(-f)$  es una valoración.)

18. Sea  $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \amalg \infty$ . Impongamos  $-\infty = \infty$ ,  $0^{-1} = \infty$ ,  $\infty^{-1} = 0$ ;  $a + \infty = \infty + a = \infty$ , para todo  $a \in \mathbb{C}$ ;  $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ , para todo  $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ . Sea  $K$  un cuerpo. Sea  $f: K \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$  una aplicación tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), f(1) = 1$$

siempre que los términos escritos tengan todos sentido. Demostrar que los  $x \in K$  tales que  $f(x) \neq \infty$  (es decir, valor finito) forman un subanillo de valoración de  $K$ .<sup>2</sup>

19. Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito de dimensión de Krull 1, íntegra de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma$ . Probar que el conjunto de anillos de valoración de  $\Sigma$  que contienen a  $A$  es biyectivo con  $\text{Spec } \bar{A}$ .
20. Pruébese que el anillo local de  $k[x, y]$  en el origen es íntegramente cerrado pero no es un anillo de valoración.
21. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local íntegro. Probar que el cierre entero de  $\mathcal{O}$  en su cuerpo de fracciones es la intersección de los anillos de valoración del cuerpo de fracciones que dominan a  $\mathcal{O}$ .
22. Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro de dimensión 1. Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones. Dado  $a \in A$  no nulo, probar que  $l_A(A/aA) \geq l_A(\bar{A}/a\bar{A})$ . Probar que  $\bar{A}$  es un anillo noetheriano de dimensión 1.
23. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano íntegro,  $\Sigma$  el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}$  y  $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_n)$  su ideal maximal. Probar
- Si  $\mathcal{O}_v$  es un ideal de valoración de  $\Sigma$  que domina a  $\mathcal{O}$ , para algún  $i$ ,  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathcal{O}[\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}, a_i] = B$ . Además,  $\mathfrak{m} \cdot B$  es un ideal principal propio de  $B$ .
  - Existe un anillo local noetheriano de dimensión 1, en  $\Sigma$ , que domina a  $\mathcal{O}$ .
  - Existe un anillo de valoración discreta en  $\Sigma$  que domina a  $\mathcal{O}$ .
  - El cierre entero de  $\mathcal{O}$  en su cuerpo de fracciones es la intersección de los anillos de valoración discreta que lo dominan.
24. Sea  $A$  un anillo íntegro y  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones.
- Si  $0 \neq I \subset A$  es un ideal, definir inclusiones naturales,  $A \hookrightarrow \text{Hom}_A(I, I) \hookrightarrow \bar{A}$ .
  - Si  $0 \neq I \subset A$  es un ideal radical, probar que  $\text{Hom}_A(I, A) \cap \bar{A} = \text{Hom}_A(I, I)$ .
25. Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro y  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones. Sea  $Y \subset \text{Spec } A$  el conjunto de los puntos  $x$ , tales que  $A_x$  no sea íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones. Sea  $I$  un ideal radical no nulo que se anule en todo  $Y$ .
- Dada  $h = \frac{h}{g} \in \bar{A}$ , probar que  $(\text{Anul}(hA/(hA \cap A)))_0 = \{x \in \text{Spec } A: h \notin A_x\} \subset Y$ .
  - Probar que existe  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $I^n \subset \text{Anul}(hA/(hA \cap A))$ .
  - Probar que si  $A = \text{Hom}_A(I, I)$  entonces  $A$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.

<sup>2</sup>Sea  $K$  es el cuerpo de funciones meromorfas sobre una variedad analítica compleja de dimensión 1. Entonces  $f: K \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ ,  $g \mapsto g(z_0)$ , siendo  $z_0$  un punto de la variedad, es un ejemplo del párrafo anterior.



## Capítulo 5

# Desingularización de curvas

### 5.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos las singularidades de una curva. Probaremos que toda curva es birracional a una curva sin puntos singulares. Estudiaremos el proceso denominado de explosión que nos permitirá desingularizar las curvas. Definiremos la multiplicidad de una variedad en un punto. Calcularemos la multiplicidad de intersección de una curva y una hipersuperficie en un punto. Veremos que el número de ramas analíticas de una curva en un punto coincide con el número de puntos en los que desingulariza la curva en el punto. Por último, en el caso de una única rama introduciremos el desarrollo en serie de Puiseux, que parametriza analíticamente la curva.

Fuera del estudio local de las variedades, probaremos el teorema de Bézout, que dice que dos curvas planas proyectivas de grados  $n$  y  $m$  se cortan en  $n \cdot m$  puntos, contando grados y multiplicidades de intersección. Probaremos también el lema de Max Noether, que nos permitirá probar como ejercicios, los teoremas de Pascal y Pappus.

### 5.2 Explosión en un punto y desingularización

**1. Definición :** Sea  $A$  un anillo y  $\mathfrak{p} \subset A$  un ideal. Se llama dilatado de  $A$  en  $\mathfrak{p}$ , o anillo de Rees de  $A$  en  $\mathfrak{p}$ , al anillo graduado

$$D_{\mathfrak{p}}A = A \oplus \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}^n \oplus \cdots$$

El morfismo natural  $\text{Proj } D_{\mathfrak{p}}A \rightarrow \text{Spec } A$ ,  $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap A$  se denomina morfismo de explosión (o transformación cuadrática cuando  $\mathfrak{p}$  sea maximal), centrada en  $(\mathfrak{p})_0$ .

**2. Proposición :** Sea  $\mathfrak{m}_x \subset A$  un ideal maximal. El morfismo de explosión de  $\text{Spec } A$  en  $x$

$$\pi: \text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x}A \rightarrow \text{Spec } A$$

verifica

1.  $\pi^{-1}(\text{Spec } A - x) \stackrel{\pi}{\cong} \text{Spec } A$ .
2.  $\pi^{-1}(x) = \text{Proj } G_{\mathfrak{m}_x}A$ . “La fibra de  $x$  es igual al espacio tangente en  $x$  de  $\text{Spec } A$ ”.

*Demostración.* 1. Consideremos el morfismo  $A \rightarrow A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots$ . Dado  $\xi \in \mathfrak{m}_x$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(U_\xi) &= \text{Proj}(A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots)_\xi = \text{Proj}(A_\xi \oplus \mathfrak{m}_{x\xi} \oplus \cdots) \\ &= \text{Proj}(A_\xi \oplus A_\xi \oplus \cdots) = \text{Proj } A_\xi[t] = \text{Spec } A_\xi = U_\xi\end{aligned}$$

Ahora bien, como  $\text{Spec } A - x = \bigcup_{\xi \in \mathfrak{m}_x} U_\xi$  obtenemos el punto 1.

2. Por ser  $x \in \text{Spec } A$  cerrado sabemos que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(x) &= \text{Proj}[(A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots)/\mathfrak{m}_x(A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots)] \\ &= \text{Proj}[(A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots)/(\mathfrak{m}_x \oplus \mathfrak{m}_x^2 \oplus \cdots)] \\ &= \text{Proj}(A/\mathfrak{m}_x \oplus \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus \cdots) = \text{Proj } G_{\mathfrak{m}_x} A\end{aligned}$$

□

**Observaciones:** Dado  $y \in \text{Spec } A$  distinto de  $x$ ,  $\pi^{-1}(y)$  se corresponde con el punto de  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A$  de ideal  $\mathfrak{p}_y \oplus (\mathfrak{p}_y \cap \mathfrak{m}_x) \oplus (\mathfrak{p}_y \cap \mathfrak{m}_x^2) \oplus \cdots$ , pues éste es un ideal primo homogéneo cuya imagen por  $\pi$  es  $y$ .

Sea  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .  $D_{\mathfrak{m}_x} A = A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots$  es una álgebra graduada generada por sus elementos de grado uno. Es decir, tenemos la igualdad  $A[\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n] = A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots$ ,  $\tilde{\xi}_i \mapsto (0, \xi_i, \dots)$ . Dado  $\xi \in \mathfrak{m}_x$ , hemos probado que  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A - (\tilde{\xi})_0^h = \text{Spec } A[\frac{\tilde{\xi}_1}{\xi}, \dots, \frac{\tilde{\xi}_n}{\xi}]$ . Se cumple que  $A[\frac{\tilde{\xi}_1}{\xi}, \dots, \frac{\tilde{\xi}_n}{\xi}]$  es isomorfo, con el isomorfismo obvio, al anillo  $A[\frac{\xi_1}{\xi}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi}]$ , que es el subanillo obvio de  $A_\xi$ .

**3. Ejercicio:** Sea  $x \in \mathbb{A}_n$  el “origen”. Probar que el morfismo de explosión de  $\mathbb{A}_n$  en  $x$

$$\pi: \text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n} \rightarrow \mathbb{A}_n$$

verifica

1.  $\pi^{-1}(\mathbb{A}_n - x) \stackrel{\pi}{=} \mathbb{A}_n - x$ .
2.  $\pi^{-1}(x) = \mathbb{P}_{n-1}$ . “La fibra de  $x$  es igual a la proyectivización del cono tangente en  $x$  de  $\mathbb{A}_n$ , que coincide con el conjunto de direcciones en  $x$ ”.

Dada una subvariedad  $C \xrightarrow{i} \mathbb{A}_n$  se tiene un epimorfismo natural  $D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n} \rightarrow D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_C$ , luego el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} = \text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_C & \xrightarrow{i'} & \text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n} = \tilde{\mathbb{A}}_n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ C & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_n \end{array}$$

Probar que si  $C$  es una recta, que pasa por el origen, entonces  $\tilde{C} \stackrel{\pi}{=} C$  y  $i'(\pi^{-1}(x))$  se identifica con la dirección definida por  $C$ . Probar que si  $n = 2$  y  $C$  es la curva nodal  $y^2 - x^2 + x^3 = 0$ , entonces  $i'(\pi^{-1}(x))$  se identifica con las dos direcciones definidas por las tangentes de  $C$  en  $x$ .

**4. Teorema:** Sea  $A$  un anillo semilocal (i.e., con un número finito de puntos cerrados), noetheriano, íntegro, de dimensión 1. Sea  $\mathfrak{m}_x$  un ideal maximal de modo que  $A/\mathfrak{m}_x$  tenga infinitos elementos. Se verifica

$$\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A = \text{Spec } A_1$$

(anillo  $A_1$  que especificaremos).

*Demostración.* Escribamos  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Consideremos el isomorfismo graduado

$$D_{\mathfrak{m}_x} A = A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \mathfrak{m}_x^2 \oplus \dots \stackrel{\text{def}}{=} A[\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n]$$

$$\xi_i \longleftarrow \tilde{\xi}_i$$

Sabemos que dado  $\xi \in \mathfrak{m}_x$ ,  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A - (\tilde{\xi})_0^h = U_{\tilde{\xi}}^h = \text{Spec } A[\tilde{\xi}_1/\tilde{\xi}, \dots, \tilde{\xi}_n/\tilde{\xi}] = \text{Spec } A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Para demostrar el teorema, basta encontrar  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  tal que  $(\tilde{\xi})_0^h = \emptyset$ , es decir  $\tilde{\xi}$  no se anula en ningún punto cerrado de  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A$ . Por la proposición anterior (y observaciones) buscamos  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  de modo que

1.  $\tilde{\xi}$  no se anule en ningún punto cerrado de  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A - \pi^{-1}(x) = \text{Spec } A - x$ . Es decir, si denotamos por  $y_1, \dots, y_r$  los puntos cerrados de  $\text{Spec } A$  distintos de  $x$ , buscamos  $\xi \notin \mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_{y_i}$  para todo  $i$ . “Geoméricamente, buscamos un parámetro que pase por  $x$  y no por los  $y_i$ ”.
2.  $\tilde{\xi}$  no se anule en ningún punto cerrado de  $\pi^{-1}(x) = \text{Proj } G_{\mathfrak{m}_x} A$ . Ahora bien,  $G_{\mathfrak{m}_x} A$  es un anillo que en el “origen” tiene la misma dimensión que  $A$  en  $x$ , que es 1. Por tanto, como los ideales primos homogéneos de  $G_{\mathfrak{m}_x} A$  están incluidos estrictamente en el ideal de funciones que se anulan en el “origen” (ideal irrelevante), son ideales minimales, luego un número finito. En conclusión, siguiendo las notaciones de las observaciones anteriores, si denotamos  $\mathfrak{p}_{x_i} = 0 \oplus \mathfrak{p}_{x_{i1}} \oplus \mathfrak{p}_{x_{i2}} \oplus \dots$  los ideales primos homogéneos de  $G_{\mathfrak{m}_x} A$ , buscamos  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  de modo que  $\tilde{\xi} \notin \mathfrak{p}_{x_{i1}} \subsetneq \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . “Geoméricamente, buscamos un parámetro que pasa por  $x$  transversalmente”.

Sea  $\bar{e} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \subset A/\mathfrak{m}_x^2$  tal que  $\bar{e} \notin \mathfrak{p}_{x_{i1}}$  para todo  $i$  (existe porque la unión de los subespacios propios  $\mathfrak{p}_{x_{i1}}$  no puede ser todo  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ , ya que  $A/\mathfrak{m}_x$  tiene infinitos elementos). Consideremos ahora el morfismo

$$\phi: A \rightarrow A/\mathfrak{m}_x^2 \times A/\mathfrak{m}_{y_1} \times \dots \times A/\mathfrak{m}_{y_n}, \quad a \mapsto (\bar{a}, \bar{a}, \dots, \bar{a})$$

que es epimorfismo, como se comprueba localmente. Si  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  es tal que  $\phi(\xi) = (\bar{e}, 1, \dots, 1)$ , entonces es el parámetro buscado. □

**Observaciones:** El anillo  $A_1 = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$  del teorema no depende de la elección del parámetro  $\xi$ : Dado  $\xi'$  tal que  $(\tilde{\xi}')_0^h = \emptyset$  en  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A$ , entonces  $(\xi'/\xi)_0 = \emptyset$  en  $\text{Spec } A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Luego  $\xi'/\xi$  es invertible y  $A[\xi_1/\xi', \dots, \xi_n/\xi'] \subseteq A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]_{\xi'/\xi} = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Por simetría tenemos la inclusión  $A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi] \subseteq A[\xi_1/\xi', \dots, \xi_n/\xi']$  inversa, con lo que concluimos la igualdad.

El ideal  $\mathfrak{m}_x A_1 = (\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi] = \xi A_1$ .

**5. Definición:** El anillo  $A_1$  del teorema anterior se llama anillo de la transformación cuadrática. o anillo de la explosión (en  $x$ ).

**6. Lema:** Con las notaciones e hipótesis del teorema anterior, se verifica que  $A = A_1 \Leftrightarrow$  el punto cerrado  $x$  en el que estamos explotando es no singular.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ )  $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x A_1$ , el cual es principal.

$\Leftarrow$ )  $\text{Proj}$  conmuta con localizaciones. En el complementario de  $x$ ,  $A$  y  $A_1$  son isomorfos. Localicemos en  $x$ ,  $\mathfrak{m}_x = (\xi)$ . Entonces  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A = U_{\xi}^h = \text{Spec } A[\xi/\xi] = \text{Spec } A$ , luego  $A_1 = A$ . □

**7. Lema:** Si  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración que contiene a  $A$  entonces  $A_1 \subseteq \mathcal{O}_v$ . Por tanto, el morfismo  $A \hookrightarrow A_1$  es finito.

*Demostración.* Escribamos  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  y  $D_{\mathfrak{m}_x} A = A[\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n]$ . Tenemos que  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A = \bigcup_i \text{Spec } A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ . Sea  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  de modo que  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A = \text{Spec } A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ , es decir,  $A_1 = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Observemos que

$$\begin{aligned} A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i] \stackrel{\xi/\xi_i \text{ invert.}}{=} A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]_{\xi/\xi_i} &= A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]_{\xi_i/\xi} \\ &= A_{1_{\xi_i/\xi}} \end{aligned}$$

Así pues, si  $\mathcal{O}_v$  contiene a algún  $A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  contiene a  $A_1$ .

Sea  $\xi_j/\xi_i$  tal que  $v(\xi_j/\xi_i)$  sea máxima para todo  $i, j$ . Entonces  $v(\xi_k/\xi_i) \geq 0$  para todo  $k$ : Si  $v(\xi_k/\xi_i) < 0 \Rightarrow v(\xi_i/\xi_k) > 0 \Rightarrow v(\xi_j/\xi_i) < v(\xi_j/\xi_i) + v(\xi_i/\xi_k) = v(\xi_j/\xi_i \cdot \xi_i/\xi_k) = v(\xi_j/\xi_k)$ , lo que es contradictorio.

Por tanto,  $A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i] \subseteq \mathcal{O}_v$  y  $A_1 \subseteq \mathcal{O}_v$ . Como consecuencia, el morfismo  $A \hookrightarrow A_1$  es entero y como  $A_1 = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$  el morfismo es finito.  $\square$

**8. Teorema:** Sea  $A$  un anillo semilocal, noetheriano, íntegro, de dimensión 1. Si el cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones es un  $A$ -módulo finito, entonces dicho cierre entero se alcanza por un número finito de explosiones en puntos cerrados.

*Demostración.* Sea  $x$  un punto singular de  $\text{Spec } A$ . Por el lema 5.2.6, sabemos que  $A$  está incluido estrictamente en  $A_1$ . Por el lema 5.2.7 sabemos que  $A_1$  está incluido en el cierre entero  $\bar{A}$  de  $A$  en su cuerpo de fracciones. Así pues, tenemos  $A \subsetneq A_1 \subseteq \bar{A}$ .

Procediendo del mismo modo con  $A_1$ , tendremos  $A \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subseteq \bar{A}$ . Como  $\bar{A}$  es un  $A$ -módulo finito y  $A$  es noetheriano, este proceso es finito y terminará cuando  $A_n = \bar{A}$ .  $\square$

**9. Definición:** La fibra en el morfismo de explosión del punto por el que se explota se denomina fibra excepcional. En las condiciones y notaciones del teorema anterior si consideramos la cadena

$$\text{Spec } \bar{A} = \text{Spec } A_n \xrightarrow{\pi_n} \text{Spec } A_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \rightarrow \text{Spec } A_1 \xrightarrow{\pi_1} \text{Spec } A$$

a la cadena correspondiente de fibras excepcionales es un orden finito arbolado que se conoce como árbol de explosión de  $A$ .

### 5.3 Multiplicidad de un punto singular

**1. Definición:** Se llama multiplicidad de un anillo local noetheriano  $\mathcal{O}_x$  de dimensión  $r$ , al coeficiente de mayor grado de su polinomio de Samuel multiplicado por el factor  $r!$ . Lo denotaremos  $m_x(\mathcal{O}_x)$ .

**2. Ejemplo:** Los anillos locales regulares son de multiplicidad 1: Si  $\mathcal{O}$  es un anillo local regular de ideal maximal  $\mathfrak{m}_x$ , sabemos que  $G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x[x_1, \dots, x_m]$  y el polinomio de Samuel es  $S_{\mathcal{O}}(n) = \binom{n+m-1}{m} = \frac{1}{m!} n^m + \dots$ . Por tanto,  $m_x(\mathcal{O}) = \frac{1}{m!} \cdot m! = 1$ .

**3. Proposición:** Sea  $I \subset A$  un ideal y  $f \in I^r - I^{r+1}$ . Denotemos por  $f_r = \bar{f} \in I^r/I^{r+1} \subset G_I A$ . Si  $f_r$  es no divisor de cero en  $G_I A$  entonces

1.  $(f) \cap I^n = f \cdot I^{n-r}$ .

2.  $G_{\bar{I}}(A/(f)) = (G_I A)/(f_r)$ , donde  $\bar{I}$  es el ideal  $I$  en  $A/(f)$ .

*Demostración.* 1. Es claro que  $f \cdot I^{n-r} \subseteq (f) \cap I^n$ . Probemos la inclusión inversa. Si  $h \in (f) \cap I^n$ , entonces  $h = f \cdot g$ , con  $g \in A$ . Sea  $s \in \mathbb{N}$  máximo con la condición de que  $g \in I^s - I^{s+1}$ . Tenemos que ver que  $s \geq n-r$ . Escribamos  $0 \neq g_s = \bar{g} \in I^s/I^{s+1}$ . Entonces, por las hipótesis,  $0 \neq f_r \cdot g_s \in I^{r+s}/I^{r+s+1}$ , luego  $h = f \cdot g \notin I^{r+s+1}$ . Por tanto,  $r + s + 1 < n$ , es decir,  $s \geq n - r$ .

2. Del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_n (f) \cap I^n / (f) \cap I^{n+1} & \longrightarrow & \bigoplus_n I^n / I^{n+1} & \longrightarrow & \bigoplus_n \bar{I}^n / \bar{I}^{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel \cdot f(1.) & \nearrow \cdot f_r & & & \\
 & & \bigoplus_n I^{n-r} / I^{n-r+1} & & & & 
 \end{array}$$

obtenemos que  $G_{\bar{I}}(A/(f)) = (G_I A)/(f_r)$ . □

**4. Ejemplo:** Sea  $X$  es una hipersuperficie de  $\mathbb{A}_m$  definida por un polinomio  $p(x_1, \dots, x_m) = p_r(x_1, \dots, x_m) + \dots + p_s(x_1, \dots, x_m)$  que escribimos como suma de polinomios homogéneos. Por la proposición anterior, la sucesión

$$0 \rightarrow G_{\mathfrak{m}_0} k[x_1, \dots, x_m] \xrightarrow{\cdot p_r(x_1, \dots, x_m)} G_{\mathfrak{m}_0} k[x_1, \dots, x_m] \rightarrow G_{\mathfrak{m}_0} \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

es exacta. Por tanto, el polinomio de Samuel de  $X$  en el origen  $0$  es

$$S_{\mathcal{O}_{X,0}}(n) = \binom{m+n-1}{m} - \binom{m+n-1-r}{m} = \frac{r}{(m-1)!} n^{m-1} + \dots$$

Luego la multiplicidad de  $X$  en el origen es igual  $r$ .

En el caso particular de que  $X$  sea una curva plana entonces

$$S_{\mathcal{O}_{X,0}}(n) = r \cdot n - \frac{r(r-1)}{2}$$

siendo  $r$  la multiplicidad de  $X$  en el origen.

Supongamos ahora que  $\mathcal{O}_x$  es un anillo local noetheriano de multiplicidad  $m_x(\mathcal{O}_x)$ . Sea  $f \in \mathcal{O}_x$  tal que  $f \in \mathfrak{m}_x^r - \mathfrak{m}_x^{r+1}$  y  $f_r = \bar{f} \in \mathfrak{m}_x^r / \mathfrak{m}_x^{r+1}$  no sea un divisor de cero en  $G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_x$ . Se cumple que  $m_x(\mathcal{O}_x/(f)) = r \cdot m_x(\mathcal{O}_x)$ : Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cdot f_r} G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_x \rightarrow G_{\mathfrak{m}_x} (\mathcal{O}_x/(f)) \rightarrow 0$$

Por tanto,  $S_{\mathcal{O}_x/(f)}(n) = S_{\mathcal{O}_x}(n) - S_{\mathcal{O}_x}(n-r)$  y un sencillo cálculo demuestra lo requerido.

**5. Lema de estabilidad del ideal** Sean  $A$ ,  $\mathfrak{m}_x$ ,  $A_1$  como en el teorema 5.2.4, y  $A \rightarrow A_1$  el morfismo de explosión. Para todo  $s \gg 0$  se verifica  $\mathfrak{m}_x^s = \mathfrak{m}_x^s \cdot A_1$ .

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  y  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  tal que  $A_1 = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Un sistema generador de  $A_1$  como  $A$ -módulo lo forman los elementos de la forma  $\frac{\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}}{\xi^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}$ . Como  $A_1$  es un  $A$ -módulo finito, para un  $s \gg 0$  tendremos que  $A_1 = \{ \frac{p_s(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi^s} : p_s \text{ polinomios homogéneos de grado } s \}$ . Observando que  $\mathfrak{m}_x \cdot A_1 = \xi A_1$ , tendremos que  $\mathfrak{m}_x^s \cdot A_1 = \xi^s A_1 \subseteq \mathfrak{m}_x^s$ . □

**Observación:** Si  $A$  es el anillo local de una curva plana en un punto racional, puede tomarse  $s$  igual a la multiplicidad de  $A$  menos uno (véase).

Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo finito de anillos y  $\pi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  el morfismo inducido en los espectros. Dado un punto  $x \in \text{Spec } A$ ,  $\pi^{-1}(x) = \text{Spec } B/\mathfrak{m}_x B$  es un número finito de puntos cerrados, digamos  $\{y_1, \dots, y_n\}$ . Sabemos que  $B/\mathfrak{m}_x B = \prod_i (B/\mathfrak{m}_x B)_{y_i}$ . Se dice que  $y_i$  aparece con multiplicidad  $m_i$  en  $\pi^{-1}(x)$  si  $l_B((B/\mathfrak{m}_x B)_{y_i}) = m_i$ . Observemos que  $l_A((B/\mathfrak{m}_x B)_{y_i}) = l_B((B/\mathfrak{m}_x B)_{y_i}) \cdot \dim_{A/\mathfrak{m}_x} B/\mathfrak{m}_{y_i}$ , pues los factores de toda serie de composición de  $(B/\mathfrak{m}_x)_{y_i}$  como  $B$ -módulo son isomorfos a  $B/\mathfrak{m}_{y_i}$ , que son  $A$ -módulos de longitud  $\dim_{A/\mathfrak{m}_x} B/\mathfrak{m}_{y_i}$ . Se llama grado de  $y_i$  sobre  $x$  a  $\dim_{A/\mathfrak{m}_x} B/\mathfrak{m}_{y_i}$ . Con todo, tenemos que

$$l_A(B/\mathfrak{m}_x B) = \sum_i l_A((B/\mathfrak{m}_x B)_{y_i}) = \sum_i m_i \cdot \dim_{A/\mathfrak{m}_x} B/\mathfrak{m}_{y_i}$$

**6. Teorema:** Sean  $A$ ,  $\mathfrak{m}_x$  y  $A_1$  como en el teorema 5.2.4. El coeficiente de grado uno del polinomio de Samuel de  $A$ , es decir, la multiplicidad de  $A$  en  $x$  es igual al número de puntos de la fibra excepcional (contando multiplicidades y grados). El coeficiente de grado cero del polinomio de Samuel de  $A$  es igual a  $-l_A(A_1/A)$ .

*Demostración.* Por el lema de estabilidad para  $n \gg 0$  se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A/\mathfrak{m}_x^n \rightarrow A_1/\mathfrak{m}_x^n A_1 \rightarrow A_1/A \rightarrow 0$$

Tomando longitudes tenemos  $S_{A_x}(n) = l_A(A_1/\mathfrak{m}_x^n A_1) - l_A(A_1/A) = l_A(A_1/\mathfrak{m}_x A_1)n - l_A(A_1/A)$ , porque  $\mathfrak{m}_x A_1$  es principal. Por tanto,  $m_x(A) = l_A(A_1/\mathfrak{m}_x A_1) = \dim_{A/\mathfrak{m}_x} (A_1/\mathfrak{m}_x A_1)$  y  $S_{A_x}(0) = -l_A(A_1/A)$ .  $\square$

**7. Corolario:** Sea  $A$  como en el teorema 5.2.4. Sea  $\bar{A}$  su cierre entero en su cuerpo de fracciones. Supongamos que  $\bar{A}$  es finito sobre  $A$ . Sea  $A \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = \bar{A}$ , la cadena de las sucesivas explosiones; digamos que  $A_{i+1}$  es la explosión de  $A_i$  en  $y_i$ . Se cumple

$$l_A(\bar{A}/A) = - \sum_{y_i \in \text{árb. expl.}} S_{A_i, y_i}(0) \cdot \dim_{A/\mathfrak{m}_x} (A_{i, y_i}/\mathfrak{m}_{y_i})$$

*Demostración.*  $l_A(\bar{A}/A)$  es el número de eslabones de las series de composición de  $A$ -módulo que comienzan en  $A$  y terminan en  $\bar{A}$ . Si consideramos la sucesión  $A \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = \bar{A}$ , tendremos que  $l_A(\bar{A}/A) = \sum_i l_A(A_{i+1}/A_i)$ .

Observemos que  $l_A(A_{i+1}/A_i) = l_{A_i}(A_{i+1}/A_i) \cdot \dim_{A/\mathfrak{m}_x} (A_{i, y_i}/\mathfrak{m}_{y_i})$ , porque los factores de toda serie de composición de  $A_{i+1}/A_i$  como  $A_i$ -módulo son isomorfos a  $A_i/\mathfrak{m}_{y_i}$  que es un  $A$ -módulo de longitud  $\dim_{A/\mathfrak{m}_x} (A_{i, y_i}/\mathfrak{m}_{y_i})$ .

Ahora ya,

$$\begin{aligned} l_A(\bar{A}/A) &= \sum_i l_A(A_{i+1}/A_i) = \sum_i l_{A_i}(A_{i+1}/A_i) \cdot \dim_{A/\mathfrak{m}_x} (A_{i, y_i}/\mathfrak{m}_{y_i}) \\ &= - \sum_{y \in \text{árb. expl.}} S_{A_i, y_i}(0) \cdot \dim_{A/\mathfrak{m}_x} (A_{i, y_i}/\mathfrak{m}_{y_i}) \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la proposición anterior.  $\square$

**8. Corolario:** Si  $A$  es el anillo local de una curva plana sobre un, entonces

$$l_A(\bar{A}/A) = \sum_{y \in \text{árb. expl.}} \frac{m_y(m_y - 1)}{2} \cdot \dim_{A/\mathfrak{m}_y}(A_{i,y}/\mathfrak{m}_y)$$

donde denotamos por  $m_y$  la multiplicidad del punto  $y$ .

*Demostración.* Los anillos locales de los puntos del árbol de explosión de  $A$  son anillos locales de curvas planas. Ahora ya, se concluye por el teorema y corolario anterior, y el cálculo del ejemplo anterior. □

## 5.4 Multiplicidad de intersección de una curva con una hipersuperficie

**1. Lema:** Sea  $A \hookrightarrow B$  un morfismo de anillos íntegros, tal que  $B/A$  es un  $A$ -módulo de longitud finita. Si  $a \in A$  es tal que  $A/aA$  y  $B/aB$  son  $A$ -módulos de longitud finita entonces  $l_A(A/aA) = l_A(B/aB)$ .

*Demostración.* Empecemos observando que el morfismo  $B/A \xrightarrow{a} aB/aA$ ,  $\bar{b} \mapsto \overline{ab}$ , es un isomorfismo. Por tanto,  $l_A(aB/aA) = l_A(B/aA)$ . Si consideramos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} aA & \hookrightarrow & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ aB & \hookrightarrow & B \end{array}$$

tendremos que  $l_A(aB/aA) + l_A(B/aB) = l_A(B/aA) = l_A(B/A) + l_A(A/aA)$ , y por lo tanto que  $l_A(A/aA) = l_A(B/aB)$ . □

**2. Definición:** Si  $X$  es una curva de un espacio afín  $\mathbb{A}_m$  y  $H \equiv p(x_1, \dots, x_m) = 0$  una hipersuperficie que no pasa por ninguna componente de  $X$ , entonces  $X \cap H$  es un número finito de puntos. Se llama multiplicidad de intersección de  $X$  con  $H$  en un punto  $x$  de  $X$  al número  $(X \cap H)_x \stackrel{\text{def}}{=} l_{\mathcal{O}_{X \cap H, x}}(\mathcal{O}_{X \cap H, x})$  (que coincide con el polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}_{X \cap H, x}$ ).

Observemos que  $\dim_k \mathcal{O}_{X \cap H, x} = (X \cap H)_x \cdot \dim_k \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$ , porque los factores de toda serie de composición de  $\mathcal{O}_{X \cap H, x}$  como  $\mathcal{O}_{X \cap H, x}$ -módulo son isomorfos a  $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$ , luego la dimensión de  $\mathcal{O}_{X \cap H, x}$  es igual a su longitud por  $\dim_k \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$ . Denotamos  $\text{gr } x = \dim_k \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$ . Si  $\mathfrak{m}_x$  es racional entonces  $\dim_k \mathcal{O}_{X \cap H, x} = (X \cap H)_x$ .

Llamaremos número de puntos de corte de  $C$  con  $H$ , contando multiplicidades y grados al número  $(C \cap H) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \mathcal{O}_{C \cap H}$ . Tenemos

$$(C \cap H) = \dim_k \mathcal{O}_{C \cap H} = \sum_{x_i \in C \cap H} \dim_k \mathcal{O}_{C \cap H, x_i} = \sum_{x_i \in C \cap H} (C \cap H)_{x_i} \text{gr } x_i$$

**3. Teorema:** Sea  $C$  una curva y  $H$  una hipersuperficie de un espacio afín  $\mathbb{A}_n$ , sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. La multiplicidad de intersección de  $C$  y  $H$  en un punto  $x$  es el producto de las multiplicidades de  $C$  y  $H$  en  $x$  más las multiplicidades de intersección en los puntos de la fibra excepcional de las explosiones de  $C$  y  $H$ .

*Demostración.* Consideremos el diagrama de las variedades explotadas en  $x$

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{C} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{A}}_n & \longleftarrow & \tilde{H} \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi'' \\ C & \longrightarrow & \mathbb{A}_n & \longleftarrow & H \end{array}$$

Supongamos que  $x$  es el “origen”. Sea  $\xi$  un parámetro transversal a  $C$  en  $x$ . Sabemos que  $\tilde{C} \subset \text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n}[x_1/\xi, \dots, x_n/\xi] = U_{\tilde{\xi}}^h \subset \tilde{\mathbb{A}}_n$  y si  $H \equiv p = p_r + \dots + p_n = 0$  (con  $p_i$  polinomios homogéneos de grado  $i$ ) la ecuación de  $\tilde{H} \cap U_{\tilde{\xi}}^h$  es  $p' = p/\xi^r = p_r(x_1/\xi, \dots, x_n/\xi) + \dots + \xi^{s-r} p_s(x_1/\xi, \dots, x_n/\xi) = 0$ .

Si denotamos por  $\mathcal{O}_1$  al anillo de la explosión de  $\mathcal{O}_{C,x}$  en  $x$ , tenemos

$$\begin{aligned} (C \cap H)_x &= l(\mathcal{O}_{C,x}/(p)) \stackrel{5.4.1}{=} l(\mathcal{O}_1/(p)) = l(\mathcal{O}_1/(\xi^r \cdot p')) \\ &= r \cdot l(\mathcal{O}_1/(\xi)) + l(\mathcal{O}_1/p') \stackrel{5.3.6}{=} m_x(H) \cdot m_x(C) + \sum_{\substack{y \in \text{ciclo.exc.} \\ = \pi^{-1}(x)}} (\tilde{C} \cap \tilde{H})_y \end{aligned}$$

□

**4. Corolario:** *La multiplicidad de intersección, de una curva con una hipersuperficie en un punto, es mayor o igual que el producto de sus multiplicidades en dicho punto, siendo igual precisamente si sus espacios tangentes no tienen parte común en dicho punto. En este caso, se dice que se cortan transversalmente y, en el otro, que son tangentes en el punto.*

*Demostración.* Sigamos las notaciones de la demostración anterior. Consideramos los morfismos

$$\begin{array}{ccccc} T_x C = \text{Proj } G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{C,x} & \hookrightarrow & T_x \mathbb{A}_n & \longleftarrow & T_x H \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \text{Proj } k[\xi_1, \dots, \xi_n] & & \pi^{-1}(x) = \text{Proj } k[x_1, \dots, x_n] & & \text{Proj } k[x_1, \dots, x_n]/(p_r) \end{array}$$

Tenemos por la fórmula final de la demostración anterior que la multiplicidad de intersección, de una curva con una hipersuperficie en un punto es igual al producto de sus multiplicidades en dicho punto si y sólo si  $\sum_{\substack{y \in \text{ciclo.exc.} \\ = \pi^{-1}(x)}} (\tilde{C} \cap \tilde{H})_y = 0$ , que equivale a que  $T_x C \cap T_x H$  es vacío. En caso contrario, la mul-

tiplicidad de intersección, de una curva con una hipersuperficie en un punto, es mayor estrictamente que el producto de sus multiplicidades en dicho punto.

□

**5. Corolario:** *La multiplicidad de una curva en un punto es igual a la multiplicidad de intersección de la curva explotada con el ciclo excepcional. La multiplicidad de una curva en un punto es mayor o igual que la suma de las multiplicidades de los puntos de la fibra excepcional de la curva explotada, y es igual si y sólo si el ciclo excepcional es transversal a la curva explotada en todos los puntos de corte.*

*Demostración.* Sea  $A$  el anillo local de la curva en el punto dado, digamos  $x$ . Sea  $A_1$  el anillo de la explosión de la curva. Sea  $\xi$  un parámetro regular transversal a la curva en el punto. Tenemos que  $A/(\xi)$  es el anillo de la intersección de la curva con la hipersuperficie  $\xi = 0$ , y su longitud es justamente la multiplicidad de la curva.  $A_1/(\xi)$  es el anillo de la intersección de la curva explotada con el ciclo excepcional. Ahora ya, como  $l(A/(\xi)) = l(A_1/(\xi))$ , concluimos.

□

## 5.5 Teoremas de Bézout y Max Noether

Si  $C$  es una curva proyectiva del espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n(k)$  y  $H$  es una hipersuperficie que no pasa por ninguna componente de  $C$ , entonces  $C \cap H$  es un número finito de puntos. Existe, por tanto, un hiperplano  $H'$  que no pasa por esos puntos. Así pues,  $C \cap H$  está incluido en el espacio afín,  $\mathbb{A}_n = \mathbb{P}_n - H'$ . Deshomogeneizando tenemos que  $C \cap H = \text{Spec } A$ . Diremos que el número de puntos de corte de  $C$  con  $H$ , que denotaremos  $(C \cap H)$ , es el número  $\dim_k A$ . Número que no depende de la elección de  $H'$  y es estable por cambios de cuerpo base.

**1. Teorema de Bézout:** *El número de puntos de corte, contando multiplicidades y grados, de dos curvas proyectivas planas, sin componentes comunes, de grados  $r, r'$  es  $r \cdot r'$ .*

*Demostración.* Podemos suponer que el cuerpo es algebraicamente cerrado. Podemos suponer que el hiperplano del infinito  $x_0 = 0$  no pasa por ninguno de los puntos de la intersección de las curvas, llamémoslas  $C, C'$ .

Escribamos  $C = \text{Proj } k[x_0, x_1, x_2]/(p_r(x_0, x_1, x_2))$ ,  $C' = \text{Proj } k[x_0, x_1, x_2]/(p_{r'}(x_0, x_1, x_2))$ . Sea  $p(x, y) = \frac{p_r(x_0, x_1, x_2)}{x_0^r}$  y  $p'(x, y) = \frac{p_{r'}(x_0, x_1, x_2)}{x_0^{r'}}$ . Tenemos que probar que  $\dim_k k[x, y]/(p(x, y), p'(x, y)) = r \cdot r'$ .

Denotemos  $S = k[x_0, x_1, x_2]/(p_r, p_{r'})$ . Sabemos que  $(\bar{x}_0)_0 = \{(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\}$  en  $\text{Spec } S$ . Por tanto, existe un  $m \gg 0$  de modo que  $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)^m \subseteq (\bar{x}_0)$ . El ideal  $I$  de funciones de  $S$  que son anuladas por  $x_0$ , es un ideal homogéneo, digamos que generado por los elementos de grado menor o igual que  $m'$ . Por tanto,  $I_{m+m'} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)^m I_{m'} \subseteq \bar{x}_0 \cdot I = 0$ . Sea  $n \geq m + m'$ , ahora ya

$$k[x, y]/(p(x, y), p'(x, y)) = [S_{x_0}]_0 = \bigcup_i \frac{S_i}{x_0^i} = \frac{S_n}{x_0^n} \simeq S_n$$

y obtenemos que  $\dim_k k[x, y]/(p(x, y), p'(x, y)) = \dim_k S_n$ .

Denotemos  $A = k[x_0, x_1, x_2]$ . La sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus A & \longrightarrow & A \longrightarrow k[x_0, x_1, x_2]/(p_r, p_{r'}) \longrightarrow 0 \\ & & q & \longrightarrow & (p_{r'} \cdot q, -p_r \cdot q) & & q \longrightarrow \bar{q} \\ & & & & (q, q') & \longrightarrow & p_r \cdot q + p_{r'} \cdot q' \end{array}$$

es exacta. Si denotamos  $A[-n]$  por el anillo  $k[x_0, x_1, x_2]$ , pero donde decimos que un polinomio homogéneo de grado  $m$ ,  $p_m(x_0, x_1, x_2)$  tiene grado  $m + n$ , entonces podemos escribir la anterior sucesión exacta como la siguiente sucesión (la misma salvo la nueva convención en los grados), de modo que los morfismos aplican elementos de grado  $m$  en elementos de grado  $m$ :

$$0 \rightarrow A[-r - r'] \rightarrow A[-r] \oplus A[-r'] \rightarrow A \rightarrow k[x_0, x_1, x_2]/(p_r, p_{r'}) \rightarrow 0$$

Grado a grado la sucesión es exacta. Por tanto,

$$\dim_k (k[x_0, x_1, x_2]/(p_r, p_{r'}))_m = \binom{m+2}{2} + \binom{m+2-r-r'}{2} - \binom{m+2-r}{2} - \binom{m+2-r'}{2} = r \cdot r'$$

para  $m \geq r + r'$ .

□

Ahora vamos a demostrar el teorema de Max Noether, con el que se podrán resolver múltiples problemas geométricos, como los teoremas de Pascal y Pappus.

Dado un ideal homogéneo  $(p_n(x_0, x_1, x_2)) \subseteq k[x_0, x_1, x_2]$  y un punto  $x \in \mathbb{P}_2 - (x_i)_0^h$  denotaremos  $[p_n(x_0, x_1, x_2)]_x \stackrel{\text{Not.}}{=} (p_n(x_0/x_i, x_1/x_i, x_2/x_i))_x \subseteq k[x_0/x_i, x_1/x_i, x_2/x_i]_x$ . Puede comprobarse que si  $x \in \mathbb{P}_2 - (x_j)_0^h$ , entonces  $k[x_0/x_i, x_1/x_i, x_2/x_i]_x = k[x_0/x_j, x_1/x_j, x_2/x_j]_x$  y  $(p_n(x_0/x_i, x_1/x_i, x_2/x_i))_x = (p_n(x_0/x_j, x_1/x_j, x_2/x_j))_x$ .

**2. Teorema Max Noether:** Sean  $p_i \in k[x_0, x_1, x_2]$  polinomios homogéneos ( $i = 1, 2, 3$ ). Consideremos las curvas proyectivas planas  $C_i \equiv p_i = 0$ . Supongamos que  $C_1, C_2$  no tienen componentes comunes. Existe una ecuación

$$p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$$

con  $a, b$  polinomios homogéneos de grados  $\text{gr } a = \text{gr } p_3 - \text{gr } p_1$ ,  $\text{gr } b = \text{gr } p_3 - \text{gr } p_2$ , si y sólo si para todo  $x \in C_1 \cap C_2$  se verifica que  $[p_3]_x \subseteq [p_1]_x + [p_2]_x$ .

*Demostración.* Es obvio que si  $p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$  entonces  $[p_3]_x \subseteq [p_1]_x + [p_2]_x$ . Veamos con el recíproco.

Por cambio homogéneo de coordenadas, podemos suponer que  $x_0 = 0$  no pasa por ningún punto de  $C_1 \cap C_2$ , es decir,  $p_1(0, x_1, x_2)$  es primo con  $p_2(0, x_1, x_2)$ . Sabemos que

$$\frac{p_3}{x_0^{n_3}} = a \cdot \frac{p_1}{x_0^{n_1}} + b \cdot \frac{p_2}{x_0^{n_2}}$$

Tenemos homogeneizando que  $x_0^r \cdot p_3 = a' p_1 + b' p_2$ . Sea  $r$  mínimo en las igualdades de esta forma. Si  $r > 0$ , entonces  $0 = a'(0, x_1, x_2)p_1(0, x_1, x_2) + b'(0, x_1, x_2)p_2(0, x_1, x_2)$ . Por tanto,  $a'(0, x_1, x_2) = h \cdot p_2(0, x_1, x_2)$  y  $b'(0, x_1, x_2) = -h \cdot p_1(0, x_1, x_2)$ . Luego  $a'' = a' - h \cdot p_2$ ,  $b'' = b' - h \cdot p_1$  son divisibles por  $x_0$  y  $x_0^r \cdot p_3 = a'' p_1 + b'' p_2$ . Dividiendo en esta igualdad por  $x_0$  llegamos a contradicción, porque  $r - 1 < r$ .

En conclusión,

$$p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$$

En cuanto a los grados de  $a$  y  $b$  es fácil demostrar que se puede suponer que cumplen lo requerido.  $\square$

**3. Proposición :** Sean  $C_i$  curvas proyectivas planas definidas por polinomios homogéneos  $p_i \in k[x_0, x_1, x_2]$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Supongamos que  $C_1, C_2$  no tienen componentes comunes. Supongamos el cuerpo base  $k$  es algebraicamente cerrado.  $C_3$  verifica las condiciones de Noether en un punto cerrado  $x \in C_1 \cap C_2$ , es decir,  $[p_3]_x \subseteq [p_1]_x + [p_2]_x$  si

1)  $C_1$  y  $C_2$  son simples en  $x$ , se cortan transversalmente en  $x$  y  $x \in C_3$ .

2) El punto  $x$  es un punto simple de  $C_1$  y  $(C_1 \cap C_3)_x \geq (C_1 \cap C_2)_x$  (es decir, la multiplicidad de intersección de  $C_3$  con  $C_1$  en  $x$  es mayor o igual que la multiplicidad de intersección de  $C_2$  con  $C_1$  en  $x$ ).

3)  $C_1$  y  $C_2$  poseen tangentes distintas y  $m_x(C_3) \geq m_x(C_1) + m_x(C_2) - 1$ .

*Demostración.* Como la proposición es local, podemos suponer que las curvas  $C_i$  son curvas planas afines de ecuaciones  $p_i(x, y) = 0$ .

1) Por las hipótesis  $(k[x, y]/(p_1, p_2))_x = k$ . Por tanto, si denotamos  $\mathfrak{m}_x$  el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $x$ , tenemos que  $\mathfrak{m}_x = (p_1, p_2)_x$ , luego  $(p_3)_x \subseteq (p_1, p_2)_x$ .

2) Si  $x$  es un punto simple de  $C_1$ , entonces  $\overline{\mathfrak{m}_x} = (t)$  en  $(k[x, y]/(p_1(x, y)))_x$ . Además,  $\overline{(p_i(x, y))} = (t^{(C_i \cap C_1)_x})$ . Por tanto,  $(p_3(x, y)) \subseteq (p_2(x, y))$ , luego  $(p_3)_x \subseteq (p_1, p_2)_x$ .

3) Vamos a usar del lema de estabilidad para curvas planas, que dice si  $\mathcal{O}_{C_1,x} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x}$  es el morfismo de explosión en el punto  $x$  entonces  $\mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x}$

Por otra parte, si  $\xi$  es un parámetro transversal a  $C_1$  en  $x$ , por el que explotamos, tenemos que  $p_2(x,y) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} = p'(x/\xi, y/\xi) \cdot \xi^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} = \xi^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x}$  porque  $C_1$  y  $C_2$  no tienen tangentes comunes en  $x$ . Por tanto,  $p_2(x,y) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x}$ .

Con todo,

$$\begin{aligned} p_3(x,y) &\in \mathfrak{m}_x^{m_x(C_3)} \subset \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)+m_x(C_2)-1} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \\ &= \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} = p_2(x,y) \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1,x} \\ &= p_2(x,y) \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \subset p_2(x,y) \mathcal{O}_{C_1,x} \end{aligned}$$

por lo que  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x \in k[x, y]$ . □

## 5.6 Ramas analíticas

Sea  $\mathcal{O}$  un anillo noetheriano íntegro local de dimensión 1, de modo que el cierre entero en su cuerpo de fracciones sea un  $\mathcal{O}$ -módulo finito. Denotemos  $\mathfrak{m}_x$  su ideal maximal.

**1. Definición:** Se llaman ramas analíticas de  $\mathcal{O}$  en  $x$  a los ideales primos minimales del completado  $\hat{\mathcal{O}}$  de  $\mathcal{O}$  para la topología  $\mathfrak{m}_x$ -ádica.

**2. Teorema:** Sea  $\bar{\mathcal{O}}$  el cierre entero de  $\mathcal{O}$  en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Denotemos por  $y_1, \dots, y_s$  los puntos cerrados de  $\text{Spec } \bar{\mathcal{O}}$ . Se verifica que

$$\bar{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^s \left( \varprojlim_n (\bar{\mathcal{O}}_{y_i} / \mathfrak{m}_{y_i}^n) \right)$$

Por tanto, existe una correspondencia biunívoca entre el espectro minimal de  $\hat{\mathcal{O}} = \bar{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}$  y el espectro maximal de  $\bar{\mathcal{O}}$ .

*Demostración.* Se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}} &= \varprojlim_n \bar{\mathcal{O}} / \mathfrak{m}_x^n = \varprojlim_n \left( \bigoplus_{i=1}^s (\bar{\mathcal{O}} / \mathfrak{m}_x^n)_{y_i} \right) = \bigoplus_{i=1}^s \left( \varprojlim_n (\bar{\mathcal{O}}_{y_i} / \mathfrak{m}_x^n \bar{\mathcal{O}}_{y_i}) \right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^s \left( \varprojlim_n (\bar{\mathcal{O}}_{y_i} / \mathfrak{m}_{y_i}^n) \right) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que para  $s \gg 0$   $\mathfrak{m}_y^s \subset \mathfrak{m}_x \bar{\mathcal{O}}_{y_i}$ .

Ahora bien,  $\bar{\mathcal{O}}_{y_i}$  es un anillo local regular de dimensión 1, luego  $\varprojlim_n (\bar{\mathcal{O}}_{y_i} / \mathfrak{m}_{y_i}^n)$  también. Por tanto, este último, tiene un sólo ideal primo maximal y un sólo ideal primo minimal. Hemos concluido. □

Considerese la sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ . Completando se obtiene  $0 \rightarrow \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\bar{\mathcal{O}}} \rightarrow \hat{\mathcal{C}} \rightarrow 0$ . Se verifica que  $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$  ya que  $\mathcal{C}$  es un  $\mathcal{O}$ -módulo finito de soporte  $x$ . En particular, si  $\mathfrak{p}_y$  es un ideal primo mínimo de  $\hat{\mathcal{O}}$ , entonces  $\hat{\mathcal{C}}_y = 0$ , luego  $\hat{\mathcal{O}}_y = \hat{\bar{\mathcal{O}}}_y$ .

**3. Teorema:** Hay una correspondencia biunívoca entre las ramas analíticas y valoraciones de  $\Sigma$  que dominan a  $\mathcal{O}$ , esto es, entre el espectro minimal de  $\widehat{\mathcal{O}}$  y el maximal de  $\bar{\mathcal{O}}$ .

*Demostración.* Si  $\mathfrak{p}_y$  es un ideal primo minimal de  $\widehat{\mathcal{O}}$ , la fibra de  $y$  por el morfismo  $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}} \rightarrow \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}$  es el espectro de  $\widehat{\mathcal{O}}_y/\mathfrak{p}_y\widehat{\mathcal{O}}_y = \widehat{\mathcal{O}}_y/\mathfrak{p}_y\widehat{\mathcal{O}}_y$  por el comentario anterior. Luego, la fibra de  $y$  es un sólo punto que habrá de ser minimal. Por tanto, el espectro minimal de  $\widehat{\mathcal{O}}$  está en correspondencia biunívoca con el espectro minimal de  $\widehat{\mathcal{O}}$ . Por el teorema anterior, se sigue que hay una correspondencia entre el espectro minimal de  $\widehat{\mathcal{O}}$  y el maximal de  $\bar{\mathcal{O}}$ .  $\square$

**4. Ejemplo:** Sea  $C$  una curva plana  $p(x, y) = 0$  y  $x$  el origen. Se tiene que  $\mathcal{O}_{C,x} = k[[x, y]]/(p)$  y  $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x} = k[[x, y]]/(p)$ .

Se sabe que  $k[[x, y]]$  es un anillo de factorización única (como todo anillo local regular). Por tanto,  $p$  descompone en producto de series irreducibles  $p = f_1 \cdots f_r$ , diferentes entre sí porque  $\widehat{\mathcal{O}}$  no tiene nilpotentes porque  $\widehat{\mathcal{O}}$ , que es producto de anillos regulares, no los tiene.

Así pues, las ramas analíticas pueden ser interpretadas como las series en las que  $p$  factoriza.

## 5.7 Puntos cuspidales y contacto maximal

**1. Definición:** Un punto de una curva se llama cuspidal si el cierre entero  $\bar{\mathcal{O}}$  del anillo local  $\mathcal{O}$  de la curva en el punto es un anillo local.

**2. Teorema:** Sea  $C$  una curva plana sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y  $x \in C$  un punto cuspidal. Existe un número natural  $c_x > 0$ , llamado contacto maximal con la curva  $C$  en la cúspide  $x$ , con las siguientes propiedades:

1. La multiplicidad de intersección en  $x$  de la curva con otra curva regular en  $x$ , no excede al contacto maximal, i.e.,  $(C \cap C')_x \leq c_x$ .
2. La igualdad se verifica si y sólo si  $(C \cap C')_x$  no es múltiplo de la multiplicidad  $r$  de la curva en  $x$ .

*Demostración.* Como el anillo de la explosión  $\mathcal{O}_1$  es local, y la multiplicidad de  $\mathcal{O}$  en  $x$  es la multiplicidad de intersección de la fibra excepcional con  $\mathcal{O}_1$ , tenemos que la multiplicidad de  $\mathcal{O}$  es mayor estrictamente que la de  $\mathcal{O}_1$  si y sólo si la fibra excepcional es tangente a la explosión de la curva (en  $x$ ).

Así pues, si  $\mathcal{O}_n$  es el primer anillo de la cadena de dilataciones, cuya multiplicidad  $r'$  es menor estrictamente que la de  $\mathcal{O}$ , se tienen dos posibilidades:

1. Para algún  $i \leq n$ , las explosiones  $i$ -ésimas  $C_i$  y  $C'_i$  de  $C$  y  $C'$  no se cortan. En este caso,  $(C \cap C')_x = l \cdot r$ , siendo  $l$  el primero de tales índices.
2. En otro caso,  $(C \cap C')_x = n \cdot r + (C_n \cap C'_n)_x$ . Ahora bien,  $C_n$  es tangente a la fibra excepcional, pues la multiplicidad ha descendido. Por otra parte,  $C'_n$  no puede ser tangente a la fibra excepcional, pues  $C'_{n-1}$  es regular (porque  $C'$  es regular) y la multiplicidad no puede descender al explotar. En conclusión,  $C_n$  y  $C'_n$  son transversales y  $(C \cap C')_x = n \cdot r + r'$ .

Por último, sea  $C'$  aquella curva que al explotar  $n$ -veces es una curva  $C'_n$  regular en el punto considerado y corta transversalmente a  $C_n$  (existe).

Tenemos que  $C'$  es regular en  $x$ : la explosión de  $C'_{n-1}$ ,  $C'_n$  es transversal a la fibra excepcional, pues lo es a  $C_n$ , luego  $C'_{n-1}$  es regular. Por otra parte,  $C'_i$ , para  $i \leq n-1$  es tangente a  $C_i$ , luego transversales a las fibras excepcionales correspondientes. Por tanto,  $C'_i$  es regular.

Además  $(C \cap C')_x = n \cdot r + r'$ .

Con todo,  $n \cdot r + r'$  es el contacto maximal y verifica las propiedades exigidas.  $\square$

Sea  $\mathcal{O}$  el anillo local de una curva en un punto cuspidal de multiplicidad  $m$ . Supongamos que el cuerpo base es algebraicamente cerrado de característica cero.

Como  $\widehat{\mathcal{O}}$  es local entonces  $\widehat{\mathcal{O}} = k[[t]]$ , siendo  $t$  un parámetro de  $\mathcal{O}$ . Si  $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$  es transversal entonces  $m = l(\mathcal{O}/(f)) = l(\widehat{\mathcal{O}}/(f)) = l(\widehat{\mathcal{O}}/(\widehat{f}))$ . Por tanto,  $f = \lambda \cdot t^m$ , siendo  $\lambda$  una serie formal invertible. Por las hipótesis hechas sobre el cuerpo  $\lambda$  tiene raíz  $n$ -ésima  $\mu$  en  $\widehat{\mathcal{O}} = k[[t]]$ . Si definimos  $\bar{t} = \mu \cdot t$  se verifica que  $\widehat{\mathcal{O}} = k[[\bar{t}]]$  y  $f = \bar{t}^n$ . Así pues, todo elemento de  $\widehat{\mathcal{O}}$  (y por tanto de  $\mathcal{O}$ ) admite un desarrollo en serie formal en  $\bar{t} = \sqrt[n]{f}$  conocido como desarrollo de Puiseux de dicho elemento.

En particular, si  $\mathcal{O} = k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ , donde  $x_1 = 0$  es transversal a  $\text{Spec } \mathcal{O}$ , cada  $\bar{x}_i$  admite un desarrollo de Puiseux  $\bar{x}_i = \sum_{j \geq 0} a_j (\sqrt[n]{\bar{x}_1})^j$ , con  $a_j \in k$ .

### 5.7.1 Desingularización de curvas planas vía el contacto maximal

Para demostrar que las curvas desingularizan mediante un número finito de explosiones, el argumento principal ha sido la finitud del cierre entero. En este apartado vamos a demostrar, dada una curva plana, la existencia de curvas de “contacto maximal”. Es decir, dada una curva y un punto de ella, existe una curva regular, que pasa por el punto, con multiplicidad de corte con la curva dada, en el punto dado, máxima. Esta curva, verificará que pasa por el punto y los puntos de las sucesivas fibras excepcionales siempre que no bajen de multiplicidad. Como la multiplicidad de corte de dos curvas es finita (siempre que no tengan componentes comunes) obtendremos que la multiplicidad de una curva en un punto habrá de bajar después de un número finito de explosiones. Así podremos demostrar la desingularización de las curvas planas por un número finito de explosiones.

La razón fundamental de la introducción de este apartado es que las técnicas e ideas aquí desarrolladas para la desingularización de curvas planas serán básicamente las que utilizaremos más tarde para la desingularización de superficies.

En este apartado supondremos que  $k$  es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

**3. Lema:** Sea  $p(x, y) = 0$  una curva de multiplicidad  $m$  en un punto  $p$  y sea  $D: k[x, y] \rightarrow k[x, y]$  una derivación. Entonces la curva  $Dp(x, y) = 0$  tiene multiplicidad mayor o igual que  $m - 1$ .

*Demostración.* Denotemos  $C \equiv p(x, y) = 0$ ,  $m_p(C) = m$  si y sólo si  $p(x, y) \in \mathfrak{m}_p^m - \mathfrak{m}_p^{m+1}$ . Por tanto,  $p(x, y) = \sum f_{i_1} \cdots f_{i_m}$ , con  $f_{i_j} \in \mathfrak{m}_p$ . Así pues,  $Dp(x, y) = \sum f_{i_1} \cdots Df_{i_j} \cdots f_{i_m} \in \mathfrak{m}_p^{m-1}$ . Con lo que concluimos.  $\square$

**4. Observación:** El lema sigue siendo cierto para operadores diferenciales de orden 1, es decir, para  $D = h + D_0$ ,  $D(p) \stackrel{\text{def}}{=} h \cdot p + D_0 p$  (con  $h \in k[x, y]$  y  $D_0$  derivación).

**5. Lema:** Con las notaciones anteriores, existe una derivación  $D$ , tal que  $Dp(x, y) = 0$  tiene multiplicidad  $m - 1$  en  $p$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $p$  es el origen de coordenadas, es decir,  $\mathbf{m}_p = (x, y)$ . Escribamos  $p(x, y)$  como suma de polinomios homogéneos

$$p(x, y) = p_m(x, y) + p_{m+1}(x, y) + \cdots + p_n(x, y) \quad p_m(x, y) = \sum_{r=0}^m \lambda_r x^r y^{m-r}$$

Como  $m \geq 1$ , en la expresión de  $p_m(x, y)$ , parece  $x$  o  $y$ . Supongamos que aparece  $y$ , es decir,  $\lambda_r \neq 0$  para algún  $r \neq m$ . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} p(x, y) = \sum_{r=0}^m (m-r) \lambda_r x^r y^{m-r-1} + \text{monomios de grado mayor o igual que } m$$

Como  $\sum_{r=0}^m (m-r) \lambda_r x^r y^{m-r-1} \neq 0$ , concluimos que  $Dp(x, y) = 0$  tiene multiplicidad  $m-1$ .  $\square$

Denotemos  $A = k[x, y]$ . Sabemos que la explosión de  $\mathbb{A}_2 = \text{Spec } A$  en el origen, está recubierto por los abiertos afines  $\text{Spec } A[\frac{x}{t}, \frac{y}{t}]$ , con  $t = x, y$ . Denotemos  $\bar{A} = A[\frac{x}{t}, \frac{y}{t}]$ .

**6. Lema fundamental** *Sea  $D: A \rightarrow A$  un operador diferencial de orden 1. Existe un operador diferencial de orden 1  $\bar{D}: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  tal que para todo  $P \in A$  (de multiplicidad  $m$  en el origen) se verifica*

$$\frac{DP}{t^{m-1}} = \bar{D}\left(\frac{P}{t^m}\right)$$

“La transformada propia de la derivada es la derivada de la transformada propia”.

*Demostración.* Todo operador diferencial de orden 1 es la suma de una homotecia y una derivación. Basta demostrar el lema para cuando  $D$  sea una homotecia y para cuando sea una derivación.

1. Sea  $D = h$  una homotecia, i.e.,  $DP = h \cdot P$ . Tomando  $\bar{D} = t \cdot h$  se cumple la igualdad requerida.
2. Sea  $D$  una derivación. Tenemos que

$$\frac{DP}{t^{m-1}} = (tD)\left(\frac{P}{t^m}\right) + (mDt)\left(\frac{P}{t^m}\right) = \bar{D}\left(\frac{P}{t^m}\right)$$

donde  $\bar{D} = m \cdot Dt + tD$ . Observemos que  $\bar{D}$  es un operador diferencial de orden 1 porque  $m \cdot Dt$  es una homotecia y  $tD$  es una derivación de  $A_t$  que deja estable a  $\bar{A}$ , pues  $\bar{D}(\frac{x}{t}) = Dx - \frac{x}{t}Dt$  y  $\bar{D}(\frac{y}{t}) = Dy - \frac{y}{t}Dt$ .

$\square$

**7. Observación:** La fórmula del lema fundamental demuestra, directamente, para curvas planas, que la multiplicidad no aumenta después de una explosión: Si  $C$  es de multiplicidad 1 en  $p$ , entonces la curva explotada es isomorfa a  $C$  y no hay nada que decir. Si  $C \equiv P = 0$  es de multiplicidad  $m > 1$ , podemos suponer que  $DP$  es de multiplicidad  $m-1$ , luego por inducción sobre la multiplicidad, podemos suponer que  $DP/t^{m-1}$  es de multiplicidad menor o igual que  $m-1$  (en los puntos de la fibra excepcional). Por tanto,  $\bar{D}(P/t^m)$  es de multiplicidad menor o igual que  $m-1$  (en los puntos de la fibra excepcional). Por los lemas anteriores,  $P/t^m$  es de multiplicidad menor o igual que  $m$  (en los puntos de la fibra excepcional).

**8. Definición:** Sea  $p \in C$  y  $C_r \rightarrow \pi \rightarrow C$  una sucesión de transformaciones cuadráticas. Los puntos de  $\pi^{-1}(p)$  se les llamará “puntos de la curva  $C$  infinitamente próximos” a  $p$ .

**9. Teorema de existencia de curvas de contacto maximal:** *Sea  $p$  un punto de multiplicidad  $m$  de una curva plana  $C$ . Existe una curva plana  $C'$  regular en  $p$  que pasa (sus transformadas propias) por todos los puntos de  $C$  infinitesimalmente próximos a  $p$  de multiplicidad  $m$ .*

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre la multiplicidad  $m$  de  $C \equiv P = 0$  en  $p$ .

Si  $m = 1$  la propia  $C$  es una curva de contacto maximal.

Supongamos que  $m > 1$ . Consideremos un operador diferencial  $D$  de orden 1 tal que  $DP = 0$  tenga multiplicidad  $m - 1$  en  $p$ . Por el lema fundamental todo punto de  $C$  infinitamente próximo a  $p$  de multiplicidad  $m$  es un punto de  $C' \equiv DP = 0$  infinitamente próximo a  $p$  de multiplicidad  $m - 1$ : Sigamos las notaciones del lema fundamental. La explosión de  $C \equiv P = 0$  en  $p$  tiene de ecuaciones  $P/t^m = 0$ , la explosión de  $\tilde{C} \equiv DP = 0$  en  $p$  tiene de ecuaciones  $DP/t^{m-1} = \tilde{D}(P/t^m) = 0$ . Por tanto, si un punto de la explosión de  $C \equiv P = 0$  en  $p$  tiene multiplicidad  $m$ , éste será un punto de la explosión de  $\tilde{C} \equiv DP = 0$  en  $p$  de multiplicidad mayor o igual  $m - 1$ . Como la multiplicidad no aumenta después de una explosión, tendremos que si un punto de la explosión de  $C \equiv P = 0$  en  $p$  tiene multiplicidad  $m$ , éste será un punto de la explosión de  $\tilde{C} \equiv DP = 0$  en  $p$  de multiplicidad  $m - 1$ . Argumentando del mismo modo con las curvas explotadas  $P/t^m = 0$  y  $DP/t^{m-1} = \tilde{D}(P/t^m) = 0$  concluimos.

Por hipótesis de inducción, existe una curva  $C'$  regular en  $p$  que pasa (sus transformadas propias) por todos los puntos infinitamente próximos a  $p \in \tilde{C} \equiv DP = 0$  de multiplicidad  $m - 1$ . Por tanto,  $C'$  pasa (sus transformadas propias) por todos los puntos de  $C$  infinitesimalmente próximos a  $p$  de multiplicidad  $m$ . □

En caso de una rama analítica sabemos, por la subsección anterior, que la curva del teorema es la curva de máxima multiplicidad de intersección.

**10. Corolario:** *Toda curva plana reducida desingulariza mediante un número finito de transformaciones cuadráticas.*

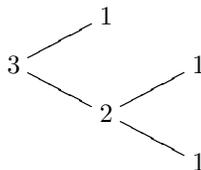
*Demostración.* Escribamos la ecuación de la curva  $0 = p_1 \cdots p_r$  (con  $p_i$  irreducibles y  $p_i \neq p_j$  cuando  $i \neq j$ , pues la curva es reducida). Explotando hasta separar las componentes, podemos suponer que la curva viene definida por los ceros de un polinomio  $P = 0$  irreducible.

Consideremos una curva  $P' = 0$ , regular en  $p$ , que pase por todos los puntos infinitesimalmente próximos a  $P = 0$ , de multiplicidad  $m$ . Como la multiplicidad de intersección de éstas dos curvas es finita, por 5.4.3, tenemos que después de un número finito de explosiones la multiplicidad de  $C$  ha de bajar estrictamente. Fácilmente concluimos. □

## 5.8 Problemas

1. Probar que los anillos de valoración de  $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ , que contienen a  $\mathbb{C}$ , se corresponden con los puntos de la circunferencia en el plano proyectivo.
2. Probar que las  $\mathbb{C}$ -álgebras  $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ ,  $\mathbb{C}[x]$  no son isomorfas aunque sí son birracionalmente isomorfas.
3. Calcular el cierre entero de  $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ .

4. Desingularizar la curva  $y^2 - x^7 = 0$ . ¿Es esta curva birracional a la recta afín?
5. Calcular los anillos de valoración del cuerpo de fracciones de  $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$ , que contengan a  $\mathbb{C}$ .
6. Calcular la multiplicidad de intersección de  $y^2 - x^3 + y^4 = 0$  con  $yx + x^3 + y^3 = 0$  en el origen.
7. Definir una curva plana que pase por el origen cuyo árbol de explosión en el origen sea



8. Probar que el morfismo  $k[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3) \hookrightarrow [k[x, \frac{y}{x}]/((\frac{y}{x})^2 - 1 + x)]_{\frac{y}{x}-1}$  no es un morfismo finito.
9. Sean  $X$  e  $Y$  dos  $k$ -variedades algebraicas y  $x \in X$  e  $y \in Y$  dos puntos racionales. Probar que

$$m_{(x,y)}(X \times_k Y) = m_x(X) \cdot m_y(Y)$$

10. Probar que las cúbicas proyectivas  $y^2 - x^3 - 1 = 0$  y  $y^2 - x^3 - 2 = 0$  se cortan en un único punto con multiplicidad 9.
11. Parametrizar la curva  $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$ . Calcular sus soluciones racionales.
12. Probar el Teorema de Pascal: Si un hexágono está inscrito en una cónica irreducible, entonces los lados opuestos se cortan en puntos alineados.
13. Probar el Teorema de Pappus: Sean  $R_1, R_2$  dos rectas;  $p_1, p_2, p_3 \in R_1$  y  $q_1, q_2, q_3 \in R_2$  (ninguno de ellos se encuentran sobre  $R_1 \cap R_2$ ). Sea  $R_{ij}$  la recta que une  $p_i$  y  $q_j$ . Probar que los puntos  $p_{ij} = R_{ij} \cap R_{ji}$  ( $i < j$ ) están alineados.
14. Ley de grupo en las cúbicas. Sea  $C$  una cúbica plana no singular. Fijemos un punto  $p_0 \in C$ . Dados dos puntos  $p, q \in C$ , la recta que pasa estos dos puntos, corta a  $C$  en un tercer punto  $r$ . Definamos  $\phi: C \times C \rightarrow C$ ,  $(p, q) \mapsto r$ . Probar que la aplicación  $C \times C \rightarrow C$ ,  $(p, q) \mapsto \phi(p_0, \phi(p, q))$  dota a  $C$  de estructura de grupo abeliano.
15. Sean  $C_3, C'_3$  dos cúbicas planas que se cortan en 9 puntos distintos, de manera que 6 de ellos están sobre una cónica. Probar que los tres restantes están alineados.
16. Demostrar que las tangentes a una cúbica irreducible plana en 3 puntos alineados cortan a la cúbica en otros 3 puntos alineados.
17. Demostrar que si un triángulo está inscrito en una cónica irreducible, entonces los puntos de corte de cada lado del triángulo con la tangente a la cónica en el vértice opuesto, están alineados.
18. Probar que una recta que pase por dos puntos de inflexión de una cúbica plana irreducible pasa por un tercer punto de inflexión.

- 
19. Probar que si una cúbica pasa por ocho de los nueve puntos distintos de corte de otras dos cúbicas, entonces también pasa por el noveno.
20. Sea  $C_3$  una cúbica plana y  $x \in C_3$  un punto de inflexión. Probar que los puntos  $y \in C_3$  para los que existe una cónica que que cumpla  $m_x(C_3 \cap C_2) = m_y(C_3 \cap C_2) = 3$ , son las terceras intersecciones de las rectas que unen los puntos de inflexión con  $x$ .
21. Teorema de Cayley-Bacharach: Sea  $C_{n+m-3}$  una curva plana de  $n + m - 3$  que pasa por  $n \cdot m - 1$  de los puntos de intersección de dos curvas de grados  $n$  y  $m$ . Probar que  $C_{n+m-3}$  pasa por el punto restante.
22. Si una curva  $C_{n+m-\gamma}$  de grado  $n + m - \gamma$  ( $\gamma > 3$ ), pasa por  $n \cdot m - \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}$  de los  $n \cdot m$  puntos distintos en los que se cortan dos curvas de grados  $n$  y  $m$ , entonces pasa también por los restantes puntos siempre que dichos puntos no estén en una curva de grado  $\gamma - 3$ .
23. (a) Sea  $C$  la cúbica plana  $y^2 = x^2 + x^3$ . El haz de rectas  $y = tx$  define un morfismo birracional  $\mathbb{A}_1 \rightarrow C$ ,  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t^3 - t$ . Calcular el área del “ojo del lazo” definido por la curva  $y^2 = x^2 + x^3$ .
- (b) Sea  $C$  la cúbica plana  $y^2 = x^3$ . El haz de rectas  $y = tx$  define un morfismo birracional  $\mathbb{A}_1 \rightarrow C$ ,  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ .
24. Probar que si una cónica tiene un punto singular entonces no es irreducible.
25. Probar que si una cúbica plana tiene dos puntos singulares entonces no es irreducible.
26. Probar que si una cuártica plana tiene cuatro puntos singulares entonces no es irreducible.
27. Probar que  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  son puntos singulares de la cuártica plana  $xy(x + y - 2) - (x^2 + y^2 - 2x - 2y)^2 = 0$  ¿Existen más puntos singulares? Parametrizar esta cuártica (mediante un haz de cónicas).
28. Justificar por qué las circunferencias  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  han de ser tangentes en algún punto del infinito, sin hacer el cálculo explícito de sus tangentes en los puntos del infinito.
29. Calcular la multiplicidad de intersección de las cúbicas proyectivas planas  $y^2 - x^3 = 0$  con  $y^2 - x^3 - 1 = 0$ , en todos los puntos de intersección. Poner un ejemplo de dos cúbicas planas afines irreducibles, cuyos puntos de corte estén alineados.



# Introducción

El saber matemático como todo saber discursivo se conoce y aclara en su propio desarrollo y despliegue. Por eso toda introducción es intrínsecamente falsa. Ahora bien, parafraseando al filósofo y pedagogo Gaos, la enseñanza es el número de mentiras que hay que contar para que la verdad sea comprendida. Mintamos para llegar a ser sinceros.

En la Geometría Algebraica confluyen la Matemática Griega con el estudio de los cuerpos geométricos, y la Matemática Renacentista-Descartesiana con el cálculo de las soluciones de los sistemas de ecuaciones. Del modo más simple, podemos decir que la Geometría Algebraica es el estudio de las soluciones de los sistemas de ecuaciones algebraicas en el espacio afín o proyectivo, es decir, el estudio de las variedades algebraicas. Así pues, el objetivo fundamental de la Geometría Algebraica es la clasificación de las variedades algebraicas.

La teoría de haces nos permitirá comprender las variedades algebraicas como variedades diferenciales, cuyos anillos de funciones serán anillos de funciones algebraicas (las álgebras de tipo finito). Mediante cartas y la teoría de haces, como en Geometría Diferencial, definiremos los esquemas, que son variedades que localmente son variedades algebraicas afines.

Los esquemas son el marco más idóneo para el desarrollo de la Geometría Algebraica y de una Teoría de Intersección, sin embargo, el uso de anillos con nilpotentes exige un conocimiento profundo del Álgebra Conmutativa. Quizás una de las sorpresas mayores del Álgebra Conmutativa es cómo los conceptos de función (algebraicas), derivada, diferencial, variedad (algebraica), superficies de Riemann, Riemann-Roch, residuo, etc., son conceptos algebraicos.

Una aproximación a la clasificación de las variedades algebraicas es la clasificación birracional. Dos variedades algebraicas se dicen que son birracionalmente si son isomorfas en un abierto denso. Veremos que a toda curva se le puede asignar un único modelo birracional proyectivo no singular, que podrá obtenerse mediante explosiones, estudiadas en Álgebra Local, y añadiendo los puntos necesarios para que sea proyectiva.

Introduciremos también el grupo de Picard de una curva, que es otro invariante intrínseco de la curva (que puede asociarse también, en general, a los esquemas). Esencialmente, el teorema de Torelli afirma que la variedad de Picard de una curva determina la curva (no lo veremos). La variedad de Picard de una curva es el conjunto de los fibrados de línea de la curva, módulo isomorfismos. Los fibrados de línea serán esenciales para la formulación del teorema de Riemann-Roch, la teoría de dualidad, la construcción de las inmersiones de las curvas en espacios proyectivos, etc.

La asignación de invariantes numéricos a las variedades algebraicas permite una primera aproximación a la clasificación “discreta” de éstas. Quizás la técnica moderna más importante para la introducción de invariantes numéricos es la cohomología. Existen muchas teorías cohomológicas, nosotros desarrollaremos la cohomología de los haces coherentes, introducida por Serre. Así pues, a un esquema le podemos asociar los grupos de cohomología de sus haces de funciones algebraicas. La cohomología es una técnica muy útil para comprender y expresar resultados importantes, como el teorema

de Riemann-Roch. Definiremos los haces de módulos de diferenciales de un esquema, que se corresponden con los fibrados cotangentes de la Geometría Diferencial, y permiten introducir invariantes numéricos como la dimensión del espacio vectorial de todas diferenciales “holomorfas” del esquema. En el estudio de las curvas, en la Teoría de Dualidad, este espacio vectorial será determinante para definir un morfismo canónico de cada curva en un espacio proyectivo.

El teorema central del curso será el teorema de Riemann-Roch. Por una parte exigirá la introducción de los haces de línea, cohomología, teoría de dualidad, y por otra dará las relaciones entre los distintos invariantes, género geométrico, género aritmético, longitud del conductor, grado de un divisor, grado del divisor canónico. Además, posibilitará la demostración del teorema de Hurwitz, de la existencia de haces línea muy amplios, etc. Haremos una introducción a la clasificación de las curvas proyectivas. Por ejemplo, clasificaremos la familia de las curvas elípticas.

Muchas de las nociones y demostraciones adoptadas (por ejemplo aciclicidad de los grupos de cohomología de los esquemas afines, acotación cohomológica, etc.) serán generalizables a variedades proyectivas de dimensión mayor que uno y así lo haremos. Creemos que un curso de la Geometría Algebraica de la Curva es una buena introducción a la Geometría Algebraica Global, porque en él se introducen muchas de las técnicas generales de la Geometría Algebraica Global en una situación no excesivamente compleja.

# Capítulo 6

## Esquemas

### 6.1 Introducción

La teoría de variedades algebraicas estudiada hasta este curso padece de una grave deficiencia. No tenemos una noción clara de cuáles son, localmente o no, las funciones algebraicas sobre una variedad algebraica no afín. Así pues, dado un abierto de una variedad algebraica, no sabemos quién es su anillo de funciones algebraicas. Así, por ejemplo, no sabemos cuál es el anillo de funciones algebraicas, del espacio proyectivo. Cualquiera que sea la noción de funciones algebraicas tendrán que verificar que vienen determinadas localmente, como sucede en variedades diferenciales.

H. Cartan expresó la analogía entre variedades algebraicas y analíticas afirmando que en todos los casos se trataban de espacios anillados. Serre introdujo la teoría de haces y la cohomología de haces en el estudio de las variedades algebraicas abstractas. Finalmente, Grothendieck presentó la definición de esquema como espacio anillado que localmente es un esquema afín. Los esquemas son los objetos básicos de estudio de la Geometría Algebraica Abstracta actual.

### 6.2 Haces

**1. Definición:** Sea  $X$  un espacio topológico. Un prehaz de conjuntos sobre  $X$ , es una ley que asigna a cada abierto  $U \subseteq X$  un conjunto  $P(U)$  de modo que verifica que

1. Si  $V$  es un abierto contenido en otro abierto  $U$ , se tiene un morfismo de restricción:  $\phi_{U,V}: P(U) \rightarrow P(V)$ . Es usual escribir, para  $s \in P(U)$ ,  $\phi_{U,V}(s) = s|_V$ .
2. Para cada abierto  $U$ ,  $\phi_{U,U} = \text{Id}$ .
3. Si  $W \subseteq V \subseteq U$  son abiertos entonces  $\phi_{U,W} = \phi_{V,W} \circ \phi_{U,V}$ , es decir,  $(s|_V)|_W = s|_W$ .

Dicho de otro modo: Sea  $\mathcal{T}_X$  la categoría cuyos objetos son los abiertos de  $X$  y cuyos morfismos entre objetos son la inclusión natural (cuando exista) y sea  $\mathcal{C}_{Conj}$  la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones de conjuntos. Un prehaz de conjuntos sobre  $X$  no es sino un funtor de  $\mathcal{T}_X$  en  $\mathcal{C}_{Conj}$ .

Análogamente se definen los prehaces de grupos, de grupos abelianos, o anillos sin más que sustituir  $\mathcal{C}_{Conj}$  por la categoría de grupos, de grupos abelianos o anillos, respectivamente. Si  $A$  es un prehaz de

anillos, se llama prehaz de módulos sobre el prehaz de anillos  $A$ , a todo prehaz  $P$  de grupos abelianos que verifique:

1. Para cada abierto  $U$ ,  $P(U)$  es un  $A(U)$ -módulo.
  2. Si  $V \subseteq U$ , entonces  $(a \cdot s)|_V = a|_V \cdot s|_V$ , para  $a \in A(U)$  y  $s \in P(U)$ .
- 2. Ejemplo:**
1. Sea  $G$  un grupo abeliano. Sea  $P(U) = G$  para todo abierto  $U \subseteq X$ . Si tomamos como morfismos de restricción la identidad, entonces  $P$  es un prehaz de grupos abelianos en  $X$ .
  2. Sea  $P(U)$  el anillo de funciones reales continuas sobre  $U \subseteq X$ . Si tomamos como morfismos de restricción la restricción de funciones, entonces  $P$  es un prehaz, “el prehaz de funciones continuas sobre  $X$ ”.
- Análogamente, si  $X$  es una variedad diferenciable, se definen los prehaces de funciones diferenciales, de campos diferenciales, tensores, etc.
3. Sea  $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Poniendo  $P(U) = [1\text{-formas exactas en } U]$  y tomando como morfismos de restricción los evidentes, se define el prehaz de 1-formas exactas.
  4. Sea  $A$  un anillo y  $X$  su espectro. Asociando a cada abierto  $U \subseteq X$  el anillo  $A_U = \{ \frac{a}{s}, \text{ con } a \in A \text{ y } s \in A \text{ de modo que } s \text{ no se anule en ningún punto de } U \}$  y tomando como morfismos de restricción los de localización, se obtiene un prehaz de anillos.
  5. Si  $M$  es un  $A$ -módulo, asociando a  $U$  el  $A_U$ -módulo  $M_U = M \otimes_A A_U$  se define un prehaz de módulos sobre el anterior prehaz de anillos.

A los elementos de  $P(U)$  se le denominan secciones de  $P$  en  $U$ , y alguna vez denotaremos  $P(U) = \Gamma(U, P)$ .

Dado un prehaz  $P$  sobre  $X$  y un punto  $x \in X$ , la fibra  $P_x$  de  $P$  en  $x$  se define del siguiente modo:

$$P_x = \lim_{\substack{\text{def} \\ \rightarrow \\ x \in U}} P(U)$$

es decir,  $P_x = \coprod_{x \in U} \{s \in P(U)\} / \sim$ , donde dados  $s \in P(U)$  y  $s' \in P(U')$  cumplen que  $s \sim s'$  si y sólo si existe un abierto  $V$ , tal que  $x \in V \subseteq U \cap U'$ , de modo que  $s|_V = s'|_V$ . También se dice que  $P_x$  son los gérmenes de secciones de  $P$  en  $x$ .

Dado  $s \in P(U)$  denotaremos  $\bar{s} = s_x \in P_x$ .

**3. Ejercicio:** Sea  $P$  el prehaz definido en 6.2.2 5. sobre  $\text{Spec } A$ . Dado  $x \in \text{Spec } A$ , entonces  $P_x = M_x$ .

*Resolución:*  $P_x = \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} M_U$ . Como tenemos morfismos naturales  $M_U \rightarrow M_x$ , tenemos un morfismo natural  $P_x \rightarrow M_x$ . Dejamos al lector que compruebe que es un isomorfismo.

**4. Ejercicio:** Los gérmenes del prehaz de funciones reales continuas de  $\mathbb{R}^n$ , en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  coinciden con  $C(\mathbb{R}^n)_x$  (donde  $\mathfrak{m}_x$  es el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $x$  y  $C(\mathbb{R}^n)_x$  la localización en este ideal primo).

**5. Definición:** Un morfismo de prehaces  $f: P \rightarrow P'$  sobre  $X$  es un morfismo de funtores, es decir, una colección de morfismos  $f_U: P(U) \rightarrow P'(U)$  (para cada abierto  $U$ ) que conmutan con los morfismos de restricción. Denotaremos por  $\text{Hom}(P, P')$  al conjunto de morfismos de prehaces de  $P$  en  $P'$ .

Todo morfismo  $f: P \rightarrow P'$  de prehaces induce un morfismo  $f_x: P_x \rightarrow P'_x$ ,  $f_x(s_x) = f(s)_x$ .<sup>1</sup>

**6. Definición:** Un haz sobre un espacio topológico  $X$  es un prehaz  $F$  tal que para cada abierto  $U \subseteq X$  y cada recubrimiento  $\{U_\alpha\}$  por abiertos de  $U$ , la sucesión

$$F(U) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha} F(U_{\alpha}) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} \prod_{\alpha, \beta} F(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

donde  $p_1(\prod_{\alpha} s_{\alpha}) = \prod_{\alpha, \beta} s_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}}$  y  $p_2(\prod_{\alpha} s_{\alpha}) = \prod_{\alpha, \beta} s_{\beta}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}}$ , es exacta. Es decir,  $\delta$  es inyectivo y su imagen son las secciones de  $\prod_{\alpha} F(U_{\alpha})$  donde coinciden  $p_1$  y  $p_2$ , que equivale a decir:

1. Si dos secciones de  $F$  sobre  $U$  tienen las mismas restricciones a cada  $U_{\alpha}$  ambas coinciden.
2. Dada una familia de secciones  $s_{\alpha} \in F(U_{\alpha})$  cuyas restricciones a las intersecciones coinciden ( $s_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}} = s_{\beta}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}}$ ) existe una sección  $s \in F(U)$  de modo que su restricción a cada  $U_{\alpha}$  es  $s_{\alpha}$ .

**7. Ejemplo:** 1. Los prehaces del caso 2 del ejemplo 6.2.2 son haces. El del caso 1, lo será cuando el espacio topológico  $X$  considerado verifique que todo par de abiertos no vacíos tenga intersección no vacía.

2. Sea  $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . El prehaz de 1-formas exactas no es haz, pues  $d(\arctan y/x)$  es localmente exacta, pero no globalmente porque su integral a lo largo de la circunferencia unidad es diferente de cero.

Dado un prehaz  $P$  se le puede asociar de modo natural un haz  $\tilde{P}$ :

$$\tilde{P}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\{U_{\alpha}=U\}} \left\{ (s_{\alpha}) \in \prod_{\alpha} F(U_{\alpha}) : s_{\alpha x} = s_{\beta x} \text{ para todo } x \in U_{\alpha} \cap U_{\beta} \right\} / \sim$$

donde  $\sim$  es la siguiente relación de equivalencia:  $(s_{\alpha}) \sim (s'_{\alpha'})$  si  $s_{\alpha x} = s'_{\alpha' x}$  para todo  $x \in U_{\alpha} \cap U_{\alpha'}$ .

Dejamos al lector que pruebe:

1.  $\tilde{P}$  es un haz.
2. El morfismo natural  $P \rightarrow \tilde{P}$  definido por los morfismos  $P(U) \rightarrow \tilde{P}(U)$ ,  $s \mapsto \bar{s}$  ( $\{U_{\alpha}\}$  es un recubrimiento de  $U$  y  $s$  es una sección de tal recubrimiento!) es un isomorfismo si y sólo si  $P$  es un haz.
3. Para todo  $x \in X$ ,  $P_x = \tilde{P}_x$ .

Dado un morfismo de prehaces  $f: P \rightarrow P'$  define de modo natural un morfismo  $\tilde{f}: \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}'$  entre los hacificados ( $(\bar{s}_{\alpha}) \mapsto (\overline{f_{U_{\alpha}}(s_{\alpha})})$ ).

**8. Proposición:** Sean  $P$  un prehaz y  $F$  un haz. Se cumple el isomorfismo

$$\text{Hom}(P, F) = \text{Hom}(\tilde{P}, F), \quad f \mapsto \tilde{f}$$

<sup>1</sup>Con más rigor, debiéramos escribir  $f_U(s)_x$  si  $s \in P(U)$ , en vez de  $f(s)_x$ .

*Demostración.* No es más que considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & F \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{P} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{F} \end{array}$$

□

**9. Ejercicio:** Sea  $P$  un prehaz sobre un espacio topológico  $X$ . Sea  $\underline{P} = \coprod_{x \in X} P_x$  la unión disjunta de las fibras de  $P$ . Consideremos la proyección natural  $\underline{P} \rightarrow X$ ,  $s_x \mapsto x$ . Cada elemento  $s \in P(U)$  define una sección  $\tilde{s}: U \rightarrow \underline{P}$ ,  $x \mapsto s_x$ . Consideremos en  $\underline{P}$  la topología cuya base de abiertos son los conjuntos  $\tilde{s}(U)$ . A  $\underline{P}$  con esta topología se le denomina espacio etale asociado al prehaz  $P$ . Probar

1.  $\underline{P} \rightarrow X$  es un homeomorfismo local.
2. El haz  $\text{Hom}_X(-, \underline{P})$  de secciones continuas de la proyección  $\underline{P} \rightarrow X$ , sobre abiertos de  $X$ , es justamente el haz asociado a  $P$ .
3. La categoría de los espacios localmente homeomorfos a  $X$  es equivalente a la categoría de los haces sobre  $X$ .

**10. Proposición:** Un morfismo  $f: F \rightarrow F'$  de haces es un isomorfismo si y sólo si  $f_x: F_x \rightarrow F'_x$  son isomorfismos para todo  $x \in X$ .

Un morfismo  $f: F \rightarrow F'$  de haces de grupos es el morfismo cero si y sólo si  $f_x = 0$  para todo  $x \in X$ . En particular, un haz es cero si y sólo si lo es en fibras.

*Demostración.* Veamos sólo la suficiencia de la primera afirmación. Supongamos pues, que  $f_x: F_x \rightarrow F'_x$  son isomorfismos para todo  $x \in X$ . Dados  $s, s' \in F(U)$  si  $f_U(s) = f_U(s')$ , entonces  $f_x(s_x) = f_U(s)_x = f_U(s')_x = f_x(s'_x)$ . Luego  $s_x = s'_x$  para todo  $x$  y  $s = s'$ .

Así pues, los morfismos  $f_U: F(U) \rightarrow F'(U)$  son inyectivos. Dada una sección  $s' \in F'(U)$ , por ser los  $f_x$  epiyectivos, existirá un recubrimiento  $\{U_\alpha\}$  de  $U$  y secciones  $s_\alpha \in F(U_\alpha)$  de modo que  $f_{U_\alpha}(s_\alpha) = s'|_{U_\alpha}$ . Además las  $s_\alpha$  coinciden sobre las intersecciones por la inyectividad de los morfismos  $f_{U_\alpha}$ , luego definen una sección  $s \in F(U)$ , tal que  $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ . Luego  $f_U(s) = s'$ , pues localmente sobre los  $U_\alpha$  coinciden. Con todo hemos concluido que los  $f_U$  son isomorfismos.

En cuanto a la segunda afirmación. Dado  $s \in F(U)$ ,  $f_U(s) = 0$  si y sólo si  $f_U(s)_x = f_x(s_x) = 0$  para todo  $x \in U$ . Ahora es sencillo concluir. □

Dado un morfismo  $f: F \rightarrow F'$  de haces de grupos, se cumple que el prehaz  $\text{Ker } f$  definido por  $\text{Ker } f(U) = \text{Ker}[F(U) \rightarrow F'(U)]$  es un haz. Sin embargo,  $\text{Im } f$  definido por  $\text{Im } f(U) = \text{Im}[F(U) \rightarrow F'(U)]$  no es en general haz. En el contexto de haces, denotaremos por  $\text{Im } f$  al hacificado del prehaz imagen recién definido. Igualmente,  $\text{Coker } f$  definido por  $\text{Coker } f(U) = \text{Coker}[F(U) \rightarrow F'(U)]$  no es en general haz. En el contexto de haces, denotaremos por  $\text{Coker } f$  al hacificado del prehaz conúcleo recién definido.

**11. Proposición:** Dado un morfismo  $F \rightarrow F'$  de haces (o prehaces) de grupos, se cumple

1.  $(\text{Ker } f)_x = \text{Ker } f_x$ , para todo  $x \in X$ .

2.  $(\text{Im } f)_x = \text{Im } f_x$ , para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Recordemos que el límite inductivo es un funtor exacto.

$$1. (\text{Ker } f)_x = \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} \text{Ker } f_U = \text{Ker } f_x$$

$$2. (\text{Im } f)_x = \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} \text{Im } f_U = \text{Im } f_x$$

□

**12. Definición:** Una sucesión de morfismos de haces de grupos

$$\dots F_n \xrightarrow{f_n} F_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} F_{n+2} \rightarrow \dots$$

diremos que es una sucesión exacta de haces, si se cumple la igualdad de haces  $\text{Ker } f_{n+1} = \text{Im } f_n$ .

**13. Corolario:** Una sucesión de morfismos de haces de grupos

$$\dots F_n \xrightarrow{f_n} F_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} F_{n+2} \rightarrow \dots$$

es una sucesión exacta de haces si sólo si

$$\dots F_{nx} \xrightarrow{f_{nx}} F_{n+1x} \xrightarrow{f_{n+1x}} F_{n+2x} \rightarrow \dots$$

es una sucesión exacta de morfismos de grupos, para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Si  $\text{Im } f_{nx} = \text{Ker } f_{n+1x}$  entonces  $(f_{n+1} \circ f_n)_x = f_{n+1x} \circ f_{nx} = 0$  luego  $f_{n+1} \circ f_n = 0$ . Por tanto, tenemos un morfismo  $\text{Im } f_n \rightarrow \text{Ker } f_{n+1}$ , que en fibras sobre  $x$  es isomorfismo, luego  $\text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n+1}$ .

Recíprocamente, si  $\text{Im } f_n = \text{Ker } f_{n+1}$ , en fibras  $\text{Im } f_{nx} = \text{Ker } f_{n+1x}$ . □

**14. Ejercicio:** Si  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de haces de grupos demostrar que para todo abierto  $U$ , la sucesión  $0 \rightarrow F'(U) \rightarrow F(U) \rightarrow F''(U)$  es exacta.

**15. Ejercicio:** Sea  $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ,  $F = C_X^\infty$  y  $F'$  el haz de las uno formas cerradas de  $X$ . Probar que el morfismo  $d: F \rightarrow F'$ ,  $g \mapsto dg$ , es un epimorfismo de haces pero  $d: F(X) \rightarrow F'(X)$  no es epiyectiva.

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua de espacios topológicos.

**16. Definición:** Dado un prehaz  $P$  sobre  $X$  se define la imagen directa,  $f_*P$ , de  $P$  por  $f$ , como el prehaz  $f_*P(U) = P(f^{-1}(U))$ .

Es fácil comprobar que si  $F$  es un haz sobre  $X$ , entonces  $f_*F$  es un haz sobre  $Y$ .

**17. Definición:** Dado un prehaz  $Q$  sobre  $Y$ , se define la imagen inversa,  $f^{-1}Q$ , de  $Q$  por  $f$ , como el prehaz  $f^{-1}Q(U) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ f^{-1}(V) \supseteq U}} Q(V)$ .

Si  $Q$  es un haz, el hacificado de  $f^{-1}Q$  lo denotaremos, cuando no cause confusión,  $f^{-1}Q$ , y diremos que es la imagen inversa de  $Q$ . Es fácil ver que  $(f^{-1}Q)_x = Q_{f(x)}$ .

**18. Ejercicio:** Sea  $F$  un haz sobre  $Y$  y denotemos por  $P$  su espacio étale asociado. Probar que el espacio étale asociado a  $f^{-1}F$  es  $P \times_Y X$ .

### 6.3 Espacio anillado

Es obvio que cuando miramos una esfera no estamos viendo simplemente un conjunto de puntos sino que además estamos añadiendo una estructura topológica. Es decir, vemos la esfera como un conjunto con una topología (un espacio topológico). Si además consideramos que la esfera no es “deformable suavemente” al cubo, estamos añadiendo una estructura extra. Localmente estamos identificando “suavemente” la esfera con el plano, es decir estamos dando unas coordenadas, estamos indicando las funciones u “observaciones” sobre la esfera “suaves o adecuadas”. Con más precisión, estamos diciendo que la esfera es un espacio topológico junto con el anillo de funciones diferenciables, la estamos viendo como una variedad diferenciable con su anillo de funciones diferenciables.

Cuando hemos definido una variedad algebraica los únicos conjuntos que “observamos” son los definidos a partir de las funciones algebraicas. Es decir, cuando escribíamos  $\text{Spec } A$ , en realidad siempre teníamos presente la pareja  $(\text{Spec } A, A)$ <sup>2</sup>. Así pues, un espacio es un espacio topológico junto con cierto anillo de observaciones, que están definidas o determinadas localmente.

**1. Definición:** Un espacio anillado es una pareja  $(X, \mathcal{O}_X)$  formada por un espacio topológico  $X$  y un haz de anillos  $\mathcal{O}_X$  sobre  $X$ .

Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  es un espacio anillado nos referiremos a  $X$  como al espacio topológico subyacente y a  $\mathcal{O}_X$  como el haz estructural. Por brevedad diremos que  $X$  es un espacio anillado.

**2. Definición:** Se llama espacio anillado en anillos locales a todo espacio anillado cuyas fibras sean anillos locales.

**3. Ejemplo:** Las variedades diferenciales y las variedades topológicas son espacios anillados en anillos locales.

**4. Definición:** Un morfismo de espacios anillados  $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  es una pareja formada por una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$ , y un morfismo de haces de anillos  $\phi: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ .

Dado un morfismo de espacios anillados  $(f, \phi): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ , para cada punto  $y = f(x) \in Y$ , se tienen morfismos naturales  $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ .

**5. Definición:** Un morfismo  $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  de espacios anillados entre espacios anillados en anillos locales se dice que es un morfismo en anillos locales, si los morfismos naturales  $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  son locales, es decir, aplican el ideal maximal del primer anillo dentro del ideal maximal del segundo.

**6. Ejemplo:** Sea  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciales. Para cada abierto  $U \subseteq Y$ , tenemos un morfismo de anillos  $C_Y^\infty(U) \rightarrow C_X^\infty(f^{-1}(U))$ ,  $g \mapsto g \circ f|_{f^{-1}(U)}$ . Morfismos que definen un morfismo de haces de anillos  $C_Y^\infty \rightarrow f_*C_X^\infty$ . En gérmenes tenemos el morfismo  $C_{Y, f(x)}^\infty \rightarrow C_{X, x}^\infty$ ,  $[g] \mapsto [g \circ f]$ , que aplica el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $f(x)$ , de  $C_{Y, f(x)}^\infty$ , en el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $f(x)$ , de  $C_{X, x}^\infty$ . En conclusión, todo morfismo  $f: X \rightarrow Y$ , induce de modo natural un morfismo de espacios anillados en anillos locales entre los espacios anillados.

<sup>2</sup>Desde un punto de vista epistemológico las observaciones del espacio son previas a toda concepción del espacio y éste se obtiene como objetivación de aquellas. El problema de cómo puede haber observaciones sin tener previamente el espacio, aquí queda desdibujado pues no nos encontramos con ninguna dificultad al definir  $A$  sin tener  $\text{Spec } A$ , si bien, para definir  $A$  siempre necesitaremos de los conjuntos o al menos del conjunto  $\mathbb{N}$

### 6.3.1 Haz de localizaciones en abiertos de $\text{Spec } A$

Dado un anillo  $A$ , consideremos en  $\text{Spec } A$  el prehaz definido, para cada abierto  $U \subseteq \text{Spec } A$ , por

$$U \rightsquigarrow A(U) \underset{\text{Not}}{=} A_U \underset{\text{def}}{=} A_S \quad S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema multiplicativo de las} \\ \text{funciones que no se anulan en } U \end{array} \right\}$$

**7. Definición:** Denotaremos por  $\tilde{A}$  al haz en  $\text{Spec } A$  asociado al prehaz  $U \rightsquigarrow A_U$ . Diremos que  $\tilde{A}$  es el haz de localizaciones en abiertos de  $\text{Spec } A$ .

**8. Proposición:** La fibra en un punto  $x \in \text{Spec } A$  del prehaz de localizaciones en abiertos de  $\text{Spec } A$ , coincide con la localización,  $A_x$ , del anillo  $A$  en  $x$ . En particular  $\tilde{A}_x = A_x$ .

*Demostración.* Ejercicio 6.2.3 □

Así pues,  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$  es un espacio anillado en anillos locales.

**9. Lema:** Sea  $U$  un abierto básico de  $\text{Spec } A$ . Si  $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$  es un recubrimiento finito de  $U$  por abiertos básicos, la siguiente sucesión es exacta

$$A_U \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n A_{U_i} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \bigoplus_{i,j}^n A_{U_i \cap U_j}$$

“El prehaz de localizaciones es un haz en la base de abiertos básicos”

*Demostración.* La exactitud de la sucesión es una cuestión local, luego localizando en  $U_k$ , tenemos que ver que la sucesión

$$A_{U_k} \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^n A_{U_k \cap U_i} \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} \bigoplus_{i,j}^n A_{U_k \cap U_i \cap U_j}$$

es exacta. Obviamente,  $i$  es inyectiva porque  $i(s) = (s|_{U_k \cap U_i})_i$  y  $s|_{U_k \cap U_k} = s$ . Dado  $(s_i) \in \bigoplus_{i=1}^n A_{U_k \cap U_i}$ , si  $p_1(s_i) = p_2(s_i)$  entonces  $s_i|_{U_k \cap U_i \cap U_k} = s_k|_{U_k \cap U_k \cap U_i}$ . Luego  $s_i = s_k|_{U_k \cap U_i}$ , i.e.,  $i(s_k) = (s_i)$ . □

**10. Teorema:** Si  $U \subseteq \text{Spec } A$  es un abierto básico distinto del vacío entonces

$$\tilde{A}(U) = A_U$$

En particular,  $\tilde{A}(\text{Spec } A) = A$ .

*Demostración.* Tenemos que ver que el morfismo natural  $A_U \rightarrow \tilde{A}(U)$  es isomorfismo.

1) Es inyectivo: Dada  $s \in A_U$ , si  $s \mapsto 0$  entonces existe un recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $U$  por abiertos básicos, tal que  $s|_{U_i} = 0$  ( $A_U \rightarrow A_{U_i}$ ,  $s \mapsto s|_{U_i}$ ). Por la compacidad de  $U$  podemos suponer que el recubrimiento es finito. Por el lema, el morfismo  $A_U \hookrightarrow \bigoplus A_{U_i}$  es inyectivo. Luego  $s = 0$ .

2) Es epiyectivo: Dada  $s \in \tilde{A}(U)$  existe un recubrimiento por abiertos básicos  $\{U_i\}$  y  $s_i \in A_{U_i}$ , de modo que por los morfismos  $A_{U_i} \rightarrow \tilde{A}(U_i)$  se cumple que  $s_i \mapsto s|_{U_i}$ . Observemos que  $s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j} = 0$  ya que  $s|_{U_i \cap U_j} - s|_{U_i \cap U_j} = 0$  y el morfismo  $A_{U_i \cap U_j} \rightarrow \tilde{A}(U_i \cap U_j)$  es inyectivo por 1). Por el lema, sabemos que existe  $s' \in A_U$  tal que  $s'|_{U_i} = s_i$ . Entonces en el morfismo  $A_U \rightarrow \tilde{A}(U)$  tenemos que  $s' \mapsto s$ , porque en los  $U_i$  así sucede. □

**11. Ejercicio:** Sea  $\mathcal{B}$  una base de abiertos de un espacio topológico  $X$ . Sea  $F$  un prehaz en  $X$ . Supongamos que  $F$  es haz para  $\mathcal{B}$ , es decir, para cada  $U \in \mathcal{B}$ , cada recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $U$  por abiertos  $U_i \in \mathcal{B}$  y un recubrimiento  $\{U_{ijk}\}$  de  $U_i \cap U_j$  por abiertos  $U_{ijk} \in \mathcal{B}$  la siguiente sucesión es exacta

$$F(U) \rightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j,k} F(U_{ijk})$$

Demostrar que el haz asociado a  $F$  coincide con  $F$  sobre  $\mathcal{B}$ .

**12. Ejercicio:** Sea  $A$  un anillo íntegro. Demuéstrese que  $A = \bigcap_{x \in \text{Spec } A} A_x$  y en general que  $\tilde{A}(U) = \bigcap_{x \in U} A_x$ .

**13. Proposición:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Morfismos de espacios anillados} \\ \text{en anillos locales} \\ (\text{Spec } B, \tilde{B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \tilde{A}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Morfismos de anillos} \\ A \rightarrow B \end{array} \right\}.$$

*Demostración.* Un morfismo  $(f, \phi): (\text{Spec } B, \tilde{B}) \rightarrow (\text{Spec } A, \tilde{A})$  de espacios anillados en anillos, induce un morfismo

$$\phi_A: A = \tilde{A}(\text{Spec } A) \rightarrow f_* \tilde{B}(\text{Spec } A) = \tilde{B}(\text{Spec } B) = B$$

Tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_A} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{A}_{f(x)} = A_{f(x)} & \longrightarrow & \tilde{B}_x = B_x \end{array}$$

Como  $A_{f(x)} \rightarrow B_x$  es local, se deduce que si  $\phi_A^*$  es el morfismo inducido en los espectros por  $\phi_A$  entonces  $\phi_A^*(x) = f(x)$ , es decir,  $\phi_A^* = f$ . Además,  $\phi$  está determinado por  $\phi_A$ : Dado un abierto básico  $U_a \subset \text{Spec } A$ , entonces  $f^{-1}(U_a) = U_{\phi_A(a)}$  y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_A} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{A}_{U_a} = A_a & \xrightarrow{\phi_{U_a}} & \tilde{B}_{U_{\phi_A(a)}} = B_{\phi_A(a)} \end{array}$$

es conmutativo, luego  $\phi_{U_a}$  está determinado por  $\phi_A$ , y en conclusión  $\phi$  también.

Recíprocamente, dado un morfismo  $f: A \rightarrow B$ , induce un morfismo continuo  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  y por localizaciones morfismos

$$A_U \rightarrow B_{f^{*-1}(U)}$$

que define un morfismo  $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow (f^*)_* \tilde{B}$ . En fibras sobre  $f^*(x)$ , define el morfismo

$$A_{f^*(x)} \rightarrow ((f^*)_* \tilde{B})_{f^*(x)} \rightarrow B_x$$

inducido por  $f$ , que es local.

El morfismo  $\tilde{f}_A$  definido por toma de secciones globales es precisamente  $f$ . Con todo concluimos.  $\square$

## 6.4 Esquemas

Las variedades “anilladas” en Geometría Algebraica se denominan esquemas:

**1. Definición:** Un espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$ , diremos que es un esquema si existe un recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $X$  de modo que  $(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \simeq (\text{Spec } A_i, \tilde{A}_i)$ . Diremos que es un esquema afín si es isomorfo a un esquema  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$ .

**2. Ejercicio:** Probar que un abierto de un esquema es un esquema. Demuéstrese que  $\mathbb{A}_2 - \{0\}$  no es un esquema afín (Pista: probar que  $\Gamma(\mathbb{A}_2 - \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_2 - \{0\}}) = k[x, y]$ ).

**3. Ejemplo:** Obviamente  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$  es un esquema.

**4. Definición:** Los morfismos de espacios anillados en anillos locales, entre esquemas se denominan morfismos de esquemas.

**5. Definición:** Un esquema  $X$  se dice que es reducido si para todo abierto  $U \subset X$ ,  $\mathcal{O}_X(U)$  es un anillo reducido.

**6. Proposición:** *Un esquema  $X$  es reducido si y sólo si para todo  $x \in X$ ,  $\mathcal{O}_{X,x}$  es un anillo reducido.*

*Demostración.* Dado un abierto  $U$  y un recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $U$  por abiertos afines, tenemos el morfismo inyectivo  $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \prod_i \mathcal{O}_X(U_i)$ . Por tanto,  $X$  es reducido si y sólo si para todo abierto  $V$  afín  $\mathcal{O}_X(V)$  es reducido. Ahora bien, un anillo es reducido si y sólo si es localmente reducido, ya que el nilradical localiza. En conclusión, un esquema  $X$  es reducido si y sólo si para todo  $x \in X$ ,  $\mathcal{O}_{X,x}$  es un anillo reducido. □

**7. Definición:** Un esquema se dice que es irreducible cuando no es unión de cerrados propios, es decir, cuando el espacio topológico subyacente es irreducible.

**8. Ejercicio:** Demostrar que un espacio topológico es irreducible si y sólo si no contiene dos abiertos no vacíos disjuntos.

**9. Definición:** Un esquema  $X$  se dice que es íntegro si para todo abierto  $U \subset X$  se verifica que  $\mathcal{O}_X(U)$  es íntegro.

**10. Proposición:** *Un esquema es íntegro  $\Leftrightarrow$  es irreducible y reducido.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Obviamente,  $X$  es reducido. Si  $X = C_1 \cup C_2$  es unión de cerrados propios, entonces  $X - (C_1 \cap C_2) = (C_1 - (C_1 \cap C_2)) \amalg (C_2 - (C_1 \cap C_2))$ . Denotemos  $U = X - (C_1 \cap C_2)$ ,  $U_1 = C_1 - (C_1 \cap C_2)$  y  $U_2 = C_2 - (C_1 \cap C_2)$ . Se verifica  $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$ , que no es íntegro. Así pues, hemos llegado a contradicción por suponer que  $X$  no es irreducible.

$\Leftarrow$ ) Dado un abierto  $U \subseteq X$ , sean  $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ , tales que  $f \cdot g = 0$ .

Sea

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} x \in U \text{ tales que } f \text{ en } \mathcal{O}_{X,x} \\ \text{pertenezca al ideal maximal } \mathfrak{p}_x \mathcal{O}_{X,x} \end{array} \right\} \stackrel{\text{Not}}{=} (f)_0$$

$$C_2 \stackrel{\text{Ídem}}{=} (g)_0$$

Es fácil ver que  $C_1 \cup C_2 = U$ . Por tanto,  $X = [(X - U) \cup C_1] \cup [(X - U) \cup C_2]$ , luego por ser  $X$  irreducible podemos suponer que  $X = [(X - U) \cup C_1]$ , es decir  $C_1 = U$ . Así pues,  $f$  es nilpotente en cada abierto afín incluido en  $U$ . Luego por ser  $X$  reducido,  $f$  es nulo en cada abierto afín incluido en  $U$ , es decir,  $f$  es nulo. Luego  $\mathcal{O}_X(U)$  es íntegro. □

Si  $X$  es irreducible y  $U \subseteq X$  es un abierto afín, sabemos que existe un punto  $p \in U$ , tal que su cierre en  $U$  es  $U$ . Tendremos que  $X = \bar{p} \cup U^c$ , luego  $\bar{p} = X$ . Dado un abierto  $V \subseteq X$ , si  $p \notin V$ , entonces  $\bar{p} \subseteq V^c$ , luego  $V = \emptyset$ . Como consecuencia,  $p$  es el único punto cuyo cierre es  $X$ , pues localmente afínmente  $p$  es único. Diremos que  $p$  es el punto genérico de  $X$ . Si un esquema  $X$  es íntegro y  $p_g \in X$  es el punto genérico, llamaremos cuerpo de funciones de  $X$  a  $\mathcal{O}_{X,p_g}$ , que es el cuerpo de fracciones del anillo de funciones de cualquiera de sus abiertos afines. Denotaremos  $\Sigma_X = \mathcal{O}_{X,p_g}$ .

## 6.5 Ejemplos de esquemas

### 6.5.1 Variedades algebraicas. Variedades proyectivas

En el capítulo 1 hemos definido el espectro proyectivo de un anillo graduado, queremos ahora precisar qué funciones algebraicas estamos considerando en el espectro proyectivo. La pregunta sobre cuáles son las funciones del haz de anillos del espectro proyectivo de un anillo graduado es una pregunta esencialmente de naturaleza local, nos preguntamos cuáles son las funciones localmente. Para fijar ideas, consideremos  $\mathbb{P}_n = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]$ . Las funciones de  $\mathbb{P}_n - (x_i)_0^h$  han de ser funciones algebraicas  $f \in k[x_0, \dots, x_n]_{x_i}$  homogéneas de grado cero, pues sólo consideramos funciones que no distinguen un punto  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  de  $(\lambda\alpha_0, \dots, \lambda\alpha_n)$ . Es decir, las funciones de  $\mathbb{P}_n - (x_i)_0^h$  son  $(k[x_0, \dots, x_n]_{x_i})_0 = k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]$ . Como además  $\mathbb{P}_n - (x_i)_0^h = \text{Spec } k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]$  tendremos que  $\mathbb{P}_n$  con las funciones “adecuadas” es un esquema.

Procedamos con toda generalidad y rigor. Recordemos, que dado un anillo graduado  $R$ , denotamos por  $R_0$  los elementos de grado cero de  $R$ .

**1. Definición:** Definimos el haz de localizaciones homogéneas  $\widetilde{R}$ , en  $\text{Proj } R$  por el haz asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow (R_S)_0, \quad S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema multiplicativo de las funciones} \\ \text{homogéneas que no se anulan en } U \end{array} \right\}$$

para cada abierto  $U$  de  $\text{Proj } R$ .

Por sencillez supondremos, a partir de ahora, que  $R = R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$ , donde cada  $\xi_i$  es de grado 1.

**2. Teorema:**  $(\text{Proj } R, \widetilde{R})$  es un esquema.

*Demostración.* Recordemos que  $\text{Proj } R = \bigcup_{i=0}^n U_{\xi_i}^h$ , donde  $U_{\xi_i}^h = \text{Proj } R - (\xi_i)_0^h$ . Sabemos, además, que tenemos un homeomorfismo  $U_{\xi_i}^h \simeq \text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ , de modo que a través de esta identificación,  $(f_n)_0^h$  en  $U_{\xi_i}^h$  es igual a  $(f_n/\xi_i^n)_0$  en  $\text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ .

Nos falta ver que  $\widetilde{R}|_{U_{\xi_i}^h} = R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ :

Sea  $f_n \in R_n \subset R$ . Veamos que las secciones del prehaz de localizaciones homogéneas sobre  $U_{\xi_i}^h - (f_n)_0^h = U_{\xi_i}^h \cap U_{f_n}^h$  coincide con las secciones de  $R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  en  $\text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i] - (f_n/\xi_i^n)_0$ .

Observemos que  $R_{U_{\xi_i} \cap U_{f_n}} = R_{\xi_i \cdot f_n} = (R_{\xi_i})_{f_n/\xi_i^n}$ . Por tanto,

$$(R_{U_{\xi_i} \cap U_{f_n}})_0 = [(R_{\xi_i})_{f_n/\xi_i^n}]_0 = [(R_{\xi_i})_0]_{f_n/\xi_i^n} = R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]_{f_n/\xi_i^n}$$

Luego, los prehaces que definían a  $\widetilde{R}|_{U_{\xi_i}^h}$  y  $R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  son isomorfos en abiertos básicos y concluimos que los haces son isomorfos.

□

**3. Definición:** Diremos que un esquema  $X$  es un  $k$ -esquema si existe un morfismo prefijado  $X \rightarrow \text{Spec } k$  de esquemas. Diremos que un  $k$ -esquema es una variedad algebraica si existe un recubrimiento finito  $\{U_i = \text{Spec } A_i\}$  por abiertos afines de  $X$  de modo que los  $A_i$  son  $k$ -álgebras de tipo finito.

**4. Ejemplo:** Las variedades algebraicas afines  $\text{Spec } k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  son variedades algebraicas.

Si  $R = k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  es una  $k$ -álgebra graduada,  $(\text{Proj } R, \widetilde{R})$  es una variedad algebraica. A este tipo de variedades se las llama variedades proyectivas. Así pues, el espacio proyectivo y las curvas proyectivas planas son ejemplos de variedades algebraicas.

**5. Definición:** Llamaremos dimensión de un esquema  $X$  a la máxima longitud de las cadenas de cerrados irreducibles de  $X$ .

**6. Proposición:** Si  $X$  es una variedad algebraica íntegra entonces la dimensión de  $X$  coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de funciones  $\mathcal{O}_{X,p_g}$ .

*Demostración.* Si  $U$  es un abierto afín de  $X$  no vacío. Sabemos que  $\dim U$  es igual al grado de trascendencia de  $\Sigma_U = \Sigma X$ .

Si  $C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \dots \subsetneq C_n$  es una cadena de cerrados irreducible de  $X$  y  $U$  es un abierto afín que corta con  $C_1$ , entonces  $U \cap C_1 \subsetneq U \cap C_2 \subsetneq \dots \subsetneq U \cap C_n$  es una cadena de cerrados irreducibles de  $U$  (recordemos que  $\overline{U \cap C_i} = C_i$ ). Por tanto,  $\dim X \leq \sup\{\dim U, \text{abiertos afines}\}$ , luego  $\dim X$  es menor o igual que el grado de trascendencia de  $\Sigma_X$ . Por otra parte, si  $D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \dots \subsetneq D_n$  es una cadena de cerrados de un abierto afín, entonces  $\bar{D}_1 \subsetneq \bar{D}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \bar{D}_n$  es una cadena de cerrados irreducibles de  $X$ , luego  $\dim U \leq \dim X$ , luego el grado de trascendencia de  $\Sigma_X$  es menor o igual que  $\dim X$ .

□

**7. Ejercicio:** Probar que las variedades algebraicas son catenarias.

**8. Definición:** Diremos que una variedad algebraica es una curva si es de dimensión 1.

Sea  $X$  una variedad algebraica íntegra y  $\mathcal{O}_v$  un subanillo de  $\Sigma_X$  de valoración, trivial sobre  $k$ . Se dice que  $\mathcal{O}_v$  tiene centro en un punto  $x \in X$ , cuando la imagen del morfismo de localización  $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \Sigma_X$  es un anillo local dominado por  $\mathcal{O}_v$ .

**9. Definición:** Diremos que una variedad algebraica íntegra es completa si todo anillo de valoración de su cuerpo de funciones, trivial sobre  $k$ , tiene centro en un único punto de la variedad.

**10. Teorema:** Las variedades algebraicas íntegras proyectivas son completas.

*Demostración.* Sea  $X = \text{Proj } k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  una variedad proyectiva íntegra. Sea  $\mathcal{O}_v \subseteq \Sigma_X$  un anillo de valoración trivial sobre  $k$ .

Sea  $\frac{\xi_i}{\xi_j} \in \Sigma_X$  la función de valor máximo para todo  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ . Se verifica que  $k[\frac{\xi_0}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_j}] \subseteq \mathcal{O}_v$ , porque si  $v(\frac{\xi_r}{\xi_j}) < 0$  para algún  $r$ , entonces  $v(\frac{\xi_i}{\xi_j}) < v(\frac{\xi_i}{\xi_j}) + v(\frac{\xi_j}{\xi_r}) = v(\frac{\xi_i}{\xi_j} \cdot \frac{\xi_j}{\xi_r}) = v(\frac{\xi_i}{\xi_r})$  y llegamos a contradicción. Así pues,  $\mathcal{O}_v$  centra en el punto  $x$ , donde  $\mathfrak{p}_x$  es el corte del ideal de valoración con  $k[\frac{\xi_0}{\xi_j}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_j}]$ .

Por último, dado un punto  $y \neq x$ , existe un abierto afín que contiene a  $x$  e  $y$ , luego el anillo de valoración centra en  $x$  y no puede centrar en  $y$ .

□

**11. Proposición :** *Sea  $C$  una curva proyectiva íntegra no singular. Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de  $C$  y las valoraciones de  $\Sigma_C$ , triviales sobre  $k$ .*

*Demostración.* En el teorema 6.5.10 hemos visto que todo anillo de valoración  $k \subset \mathcal{O}_v \subseteq \Sigma_C$  centra en un único punto  $x \in C$ , es decir,  $\mathcal{O}_{C,x} \subseteq \mathcal{O}_v$  (y  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_v$ ). Ahora bien,  $\mathcal{O}_{C,x}$  es un anillo local regular de dimensión 1, o es  $\Sigma_C$ , luego es de valoración. Por tanto, como los anillos de valoración no admiten morfismos dominantes, ha de cumplirse que  $\mathcal{O}_{C,x} = \mathcal{O}_v$ . Ahora fácilmente concluimos.  $\square$

### 6.5.2 Variedad de Riemann

Sea  $k$  un cuerpo y  $\Sigma$  una extensión de cuerpos de  $k$ , de tipo finito de grado de trascendencia 1, es decir, existe un  $t \in \Sigma$  trascendente de modo que  $k(t) \hookrightarrow \Sigma$  es una extensión finita de cuerpos.

**12. Definición :** Llamaremos variedad de Riemann de  $\Sigma$  al espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$ , donde

1)  $X$  es el conjunto de valoraciones discretas de  $\Sigma$  triviales sobre  $k$ , dotado de la siguiente topología: los cerrados propios son los subconjuntos finitos de  $X$  que no contienen a la valoración  $\Sigma$  (que será, por tanto, el punto genérico de  $X$ ).

2)  $\mathcal{O}_X$  es el haz de anillos definido por  $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{v \in U} \mathcal{O}_v$ , para cada abierto  $U \subseteq X$ .

**13. Teorema :** *La variedad de Riemann  $X$  de  $\Sigma$  es una curva completa y no singular sobre  $k$  cuyo cuerpo de funciones es  $\Sigma$ .*

*Demostración.* Sea  $t \in \Sigma$  trascendente. Sea  $U$  el conjunto de anillos de valoración que contienen a  $t$  y  $U'$  el conjunto de anillos de valoración que contienen a  $t^{-1}$ . Se cumple  $X = U \cup U'$ . Sea  $B$  el cierre entero de  $k[t]$  en  $\Sigma$  y  $B'$  el cierre entero de  $k[t^{-1}]$  en  $\Sigma$ .

Se verifica que  $U = \text{Spec } B$  (y por simetría, que  $U' = \text{Spec } B'$ ): En efecto,  $B$  es un anillo íntegramente cerrado en  $\Sigma$ , de dimensión 1 (pues el morfismo  $k[t] \rightarrow B$  es finito) cuyo cuerpo de fracciones coincide con  $\Sigma$  (porque es íntegramente cerrado en  $\Sigma$  y contiene a  $k(t)$ ). Por tanto, dado  $x \in \text{Spec } B$ ,  $B_x$  es un anillo de valoración discreta que contiene a  $t$ . Recíprocamente, dado un anillo de valoración discreta  $\mathcal{O}_v$  que contenga a  $t$ , tendremos que  $B \hookrightarrow \mathcal{O}_v$  (pues  $B$  es la intersección de los anillos de valoración que contienen a  $k[t]$ ). Por tanto, si  $\mathfrak{p}_x = B \cap \mathfrak{p}_v$  (donde  $\mathfrak{p}_v$  es el ideal de valoración de  $\mathcal{O}_v$ ), tendremos que  $B_x = \mathcal{O}_v$ , porque  $B_x$  es de valoración y los anillos de valoración no admiten morfismos dominantes. Por último, observemos que por ser  $B$  un anillo de dimensión 1, la topología de  $\text{Spec } B$  coincide con la de  $U$ .

Se verifica que  $U$  es un abierto de la variedad de Riemann (y por simetría, que  $U'$  es un abierto de la variedad de Riemann): En efecto, los subanillos de valoración de  $\Sigma$  que no contienen a  $t$ , se corresponden con los anillos de valoración cuyo ideal irrelevante contiene a  $t^{-1}$ , es decir con los ideales primos de  $B'$  que contienen a  $(t^{-1})$ , que son un número finito (distintos del punto genérico), porque  $B'$  es de dimensión 1. En conclusión,  $X - U$  es un número finito de anillos de valoración (distintos del punto genérico), luego es un cerrado y  $U$  un abierto.

Observemos que  $\mathcal{O}_X$  restringido a  $U$  (ídem para  $U'$ ) coincide con  $\tilde{B}$ , porque por ser  $B$  íntegro se verifica que  $\tilde{B}(V) = \bigcap_{x \in V} B_x = \mathcal{O}_X(V)$ .

Por último, si  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración, entonces contiene a  $t$  (o a  $t^{-1}$ ), por tanto, contiene a  $B$  (o  $B'$ ) y como hemos visto  $\mathcal{O}_v = B_x$ , donde  $x \in U$  es la valoración correspondiente a  $v$ . En conclusión,  $\mathcal{O}_v$  centra en  $v$ .

Hemos concluido porque la variedad de Riemann es la unión de los dos abiertos  $U, U'$ , que son esquemas afines no singulares de cuerpo de funciones  $\Sigma$  y toda valoración centra en un punto y sólo uno de  $U \cup U'$ .  $\square$

**14. Ejercicio:** La variedad de Riemann de  $k(x)$  es la recta proyectiva  $\mathbb{P}_1$ .

**15. Definición:** Un morfismo de esquemas  $f: X \rightarrow Y$  diremos que es un morfismo afín si existe un recubrimiento  $\{U_i\}$  de  $Y$  por abiertos afines de modo que  $f^{-1}(U_i)$  sean abiertos afines de  $X$ . Diremos además que es finito si los morfismos de anillos  $\mathcal{O}_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{f^{-1}(U_i)}$  son finitos.

**16. Definición:** Un morfismo entre esquemas íntegros diremos que es birracional si el morfismo inducido entre los cuerpos de fracciones es un isomorfismo.

Observemos que el cuerpo de funciones de toda curva íntegra es una extensión de tipo finito de grado de trascendencia 1.

**17. Teorema:** Sea  $C$  una curva completa sobre un cuerpo  $k$  y  $\bar{C}$  la variedad de Riemann del cuerpo de funciones  $\Sigma$  de  $C$ . Existe un epimorfismo natural  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$  finito y birracional de esquemas que es isomorfismo si y sólo si  $C$  es no singular.

*Demostración.* Se define  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$  como sigue:  $\pi(v)$  es el centro en  $C$  de la valoración  $\mathcal{O}_v$ . Sea un abierto afín  $U \subseteq C$  y sea por el lema de normalización de Noether un morfismo finito  $k[t] \rightarrow \mathcal{O}_C(U)$ . Se verifica que  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } B$ , donde  $B$  es el cierre entero de  $k[t]$  (o  $\mathcal{O}_C(U)$ ) en  $\Sigma_C$ :  $\text{Spec } B$  se identifica con los anillos de valoración que dominan a  $\mathcal{O}_C(U)$  (o  $k[t]$ ), que se identifica con los anillos de valoración que centran en  $U$ , es decir, con  $\pi^{-1}(U)$ . Si recordamos la construcción de los abiertos afines por los que recubríamos la variedad de Riemann,  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } B$  es un abierto, luego  $\pi$  es continuo. Es claro, además, que el morfismo  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  es el inducido por la inclusión  $\mathcal{O}_C(U) \rightarrow B$ .

Entre los haces de anillos, tenemos las inclusiones naturales  $\mathcal{O}_C(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\bar{C}}(\pi^{-1}(U)) = \bigcap_{v \in \pi^{-1}(U)} \mathcal{O}_v$ .

Tenemos, pues, definido un morfismo de espacios anillados  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$ , que cumple las condiciones del teorema, como se comprueba afínmente con  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ .  $\square$

**18. Teorema:** La categoría de las curvas completas no singulares sobre un cuerpo  $k$  (cuyos morfismos no sean constantes), es equivalente (contravariantemente) a la categoría de las extensiones de tipo finito de  $k$  de grado de trascendencia 1.

*Demostración.* Sea  $F$  el funtor que asigna a cada curva  $C$  su cuerpo de funciones  $\Sigma_C$ . Dado un morfismo  $f: C \rightarrow C'$ , no constante, es decir,  $f$  aplica el punto genérico  $g$  de  $C$ , el punto genérico  $g'$  de  $C'$ , tenemos definido un morfismo  $\Sigma_{C'} = \mathcal{O}_{C',g'} \rightarrow \mathcal{O}_{C,g} = \Sigma_C$ , que por definición será  $F(f)$ . Obviamente,  $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ .

Sea  $G$  el funtor que asigna a cada extensión  $\Sigma$  de grado de trascendencia 1, su variedad de Riemann  $V$ . Dado un morfismo  $i: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ , sea  $G(i): V' \rightarrow V$  el morfismo definido entre las variedades de Riemann de  $\Sigma'$  y  $\Sigma$ , del siguiente modo: Entre los espacios topológicos,  $G(i)(v') \stackrel{\text{def}}{=} v$ , siendo  $\mathcal{O}_v = \Sigma \cap \mathcal{O}_{v'}$ . Dado  $t \in \Sigma$ , sea  $B$  el cierre entero de  $k[t]$  en  $\Sigma$  y  $B'$  el cierre entero de  $B$  (o  $k[t]$ ) en  $\Sigma'$ . Sean  $U = \text{Spec } B$  y  $U' = \text{Spec } B'$ , que son abiertos de  $V$  y  $V'$ . Se cumple que  $G(i)^{-1}(U) = U'$  y que  $G(i)|_{U'}$  el morfismo inducido por la inclusión  $B \hookrightarrow B'$ . Por último, entre los haces de anillos, para cada abierto  $W$ , las inclusiones  $\mathcal{O}_V(W) = \bigcap_{v \in W} \mathcal{O}_v \hookrightarrow \bigcap_{v' \in G(i)^{-1}(W)} \mathcal{O}_{v'}$  inducen un morfismo  $\mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{G}(i)_* \mathcal{O}_{V'}$ . De nuevo, el morfismo de espacios anillados definido sobre  $U'$ , es el inducido por el morfismo de anillos  $B \hookrightarrow B'$ .

Para terminar, tenemos que ver que  $G \circ F \simeq \text{Id}$  y  $F \circ G \simeq \text{Id}$ . Efectivamente,  $\theta: C \rightarrow G(F(C)) = \text{Var. de Riemann de } \Sigma_C, x \mapsto \mathcal{O}_{C,x}$  y entre los haces de anillos  $\mathcal{O}_V(U) = \bigcap_{v \in U} \mathcal{O}_v = \bigcap_{x \in \theta^{-1}(U)} \mathcal{O}_{C,x} = \mathcal{O}_C(\theta^{-1}(U))$ ; define el isomorfismo  $G \circ F \simeq \text{Id}$ . Por último,  $F \circ G(\Sigma) = \Sigma$ .  $\square$

**19. Ejercicio:** Dado un morfismo  $\pi: C' \rightarrow C$  entre curvas completas no singulares (no constante), demostrar que el número de puntos de las fibras es constante y coincide con el grado entre los cuerpos de funciones.

*Resolución:* Sea  $x \in C$  y  $U = \text{Spec } A \subset C$  un abierto afín que contenga a  $x$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma_{C'}$ , sabemos que  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } \bar{A}$ , y que  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } \bar{A} \rightarrow U = \text{Spec } A$  es el morfismo inducido  $A \hookrightarrow \bar{A}$ .  $A_x$  es un anillo de ideales principales y  $\bar{A}_x$  es un  $A_x$ -módulo finito sin torsión. Por tanto,  $\bar{A}_x = (A_x)^n$ . Sea  $g$  el punto genérico de  $C$ ,  $\bar{A}_g$  es un  $A_g = \Sigma_C$ -álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo, que ha de ser  $\Sigma_{C'}$ . Si localizamos la igualdad anterior en  $g$  tenemos  $\Sigma_{C'} = \bar{A}_g = (A_g)^n = \Sigma_C^n$ . Ahora ya tenemos

$$n \# \text{ de puntos de } \pi^{-1}(x) = \dim_{A_x/\mathfrak{m}_x} \bar{A}/\mathfrak{m}_x \bar{A} = (A_x)^n/\mathfrak{m}_x (A_x)^n = \dim_{A_x/\mathfrak{m}_x} (A_x/\mathfrak{m}_x)^n = n \\ \dim_{\Sigma_C} \Sigma_{C'} = n$$

**20. Ejercicio:** Sea  $\pi: C' \rightarrow C$  un morfismo entre curvas afines no singulares. Demostrar que  $\pi$  es un morfismo finito si y sólo si el número de puntos de las fibras es constante.

**21. Ejemplo:** Sea  $\Sigma_C$  el cuerpo de funciones de una curva  $C$  completa no singular y  $f \in \Sigma_C$  trascendente. Consideremos el morfismo  $k(x) \hookrightarrow \Sigma_C$ ,  $p(x) \mapsto p(f)$ , que induce un morfismo entre las variedades de Riemann

$$\tilde{f}: C \rightarrow \mathbb{P}_1$$

Si  $k[x] \hookrightarrow \overline{k[x]}$ ,  $x \mapsto f$  es el morfismo de cierre entero, el morfismo inducido en espectros es  $\tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(U)}$ . Sea  $\mathfrak{m}_\alpha \subset \overline{k[x]}$  un ideal maximal racional y  $f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f} \in \overline{k[x]}/\mathfrak{m}_\alpha$ . Es fácil comprobar que  $\mathfrak{m}_\alpha \cap k[x] = (x - f(\alpha))$ . Por tanto,  $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$ . Por otra parte,  $\tilde{f}^{-1}(0) = \text{Spec } \overline{k[x]}/f\overline{k[x]}$ . Por tanto, si  $f\overline{k[x]} = \mathfrak{m}_{x_1}^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_{x_r}^{n_r}$ ,  $\tilde{f}^{-1}(0)$  son los puntos  $x_i$  con multiplicidad  $n_i$  y el número de los puntos de la fibra de 0 es  $\sum_i n_i$  gr  $x_i$ .

### 6.5.3 Recollement de esquemas

#### Recollement de espacios topológicos

Sea  $X$  un espacio topológico. A veces, para “aprehender”  $X$ , es más fácil definir un recubrimiento  $\{U_i\}$  por abiertos de  $X$  y “aprehender” cada uno de los abiertos  $U_i$ . Por ejemplo, en el estudio de la superficie terrestre, se construyen una colección de mapas locales, llamémoslos  $\{U_i\}$ . Ahora bien, dados dos mapas locales, se están identificando ciertos puntos entre los dos mapas. Además esta identificación ha de estar bien hecha, es decir, si  $x \in U_i$  se identifica con  $x' \in U_j$  y  $x'$  con  $x'' \in U_k$  entonces  $x$  se identifica con  $x''$ . Obviamente si sólo dispusiésemos de los “mapas locales”  $\{U_i\}$ , con las identificaciones entre ellos bien hechas, tendríamos reconstruida la superficie terrestre. Éste va a ser el método de recollement, de construcción de un espacio topológico a partir de unos “datos” locales.

**22. Definición:** Unos datos de construcción consisten en una familia  $\{X_i\}$  de espacios topológicos, para cada  $X_i$  un recubrimiento  $X_i = \bigcup_j X_{ij}$  por abiertos, y una familia de homeomorfismos  $\theta_{ij}: X_{ij} \rightarrow X_{ji}$  tales que

1.  $\theta_{ij} = \theta_{ji}^{-1}$  y  $\theta_{ii} = \text{Id}$ .

2.  $\theta_{ij|X_{ij} \cap X_{ik}} : X_{ij} \cap X_{ik} \simeq X_{ji} \cap X_{jk}$  y se verifica un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_{ij} \cap X_{ik} & \xrightarrow{\theta_{ij}} & X_{ji} \cap X_{jk} \\ & \searrow \theta_{ik} & \swarrow \theta_{jk} \\ & X_{kj} \cap X_{ki} & \end{array}$$

para cualesquiera  $i, j, k$ . Es decir, se cumple la condición de “cociclo”  $\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = \theta_{ik}$ .<sup>3</sup>

**23. Definición:** Unos datos de construcción se dicen que son efectivos si existe un espacio topológico  $X$ , un recubrimiento por abiertos  $X = \bigcup_i U_i$  y unos homeomorfismos  $g_i : U_i \simeq X_i$  de modo que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{g_i|_{U_i \cap U_j}} & X_{ij} \\ \parallel & & \parallel \theta_{ij} \\ U_j \cap U_i & \xrightarrow{g_j|_{U_j \cap U_i}} & X_{ji} \end{array}$$

son conmutativos. Se dirá que  $X$  es un descenso de los datos de construcción.

**24. Teorema:** *Todo dato de construcción es efectivo y los descensos son únicos salvo isomorfismos.*

*Demostración.* Sea  $\{X_i, \theta_{ij}\}$  unos datos de construcción. Consideremos en  $\coprod_i X_i$  la relación  $\sim$ : dados  $x_i \in X_i$  y  $x_j \in X_j$  entonces  $x_i \sim x_j$  si  $x_j = \theta_{ij}(x_i)$ . La relación  $\sim$  es de equivalencia porque el dato de construcción cumple la condición de cociclo.

Sea pues  $\coprod_i X_i \rightarrow \coprod_i X_i / \sim$  el morfismo de paso al cociente y consideremos en  $\coprod_i X_i / \sim$  la topología cociente. Es fácil comprobar que los morfismos naturales  $X_i \rightarrow \coprod_i X_i / \sim$  son inmersiones abiertas, denotemos  $\bar{X}_i$  el abierto imagen de  $X_i$ . Es fácil comprobar que  $\bar{X}_i \cap \bar{X}_j$  es la imagen precisamente de  $X_{ij}$  y que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_{ij} & \xrightarrow{\sim} & \bar{X}_i \cap \bar{X}_j \\ \parallel \theta_{ij} & & \parallel \\ X_{ji} & \xrightarrow{\sim} & \bar{X}_j \cap \bar{X}_i \end{array}$$

Luego  $\coprod_i X_i / \sim$  es un descenso y el dato de construcción es efectivo.

Sea  $X = \bigcup_i U_i$  otro descenso, con homeomorfismos  $g_i : U_i \simeq X_i$ , verificando los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{g_i|_{U_i \cap U_j}} & X_{ij} \\ \parallel & & \parallel \theta_{ij} \\ U_j \cap U_i & \xrightarrow{g_j|_{U_j \cap U_i}} & X_{ji} \end{array}$$

<sup>3</sup>Puede comprobarse que esta segunda condición implica la primera.

La composición  $\bar{g}_i$  de morfismos  $U_i \xrightarrow{g_i} X_i \simeq \bar{X}_i$  verifican el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{g_i|_{U_i \cap U_j}} & X_{ij} & \xrightarrow{\sim} & \bar{X}_i \cap \bar{X}_j \\ \parallel & & \downarrow \theta_{ij} & & \parallel \\ U_j \cap U_i & \xrightarrow{g_j|_{U_j \cap U_i}} & X_{ji} & \xrightarrow{\sim} & \bar{X}_j \cap \bar{X}_i \end{array}$$

Luego los homeomorfismos  $\bar{g}_i$  coinciden sobre las intersecciones, luego definen un homeomorfismo global  $\bar{g}: X \rightarrow \coprod_i X_i / \sim$ . □

### Recollement de esquemas

El recollement de haces puede ser entendido esencialmente como un caso particular del recollement de espacios topológicos, sin más que considerar, en vez de los haces, los espacios etale asociados. Puede verse después que en la categoría de los haces el recollement “deja estable” las subcategorías de los espacios anillados, y la de esquemas. Podríamos así desarrollar esta sección. Sin embargo, conviene para la comprensión de la teoría del descenso fielmente plano, más adelante estudiada, proceder de otro modo, igualmente natural.

**25. Definición:** Unos datos de construcción, en la categoría de esquemas, es una familia  $\{X_i, \mathcal{O}_{X_i}\}$  de esquemas, para cada  $X_i$  un recubrimiento  $X_i = \bigcup_j X_{ij}$  por abiertos, y una familia de isomorfismos  $\theta_{ij}: X_{ij} \rightarrow X_{ji}$  de esquemas tales que

1.  $\theta_{ij} = \theta_{ji}^{-1}$  y  $\theta_{ii} = \text{Id}$ .
2.  $\theta_{ij}|_{X_{ij} \cap X_{ik}}: X_{ij} \cap X_{ik} \simeq X_{ji} \cap X_{jk}$  y se verifica un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_{ij} \cap X_{ik} & \xrightarrow{\theta_{ij}} & X_{ji} \cap X_{jk} \\ & \searrow \theta_{ik} & \swarrow \theta_{jk} \\ & X_{kj} \cap X_{ki} & \end{array}$$

para cualesquiera  $i, j, k$ . Es decir, se cumple la condición de “cociclo”  $\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = \theta_{ik}$ . Observemos, que de hecho, la condición 1. es consecuencia de la condición 2.

**26. Definición:** Unos datos de construcción se dicen que son efectivos si existe un esquema  $X$ , un recubrimiento por abiertos  $X = \bigcup_i U_i$  y unos isomorfismos  $g_i: U_i \simeq X_i$  de esquemas de modo que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{g_i|_{U_i \cap U_j}} & X_{ij} \\ \parallel & & \downarrow \theta_{ij} \\ U_j \cap U_i & \xrightarrow{g_j|_{U_j \cap U_i}} & X_{ji} \end{array}$$

son conmutativos. Se dirá que  $X$  es un descenso de los datos de construcción.

**27. Teorema:** *Todo dato de construcción es efectivo y los descensos son únicos salvo isomorfismos de esquemas.*

*Demostración.* Por la sección anterior, podemos suponer a nivel topológico, que los  $X_i$  son abiertos del espacio topológico  $X = \coprod_i X_i / \sim$ , de modo que  $X_{ij} = X_i \cap X_j$  y los morfismos  $\theta_{ij}$  a nivel del espacio topológico son los morfismos identidad.

Es decir, tenemos un espacio topológico  $X$ , un recubrimiento  $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$  de  $X$  por abiertos que son esquemas e isomorfismos  $\theta_{ij}: \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \simeq \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i}$  verificando la condición de cociclo  $\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = \theta_{ik}$ . Tenemos que ver que existe un haz  $\mathcal{O}_X$  de anillos, e isomorfismos  $g_i: \mathcal{O}_X|_{X_i} \simeq \mathcal{O}_{X_i}$  de modo que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X|_{X_i \cap X_j} & \xrightarrow{g_i|_{X_i \cap X_j}} & \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \\ \parallel & & \Big| \theta_{ij} \\ \mathcal{O}_X|_{X_j \cap X_i} & \xrightarrow{g_j|_{X_j \cap X_i}} & \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i} \end{array}$$

son conmutativos.

Sea  $i: X_i \rightarrow X$  la inmersión natural y sigamos denotando  $\mathcal{O}_{X_i} = i_* \mathcal{O}_{X_i}$ , es decir  $\mathcal{O}_{X_i}(V) = \mathcal{O}_{X_i}(V \cap X_i)$ . Igualmente denotemos  $\mathcal{O}_{X_i \cap X_j}$  el haz sobre  $X$  definido por  $\mathcal{O}_{X_i \cap X_j}(V) = \mathcal{O}_{X_i}(V \cap X_i \cap X_j)$ . Tenemos dos morfismos

$$\prod_i \mathcal{O}_{X_i} \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{\theta \circ d_2} \end{array} \prod_{i,j} \mathcal{O}_{X_i \cap X_j}$$

definidos por  $d_1(s_i) = (s_i|_{X_i \cap X_j})_{i,j}$  y  $\theta \circ d_2(s_i) = (\theta_{ji}(s_j|_{X_j \cap X_i}))_{i,j}$ . Definimos  $\mathcal{O}_X$  como el núcleo de estas dos flechas, es decir, como el haz cuyas secciones son las secciones locales sobre los  $X_i$ , que coinciden (a través de las identificaciones  $\theta_{ij}: \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \simeq \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i}$ ) sobre las intersecciones. Dejamos al lector la rutina de probar que existen isomorfismos naturales  $g_i: \mathcal{O}_X|_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$  y que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X|_{X_i \cap X_j} & \xrightarrow{g_i|_{X_i \cap X_j}} & \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \\ \parallel & & \Big| \theta_{ij} \\ \mathcal{O}_X|_{X_j \cap X_i} & \xrightarrow{g_j|_{X_j \cap X_i}} & \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i} \end{array}$$

son conmutativos.

Veamos la unicidad, salvo isomorfismos de  $\mathcal{O}_X$ . Sea otro haz de anillos  $\mathcal{O}'_X$  sobre  $X$ , e isomorfismos  $g'_i: \mathcal{O}'_X|_{X_i} \simeq \mathcal{O}_{X_i}$  de modo que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}'_X|_{X_i \cap X_j} & \xrightarrow{g'_i|_{X_i \cap X_j}} & \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} \\ \parallel & & \Big| \theta_{ij} \\ \mathcal{O}'_X|_{X_j \cap X_i} & \xrightarrow{g'_j|_{X_j \cap X_i}} & \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i} \end{array}$$

son conmutativos.

Por tanto tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}'_{X|X_i \cap X_j} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X_i|X_i \cap X_j} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X|X_i \cap X_j} \\
 \parallel & & \Big| \theta_{ij} & & \parallel \\
 \mathcal{O}'_{X|X_j \cap X_i} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X_j|X_j \cap X_i} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X|X_j \cap X_i}
 \end{array}$$

Por tanto, los isomorfismos  $g_i^{-1} \circ g'_i: \mathcal{O}'_{X|X_i \cap X_j} \simeq \mathcal{O}_{X|X_i \cap X_j}$  coinciden sobre las intersecciones, luego existe un isomorfismo global  $\mathcal{O}'_X \simeq \mathcal{O}_X$ .  $\square$

**28. Ejemplo:** Podemos construir  $\mathbb{P}_n$  como un recollement de esquemas. Sean  $X_i = \text{Spec } k[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$ . Sean  $X_{ij} = X_i - (\frac{x_j}{x_i})_0 = \text{Spec } k[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]_{\frac{x_j}{x_i}}$ , recubrimientos de cada  $X_i$ . Sea  $\theta_{ij}: X_{ij} \rightarrow X_j$  el morfismo inducido por el morfismo de anillos

$$k[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}]_{\frac{x_i}{x_j}} \rightarrow k[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]_{\frac{x_j}{x_i}}, \quad \frac{x_k}{x_j} \mapsto \frac{x_k}{x_i} \frac{x_i}{x_j}$$

Pues bien, los  $\theta_{ij}$  cumplen la condición de cociclo y el recollement de los  $X_i$  es  $\mathbb{P}_n$ .

**29. Ejemplo:** El producto de esquemas. Sean  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f': X' \rightarrow Y$  morfismos de esquemas, queremos construir mediante recollement  $X \times_Y X'$ . Por definición,  $X \times_Y X'$  es un esquema sobre  $Y$ , con un par de  $Y$ -morfismos  $\pi_1: X \times_Y X' \rightarrow X$  y  $\pi_2: X \times_Y X' \rightarrow X'$ , de modo que

$$\text{Hom}_Y(Z, X \times_Y X') = \text{Hom}_Y(Z, X) \times \text{Hom}_Y(Z, X'), \quad f \mapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$$

Dado que el representante de un funtor es único, es decir, si existe otro representante, es isomorfo de modo único con el primero, tendremos que  $X \times_Y X'$  así definido es único, si existe.

Si  $X = \text{Spec } B$ ,  $X' = \text{Spec } B'$  e  $Y = \text{Spec } A$  son esquemas afines tenemos que  $X \times_Y X' \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}(B \otimes_A B')$ , porque

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_Y(Z, X \times_Y X') &= \text{Hom}_A(B \otimes_A B', \mathcal{O}_Z(Z)) = \text{Hom}_A(B, \mathcal{O}_Z(Z)) \times \text{Hom}_A(B', \mathcal{O}_Z(Z)) \\
 &= \text{Hom}_Y(Z, X) \times \text{Hom}_Y(Z, X')
 \end{aligned}$$

Sea  $V = \text{Spec } A \subset Y$  un abierto afín. Sean  $U = \text{Spec } B \subset X$  y  $U' = \text{Spec } B' \subset X'$  abiertos afines tales que  $\pi_1(U) \subseteq V$  y  $\pi_2(U') \subseteq V$ . Se cumple que  $U \times_Y U' = U \times_V U' = \text{Spec}(B \otimes_A B')$

En general, dado  $X \times_Y X'$  y abiertos  $U \subseteq X$ ,  $U' \subseteq X'$  se cumple que  $U \times_Y U' = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(U')$ .

Sea  $\{V_i\}$  un recubrimiento por abiertos afines de  $Y$ ,  $\{U_{ij}\}$  un recubrimiento por abiertos afines de  $\pi_1^{-1}(V_i)$ ,  $\{U'_{ik}\}$  un recubrimiento por abiertos afines de  $\pi_2^{-1}(V_i)$ . Sea  $X_{ijk} = U_{ij} \times_Y U'_{ik}$ ,  $\pi_{1ijk}$  la composición de la proyección de  $X_{ijk}$  en  $U_{ij}$ , con la inclusión  $U_{ij} \hookrightarrow X$ , y  $\pi_{2ijk}$  la composición de la proyección de  $X_{ijk}$  en  $U'_{ik}$ , con la inclusión  $U'_{ik} \hookrightarrow X'$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
 X_{ijk}|_{\pi_{1ijk}^{-1}(U_{ij} \cap U_{i'j'}) \cap \pi_{2ijk}^{-1}(U'_{ik} \cap U'_{i'k'})} &= (U_{ij} \cap U_{i'j'}) \times_Y (U'_{ik} \cap U'_{i'k'}) \\
 &= X_{i'j'k'}|_{\pi_{1i'j'k'}^{-1}(U_{ij} \cap U_{i'j'}) \cap \pi_{2i'j'k'}^{-1}(U'_{ik} \cap U'_{i'k'})}
 \end{aligned}$$

Por recollement, obtenemos un esquema que resulta ser  $X \times_Y X'$ .

## 6.6 Problemas

1. Consideremos en  $\mathbb{N}$  la topología cuyos abiertos son los subconjuntos de  $U_n = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ , además del vacío y el total.
  - (a) Demostrar que los haces de grupos abelianos  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{N}$  se corresponden con los sistemas proyectivos  $\{M_n = \mathcal{M}(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de grupos abelianos.
  - (b) Probar que un haz de grupos abelianos  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{N}$  es flasco si y sólo si los morfismos  $M_{n+1} \rightarrow M_n$  son epiyectivos.
  - (c) Mediante teoría de haces probar que si  $0 \rightarrow M'_n \rightarrow M_n \rightarrow M''_n \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de sistemas proyectivos y los morfismos  $M'_{n+1} \rightarrow M'_n$  son epiyectivos, entonces la sucesión

$$0 \rightarrow \varprojlim_n M'_n \rightarrow \varprojlim_n M_n \rightarrow \varprojlim_n M''_n \rightarrow 0$$

es exacta.

2. Sea  $G$  un haz de anillos constante, y  $F \subseteq G$  un subprehaz de anillos. Demostrar que el prehaz  $\tilde{F}$ , definido por  $\tilde{F}(U) = \bigcap_{x \in U} F_x$ , es un haz de anillos y coincide con el hacificado de  $F$ .
3. Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un esquema. Sea  $\mathcal{O}_{X, \text{red}}$  el prehaz de anillos sobre  $X$  definido por  $\mathcal{O}_{X, \text{red}}(U) = \mathcal{O}_X(U) / \text{Rad}(\mathcal{O}_X(U))$ . Probar que  $(X, \mathcal{O}_{X, \text{red}})$  es un esquema.
4. Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado,  $\text{Aut}(X)$  el grupo de los automorfismos de espacio anillados globales de  $X$  y  $G$  un subgrupo de  $\text{Aut}(X)$ . Sea  $X/G$  el espacio topológico cociente de  $X$  por la relación de equivalencia definida por  $G$  en  $X$ . Sea  $\pi: X \rightarrow X/G$  el morfismo de paso al cociente y  $\mathcal{O}_{X/G}$  el prehaz definido por  $\mathcal{O}_{X/G}(U) = \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G = \{s \in \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)), \text{tales que } gs = s, \text{ para todo } g \in G\}$ .
  - (a) Probar que  $(X/G, \mathcal{O}_{X/G})$  es un espacio anillado.
  - (b) Supongamos  $(X, \mathcal{O}_X) = (\text{Spec } A, \tilde{A})$  y que  $G$  es un grupo finito probar que  $(X/G, \mathcal{O}_{X/G}) = (\text{Spec } A^G, \tilde{A}^G)$ .
  - (c) Si  $G$  es finito y  $X$  es una variedad algebraica afín, probar que  $X/G$  también lo es.
5. Probar que  $C$  es un cerrado irreducible de un esquema si y sólo si existe un único punto  $x \in C$ , tal que  $\bar{x} = C$ .
6. Probar que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(k)}(\mathbb{P}_n(k)) = k$ . Probar que  $\mathbb{P}_n(k)$  no es un esquema afín.
7. Sea  $X = \mathbb{A}_2(k) - \{(0, 0)\}$ . Probar que  $\mathcal{O}_X(X) = k[x, y]$ . Probar que  $X$  no es un esquema afín.
8. Sea  $X = \mathbb{A}_3(k) - (x, y)_0$  no es un esquema afín.
9. Probar  $\text{Hom}_{\text{esq}}(Z, \text{Spec } A) = \text{Hom}_{\text{álg}}(A, \mathcal{O}_Z(Z))$ .
10. Se dice que un punto  $x$  de una  $k$ -variedad algebraica es racional si  $k = \mathcal{O}_{X, x} / \mathfrak{p}_x$ . Probar que si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo entre  $k$ -variedades algebraicas, entonces  $f$  aplica puntos racionales en puntos racionales. Probar que  $f$  aplica puntos cerrados en puntos cerrados.

11. Definir el morfismo de esquemas  $\mathbb{A}_3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_2$ , que sobre los puntos racionales aplica  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  en  $(\overline{\alpha_0}, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2})$ .
12. Probar que una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es isomorfa a la recta proyectiva si y sólo si existe un función con un único polo en un punto, de orden 1.
13. Probar que toda curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es birracional a una curva plana.

# Capítulo 7

## Módulos cuasicoherentes y coherentes

### 7.1 Haces cuasicoherentes sobre un espacio anillado

En el capítulo anterior, hemos definido los esquemas como aquellas estructuras que localmente son  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$ . Anteriormente, hemos definido y estudiado los  $A$ -módulos. El objetivo principal de este capítulo es la definición en la categoría de esquemas del concepto de módulo, es decir, de haz de módulos cuasicoherentes.

Posteriormente estudiaremos los módulos en los esquemas proyectivos. Acabaremos con el estudio de los haces de línea, y demostraremos el teorema de Bézout.

**1. Definición:** Sea  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espacio anillado y  $\mathcal{M}$  un haz, diremos que es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo si para cada abierto  $U \subseteq X$   $\mathcal{M}(U)$  es un  $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo y estas estructuras son compatibles con los morfismos de restricción.

**2. Ejemplo:** Sea  $(X, C_X^\infty)$  una variedad diferenciable y  $Der_X$  el prehaz que definido por  $Der_X(U) = \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_X^\infty(U))$ . Se cumple que  $Der_X$  es un haz de  $C_X^\infty$ -módulos.

Del mismo modo se definen los haces de  $C_X^\infty$ -módulos de  $r$ -formas diferenciales, etc.

Sea  $X$  es un espacio topológico,  $\mathcal{O}_X$  un prehaz de anillos y  $\mathcal{M}$  un prehaz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Si denotamos con  $\tilde{\phantom{x}}$  los hacificados, se cumple  $\tilde{\mathcal{M}}$  es un haz de  $\tilde{\mathcal{O}}_X$ -módulos: En efecto, consideremos los morfismos  $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \xrightarrow{\pm} \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{O}_X \times \mathcal{M} \xrightarrow{\pm} \mathcal{M}$  que dotan a  $\mathcal{M}$  de estructura de  $\mathcal{O}_X$ -módulo. Hacificando, obtenemos los morfismos  $\tilde{\mathcal{M}} \times \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\pm} \tilde{\mathcal{M}}$ ,  $\tilde{\mathcal{O}}_X \times \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\pm} \tilde{\mathcal{M}}$ , que cumplen las condiciones que dotan a  $\tilde{\mathcal{M}}$  de estructura de  $\tilde{\mathcal{O}}_X$ -módulo (como se comprueba en fibras).

Sean  $P$  y  $P'$  dos prehaces en un espacio topológico  $X$ . Se define el prehaz de homomorfismos de  $P$  en  $P'$ , que denotaremos  $Hom_X(P, P')$ , como el prehaz

$$Hom_X(P, P')(U) = \text{Hom}_U(P|_U, P'|_U)$$

Si  $P$  y  $P'$  son haces se puede comprobar que  $Hom_X(P, P')$  es un haz. Igualmente, si  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$  son haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, se define el haz de los morfismos de  $\mathcal{O}_X$ -módulos de  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{M}'$ , que denotaremos  $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ , como el haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{M}'|_U)$$

Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, se define el producto tensorial de  $\mathcal{M}$  por  $\mathcal{M}'$ , que denotaremos  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}'$  como el haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}'(U)$$

**3. Ejercicio:** Sean  $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{M}''$  haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos. Probar que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}', \mathcal{M}'') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}', \mathcal{M}''))$$

**4. Ejercicio:** Sean  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$  haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos y  $x \in X$ . Probar que

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}')_x = \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}'_x$$

Sean  $P_i$  un sistema inductivo de prehaces. Se define el límite inductivo de los prehaces  $P_i$ , que denotaremos  $\varinjlim P_i$ , como el prehaz

$$U \rightsquigarrow \varinjlim [P_i(U)]$$

que resulta ser el límite inductivo de los prehaces en la categoría de prehaces. Si los  $P_i$  son haces, entonces  $\varinjlim P_i$  es haz, por las propiedades de exactitud del límite inductivo de conjuntos y la definición

de haz. El límite inductivo de haces resulta ser, de nuevo, el límite inductivo de haces en la categoría de haces. Si además, los  $P_i$  son  $\mathcal{O}_X$ -módulos,  $\varinjlim P_i$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo.

Sean  $P_i$  un sistema proyectivo de prehaces. Se define el límite proyectivo de los prehaces  $P_i$ , que denotaremos  $\varprojlim P_i$ , como el prehaz

$$U \rightsquigarrow \varprojlim [P_i(U)]$$

que resulta ser el límite proyectivo de los prehaces en la categoría de prehaces. Si los  $P_i$  son haces, entonces  $\varprojlim P_i$  denotará el hacificado del límite proyectivo de los prehaces  $P_i$ . De nuevo,  $\varprojlim P_i$  será

el límite proyectivo de los haces  $P_i$  en la categoría de los haces. Si los  $P_i$  son  $\mathcal{O}_X$ -módulos, entonces  $\varprojlim P_i$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo.

En fin, dejamos ya que el lector defina  $\bigoplus \mathcal{M}_i, \prod \mathcal{M}_i$  de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\mathcal{M}_i$ .

**5. Definición:** Sea  $(\mathrm{Spec} A, \tilde{A})$  un esquema afín y  $M$  un  $A$ -módulo. Llamaremos haz de localizaciones de  $M$ , que denotaremos por  $\tilde{M}$ , al haz de  $\tilde{A}$ -módulos asociado al prehaz sobre  $\mathrm{Spec} A$

$$U \rightsquigarrow M_U \stackrel{\text{def}}{=} M_S \quad S = \left\{ \begin{array}{l} \text{sistema multiplicativo de las funciones} \\ \text{de } A \text{ que no se anulan en } U \end{array} \right\}$$

**6. Proposición:** Sea  $x \in \mathrm{Spec} A$ , entonces  $\tilde{M}_x = M_x$ .

*Demostración.* Es consecuencia de 6.2.3. □

**7. Proposición:** Sea  $X = \mathrm{Spec} A$  un esquema afín y  $M$  un  $A$ -módulo. Se verifica para todo abierto básico  $U_a$  que  $\Gamma(U_a, \tilde{M}) = M_a$ . En particular,  $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$ .

*Demostración.* Se argumenta como en 6.3.9 y 6.3.10. □

Nuestro objetivo ahora, es probar que si un haz de  $\tilde{A}$ -módulos localmente es la localización de un módulo, entonces lo es globalmente. El concepto de haces que son localizaciones en abiertos de un módulo, será un concepto local, luego definible en esquemas. Con precisión demos la definición y el teorema siguientes.

**8. Definición:** Se dice que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo,  $\mathcal{M}$ , es cuasicoherente, si existe un recubrimiento por abiertos afines  $\{U_i\}$  de  $X$  de modo que  $\mathcal{M}|_{U_i} = \widetilde{\mathcal{M}(U_i)}$  (recuérdese 7.1.7). <sup>1</sup>

**9. Teorema:** Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín. Si  $\mathcal{M}$  es un haz cuasicoherente entonces

$$\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}(X)}.$$

Por tanto, la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos cuasicoherentes es equivalente a la categoría de  $A$ -módulos. Luego,  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{Hom}_A(\Gamma(X, \mathcal{M}), \Gamma(X, \mathcal{N}))$ .

*Demostración.* Dada  $f \in A$ ,  $f$  es invertible en  $U_f$ , por tanto, el morfismo de restricción  $\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(U_f)$  define localizando por  $f$  un morfismo  $\mathcal{M}(X)_f \rightarrow \mathcal{M}(U_f)$ . En conclusión, tenemos un morfismo natural  $\Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ . Veamos que es isomorfismo.

Sea  $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$  un recubrimiento de  $X$  por abiertos básicos, donde  $\mathcal{M}|_{U_i} \stackrel{*}{=} \widetilde{\mathcal{M}(U_i)}$ .

Consideremos la sucesión exacta

$$\Gamma(X, \mathcal{M}) \rightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{M}) \rightrightarrows \bigoplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{M})$$

Sea  $U_f$  un abierto básico. Localicemos por  $f$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{M})_f \rightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{M})_f & \rightrightarrows & \bigoplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{M})_f \\ \parallel \text{por } * & & \parallel \text{por } * \\ \Gamma(U_f, \mathcal{M}) \rightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_i \cap U_f, \mathcal{M}) & \rightrightarrows & \bigoplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_f, \mathcal{M}) \end{array}$$

De esta sucesión exacta obtenemos que  $\Gamma(X, \mathcal{M})_f = \Gamma(U_f, \mathcal{M})$ . Por tanto,  $\mathcal{M}$  coincide con  $\Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{M})$  en abiertos básicos  $U_f$  luego  $\mathcal{M} = \Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{M})$ .

Lo demás al lector. □

**10. Corolario:** Sobre un esquema afín  $X = \text{Spec } A$  el producto tensorial y el límite inductivo de módulos cuasicoherentes es cuasicoherente y estas operaciones conmutan con la toma de secciones globales, es decir,

$$\Gamma(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) = \Gamma(X, \mathcal{M}) \otimes_A \Gamma(X, \mathcal{N}), \quad \Gamma(X, \varinjlim_i \mathcal{M}_i) = \varinjlim_i \Gamma(X, \mathcal{M}_i)$$

<sup>1</sup>Más en general, en espacios anillados, se dice que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo,  $\mathcal{M}$ , es cuasicoherente, si existe un recubrimiento por abiertos  $\{U_i\}$  de  $X$  de modo que  $\mathcal{M}|_{U_i}$  es el conúcleo de un morfismo  $\bigoplus_I \mathcal{O}_X|_{U_i} \rightarrow \bigoplus_J \mathcal{O}_X|_{U_i}$ .

*Demostración.* El prehaz de localizaciones en abiertos de  $\text{Spec } A$  de  $M \otimes_A N$  es el producto tensorial de los prehaces de localizaciones en abiertos de  $\text{Spec } A$  de  $M$  y  $N$ , porque  $(M \otimes_A N)_S = M_S \otimes_{A_S} N_S$ . Por tanto, el producto tensorial de módulos cuasicoherentes es cuasicoherente. Además,  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{M}(X) \otimes_A \mathcal{N}(X)}$ . Por el teorema 7.1.9

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})(X) = \mathcal{M}(X) \otimes_A \mathcal{N}(X)$$

Argumentétese igual con el límite inductivo. □

**Observación:** Sea  $X$  un esquema,  $\{U_i\}$  un recubrimiento finito de  $X$  por abiertos afines y  $\{U_{ijk}\}$  recubrimientos finitos por abiertos afines de cada  $U_i \cap U_j$ . Recubrimientos que pueden encontrarse si  $X$  es un esquema noetheriano o  $X$  es un esquema proyectivo. Sea  $\{\mathcal{M}_l\}$  un sistema inductivo de haces cuasicoherentes. Tenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{M}_l(X) \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{M}_l(U_i) \rightrightarrows \bigoplus_{i,j,k} \mathcal{M}_l(U_{ijk})$$

Como la toma de límites inductivos es exacta, obtenemos por el corolario anterior,

$$\varinjlim_l (\mathcal{M}_l(X)) \rightarrow \bigoplus_i \varinjlim_l \mathcal{M}_l(U_i) \rightrightarrows \bigoplus_{i,j,k} \varinjlim_l \mathcal{M}_l(U_{ijk})$$

Por tanto,  $\varinjlim_l (\mathcal{M}_l(X)) = \varinjlim_l \mathcal{M}_l(X)$ .

**11. Corolario:** *Sobre un esquema afín  $X = \text{Spec } A$ , la sucesión de módulos cuasicoherentes  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}'') \rightarrow 0$  es exacta.*

*Demostración.*  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  es exacta  $\iff 0 \rightarrow \mathcal{M}'_x \rightarrow \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{M}''_x \rightarrow 0$  es exacta, para todo  $x \in X \iff 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}')_x \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M})_x \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}'')_x \rightarrow 0$  es exacta, para todo  $x \in X \iff 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}'') \rightarrow 0$  es exacta. □

**12. Ejercicio:** Sea  $X$  un esquema y  $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ . Denotemos  $X_{f_i}$  por el abierto de  $X$  formado por los puntos de  $X$  donde  $f_i$  no se anula. Supongamos que  $(f_1, \dots, f_n) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  y que los  $X_{f_i}$  son esquemas afines. Probar que  $X$  es un esquema afín. (Cópiese el método de demostración de 7.1.9)

**13. Ejercicio:** Demuéstrese que toda curva afín menos un número finito de puntos cerrados es afín.

**14. Ejercicio:** Demuéstrese que si un morfismo de esquemas es afín la anti-imagen de todo abierto afín es afín. (Utilícese el ejercicio 7.1.12)

### 7.1.1 Haces coherentes

**15. Definición:** Diremos que un esquema  $X$  es noetheriano si existe un recubrimiento abierto finito  $\{U_i = \text{Spec } A_i\}$  de  $X$ , con  $A_i$  noetherianos.

Observemos que los esquemas noetherianos son espacios topológicos noetherianos.

**16. Proposición:** *( $\text{Spec } A, \tilde{A}$ ) es noetheriano si y sólo si  $A$  es un anillo noetheriano.*

*Demostración.* Veamos que si  $(\text{Spec } A, \tilde{A})$  es noetheriano entonces  $A$  es un anillo noetheriano.

Existe un recubrimiento abierto finito  $\{U_i = \text{Spec } A_i\}$  de  $\text{Spec } A$ , con  $A_i$  noetherianos. Sea una cadena  $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$  de ideales de  $A$ . La restricción de esta cadena de ideales a los abiertos  $U_i$ , define una cadena de ideales de  $A_i$ , que estabiliza a partir de un  $n_i$ . Si  $n$  es el máximo de los  $n_i$ , para todo  $i$ , tenemos que la cadena de ideales de partida estabiliza a partir de  $n$ , porque así sucede localmente. En conclusión,  $A$  es noetheriano.  $\square$

A partir de ahora, por sencillez, supondremos que los esquemas considerados son noetherianos.

**17. Definición:** Sea  $X$  un esquema noetheriano. Diremos que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{M}$  es coherente si existe un recubrimiento por abiertos afines  $\{U_i\}$  de  $X$  de modo que  $\mathcal{M}|_{U_i} = \widetilde{\mathcal{M}(U_i)}$  y  $\mathcal{M}(U_i)$  es un  $\mathcal{O}_X(U_i)$ -módulo finito.<sup>2</sup>

**18. Teorema:** Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín. La categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos coherentes es equivalente a la categoría de  $A$ -módulos finito generados.

*Demostración.* Por el teorema 7.1.9, dado un módulo  $\mathcal{M}$  coherente, sólo nos falta probar que  $\Gamma(X, \mathcal{M})$  es un  $A$ -módulo finito generado. Sea  $\{U_{a_i}\}$  un recubrimiento finito de  $\text{Spec } A$  por abiertos básicos, de modo que  $\Gamma(U_{a_i}, \mathcal{M}) = \Gamma(X, \mathcal{M})_{a_i}$  es un  $A_{a_i}$ -módulo finito generado. Escribamos

$$\Gamma(X, \mathcal{M})_{a_i} = \left\langle \frac{m_{i,1}}{1}, \dots, \frac{m_{i,n_i}}{1} \right\rangle_{A_{a_i} \text{-mod}}$$

con  $m_{i,j} \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ . Sea  $M = \langle m_{i,j} \rangle_{i,j} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M})$ . Se verifica que  $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$ , pues las inclusiones  $M_{a_i} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M})_{a_i}$  son epiyectivas.  $\square$

Sea  $M$  es un  $A$ -módulo de presentación finita (es decir, si  $A$  es noetheriano,  $M$  es un módulo finito). Sea  $S \subseteq A$  un sistema multiplicativo. Sabemos que  $\text{Hom}_A(M, N)_S = \text{Hom}(M_S, N_S)$ . Por tanto, por 7.1.9, si  $X$  es un esquema noetheriano,  $\mathcal{M}$  un módulo coherente y  $\mathcal{N}$  un módulo cuasicoherente entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  es un módulo cuasicoherente.

**19. Corolario:** Sea  $X$  un esquema noetheriano. Se verifica que:

*Los núcleos y conúcleos de un morfismo entre haces coherentes (resp. cuasicoherentes) es coherente (resp. cuasicoherente).*

*Si  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  son coherentes, entonces  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  son coherentes.*

*Demostración.* Podemos suponer que  $X = \text{Spec } A$  es afín y  $\mathcal{M} = M$ ,  $\mathcal{N} = N$  son  $A$ -módulos finitos. Obviamente  $M \otimes_A N$  es un  $A$ -módulo finito generado. Sea un epimorfismo  $A^n \rightarrow M$ , entonces tenemos una inyección  $\text{Hom}_A(M, N) \hookrightarrow \text{Hom}_A(A^n, N) = N^n$ . Por tanto,  $\text{Hom}_A(M, N)$  es un  $A$ -módulo finito, pues es un submódulo de un  $A$ -módulo noetheriano.  $\square$

<sup>2</sup>Más en general, en espacios anillados, se dice que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{M}$  es coherente si existe un recubrimiento por abiertos  $\{U_i\}$  de  $X$  de modo que  $\mathcal{M}|_{U_i}$  es el conúcleo de un morfismo  $\bigoplus_j^{n_i} \mathcal{O}_X|_{U_i} \rightarrow \bigoplus_j^{m_i} \mathcal{O}_X|_{U_i}$ .

## 7.2 Haces cuasicoherentes sobre un esquema proyectivo

**1. Definición:** Sea  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$  y  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  un  $R$ -módulo graduado. Definimos el módulo  $\widetilde{M}$  de localizaciones homogéneas sobre  $(\text{Proj } R, \widetilde{R})$  como el haz asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow (M_U)_0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{f} \in M_U, \text{ con } m \in M \text{ y } f \in R \text{ homogéneos} \\ \text{del mismo grado y } f \text{ no se anula en } U \end{array} \right\}$$

Por sencillez, supondremos que  $R = R_0[\xi_1, \dots, \xi_n]$  con  $\xi_i$  de grado 1. Igual que veíamos para el haz estructural de  $\text{Proj } R$  tenemos

$$\widetilde{M}|_{U_{\xi_i}^h} = \widetilde{(M_{\xi_i})_0}$$

Luego  $\widetilde{M}$  es cuasicoherente.

**2. Notación:** Si  $M$  es un  $R$ -módulo graduado y  $n \in \mathbb{Z}$  denotaremos por  $M(n)$  al  $R$ -módulo graduado cuya componente de grado  $r$  es la componente de grado  $n+r$  de  $M$ . Denotaremos por  $\mathcal{O}(n)$  al haz  $\widetilde{R}(n)$ .

Se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n) &= \widetilde{M}(n) \\ U_{\xi_i}^h : \quad \frac{m_r}{\xi_i^r} \otimes \frac{p_{s+n}}{\xi_i^s} &\longrightarrow \frac{p_{s+n} m_r}{\xi_i^{r+s}} \\ U_{\xi_i}^h : \quad \frac{m_{r+n}}{\xi_i^{r+n}} \otimes \xi_i^n &\longleftarrow \frac{m_{r+n}}{\xi_i^r} \end{aligned}$$

En particular,  $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m) = \widetilde{R}(n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m) = \widetilde{R}(n+m) = \mathcal{O}(n+m)$ . Observemos que  $\mathcal{O}(n)|_{U_{\xi_i}^h} \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} \mathcal{O}|_{U_{\xi_i}^h}$ .

Dado un módulo  $\mathcal{M}$  cuasicoherente denotaremos  $\mathcal{M}(n) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n)$ . Denotemos  $U_i = U_{\xi_i}^h$  y por  $\mathcal{M}_{U_i}$  el haz  $\mathcal{M}_{U_i}(U) = \mathcal{M}(U_i \cap U)$ , “puede pensarse  $\mathcal{M}_{U_i}$ , como el haz de secciones meromorfas de  $\mathcal{M}$  que son regulares en  $U_i$ , pero pueden tener polos en  $\xi_i = 0$ ”.

Consideremos el morfismo

$$(*) \quad \mathcal{M}(n) \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} \mathcal{M}_{U_i}$$

$$U_i : \quad \mathcal{M}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} \mathcal{O}(U_i) \cdot \xi_i^n \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} \mathcal{M}_{U_i}(U_i) = \mathcal{M}(U_i)$$

$$U_j : \quad \mathcal{M}(U_j) \otimes_{\mathcal{O}(U_j)} \mathcal{O}(U_j) \cdot \xi_j^n \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} \left(\frac{\xi_i}{\xi_j}\right)^{-n} \mathcal{M}(U_j) \subseteq \mathcal{M}(U_j)_{\frac{\xi_i}{\xi_j}} = \mathcal{M}_{U_i}(U_j)$$

Si bien, el morfismo  $\mathcal{M}(n) \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n}} \mathcal{M}_{U_i}$  no es inyectivo, “esencialmente” lo es para  $n \gg 0$ , más abajo lo vemos. Lo que permite pensar  $\mathcal{M}(n)$  como el haz de secciones meromorfas de  $\mathcal{M}$  regulares en  $U_i$  y con polo de orden  $\leq n$ , en  $\xi_i = 0$ .

**3. Proposición:** Consideremos los diagramas conmutativo obvios

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(n+1) & \xrightarrow{\cdot \xi_i^{-n-1}} & \mathcal{M}_{U_i} \\ \cdot \xi_i \uparrow & \nearrow \cdot \xi_i^{-n} & \\ \mathcal{M}(n) & & \end{array}$$

Se tiene que  $\varinjlim_n \mathcal{M}(n) = \mathcal{M}_{U_i}$ , “la unión, para todo  $n$ , de las secciones meromorfas de  $\mathcal{M}$  regulares en  $U_i$  con polos de orden menor que  $n$  en  $\xi_i = 0$ , son las secciones meromorfas de  $\mathcal{M}$  regulares en  $U_i$ ”.

*Demostración.* Por el diagrama (\*), tenemos que probar que  $\varinjlim_n \mathcal{M}(n)(U_j) \rightarrow \mathcal{M}_{U_i}(U_j) = \mathcal{M}(U_j)_{\frac{\xi_i}{\xi_j}}$  es un isomorfismo, denotémoslo por  $\phi$ . La imagen de  $\phi$  es claramente la unión de  $(\frac{\xi_i}{\xi_j})^{-n} \mathcal{M}(U_j)$  que es  $\mathcal{M}(U_j)_{\frac{\xi_i}{\xi_j}}$ , luego el  $\phi$  es epiyectivo. Nos falta ver la inyección. Si  $\overline{m} \otimes \xi_j^n \in \text{Ker } \phi$  entonces  $0 = (\frac{\xi_i}{\xi_j})^{-n} m \in \mathcal{M}(U_j)_{\frac{\xi_i}{\xi_j}}$ . Luego existe un  $r \in \mathbb{N}$ , tal que  $(\frac{\xi_i}{\xi_j})^r m = 0$ , entonces  $0 = (\frac{\xi_i}{\xi_j})^r m \otimes \xi_j^{n+r} = m \otimes \xi_i^r \xi_j^n$ . Por tanto,  $\overline{m} \otimes \xi_j^n = \overline{m \otimes \xi_i^r \xi_j^n} = 0$ .  $\square$

Hemos definido morfismos  $\mathcal{M}(n) \xrightarrow{\cdot \xi_i} \mathcal{M}(n+1)$ , luego tenemos definidos morfismos  $\mathcal{M}(n)(X) \xrightarrow{\cdot \xi_i} \mathcal{M}(n+1)(X)$  ( $X = \text{Proj } R$ ). En conclusión,  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)(X)$  es un  $R = R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$ -módulo graduado.

**4. Proposición:** Todo un módulo  $\mathcal{M}$  cuasicoherente en  $\text{Proj } R = X$  es la localización homogénea del módulo graduado  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)(X)$ .

Por tanto, todo haz de módulos cuasicoherente en un esquema proyectivo es el haz de localización homogénea de un módulo graduado.

*Demostración.*

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{M}(n)(X)}(U_i) = \bigcup_i \frac{\mathcal{M}(n)(X)}{\xi_i^n} = \varinjlim_n (\mathcal{M}(n)(X)) = \varinjlim_n \mathcal{M}(n)(X) = \mathcal{M}_{U_i}(X) = \mathcal{M}(U_i)$$

Donde tenemos que hacer observar que el límite inductivo conmuta con toma de secciones por la observación a 7.1.10.  $\square$

**5. Proposición:** Dado un módulo  $\mathcal{M}$  cuasicoherente en  $(\text{Proj } R, \widetilde{R} = \mathcal{O})$  existe una resolución

$$\bigoplus_I \mathcal{O}(n_i) \rightarrow \bigoplus_J \mathcal{O}(n_j) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

(si  $\mathcal{M}$  es coherente pueden tomarse  $I, J$  finitos).

*Demostración.* Por la proposición anterior,  $\mathcal{M}$  es la localización homogénea de un  $R$ -módulo graduado. Ahora bien, todo  $R$ -módulo graduado es el cociente graduado de una suma directa  $\bigoplus_J R(n_j)$ . Luego  $\mathcal{M}$  es un cociente de  $\bigoplus_J \mathcal{O}(n_j)$  y argumentando igual con el núcleo, concluimos.

Si  $\mathcal{M}$  es coherente y  $\bigoplus_J \mathcal{O}(n_j) \rightarrow \mathcal{M}$  es un epimorfismo, puede tomarse un subconjunto  $J'$  finito de subíndices de  $J$ , de modo que  $\bigoplus_{J'} \mathcal{O}(n_j) \rightarrow \mathcal{M}$  sea epiyectivo en cada abierto  $U_{\xi_i}^h$ . Argumentando

igual con el núcleo de  $\bigoplus_{j'} \mathcal{O}(n_j) \rightarrow \mathcal{M}$ , que es coherente, demostraremos la última afirmación de la proposición.  $\square$

**6. Ejercicio:** Demuéstrese que todo haz coherente sobre  $(\text{Proj } R, \widetilde{R})$  es la localización homogénea de un  $R$ -módulo graduado finito generado.

### 7.3 Comportamiento de los haces cuasicoherentes y coherentes por imagen inversa y directa

**1. Definición:** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas y  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -módulo. Definimos la imagen inversa de  $\mathcal{M}$  por  $f$  y lo denotamos por  $f^*\mathcal{M}$  como el  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $f^*\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}\mathcal{M} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ .

**2. Proposición:** Sea  $f: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  un morfismo entre esquemas afines. Sea  $M$  un  $A$ -módulo y  $N$  un  $B$ -módulo (en particular es  $A$ -módulo). Se verifica que

$$1. f^*\widetilde{M} = \widetilde{M \otimes_A B}.$$

$$2. f_*\widetilde{N} = \widetilde{N}.$$

*Demostración.* 1. Dado un haz  $F$  en  $\text{Spec } A$ , tenemos el morfismo natural  $F(\text{Spec } A) \rightarrow f^{-1}F(\text{Spec } B) \rightarrow f^{-1}F(U_b)$ . Los morfismos naturales  $(M \otimes_A B)_b = M \otimes_A B_b \rightarrow f^{-1}\widetilde{M}(U_b) \otimes_{f^{-1}\widetilde{A}(U_b)} B_b$ , definen un morfismo  $\widetilde{M \otimes_A B} \rightarrow f^*\widetilde{M}$ , que es isomorfismo porque lo es en fibras.

2. Si consideramos el morfismo  $f^*: A \rightarrow B$ ,  $N$  es un  $A$ -módulo definiendo  $a \cdot n = f^*(a) \cdot n$ ; y tenemos que  $N_a = N_{f^*(a)}$ . Observemos que  $f^{-1}(U_a) = U_{f^*(a)}$ . Por tanto,

$$f_*\widetilde{N}(U_a) = \widetilde{N}(f^{-1}(U_a)) = \widetilde{N}(U_{f^*(a)}) = N_{f^*(a)} = N_a = \widetilde{N}(U_a)$$

$\square$

**3. Ejemplo:** En esquemas afines, la categoría de  $A$ -módulos es equivalente a la categoría de los módulos cuasicoherentes sobre  $\text{Spec } A$ . Expresémonos, pues, en la categoría de los  $A$ -módulos. Si  $C = \text{Spec } A/I \xrightarrow{f} M$ , tenemos que  $M|_C \stackrel{\text{Not}}{=} f^*M = M \otimes_A A/I = M/IM$ . En particular, si  $C = x = \text{Spec } A/\mathfrak{m}_x$  entonces  $M|_x = M/\mathfrak{m}_x M$ . Por ejemplo,  $(\Omega_{A/k})|_x = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ , para todo punto  $x$  racional, es decir, “la restricción del módulo de diferenciales a un punto son las diferenciales en el punto”. Si  $U_a = \text{Spec } A_a \xrightarrow{f} M$ , tenemos que  $M|_{U_a} \stackrel{\text{Not}}{=} f^*M = M \otimes_A A_a = M_a$ .

**4. Teorema:** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo de esquemas entre esquemas noetherianos entonces

1. La imagen directa e inversa de un haz cuasicoherente es cuasicoherente.

2. La imagen inversa de un haz coherente es coherente.

3. Si  $f$  es finito, la imagen directa de un coherente es coherente.

*Demostración.* Para las imágenes inversas, la cuestión es local en  $Y$  y  $X$ . Por tanto, en este caso, podemos suponer que  $Y$  y  $X$  son afines y concluimos por la proposición anterior.

Para las imágenes directas, la cuestión es local en  $Y$ , luego podemos suponer que  $Y$  es afín.

En el caso 3.  $X$  será también afín y concluimos de nuevo por el lema anterior.

Sólo nos falta probar que la imagen directa de un cuasicoherente es cuasicoherente.  $Y$  es afín. Sea  $\{V_i\}$  un recubrimiento finito de  $X$  por abiertos afines. Sea  $\{V_{ijk}\}_k$  un recubrimiento finito por abiertos afines de cada  $V_i \cap V_j$ . Dado un abierto  $W \subset X$  denotemos  $\mathcal{M}_W = i_*(i^{-1}M)$ , explícitamente  $\mathcal{M}_W(U) = \mathcal{M}(U \cap W)$ . Además, por ser  $W$  un abierto,  $i^{-1} = i^*$ .

Dado el módulo cuasicoherente  $\mathcal{M}$  sobre  $X$  consideremos la sucesión exacta

$$M \rightarrow \bigoplus M_{V_i} \xrightarrow{\quad} \bigoplus M_{V_{ijk}}$$

Tomando imágenes directas por  $f$  (que es exacto por la izquierda), obtenemos la sucesión exacta

$$f_*M \rightarrow \bigoplus f_*M_{V_i} \xrightarrow{\quad} \bigoplus f_*M_{V_{ijk}}$$

Ahora bien, los  $f_*M_{V_i} = f_*(i_*(i^{-1}M))$  son cuasicoherentes porque  $f \circ i: V_i \rightarrow Y$  es un morfismo entre esquemas afines y por el lema anterior concluimos. Por la misma razón  $f_*M_{V_{ijk}}$  son cuasicoherentes. Con todo  $f_*M$  es cuasicoherente. □

## 7.4 Divisores y haces de línea

Sea  $C$  una curva completa no singular, sobre un cuerpo  $k$  y  $\Sigma_C$  su cuerpo de funciones.

**1. Definición:** Un divisor sobre  $C$  es una suma formal finita  $D = \sum_{x=\bar{x}} n_x \cdot x$ ,  $n_x \in \mathbb{Z}$ .

Diremos que  $D = \sum n_x \cdot x \leq D' = \sum n_{x'} \cdot x'$  cuando  $n_x \leq n_{x'}$  para todo  $x$ . Llamaremos soporte de un divisor,  $D = \sum n_x \cdot x$ , al cerrado  $|D|$  de los  $x \in C$  tales que  $n_x \neq 0$ . Se dice que  $D = \sum_{x=\bar{x}} n_x \cdot x$  es un divisor efectivo si  $n_x \geq 0$ , para todo  $x$ .

**2. Definición:** Definimos grado de un divisor  $D = \sum n_x \cdot x$  por  $\text{gr } D = \sum n_x \cdot \text{gr}(x)$ , siendo  $\text{gr}(x) = \dim_k(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x)$ .

Sea  $x \in C$  un punto cerrado y  $v_x$  la valoración definida por el anillo de valoración  $\mathcal{O}_{C,x}$ . Dada  $f \in \Sigma_C$  sea  $n_x = v_x(f)$ . Si  $n_x > 0$  se dice que  $f$  tiene un cero de orden  $n_x$  en  $x$ , y si  $n_x < 0$  se dice que  $f$  tiene un polo de orden  $-n_x$  en  $x$ .

Veamos ahora como toda función  $f \in \Sigma_C$  define un divisor:

**3. Definición:** Llamaremos divisor de ceros y polos de  $f$  al divisor  $D(f)$  definido por  $D(f) = \sum v_x(f) \cdot x$ .

Para que esta definición sea correcta el sumatorio escrito ha de ser finito. Necesitamos, pues, la siguiente proposición.

**4. Proposición:** Una  $f \in \Sigma_C$  no tiene más que un número finito de ceros y polos.

*Demostración.* Dado un abierto afín  $U = \text{Spec } A \subset C$ , tendremos que  $f = \frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \Sigma_C$ . Es claro que los ceros de  $f$  en  $U$  están incluidos en  $(a)_0$  y que los polos de  $f$  en  $U$  están incluidos en  $(b)_0$ , que son un número finito de puntos. Como  $C$  está recubierto por un número finito de abiertos afines concluimos que  $f$  no tiene más que un número finito de ceros y polos. □

**5. Proposición:**  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \bar{k}$ , siendo  $\bar{k}$  el cierre entero de  $k$  en  $\Sigma_C$ .

*Demostración.*  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \bigcap_{v \in C} \mathcal{O}_v = \{ \text{cierre entero de } k \text{ en } \Sigma_C \} = \bar{k}$  □

Así pues,  $\bar{k}$  son las únicas funciones  $f \in \Sigma_C$  sin polos. Como  $\bar{k}$  es un cuerpo, tendremos también que  $\bar{k}$  coincide con las funciones  $f \in \Sigma_C$  sin ceros.

**6. Teorema:** *El grado del divisor de ceros y polos de  $f$ ,  $D(f)$  es cero. Es decir, “el número de ceros de  $f$  es igual al número de polos de  $f$ ”.*

*Demostración.* Si  $f \in \bar{k}$  entonces no tiene ni ceros ni polos, y en este caso el teorema se verifica trivialmente.

Sea pues,  $f \in \Sigma_C$  es trascendente. El morfismo  $k(x) \rightarrow \Sigma_C$ ,  $x \mapsto f$  define un morfismo finito entre las variedades de Riemann

$$\tilde{f}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_1, \quad \alpha \mapsto f(\alpha)$$

Es fácil comprobar que la fibra del “origen” es igual al divisor de ceros de  $f$  y la fibra del “infinito” es igual al de divisor de polos de  $f$ . Es decir,  $D(f) = \tilde{f}^{-1}(0) - \tilde{f}^{-1}(\infty)$ . Por el ejercicio 6.5.19,  $\text{gr}(D(f)) = 0$ . □

**7. Ejemplo:** Sea  $\mathbb{P}_1(k) = \text{Proj } k[x_0, x_1]$  y  $\Sigma_{\mathbb{P}_1(k)} = k[\frac{x_1}{x_0}]$ . Calculemos los ceros y polos de la función  $x^2$ ,  $x = \frac{x_1}{x_0}$ . Tenemos que  $\mathbb{P}_1(k) = \text{Spec } k[x] \cup \text{Spec } k[\frac{1}{x}] = \text{Spec } k[x] \cup \infty$ ,  $\mathfrak{m}_\infty = (\frac{1}{x}) \subset k[\frac{1}{x}]$ . En  $\text{Spec } k[x]$  se cumple que  $(x^2)_0 = \{\mathfrak{m}_0 = (x)\}$ . Por tanto, en  $\text{Spec } k[x]$ ,  $x^2$  no tiene más ceros que el origen y no tiene polos, además  $v_0(x^2) = 2$ . Por último,  $v_\infty(x^2) = v_\infty((\frac{1}{x})^{-2}) = -2$ . En conclusión,  $D(x^2) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot \infty$ .

**8. Ejercicio:** Calcular el divisor de ceros y polos de  $x$  sobre la variedad de Riemann del cuerpo de fracciones de  $k[x, y]/(y^2 - x^3)$ .

Dados dos divisores  $D = \sum n_x \cdot x$ ,  $D' = \sum n'_x \cdot x$  definimos la suma por  $D + D' = \sum (n_x + n'_x) \cdot x$ . El conjunto de todos los divisores de una curva completa no singular es un grupo abeliano libre que denotaremos  $\text{Div } C$ .

**9. Definición:** Se dice que dos divisores son linealmente equivalentes si difieren en el divisor de una función.

Obviamente, la equivalencia lineal es una relación de equivalencia. Además, el conjunto de las clases de divisores linealmente equivalentes, con la suma de divisores, es un grupo abeliano.

**10. Definición:** Dado un esquema  $X$  se dice que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $L$  es un haz de línea si existe un recubrimiento  $\{U_i\}$  por abiertos de  $X$  tal que  $L|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$ .

**11. Notación:** Dado un divisor  $D = \sum n_x \cdot x$  y un abierto  $U \subset C$ , denotaremos  $D_U = \sum_{\text{Not } x \in |D| \cap U} n_x \cdot x$ .

**12. Ejemplo:** 1. Si  $X = \text{Proj } k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  entonces  $\mathcal{O}_X(n)$  es un haz de línea en  $\mathbb{P}_n(k)$  puesto que tenemos los isomorfismos  $\mathcal{O}_X(n)|_{U_{\xi_i}} \xrightarrow{\xi_i^{-n}} \mathcal{O}_X|_{U_{\xi_i}}$ .

2. Sea  $C$  es una curva completa no singular y  $x \in C$  es un punto cerrado. Sea  $\mathfrak{m}_x$  el subhaz de  $\mathcal{O}_C$ , definido por  $\mathfrak{m}_x(U) = \{f \in \mathcal{O}_C(U) : f(x) = 0\}$ , donde entendemos que  $\mathfrak{m}_x(U) = \mathcal{O}_C(U)$  si  $x \notin U$ . Si  $x \notin U$ , entonces  $\mathfrak{m}_x|_U = \mathcal{O}_X|_U$ . Si  $x \in U$ , empequeñeciendo  $U$ , si es preciso, existe  $t_x \in \Sigma_C$ , de modo que  $v_y(t_x) = 0$ , para todo  $y \in U - x$ , y  $v_x(t_x) = 1$ . Entonces  $\mathfrak{m}_x|_U = t_x \cdot \mathcal{O}_X|_U$ . También se denota  $\mathfrak{m}_x = L_{-x}$ .

3. Sea  $C$  es una curva completa no singular y  $D = \sum_{i=1}^r n_{x_i} \cdot x_i$  un divisor. Sea  $\mathfrak{m}_{x_1}^{-n_1} \cdots \mathfrak{m}_{x_r}^{-n_r} = L_D$  el subhaz de  $\tilde{\Sigma}_C$  definido por  $L_D(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Sigma_C \text{ tales que } (Df)_U + D_U \geq 0\}$ . Veamos que  $L_D$  es un haz de línea: Evidentemente  $L_D$  es un  $\mathcal{O}_C$ -módulo. Tenemos que ver que localmente es isomorfo a  $\mathcal{O}_C$ . Dado  $x \in |D|$  sea  $U$  un abierto afín, tal que  $U \cap |D| = x$ . Empequeñeciendo  $U$ , si es preciso, podemos suponer que existe una función,  $t_x \in \Sigma_C$ , tal que  $(Dt_x)_U = x$ . Se sigue trivialmente que  $L_D|_U = t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_C|_U$ .

Observemos que dados dos haces de línea  $L, L'$ , su producto tensorial  $L \otimes_{\mathcal{O}_X} L'$  es un haz de línea. El conjunto de clases de isomorfía de los haces de línea, con el producto tensorial, es un grupo abeliano donde:

1. El elemento neutro es  $\mathcal{O}_X$ .
2. El inverso del haz de línea  $L$  es  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X)$ : el morfismo  $L \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(L, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X$ ,  $e \otimes w \mapsto w(e)$  es un isomorfismo, como puede comprobarse localmente, en abiertos donde  $L$  sea libre.

**13. Teorema :** *El grupo de las clases de los divisores linealmente equivalentes es canónicamente isomorfo al grupo de las clases de isomorfía de los haces de línea, sobre una curva no singular  $C$ . El isomorfismo viene dado por*

$$[D = \sum n_x \cdot x] \mapsto L_D: \quad L_D(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Sigma_C \text{ tales que } (Df)_U + D_U \geq 0\}$$

*Demostración.* Si  $D' = D + Dg$  entonces  $L_{D'} \simeq L_D$  por el isomorfismo

$$L_{D'} \xrightarrow{\cdot g} L_D, \quad L_{D'}(U) \xrightarrow{\cdot g} L_D(U)$$

La asignación  $D \mapsto L_D$  es de grupos, pues tenemos un morfismo natural

$$L_D \otimes_{\mathcal{O}_C} L_{D'} \rightarrow L_{D+D'}, \quad L_D(U) \otimes_{\mathcal{O}_C(U)} L_{D'}(U) \rightarrow L_{D+D'}(U), \quad f \otimes g \mapsto f \cdot g$$

que localmente es el isomorfismo:  $t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_C|_U \otimes_{\mathcal{O}_C} t_x^{-n'_x} \cdot \mathcal{O}_C|_U = t_x^{-n_x - n'_x} \cdot \mathcal{O}_C|_U$ .

Recíprocamente, asignemos a cada haz de línea  $L$  un divisor  $D$ : Dado un haz de línea  $L$ , fijemos un isomorfismo  $\phi_g: L_{p_g} \simeq \Sigma_C$  de  $\Sigma$ -espacios vectoriales. Este isomorfismo define un morfismo inyectivo  $L \hookrightarrow \tilde{\Sigma}_C$ , que podemos suponer que es una inclusión, simplificando notaciones. Sea  $U$  un abierto afín sobre el que  $L$  sea libre, entonces  $L(U) = f_U \cdot \mathcal{O}_C(U)$  para cierta  $f_U \in \Sigma_C$ . Observemos que  $D(f_U)_U$  no depende del  $f_U$  escogido, porque cualquier otro escogido es  $\lambda \cdot f_U$ , con  $\lambda$  invertible en  $U$  y  $D(\lambda \cdot f_U)_U = D(f_U)_U$ .

Asignamos a  $L$  el divisor  $D_L$  definido localmente por  $(D_L)_U = -D(f_U)_U$ , para cada abierto afín  $U$  sobre el que  $L$  es libre.

1<sup>o</sup>) Se verifica que  $D_L$  está bien definido, es decir,  $(D_L)_U$  coincide con  $(D_L)_{U'}$  sobre  $U \cap U'$ , porque las restricciones de  $f_U$  y  $f_{U'}$  difieren en un invertible de  $\mathcal{O}_C(U \cap U')$ .

2<sup>o</sup>) Si  $\phi': L_{p_g} \rightarrow \Sigma_C$  es otro isomorfismo, será  $\phi' = g \cdot \phi$  para alguna función  $g \in \Sigma_C$ . Se sigue que si  $D'_L$  es el divisor construido a partir de  $\phi'$  entonces  $D'_L = D_L - Dg$ .

Para concluir, observemos que el haz de línea asociado a  $D_L$  es  $L$ , una vez que hemos identificado  $L$  con un subhaz de  $\Sigma$ , es decir, una vez que prefijamos un isomorfismo  $L_{p_g} \simeq \Sigma$ . Recíprocamente, el divisor asociado a  $L_D$  es  $D$ . □

**14. Definición :** El grupo de las clases de isomorfía de los haces de línea de  $X$  se denomina grupo de Picard de  $X$ .

**15. Proposición:** *El grupo de Picard de la recta proyectiva es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , es decir*

$$\text{Pic } \mathbb{P}_1 = \mathbb{Z} \cdot L_\infty$$

*Demostración.*  $\mathbb{P}_1$  es la variedad de Riemann de  $k(x)$  y  $\mathbb{P}_1 = \text{Spec } k[x] \cup \text{Spec } k[\frac{1}{x}] = \text{Spec } k[x] \cup \infty$ .

Sea  $p(x) = a_0x^n + \dots + a_n \in k[x]$  un polinomio irreducible de grado  $n$ . Denotemos por  $p$  el punto de  $\text{Spec } k[x]$  definido por el ideal maximal  $(p(x)) \subset k[x]$ . Observemos que

$$v_\infty(p(x)) = v_\infty\left(\frac{p(x)}{x^n} \cdot x^n\right) = v_\infty\left(\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}\right) = 0 + (-n) = -n$$

Luego  $D(p(x)) = 1 \cdot p - n \cdot \infty$ , es decir  $1 \cdot p \sim \text{gr } p \cdot \infty$  y en general  $\sum n_i p_i \sim (\sum n_i \text{gr } p_i) \cdot \infty$ . Así pues, el morfismo

$$\text{Pic } \mathbb{P}_1 = \{\text{Divisores de } \mathbb{P}_1\} / \sim \longrightarrow \mathbb{Z} \cdot \infty, \quad [D] \mapsto \text{gr}(D) \cdot \infty$$

es un isomorfismo.  $\square$

**16. Proposición:** *Si  $C$  es una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado tal que  $\text{Pic } C = \mathbb{Z}$  entonces  $C = \mathbb{P}^1$ :*

*Demostración.* Si  $D$  es un divisor de grado 1, y  $D \sim nD'$ , ha de cumplirse que  $\text{gr } D' = \pm 1$  y  $n = \mp 1$ , como se comprueba tomando grados en la equivalencia anterior. Por tanto, si  $\text{Pic } C = \mathbb{Z}$ , podemos decir que  $\text{Pic } C = \mathbb{Z} \cdot p$ , siendo  $p$  cualquier punto cerrado de  $C$ . En consecuencia, dado otro punto cerrado  $q$ , se cumple que  $p - q$  es linealmente equivalente al divisor de ceros y polos de una función  $f \in \Sigma_C$ . Luego el morfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1, \alpha \mapsto f(\alpha)$ , es un morfismo de grado 1, es decir, un isomorfismo.  $\square$

**17. Ejercicio:** Probar que si  $\text{gr } D < 0$  entonces  $\Gamma(C, L_D) = 0$ .

**18. Ejercicio:** Consideremos la recta proyectiva  $\mathbb{P}_1$ . Probar que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)$  es un haz de línea isomorfo a  $L_{n\infty}$ , donde el isomorfismo es

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n) & \xrightarrow[\sim]{\cdot x_0^{-n}} L_{n\infty} \\ U_{x_0}^h : \{p(\frac{x_1}{x_0})\} \cdot x_0^n & \xrightarrow{\cdot x_0^{-n}} \{p(\frac{x_1}{x_0})\} \\ U_{x_1}^h : \{p(\frac{x_0}{x_1})\} \cdot x_1^n & \xrightarrow{\cdot x_0^{-n}} \{p(\frac{x_0}{x_1}) \cdot (\frac{x_0}{x_1})^{-n}\} \end{aligned}$$

**19. Proposición:** *Sea  $C$  una curva completa no singular y  $L$  un haz de línea en  $C$ . Sea  $g$  el punto genérico de  $C$  y  $s \in L_g \simeq \mathcal{O}_{C,g}$ . Definamos  $v_x(s) = n$  si  $s \in \mathfrak{m}_x^n L_x$  y  $s \notin \mathfrak{m}_x^{n+1} L_x$ . Se cumple que el haz de línea asociado a  $D(s) = \sum_x v_x(s)x$  es  $L$ .*

*Demostración.* El morfismo  $L_{D(s)} \xrightarrow{\cdot s} L, f \mapsto f \cdot s$  es un isomorfismo.  $\square$

Si  $D' = D(s) + D(f)$ ,  $f \in \Sigma_C$ , entonces  $D' = D(f \cdot s)$ . Por tanto, módulo  $k$ , las secciones de  $L_g$  se corresponden biyectivamente con la clase de divisores equivalentes a  $D(s)$ . Observemos que  $D(s)$  es un divisor efectivo si y sólo si  $s \in \Gamma(C, L)$ . Por tanto,  $\mathbb{P}(\Gamma(C, L)) = \{\text{Divisores efectivos equivalentes a } D(s)\}$ .

Hemos hablado de divisores en curvas, los cuales se obtienen localmente como ceros y polos de funciones. El grupo de Picard de una curva es un invariante importante en el estudio de la geometría intrínseca de la curva.

En variedades algebraicas de dimensión mayor, los ceros y polos de funciones son hipersuperficies y los divisores serán sumas formales de hipersuperficies.

## 7.5 Teoremas de Bézout y Max Noether

Dado un ideal homogéneo  $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$  consideremos el morfismo de paso al cociente

$$k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k[x_0, \dots, x_n]/I$$

Tomando espectros proyectivos, define el morfismo  $i: X = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]/I \hookrightarrow \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{P}_n$ , que establece un homeomorfismo  $X = (I)_0^h$ . La localización homogénea del morfismo de anillos anterior

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \rightarrow i_* \mathcal{O}_X$$

hace que el morfismo  $i: X \rightarrow \mathbb{P}_n$  sea un morfismo de espacios anillados en anillos locales, es decir, un morfismo de esquemas. Es sencillo comprobar que dado  $U_{x_i}^h = \mathbb{P}_n - (x_i)_0^h$  entonces  $i^{-1}(U_{x_i}^h) = X - (\bar{x}_i)_0^h = U_{\bar{x}_i}^h$  y el morfismo entre los anillos es el morfismo natural de paso al cociente

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(U_{x_i}^h) = k\left[\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}\right] \rightarrow k\left[\frac{\bar{x}_0}{\bar{x}_i}, \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_i}, \frac{x_2}{x_i}\right] = \mathcal{O}_C(U_{\bar{x}_i}^h)$$

Obviamente, el morfismo  $i: X \rightarrow \mathbb{P}_n$  es una inmersión cerrada. El núcleo del morfismo

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \rightarrow i_* \mathcal{O}_X$$

diremos que es el haz de ideales de funciones de  $\mathbb{P}_n$  que se anulan en  $X$  y lo denotaremos  $\mathfrak{p}_X$ . Observemos que  $\mathfrak{p}_X$  es el haz de localizaciones homogéneas de  $I$ .

Si  $C_1, C_2$  son dos subesquemas cerrados de  $\mathbb{P}_n$  definidos por los ideales  $I_1, I_2$ , denotaremos  $C_1 \cap C_2$  al subesquema cerrado de  $\mathbb{P}_n$  definido por  $I_1 + I_2$ , que topológicamente es la intersección de  $C_1$  y  $C_2$ . Si  $C_1 \cap C_2 = \{x_1, \dots, x_n\}$  es un número finito de puntos cerrados de  $\mathbb{P}_n$ , entonces diremos que el número de puntos de corte de  $C_1$  con  $C_2$ , que denotaremos  $(C_1 \cap C_2)$ , es

$$\dim_k \mathcal{O}_{C_1 \cap C_2}(C_1 \cap C_2)$$

Se cumple

$$\dim_k \mathcal{O}_{C_1 \cap C_2}(C_1 \cap C_2) = \sum_i \dim_k \mathcal{O}_{C_1 \cap C_2, x_i}$$

Diremos que  $l_{\mathcal{O}_{C_1 \cap C_2, x_i}}(\mathcal{O}_{C_1 \cap C_2, x_i})$  es la multiplicidad de intersección de  $C_1$  con  $C_2$  en  $x_i$  y se denota  $(C_1 \cap C_2)_{x_i}$ . Así pues, si denotamos  $\text{gr } x = \dim_k \mathcal{O}_{C, x}/\mathfrak{p}_x$ , tenemos

$$(C_1 \cap C_2) = \sum_{x \in C_1 \cap C_2} (C_1 \cap C_2)_x \text{ gr } x$$

**1. Ejercicio:** Sea  $C = \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2)$  y  $f = \frac{x_1}{x_0} \in \Sigma_C$ . Calcular el divisor de ceros y polos de  $f$  e interpretarlo geoméricamente.

**2. Teorema Bézout:** Sea  $C$  una curva proyectiva íntegra.

1) Para cada hiperplano  $H$  que no contenga a  $C$ , el número de puntos de corte de  $H$  con  $C$  es un número natural que no depende del hiperplano  $H$ , que se llama grado de la curva  $C$ .

2) Si  $C$  es de grado  $n$  y  $H$  es una hipersuperficie de grado  $m$  (es decir definida por un polinomio de grado  $m$ ) que no contiene a  $C$  se cumple que el número de puntos de corte de  $H$  con  $C$  es  $n \cdot m$ .

*Demostración.* El número de puntos de intersección queda estable por cambio de cuerpo base. Podemos suponer que el cuerpo base es algebraicamente cerrado.

1) Sea  $H'$  un hiperplano que no pase por ningún punto de  $C \cap H$ . Sea  $U = \mathbb{P}_n - H'$ .  $H$  y  $H'$  son los ceros homogéneos de sendos polinomios homogéneos de grado 1, que denotaremos por  $H$  y  $H'$ , también. Consideremos la función  $f = \frac{H}{H'} \in \mathcal{O}_C(U) = A$ . Se cumple que  $C \cap H = \text{Spec } A/fA$  y

$$(C \cap H) = \dim_k(A/(f))$$

Denotemos por  $\bar{C}$  la desingularización de  $C$ ,  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$  el morfismo de desingularización y  $B = \mathcal{O}_{\bar{C}}(\pi^{-1}(U))$ . Del isomorfismo  $B/A \simeq fB/fA$  y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} fA & \longrightarrow & fB \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

se deduce que  $\dim_k(A/(f)) = \dim_k(B/(f))$ , que coincide con el grado del divisor de ceros de  $f$  en  $\bar{C}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} (C \cap H) &= \text{grado del divisor de ceros de la función } \frac{H}{H'} \text{ en } \bar{C} \\ &= \text{grado del divisor de polos de la función } \frac{H}{H'} \text{ en } \bar{C} \\ &= \text{grado del divisor de ceros de la función } \frac{H'}{H} \text{ en } \bar{C} \\ &= (C \cap H') \end{aligned}$$

Sean  $H$  y  $H''$  dos hiperplanos cualesquiera que no contienen a  $C$ , sea  $H'$  un hiperplano que no pase por ningún punto de  $C \cap H$  ni de  $C \cap H''$ . Entonces,  $(C \cap H) = (C \cap H') = (C \cap H'')$ .

2) Podemos suponer que  $x_0 = 0$  no pasa por ningún punto de  $C \cap H$  y que  $x_1 = 0$  no pasa por ningún punto de  $\{x_0 = 0\} \cap C$ , ni de  $C \cap H$ . Tomando  $f = \frac{H}{x_0^m}$  tenemos, como en el apartado anterior, que  $(C \cap H) = \text{grado del divisor de ceros de } f = \text{grado del divisor de polos de } f = \text{grado del divisor de ceros de } \frac{x_0^m}{H} = \text{grado del divisor de ceros de } \frac{x_0^m}{x_1^m} = m \cdot (\text{grado del divisor de ceros de } \frac{x_0}{x_1}) = m \cdot (C \cap \{x_0 = 0\}) = m \cdot n$ . □

**3. Ejercicio:** Sean  $p_1, p_2 \in k[x, y]$  polinomios primos con  $p \in k[x, y]$ . Demostrar que la sucesión

$$0 \rightarrow k[x, y]/(p, p_2) \xrightarrow{p_1} k[x, y]/(p, p_1 \cdot p_2) \rightarrow k[x, y]/(p, p_1) \rightarrow 0$$

es exacta. Si denotamos por  $C, C', C_1$  y  $C_2$  las curvas planas definidas por  $p = 0, p_1 \cdot p_2 = 0, p_1 = 0$  y  $p_2 = 0$  respectivamente, demostrar que  $(C \cap C')_x = (C \cap C_1)_x + (C \cap C_2)_x$ .

**4. Corolario:** Sean  $C \equiv p_r(x_0, x_1, x_2) = 0$  y  $C' \equiv p_{r'}(x_0, x_1, x_2) = 0$  dos curvas proyectivas planas sin componentes comunes. El número de puntos de corte de las dos curvas es  $r \cdot r'$ .

*Demostración.* En primer lugar podemos suponer las curvas son íntegras por el ejercicio 7.5.3.

Por el teorema anterior, sólo tenemos que comprobar que si  $p_r(x_0, x_1, x_2) = 0$  es una curva  $C$  proyectiva plana entonces  $r$  coincide con el grado de  $C$ , es decir, con el número de puntos de corte  $C$  con una recta  $R$ : Si  $C$  es una recta es claro que su grado es uno. Ahora ya,

$$(C \cap R) = (R \cap C) = r \cdot \text{grado de } R = r$$

□

Ahora vamos a demostrar el teorema de Max Noether, con el que se podrán resolver múltiples problemas geométricos, como los teoremas de Pascal y Pappus.

**5. Teorema:** Sean  $p_i \in k[x_0, x_1, x_2]$  polinomios homogéneos ( $i = 1, 2, 3$ ). Consideremos las curvas proyectivas planas  $C_i \equiv p_i = 0$  y los haces  $\mathfrak{p}_{C_i}$  de ideales de funciones de  $\mathbb{P}_2$  que se anulan en  $C_i$ . Supongamos que  $C_1, C_2$  no tienen componentes comunes. Existe una ecuación

$$p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$$

con  $a, b$  polinomios homogéneos de grados  $\text{gr } a = \text{gr } p_3 - \text{gr } p_1$ ,  $\text{gr } b = \text{gr } p_3 - \text{gr } p_2$ , si y sólo si para todo  $x \in C_1 \cap C_2$  se verifica que  $\mathfrak{p}_{C_3, x} \subseteq \mathfrak{p}_{C_1, x} + \mathfrak{p}_{C_2, x}$ .

*Demostración.* La necesidad es obvia, veamos la suficiencia.

Tenemos que  $\mathfrak{p}_{C_1} + \mathfrak{p}_{C_2} = \mathfrak{p}_{C_1} + \mathfrak{p}_{C_2} + \mathfrak{p}_{C_3}$ , pues lo es localmente para todo punto  $x \in \mathbb{P}_2$  por la hipótesis. Por tanto,

$$\mathfrak{p}_{C_3} \subset \mathfrak{p}_{C_1} + \mathfrak{p}_{C_2} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2, x} \quad *$$

Por cambio homogéneo de coordenadas, podemos suponer que  $x_0 = 0$  no pasa por ningún punto de  $C_1 \cap C_2$ , es decir,  $p_1(0, x_1, x_2)$  es primo con  $p_2(0, x_1, x_2)$ . Sabemos que

$$\frac{p_3}{x_0^{n_3}} = a \cdot \frac{p_1}{x_0^{n_1}} + b \cdot \frac{p_2}{x_0^{n_2}}$$

Tenemos homogeneizando que  $x_0^r \cdot p_3 = a' p_1 + b' p_2$ . Sea  $r$  mínimo en las igualdades de esta forma. Si  $r > 0$ , entonces  $0 = a'(0, x_1, x_2)p_1(0, x_1, x_2) + b'(0, x_1, x_2)p_2(0, x_1, x_2)$ . Por tanto,  $a'(0, x_1, x_2) = h \cdot p_2(0, x_1, x_2)$  y  $b'(0, x_1, x_2) = -h \cdot p_1(0, x_1, x_2)$ . Luego  $a'' = a' - h \cdot p_2$ ,  $b'' = b' - h \cdot p_1$  son divisibles por  $x_0$  y  $x_0^r \cdot p_3 = a'' p_1 + b'' p_2$ . Dividiendo en esta igualdad por  $x_0$  llegamos a contradicción, porque  $r - 1 < r$ . En conclusión,

$$p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$$

Es fácil concluir.

□

**6. Proposición:** Sean  $C_i$  curvas proyectivas planas definidas por polinomios homogéneos  $p_i \in k[x_0, x_1, x_2]$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Supongamos que  $C_1, C_2$  no tienen componentes comunes. Supongamos el cuerpo base  $k$  es algebraicamente cerrado.  $C_3$  verifica las condiciones de Noether en un punto cerrado  $x \in C_1 \cap C_2$ , es decir,  $\mathfrak{p}_{C_3, x} \subseteq \mathfrak{p}_{C_1, x} + \mathfrak{p}_{C_2, x}$  si

1)  $C_1$  y  $C_2$  son simples en  $x$ , se cortan transversalmente en  $x$  y  $x \in C_3$ .

2) El punto  $x$  es un punto simple de  $C_1$  y  $(C_1 \cap C_3)_x \geq (C_1 \cap C_2)_x$  (es decir, la multiplicidad de intersección de  $C_3$  con  $C_1$  en  $x$  es mayor o igual que la multiplicidad de intersección de  $C_2$  con  $C_1$  en  $x$ ).

3)  $C_1$  y  $C_2$  poseen tangentes distintas y  $m_x(C_3) \geq m_x(C_1) + m_x(C_2) - 1$ .

*Demostración.* Como la proposición es local, podemos suponer que las curvas  $C_i$  son curvas planas afines de ecuaciones  $p_i(x, y) = 0$ .

1) Por las hipótesis  $(k[x, y]/(p_1, p_2))_x = k$ . Por tanto, si denotamos  $\mathfrak{m}_x$  el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $x$ , tenemos que  $\mathfrak{m}_x = (p_1, p_2)_x$ , luego  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x$ .

2) Si  $x$  es un punto simple de  $C_1$ , entonces  $\overline{\mathfrak{m}_x} = (t)$  en  $(k[x, y]/(p_1(x, y)))_x$ . Además,  $\overline{(p_i(x, y))} = (t^{(C_i \cap C_1)_x})$ . Por tanto,  $\overline{(p_3(x, y))} \subseteq \overline{(p_2(x, y))}$ , luego  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x$ .

3) Vamos a usar del lema de estabilidad para curvas planas, que dice si  $\mathcal{O}_{C_1, x} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x}$  es el morfismo de explosión en el punto  $x$  entonces  $\mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x}$

Por otra parte, si  $\xi$  es un parámetro transversal a  $C_1$  en  $x$ , por el que explotamos, tenemos que  $p_2(x, y) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} = p'(x/\xi, y/\xi) \cdot \xi^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} = \xi^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x}$  porque  $C_1$  y  $C_2$  no tienen tangentes comunes en  $x$ . Por tanto,  $p_2(x, y) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x}$ .

Con todo,

$$\begin{aligned} p_3(x, y) &\in \mathfrak{m}_x^{m_x(C_3)} \subset \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)+m_x(C_2)-1} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \\ &= \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} = p_2(x, y) \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} \\ &= p_2(x, y) \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \subset p_2(x, y) \mathcal{O}_{C_1, x} \end{aligned}$$

por lo que  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x \in k[x, y]$ . □

## 7.6 Problemas

1. Probar el Teorema de Pascal: Si un hexágono está inscrito en una cónica irreducible, entonces los lados opuestos se cortan en puntos alineados.
2. Probar el Teorema de Pappus: Sean  $R_1, R_2$  dos rectas;  $p_1, p_2, p_3 \in R_1$  y  $q_1, q_2, q_3 \in R_2$  (ninguno de ellos se encuentran sobre  $R_1 \cap R_2$ ). Sea  $R_{ij}$  la recta que une  $p_i$  y  $q_j$ . Probar que los puntos  $p_{ij} = R_{ij} \cap R_{ji}$  ( $i < j$ ) están alineados.
3. Ley de grupo en las cúbicas. Sea  $C$  una cúbica plana no singular. Fijemos un punto  $p_0 \in C$ . Dados dos puntos  $p, q \in C$ , la recta que pasa estos dos puntos, corta a  $C$  en un tercer punto  $r$ . Definamos  $\phi: C \times C \rightarrow C$ ,  $(p, q) \mapsto r$ . Probar que la aplicación  $C \times C \rightarrow C$ ,  $(p, q) \mapsto \phi(p_0, \phi(p, q))$  dota a  $C$  de estructura de grupo abeliano. (Pista: Utilícese la teoría de divisores en  $C$ ).
4. Sean  $C_3, C'_3$  dos cúbicas planas que se cortan en 9 puntos distintos, de manera que 6 de ellos están sobre una cónica. Probar que los tres restantes están alineados.
5. Demostrar que las tangentes a una cúbica irreducible plana en 3 puntos alineados cortan a la cúbica en otros 3 puntos alineados.
6. Demostrar que si un triángulo está inscrito en una cónica irreducible, entonces los puntos de corte de cada lado del triángulo con la tangente a la cónica en el vértice opuesto, están alineados.

- 
7. Probar que una recta que pase por dos puntos de inflexión de una cúbica plana irreducible pasa por un tercer punto de inflexión.
  8. Probar que si una cúbica pasa por ocho de los nueve puntos distintos de corte de otras dos cúbicas, entonces también pasa por el noveno.
  9. Sea  $C_3$  una cúbica plana y  $x \in C_3$  un punto de inflexión. Probar que los puntos  $y \in C_3$  para los que existe una cónica que cumpla  $m_x(C_3 \cap C_2) = m_y(C_3 \cap C_2) = 3$ , son las terceras intersecciones de las rectas que unen los puntos de inflexión con  $x$ .
  10. Teorema de Cayley-Bacharach: Sea  $C_{n+m-3}$  una curva plana de  $n+m-3$  que pasa por  $n \cdot m - 1$  de los puntos de intersección de dos curvas de grados  $n$  y  $m$ . Probar que  $C_{n+m-3}$  pasa por el punto restante.
  11. Si una curva  $C_{n+m-\gamma}$  de grado  $n+m-\gamma$  ( $\gamma > 3$ ), pasa por  $n \cdot m - \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}$  de los  $n \cdot m$  puntos distintos en los que se cortan dos curvas de grados  $n$  y  $m$ , entonces pasa también por los restantes puntos siempre que dichos puntos no estén en una curva de grado  $\gamma - 3$ .
  12. Probar que todos los ideales maximales racionales de  $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 2y)$  no son ideales principales. Probar que  $(x, y) \subset \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 2y)$  es un ideal principal.



# Capítulo 8

## Cohomología

### 8.1 Introducción

Comencemos con una justificación muy sucinta, sin detalle ni rigor, de la introducción y definición de los grupos de cohomología de un haz.

En la construcción de un poliedro y en su clasificación topológica, es fundamental qué caras pegamos entre sí, a través de las aristas, y qué aristas pegamos entre sí, a través de los vértices.

Consideremos un poliedro  $r$ -dimensional de  $n$  vértices  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Una arista viene definida por un par de vértices  $l^{ij} = \{a_i, a_j\}$ , una cara por tres vértices  $C^{ijk} = \{a_i, a_j, a_k\}$ , en general, un símplice de orden  $p$  por  $p + 1$  vértices  $S_p^\alpha = \{a_{i_0}, \dots, a_{i_p}\}$ ,  $\alpha = \{i_0, \dots, i_p\}$ . Denotemos por  $M_p = \sum_{\alpha} \mathbb{Q} \cdot S_p^\alpha$  el  $\mathbb{Q}$ -módulo libre generado por todos los símplices  $S_p^\alpha$  de orden  $p$ , del poliedro considerado. El módulo

$$M. = \bigoplus_{p=0}^r M_p = \left( \sum_{\alpha} \mathbb{Q} \cdot S_0^\alpha \right) \oplus \dots \oplus \left( \sum_{\alpha} \mathbb{Q} \cdot S_r^\alpha \right)$$

es el *módulo graduado diferencial de cadenas sobre el poliedro* con la diferencial de grado  $-1$ , definida como sigue

$$d_p \{a_{i_0}, \dots, a_{i_p}\} = \sum_{\{a_{i_0}, \dots, \widehat{a_{i_j}}, \dots, a_{i_p}\}} (-1)^j \{a_{i_0}, \dots, \widehat{a_{i_j}}, \dots, a_{i_p}\}$$

Se cumple que  $d_{p+1} \circ d_p = 0$ . Los grupos de homología del complejo diferencial de cadenas sobre el poliedro es por definición,  $H.(M.) = \bigoplus_{p=0}^r \text{Ker } d_p / \text{Im } d_{p+1}$ .

No es extraño que los grupos de homología, del módulo diferencial de las cadenas del poliedro, sean invariantes topológicos esenciales en la clasificación topológica del poliedro. Por ejemplo, si un poliedro está inscrito en una esfera, entonces

$$\chi(M.) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(M.) = n^0 \text{ vértices} - n^1 \text{ aristas} + n^2 \text{ caras} = 2$$

Si el poliedro está inscrito en un toro de  $g$  asas, entonces  $\chi(M.) = 2 - 2g$ .

Si una superficie  $X$  compacta de  $\mathbb{R}^3$  la triangulamos, tendremos que es homeomorfa al correspondiente poliedro. Así en la clasificación topológica de la superficie será fundamental la homología del

poliedro considerado. Si en vez de tomar los triángulos de la triangulación de la superficie consideramos entornos abiertos “muy aproximados” a cada triángulo, tendremos un recubrimiento  $\{U_i\}$  de la superficie, de modo que los abiertos  $U_i \cap U_j$  serán entornos muy aproximados a las aristas y los abiertos  $U_i \cap U_j \cap U_k$  serán entornos muy aproximados a los vértices. Dado un abierto  $U \xrightarrow{i} X$ , denotemos  $\tilde{Q}_U = i_* i^{-1} \tilde{Q}$ , explícitamente  $\tilde{Q}_U(V) = \tilde{Q}(U \cap V)$ . Si  $U \subset U'$ , tenemos un morfismo natural de haces  $\tilde{Q}_U \rightarrow \tilde{Q}_{U'}$  de restricción de secciones ( $\tilde{Q}_U(V) = \tilde{Q}(U \cap V) \xrightarrow{\text{restr.}} \tilde{Q}(U' \cap V) = \tilde{Q}_{U'}(V)$ ). Se verifica la sucesión exacta de haces

$$\tilde{Q} \rightarrow \prod_i \tilde{Q}_{U_i} \xrightarrow{d_0} \prod_{i,j} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j,k} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j \cap U_k} \rightarrow \dots$$

para  $s \in \tilde{Q}_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}(V)$ ,  $(ds)_{\{i_0, \dots, i_j, i', \dots, i_k\}} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^j s|_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_j} \cap U_{i'} \cap \dots \cap U_{i_k}}$ . Sea  $M'$  el complejo definido por  $M^k = \prod_{i_0, \dots, i_k} \tilde{Q}_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}(X) = \bigoplus_{i_0, \dots, i_k} \mathbb{Q}$ , de diferencial la definida por las  $d_k$ . Pues bien, este complejo es esencialmente el complejo diferencial de cadenas del poliedro asociado a la superficie.

Con más generalidad, sea  $X$  un espacio topológico y  $\{U_i\}$  un recubrimiento por abiertos de  $X$ . Se verifica que la sucesión de haces

$$\tilde{Q} \rightarrow \prod_i \tilde{Q}_{U_i} \xrightarrow{d_0} \prod_{i,j} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j,k} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j \cap U_k} \xrightarrow{d_2} \dots$$

es exacta. Se llama grupos de cohomología Čech de  $X$  asociada al recubrimiento  $\{U_i\}$ , a los grupos de cohomología del complejo  $M'$ , definido por  $M^k = \prod_{i_0, \dots, i_k} \tilde{Q}_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}}(X)$ , de diferencial la definida por las  $d_k$ .

Sea  $R = \coprod_i U_i$  y  $\pi: R \rightarrow X$  el morfismo natural. Dado un haz  $F$  en  $X$  denotemos  $R^0 F = \pi_* \pi^{-1} F$ .

Se cumple que  $R^0 \tilde{Q} = \prod_i \tilde{Q}_{U_i}$ ,  $R^0(R^0 \tilde{Q}) = \prod_{i,j} \tilde{Q}_{U_i \cap U_j}$ . Así tendremos una sucesión exacta de haces

$$\tilde{Q} \rightarrow R^0 \tilde{Q} \xrightarrow{d} R^0(R^0 \tilde{Q}) \xrightarrow{d} \dots$$

Tomando secciones globales y cohomología obtendremos los grupos de cohomología Čech de  $X$ , asociada al recubrimiento  $\{U_i\}$ .

Si queremos independizarnos del recubrimiento  $\{U_i\}$  tendremos que tomar sucesivos refinamientos del recubrimiento  $\{U_i\}$ , y considerar el límite inductivo de los sucesivos grupos de cohomología Čech obtenidos. Si queremos hacer esto de una sola vez de modo drástico, consideraremos el recubrimiento de  $X$  formado por el conjunto discreto de todos sus puntos: Dado un espacio topológico  $X$  consideremos la aplicación  $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ , siendo  $\bar{X}$  el espacio topológico cuyos puntos son los de  $X$  y de topología la discreta, y  $\pi$  la aplicación identidad. Dado un haz  $F$  en  $X$  denotemos  $C^0 F = \pi_* \pi^{-1} F$ . Pues bien, se tiene una sucesión exacta de haces

$$\tilde{Q} \rightarrow C^0 \tilde{Q} \xrightarrow{d} C^0(C^0 \tilde{Q}) \xrightarrow{d} \dots \quad (*)$$

Tomando secciones globales y cohomología obtendremos los llamados grupos de cohomología de  $X$ .

Por último, el teorema de De Rham (más adelante enunciado) afirmará que es equivalente, para el cálculo de los grupos de cohomología de  $X$ , a tomar la resolución de Godement (más adelante definida) en vez de la resolución  $(*)$  considerada. Además, puede considerarse en vez de el haz  $\tilde{Q}$ , cualquier haz  $F$ , y en tal caso se hablará de los grupos de cohomología de  $X$  con valores en  $F$ .

## 8.2 Cohomología de haces

Sea  $F$  un haz sobre un espacio topológico  $X$ . Sea  $\bar{X}$  el conjunto  $X$  dotado de la topología discreta y  $\pi: \bar{X} \rightarrow X$  la identidad, que es continua.

Como  $\bar{X}$  tiene la topología discreta, entonces  $\pi^{-1}F(U) = \prod_{x \in U} (\pi^{-1}F)_x = \prod_{x \in U} F_x$ . Denotemos  $\pi_*\pi^{-1}F = C^0F$ . Se tiene una inyección natural  $F \rightarrow C^0F$ ,  $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$  ( $s \in F(U)$ ).

Denotemos  $F_1 = C^0F/F$ . El haz cociente  $F_1$  se inyecta a su vez en  $C^1F = C^0F_1 = \pi_*\pi^{-1}F_1$ . Sea  $F_2 = C^1F/F_1$ , que se inyecta en  $C^2F = C^0F_2$ . Reiterando el proceso se obtiene una sucesión exacta larga de haces:

$$0 \rightarrow F \rightarrow C^0F \rightarrow C^1F \rightarrow C^2F \rightarrow \dots$$

que se conoce como resolución de Godement del haz  $F$ .

Las secciones globales  $C^iF(X)$  de la resolución de Godement forman un complejo diferencial de grupos abelianos:

$$C^0F(X) \xrightarrow{d_0} C^1F(X) \xrightarrow{d_1} C^2F(X) \xrightarrow{d_2} \dots$$

**1. Definición:** Se definen los grupos de cohomología,  $H^i(X, F)$ , de  $X$  con valores en el haz  $F$ , como los grupos de cohomología del complejo diferencial formado por las secciones globales de la resolución flasca de Godement de  $F$ , es decir,  $H^i(X, F) = H^i(X, C^iF(X)) = \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i-1}$ .

**2. Proposición:**  $H^0(X, F) = \Gamma(X, F)$

*Demostración.* Las sucesiones

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F(X) \rightarrow C^0F(X) \rightarrow F_1(X) \\ 0 \rightarrow F_1(X) \rightarrow C^0F_1(X) = C^1F(X) \end{aligned}$$

son exactas, luego el núcleo del morfismo  $C^0F(X) \rightarrow C^1F(X)$  es justamente  $F(X)$ .  $\square$

**3. Teorema:** La toma de los grupos de homología es funtorial. Dada una sucesión exacta  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  de haces de grupos abelianos, se tiene una sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, F') \rightarrow H^0(X, F) \rightarrow H^0(X, F'') \rightarrow H^1(X, F') \\ \rightarrow H^1(X, F) \rightarrow H^1(X, F'') \rightarrow H^2(X, F') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

*Demostración.* Dado un morfismo  $f: F \rightarrow G$  de haces, para cada  $x \in X$  tenemos un morfismo  $F_x \rightarrow G_x$ , tenemos pues un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^0F & \longrightarrow & C^0G \end{array}$$

Por tanto, tenemos un morfismo  $F_1 \rightarrow G_1$  entre los conúcleos. Reiterando el proceso tenemos un morfismo  $C^iF \rightarrow C^iG$ , que conmuta con las diferenciales. Tomando secciones globales, obtenemos un morfismo  $f': H^i(X, F) \rightarrow H^i(X, G)$ . Obviamente  $\text{Id}' = \text{Id}$  y  $(f \circ g)' = f' \circ g'$ .

Dada la sucesión exacta  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  de haces, para cada  $x \in X$  la sucesión de grupos

$$0 \rightarrow F'_x \rightarrow F_x \rightarrow F''_x \rightarrow 0$$

es exacta, luego es exacta la sucesión de grupos

$$0 \rightarrow C^0 F'(X) \rightarrow C^0 F(X) \rightarrow C^0 F''(X) \rightarrow 0$$

y es exacta la sucesión de haces

$$0 \rightarrow C^0 F' \rightarrow C^0 F \rightarrow C^0 F'' \rightarrow 0$$

Por tanto, por el lema de la serpiente (tomando fibras), es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow F'_1 \rightarrow F_1 \rightarrow F''_1 \rightarrow 0$$

Reiterando se obtiene una sucesión exacta de complejos diferenciales

$$0 \rightarrow C' F'(X) \rightarrow C' F(X) \rightarrow C' F''(X) \rightarrow 0$$

de donde se obtiene la sucesión exacta larga de cohomología

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, F') \rightarrow H^0(X, F) \rightarrow H^0(X, F'') \rightarrow H^1(X, F') \\ \rightarrow H^1(X, F) \rightarrow H^1(X, F'') \rightarrow H^2(X, F') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

□

**4. Definición:** Se dice que un haz  $F$  sobre  $X$  es flasco cuando para cada pareja de abiertos  $V \subseteq U$  el morfismo de restricción  $F(U) \rightarrow F(V)$  es epiyectivo.

Obviamente dado un haz  $F$ , entonces  $C^0 F$  es un haz flasco.

**5. Teorema:** Si  $0 \rightarrow F' \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} F'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de haces sobre  $X$  y si  $F'$  es flasco, para cada abierto  $U$  la sucesión

$$0 \rightarrow F'(U) \xrightarrow{i} F(U) \xrightarrow{p} F''(U) \rightarrow 0$$

es exacta.

*Demostración.* Sólo hay que ver que  $p$  es epiyectiva. Sea  $s'' \in F''(U)$ . Consideremos la familia formada por las parejas  $(V, s_V)$ , donde  $V$  es un abierto contenido en  $U$ , y  $s_V$  es una sección de  $F$  en  $V$  cuya imagen por  $p$  es  $s''|_V$ .

Como para cada  $x \in U$ , el morfismo  $p_x: F_x \rightarrow F''_x$  es epiyectivo, dicha familia no es vacía. Como está claramente ordenada y es inductiva, por el lema de Zorn tiene un elemento maximal  $(V, s_V)$ . Si  $V = U$  hemos acabado. Si no fuera así, sea  $x \in U - V$ . Existe un entorno abierto  $W \subseteq U$  de  $x$  y una sección  $\bar{s} \in F(W)$  de modo que  $p(\bar{s}) = s''|_W$ . Por tanto,  $p(s|_{W \cap V}) = p(\bar{s}|_{W \cap V})$  y existe una sección  $s'_{W \cap V} \in F'(W \cap V)$  de modo que  $i(s'_{W \cap V}) = s_{W \cap V} - \bar{s}|_{W \cap V}$ . Como  $F'$  es flasco existe una  $s' \in F'(W)$  que restringe a  $s'_{W \cap V}$ . Entonces  $\bar{s} + i(s')$  es una sección de  $F$  sobre  $W$  que se aplica por  $p$  en  $s''|_W$  y que coincide con  $s_V$  sobre  $W \cap V$ . Luego, existe una sección de  $F$  sobre  $V \cup W$  cuya restricción a  $V$  es  $s_V$  y que se aplica por  $p$  a  $s''|_{V \cup W}$ , lo que contradice la maximalidad de  $(V, s_V)$ .

□

**6. Corolario:** Sea  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  una sucesión de haces. Si  $F'$  y  $F$  son flascos, también lo es  $F''$ .

*Demostración.* Sea  $V \subseteq U$  una inclusión de abiertos. Por el teorema anterior, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F'(U) & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F''(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow r' & & \downarrow r & & \downarrow r'' & & \\ 0 & \longrightarrow & F'(V) & \longrightarrow & F(V) & \longrightarrow & F''(V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es de filas exactas. Por ser  $F$  flasgo  $r$  es epiyectiva y por el lema de la serpiente  $r''$  es epiyectiva, luego  $F''$  es flasgo. □

**7. Definición:** Se dice que un haz  $F$  es acíclico si  $H^i(X, F) = 0$  para todo  $i > 0$ .

**8. Teorema:** *Los haces flasgos son acíclicos.*

*Demostración.* Si  $F$  es flasgo, la sucesión  $0 \rightarrow F(X) \rightarrow C^0 F(X) \rightarrow F_1(X) \rightarrow 0$  es exacta. Como  $F$  y  $C^0 F$  son flasgos entonces  $F_1$  lo es y de nuevo  $0 \rightarrow F_1(X) \rightarrow C^0 F_1(X) = C^1 F(X) \rightarrow F_2(X) \rightarrow 0$  es exacta. Reiterando, se sigue que  $C^* F(X)$  es una sucesión exacta, luego su cohomología es nula. □

Sea  $M_\cdot = \bigoplus_{i,j} M_i^j$  y supongamos definidas dos diferenciales  $d_\cdot : M_i^j \rightarrow M_{i+1}^j$ ,  $d' : M_i^j \rightarrow M_i^{j+1}$  que conmutan entre sí, entonces diremos que es un bicomplejo diferencial. En  $M_\cdot$  podemos definir una graduación y una diferencial del siguiente modo:

$$M_n = \bigoplus_{i+j=n} M_i^j, \quad d \cdot m_i^j = d_\cdot m_i^j + (-1)^i d' m_i^j, \quad \text{para } m_i^j \in M_i^j$$

**9. Ejemplo:** Si  $M_\cdot = \bigoplus_i M_i$  y  $N_\cdot = \bigoplus_j N_j$ , son módulos diferenciales graduados, entonces  $M_\cdot \otimes N_\cdot$  es un bicomplejo:  $(M_\cdot \otimes N_\cdot)_i^j = M_i \otimes N_j$  con las diferenciales  $d_\cdot = d \otimes 1$ ,  $d'_{\text{punto}} = 1 \otimes d$ . Así pues  $M_\cdot \otimes N_\cdot$  es un módulo diferencial graduado. También  $\text{Hom}(M_\cdot, N_\cdot)$  es un bicomplejo diferencial:  $\text{Hom}_A(M_\cdot, N_\cdot)_i^j = \text{Hom}_A(M_{-i}, N_j)$ ,  $d_\cdot(\phi) = \phi \circ d$  y  $d'(\phi) = d \circ \phi$ .

**10. Teorema:** *Sea el bicomplejo diferencial*

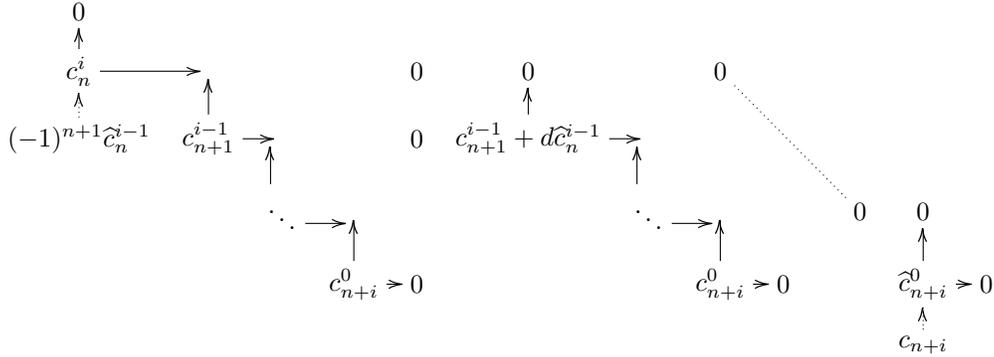
$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & C_n^1 & \longrightarrow & C_{n+1}^1 & \longrightarrow & C_{n+2}^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow d' & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n^0 & \longrightarrow & C_{n+1}^0 & \xrightarrow{d_\cdot} & C_{n+2}^0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \\ & & & & i & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & \check{C}_n & \longrightarrow & \check{C}_{n+1} & \xrightarrow{d_\cdot} & \check{C}_{n+2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

y supongamos que las columnas son acíclicas, es decir,  $H^i(C_n^\cdot) = \begin{cases} 0 & i \neq 0 \\ C_n & i = 0 \end{cases}$ . Entonces  $H^i(C_\cdot) = H^i(C)$

*Demostración.* Denotemos  $i: C_i \rightarrow C_i^0$  a las inclusiones del teorema. El morfismo  $\varphi: H^i(C_\cdot) \rightarrow H^i(C)$ ,  $\bar{c}_i \mapsto \bar{i}(c_i)$  está bien definido: dado un borde  $d.c_{i-1}$ , se verifica que  $id.c_{i-1} = d.ic_{i-1} = d'.ic_{i-1}$  es un borde para  $d'$ . Además, si  $c_i$  es un ciclo para  $d$ , entonces  $ic_i$  es un ciclo para  $d'$ , ya que  $d'.ic_i = d.ic_i = id.c_i = 0$ . Veamos que  $\varphi$  es un isomorfismo. Veamos sólo la epiyectividad, pues la inyectividad es más sencilla. Sea  $c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0$  un ciclo para  $d'$ . Ha de verificarse que  $d'.c_n^i = 0$ , luego existe  $\tilde{c}_n^{i-1} \in C_n^{i-1}$  tal que  $d'.\tilde{c}_n^{i-1} = (-1)^{n+1}c_n^i$ . Entonces, en cohomología,  $c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0 = d'.\tilde{c}_n^{i-1} + c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0 = (d'.\tilde{c}_n^{i-1} + c_n^i) + \dots + c_{n+i}^0$ . Argumentando así sucesivamente obtendremos que  $c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0 = \tilde{c}_{n+i}^0$  en cohomología. De nuevo tendremos que existe  $c_{n+i} \in C_{n+i}$  tal que  $ic_{n+i} = \tilde{c}_{n+i}^0$  y se verifica que  $d.c_{n+i} = 0$ , porque  $id.c_{n+i} = d.ic_{n+i} = d'.\tilde{c}_{n+i}^0$ , que es cero ya que  $d'.\tilde{c}_{n+i}^0 = 0$ . Hemos concluido entonces que

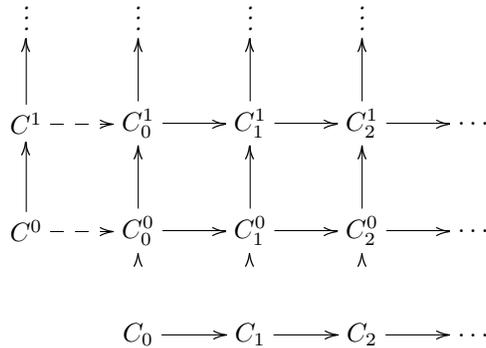
$$\overline{c_n^i + c_{n+1}^{i-1} + \dots + c_{n+i}^0} = \varphi(\bar{c}_{n+i})$$

En tres gráficos, hemos escrito



□

**11. Corolario:** Sea el bicomplejo diferencial



de filas y columnas acíclicas. Entonces  $H^i(C^\cdot) = H^i(C_\cdot) = H^i(C)$ .

**12. Teorema De Rham** Sea  $R$ . una resolución de  $F$  por haces acíclicos, es decir una sucesión exacta

$$R_0 \xrightarrow{d_0} R_1 \xrightarrow{d_1} R_2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

de modo que cada  $R_i$  es acíclico y  $\text{Ker } d_0 = F$ . Se cumple que la cohomología de  $X$  con valores en  $F$  es la cohomología del complejo de secciones globales de  $R$ , es decir,  $H^i(X, F) = H^i(X, R.(X))$ .

*Demostración.* Consideremos el bicomplejo de grupos abelianos  $C^i R.(X) = \bigoplus_{i,j} C^i(R_j)(X)$  y el diagrama diferencial

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 C^1 F(X) & \dashrightarrow & C^1 R_0(X) & \longrightarrow & C^1 R_1(X) & \longrightarrow & C^1 R_2(X) \longrightarrow \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 C^0 F(X) & \dashrightarrow & C^0 R_0(X) & \longrightarrow & C^0 R_1(X) & \longrightarrow & C^0 R_2(X) \longrightarrow \dots \\
 & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\
 & & R_0(X) & \longrightarrow & R_1(X) & \longrightarrow & R_2(X) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

que es de filas acíclicas, porque el funtor  $\Gamma(X, C^r(-))$  sobre la categoría de haces es exacto, y de columnas acíclicas por ser los  $R_r$  acíclicos.

Por el teorema 8.2.11,  $H^i(X, R.(X)) = H^i(X, C^r F(X)) = H^i(X, F)$ .  $\square$

### 8.3 Aciclicidad de los haces cuasicoherentes sobre esquemas afines

Nuestro objetivo, en esta sección, es demostrar que los haces cuasicoherentes, en esquemas afines, son acíclicos. Probaremos primero esta afirmación en esquemas afines de dimensión uno, porque la demostración es menos aparatosa, pero contiene ya todos los elementos de la demostración general.

**1. Definición:** Dado un haz  $F$  sobre un espacio topológico  $X$ , llamaremos soporte de  $F$  y lo denotaremos  $\text{Sop } F$ , a

$$\text{Sop } F = \{x \in X : F_x \neq 0\}$$

Diremos que  $F$  está concentrado en  $Y \subset X$  si  $Y = \text{Sop } F$ . Denotaremos  $\dim F = \dim \text{Sop } F$ .

**2. Proposición:** Sea  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente de modo que  $\dim \mathcal{M} = 0$ . Se cumple

1.  $\mathcal{M}(U) = \bigoplus_{x \in U} \mathcal{M}_x$ . Por tanto,  $\mathcal{M}$  es un haz flasco.
2. Para todo haz de línea  $L$ ,  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L \simeq \mathcal{M}$ .

*Demostración.* El soporte de una sección  $s \in \mathcal{M}(U)$  es un cerrado. Por tanto, como  $\dim \mathcal{M} = 0$ , los puntos  $x \in U$  donde el germe  $s_x$  es no nulo es un número finito de puntos cerrados. Así pues, para toda  $s_x \in \mathcal{M}_x$  y abierto  $U$  que contiene a  $x$ , existe una sección  $s \in \mathcal{M}(U)$  de modo que la fibra de  $s$  en  $x$  es  $s_x$  y es nula en cualquier otro punto. Es fácil concluir que  $\mathcal{M}(U) = \bigoplus_{x \in U} \mathcal{M}_x$ .

Observemos que si  $\dim \mathcal{M} = 0$  entonces  $\dim(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L) = 0$ . Además, para cada  $x$  podemos definir un isomorfismo  $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L)_x = \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{C,x}} L_x \simeq \mathcal{M}_x$ . Por tanto,

$$\mathcal{M}(U) = \bigoplus_{x \in U} \mathcal{M}_x \simeq \bigoplus_{x \in U} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L)_x = (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L)(U)$$

y  $\mathcal{M} \simeq (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} L)$ . □

**3. Proposición:** Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín íntegro de dimensión 1 y  $M$  un  $A$ -módulo. Se cumple que

$$H^i(X, \tilde{M}) = \begin{cases} M & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $\Sigma = A_{A-\{0\}}$  y  $M_\Sigma = M_{A-\{0\}}$ . Sea el morfismo de localización  $\phi: M \rightarrow M_\Sigma$ ,  $m \mapsto \frac{m}{1}$ . Obviamente,  $\phi$  es un isomorfismo en el punto genérico, por tanto,  $\dim \text{Ker } \phi < 1$  y  $\dim \text{Coker } \phi < 1$ . Luego  $\widetilde{\text{Ker } \phi}$  y  $\widetilde{\text{Coker } \phi}$  son flascos por 8.3.2.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{Im } \phi} \hookrightarrow \widetilde{M_\Sigma} \rightarrow \widetilde{\text{Coker } \phi} \rightarrow 0$$

Como  $\widetilde{M_\Sigma}$  es constante, es flasco. Tomando secciones globales, de la sucesión exacta larga de cohomología y 7.1.7, obtenemos que  $H^i(X, \widetilde{\text{Im } \phi}) = 0$ , para  $i \geq 0$ .

Ahora, de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{Ker } \phi} \hookrightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{\text{Im } \phi} \rightarrow 0$$

tomando secciones globales, de la sucesión exacta larga de cohomología y 7.1.7, concluimos. □

**4. Teorema:** Sea  $X = \text{Spec } A$  un esquema afín noetheriano de dimensión  $n < \infty$  y  $M$  un  $A$ -módulo. Se verifica

$$H^i(X, \tilde{M}) = \begin{cases} M & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Denotemos  $\dim M = \dim \text{Sop } M$ . Vamos a demostrar el teorema por inducción sobre la  $\dim M$ .

Si  $\dim M = -1$  entonces  $M = 0$  y en este caso el teorema es trivial. En general, sean  $\{x_i\}$  los puntos minimales del  $\text{Sop } M$ . Consideremos el morfismo de localización  $A \rightarrow A_{x_i}$ , que induce la inclusión  $i: \text{Spec } A_{x_i} \hookrightarrow \text{Spec } A$ .  $\text{Sop } i^* \tilde{M} = \text{Sop } \tilde{M} \cap \text{Spec } A_{x_i} = x_i$ , luego por la proposición 8.3.2,  $i^* \tilde{M}$  es flasco y  $i_* i^* \tilde{M} = \tilde{M}_{x_i}$  es flasco. Por tanto,  $\bigoplus_i \tilde{M}_{x_i}$  es flasco. Consideremos el morfismo natural  $\phi: M \rightarrow \bigoplus_i \tilde{M}_{x_i}$  (observemos que el soporte de cada  $m \in M$  es un cerrado, que sólo puede contener un número finito de los  $x_i$ ). Se verifica que  $\dim \text{Ker } \phi < \dim M$  y  $\dim \text{Coker } \phi < \dim M$ , pues  $\phi$  es un isomorfismo en los puntos  $x_i$ . Por tanto, por inducción sobre la dimensión tenemos que  $H^i(X, \text{Coker } \phi) = 0$  y  $H^i(X, \text{Ker } \phi) = 0$  para  $i > 0$ . De la sucesión

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{Im } \phi} \rightarrow \bigoplus_i \tilde{M}_{x_i} \rightarrow \widetilde{\text{Coker } \phi} \rightarrow 0$$

la proposición 7.1.7 y la sucesión exacta larga de cohomología, obtenemos que  $H^i(X, \widetilde{\text{Im } \phi}) = 0$  para  $i > 0$ . De la sucesión

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{Ker } \phi} \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \widetilde{\text{Im } \phi} \rightarrow 0$$

la proposición 7.1.7 y la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos la demostración del teorema. □

**5. Corolario:** Sea  $\pi: X \rightarrow Y$  un morfismo afín de esquemas y  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente en  $X$ . Se verifica que

$$H^i(X, \mathcal{M}) = H^i(Y, \pi_*\mathcal{M}).$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M} \rightarrow C_0(\mathcal{M}) \rightarrow C_1(\mathcal{M}) \rightarrow \dots$  una resolución de  $\mathcal{M}$  por haces flascos. Se verifica que  $\pi_*\mathcal{M} \rightarrow \pi_*C_0(\mathcal{M}) \rightarrow \pi_*C_1(\mathcal{M}) \rightarrow \dots$  es una sucesión exacta, porque para cada abierto afín  $U \subset Y$ ,  $H^i(\Gamma(U, \pi_*C_i(\mathcal{M}))) = H^i(\Gamma(\pi^{-1}(U), C_i(\mathcal{M}))) = H^i(\Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{M})) \stackrel{8.3.4}{=} 0$ . Además, la imagen directa de un haz flasco es flasco. Por tanto,

$$H^i(Y, \pi_*\mathcal{M}) = H^i(\Gamma(Y, \pi_*C_i(\mathcal{M}))) = H^i(\Gamma(X, C_i(\mathcal{M}))) = H^i(X, \mathcal{M}).$$

□

**6. Teorema:** Sea  $X$  un esquema noetheriano de dimensión  $n < \infty$ . Sea  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente. Se verifica que

$$H^i(X, \mathcal{M}) = 0, \text{ para } i > \dim \mathcal{M}$$

*Demostración.* Se argumenta igual que en el teorema anterior. □

**7. Ejercicio:** Consideremos en la recta proyectiva los abiertos  $U_0 = \mathbb{P}_1 - \{0\}$  y  $U_1 = \mathbb{P}_1 - \{\infty\}$ . Si  $V \subset \mathbb{P}_1$  es un abierto denotemos  $\mathcal{O}_V$  el haz sobre  $\mathbb{P}_1$  definido por  $\mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(U \cap V)$ . Demostrar que la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \rightarrow \mathcal{O}_{U_0} \oplus \mathcal{O}_{U_1} \rightarrow \mathcal{O}_{U_0 \cap U_1} \rightarrow 0$$

de morfismos obvios es exacta. Probar que  $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = 0$ .

## 8.4 Caracterización cohomológica de la recta proyectiva

Sea  $C$  una curva completa no singular. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \Sigma_C \xrightarrow{\pi} \Sigma_C/\mathcal{O}_C \rightarrow 0 \quad *$$

donde  $\Sigma_C$  es el haz constante  $\Sigma_C$ . La fibra de  $\Sigma_C/\mathcal{O}_C$  en el punto genérico es cero, luego el soporte de toda sección de  $\Sigma_C/\mathcal{O}_C$  es un número finito de puntos. Por tanto,  $\Sigma_C/\mathcal{O}_C = \bigoplus_{x \in C} \Sigma_C/\mathcal{O}_{C,x}$ . Dado un punto cerrado  $x \in C$  denotemos por  $\mathfrak{m}_x$  el haz de ideales de funciones que se anulan en  $x$ . Tenemos que en  $x$   $(\mathfrak{m}_x)_x = t_x \cdot \mathcal{O}_{C,x}$ , luego  $(\mathcal{O}_{C,x})_{t_x} = \Sigma_C$ . Por tanto, dada  $f \in \Sigma_C$ , se verifica que  $f = \frac{a}{t_x^n}$ , para un  $n \in \mathbb{N}$  y un  $a \in \mathcal{O}_{C,x}$ . Si  $x$  es un punto racional, sabemos que  $a = \sum_{i=1}^n a_i t_x^i + b t_x^n$ , con  $a_i \in k$  y

$b \in \mathcal{O}_{C,x}$ . En conclusión,  $f = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t_x^i} \pmod{\mathcal{O}_{C,x}}$ , luego

$$\begin{aligned} \Sigma_C/\mathcal{O}_{C,x} &= \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t_x^i}, n \text{ variable, } a_i \in k \right\} \\ &= \{ \text{partes princ. del desarrollo de Laurent en el punto } x \text{ de } f \in \Sigma_C \} \end{aligned}$$

El morfismo  $\pi$  asigna a cada  $f \in \Sigma_C = \Sigma_C(U)$  sus partes principales del desarrollo de Laurent en cada  $x \in U$ .

**1. Ejercicio:** Si el punto cerrado  $x \in C$  no es racional, entonces

$$\Sigma_C/\mathcal{O}_{C,x} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t_x^i}, n \text{ variable, } a_i \in \mathcal{O}_{C,x}/\mathfrak{m}_x \right\}$$

(Pista: Recordar que por el teorema de Cohen el morfismo de paso al cociente  $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{C,x}/\mathfrak{m}_x \widehat{\mathcal{O}}_{C,x} = \mathcal{O}_{C,x}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{C,x}$  tiene sección).

**2. Teorema:** Una curva  $C$  completa y no singular es isomorfa a la recta proyectiva  $\Leftrightarrow$  Existe un punto racional  $x \in C$  y  $H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Tomemos la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión exacta  $*$ , con  $C = \mathbb{P}_1$

$$\Sigma_{\mathbb{P}_1} \xrightarrow{\pi} \Gamma(\mathbb{P}_1, \Sigma_{\mathbb{P}_1}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = \bigoplus_{y \in \mathbb{P}_1} \Sigma_{\mathbb{P}_1}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1,y} \rightarrow H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_1, \Sigma_{\mathbb{P}_1}) = 0$$

Dada  $s \in \Gamma(\mathbb{P}_1, \Sigma_{\mathbb{P}_1}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1})$  entonces  $s = \left( \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \right)$ .<sup>1</sup> Las funciones  $\frac{1}{x-\alpha}$  tienen sólo polo en el punto  $\alpha \in \mathbb{P}_1$ , por tanto, la imagen por  $\pi$  de  $f(x) = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}$  es  $s$ . En conclusión,  $\pi$  es epi y  $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = 0$ .

$\Leftarrow$ ) Consideremos de nuevo, la sucesión exacta larga, asociada a  $*$

$$\Sigma_C \rightarrow \Gamma(C, \Sigma_C/\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{y \in C} \Sigma_C/\mathcal{O}_{C,y} \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0 \quad **$$

Sea  $s = (0, \dots, \frac{1}{t_x}, \dots, 0) \in \Gamma(C, \Sigma_C/\mathcal{O}_C)$ , donde entendemos que  $(\mathfrak{m}_x)_x = t_x \cdot \mathcal{O}_{C,x}$ . Por la sucesión exacta  $**$  existe una  $f \in \Sigma_C$  sin polos en  $C$ , salvo en  $x$  donde tiene un polo de orden 1. Por tanto, el morfismo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_1 \\ \Sigma_C & \longleftarrow & k(x) \\ f & \longleftarrow & x \end{array}$$

es de grado 1, es decir  $C \simeq \mathbb{P}_1$ . □

**3. Ejercicio:** Sea  $C$  la curva del plano proyectivo real de ecuación afín  $x^2 + y^2 = 0$ . Demostrar

1. El cierre entero de  $\mathbb{R}$  en  $\Sigma_C$  es  $\mathbb{C}$ .
2.  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \mathbb{R}$ .
3. La desingularización de  $C$  es isomorfa a la recta proyectiva compleja.
4. El origen es un punto racional de  $C$  y  $\dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$ .

<sup>1</sup>El desarrollo de Laurent en el punto del infinito es un polinomio en  $x$ , sin coeficiente constante.

## 8.5 Finitud de la dimensión de los grupos de cohomología

### 8.5.1 Cohomología de los haces coherentes sobre la recta proyectiva

**Notación:** Dado un  $k$ -esquema  $X$  y un haz cuasicoherente  $\mathcal{M}$  denotaremos  $h^i(X, \mathcal{M}) = \dim_k H^i(X, \mathcal{M})$ .

**1. Teorema:**

1. Si  $n \geq 0$   $h^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)) = n + 1$  y  $h^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)) = 0$ .

2. Si  $n \leq 0$   $h^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)) = 0$  y  $h^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)) = -(n + 1)$ .

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \xrightarrow{x_0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0, \quad \text{i.e.} \quad 0 \rightarrow \mathfrak{m}_\infty \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

donde  $\mathcal{C}$  es un haz coherente de torsión concentrado en  $\infty$ , de modo que su fibra en  $\infty$  es  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1, \infty}/\mathfrak{m}_\infty = k$ . Por tanto,  $\mathcal{C}$  es un haz flasco y  $\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathcal{C}) = k$ .

Tensorializando por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)$  obtenemos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n) \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

De estas sucesiones exactas, se concluye utilizando

- 1) La sucesión exacta larga de cohomología.
- 2) Inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$ ,  $h^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = 1$ ,  $h^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}) = 0$ .
- 3) Para  $n < 0$ ,  $h^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)) = 0$ .

□

**2. Teorema:** Si  $\mathcal{M}$  es un haz coherente sobre  $\mathbb{P}_1$  entonces

1.  $H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{M})$  y  $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{M})$  son  $k$  espacios vectoriales de dimensión finita.
2.  $H^i(\mathbb{P}_1, \mathcal{M}) = 0$  para  $i > 1$

*Demostración.* Por el teorema 8.3.6, sólo tenemos que demostrar 1.

Por 7.2.5, sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n_i) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

Tomando la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos que  $h^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{M}) < \infty$ . En particular  $h^1(\mathbb{P}_1, \text{Ker}) < \infty$ . De nuevo, por la sucesión exacta larga de cohomología  $h^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{M}) < \infty$ .

□

Demos otra demostración de este teorema.

**3. Definición:** Sea  $X$  un esquema íntegro, de punto genérico  $p_g$ . Dado un haz  $\mathcal{M}$  cuasicoherente sobre  $X$  consideremos el haz constante  $\mathcal{M}_{p_g}$ . Llamaremos parte de torsión de  $\mathcal{M}$  y denotaremos  $T(\mathcal{M})$ , al núcleo del morfismo natural  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{p_g}$ . Diremos que  $\mathcal{M}$  es de torsión si  $\mathcal{M} = T(\mathcal{M})$ . Diremos que  $\mathcal{M}$  es libre de torsión si  $T(\mathcal{M}) = 0$ , es decir, si el morfismo  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{p_g}$  es inyectivo. Llamaremos rango de un módulo coherente  $\mathcal{M}$  a  $\dim_{\mathcal{O}_{X, p_g}} \mathcal{M}_{p_g}$ .

Por ejemplo, los haces de línea sobre un esquema íntegro son módulos coherentes libres de torsión de rango 1.

**4. Lema:** Sea  $C$  una curva íntegra.

1. Sea  $\mathcal{M} \neq 0$  un haz coherente libre de torsión. Existe un haz  $L$  coherente libre de torsión de rango 1 y un morfismo inyectivo  $L \hookrightarrow \mathcal{M}$ , tal que  $\mathcal{M}/L$  no tiene torsión.
2. Sea  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente libre de torsión. Existe un haz de ideales  $L$  de rango 1, es decir, no nulo y un morfismo inyectivo  $L \hookrightarrow \mathcal{M}$ .

*Demostración.* 1. Sea  $s \in \mathcal{M}_{p_g}$ . Consideremos el haz constante  $\mathcal{M}_{p_g}$ . Tenemos que el haz constante  $\Sigma_C \cdot s$  y  $\mathcal{M}$  son subhaces de  $\mathcal{M}_{p_g}$ . Sea  $L = \Sigma_C \cdot s \cap \mathcal{M}$  el “haz de ceros y polos de  $s$ ”. Se verifica

- a)  $L$  es coherente sin torsión porque  $\mathcal{M}$  lo es.
- b)  $L$  es de rango 1 porque  $L_{p_g} = \Sigma_X \cdot s \cap \mathcal{M}_{p_g} = \Sigma_C \cdot s$ .
- c)  $L$  está incluido en  $\mathcal{M}$ ,  $(\mathcal{M}/L)_{p_g} = \mathcal{M}_{p_g}/\Sigma_C \cdot s$  y el núcleo de  $\mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{M}/L)_{p_g}$  es  $L$ , luego  $\mathcal{M}/L \hookrightarrow (\mathcal{M}/L)_{p_g}$ .

Con todo, hemos concluido.

2. Dada  $s \in \mathcal{M}_{p_g}$  no nula, tómesese  $L = \mathcal{O}_C \cdot s \cap \mathcal{M}$ .

□

**5. Teorema bis** Si  $\mathcal{M}$  es un haz coherente sobre  $\mathbb{P}_1$  entonces  $H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{M})$  y  $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{M})$  son  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita.

*Demostración.* Demostrémoslo por inducción sobre el rango de  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{M}$  es de rango 0, es decir de torsión, su soporte es un número finito de puntos cerrados  $x_1, \dots, x_n$  y  $\mathcal{M}(U) = \bigoplus_{x_i \in U} \mathcal{M}_{x_i}$ . Por tanto,  $\mathcal{M}$  es flasco. Además, para cada abierto afín  $U$ ,  $\mathcal{M}(U)$  es un  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(U)/\text{Anul}(\mathcal{M}(U))$ -módulo finito. Ahora bien,  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(U)/\text{Anul}(\mathcal{M}(U))$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita porque  $\text{Anul}(\mathcal{M}(U)) \neq 0$ , luego  $\mathcal{M}(U)$  es un  $k$ -espacio de dimensión finita y por tanto  $\mathcal{M}(\mathbb{P}_1)$  también.

Si  $\mathcal{M}$  es de rango  $n > 0$ , sea por el lema  $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)$  un subhaz de línea de  $\mathcal{M}$ . Consideremos la sucesión exacta  $0 \rightarrow L \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/L \rightarrow 0$ . Por inducción sobre los rangos, tomando la sucesión exacta larga de cohomología, concluimos el teorema por el cálculo de la cohomología de los  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)$ .

□

## 8.5.2 Cohomología de los haces coherentes en curvas

**6. Teorema:** Sea  $C$  una curva completa y  $\mathcal{M}$  un haz coherente en  $C$ . Se verifica

1.  $H^0(C, \mathcal{M})$  y  $H^1(C, \mathcal{M})$  son  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita.
2.  $H^i(C, \mathcal{M}) = 0$  para  $i > 1$ .

*Demostración.* Sea  $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$  el morfismo de desingularización de  $C$ . Sea el morfismo natural  $\mathcal{M} \rightarrow \pi_*\pi^*\mathcal{M}$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker } i \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \pi_*\pi^*\mathcal{M} \rightarrow \text{Coker } i \rightarrow 0$$

$\text{Coker } i$  y  $\text{Ker } i$  tiene el soporte concentrado en los puntos singulares de  $C$ , luego es flasco y sus secciones son un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita (argumentando como en el teorema anterior). Así pues, basta demostrar el teorema para  $\pi_*\pi^*\mathcal{M}$ . Ahora bien,  $H^i(C, \pi_*\pi^*\mathcal{M}) = H^i(\tilde{C}, \pi^*\mathcal{M})$  porque  $\pi$  es un morfismo afín, y éstos “conservan” la cohomología por 8.3.5. En conclusión, como  $\pi^*\mathcal{M}$  es coherente por 7.3.2, podemos suponer que  $C$  es no singular.

Sea  $\phi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  un morfismo finito en la recta proyectiva. Se verifica que  $H^i(C, \mathcal{M}) = H^i(\mathbb{P}_1, \phi_*\mathcal{M})$ . Luego basta demostrar el teorema para la recta proyectiva y hemos concluido.

□

### 8.5.3 Cohomología de los haces coherentes en variedades proyectivas

**7. Proposición:**  $\Gamma(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = \{\text{Polinomios homogéneos } p(x_0, \dots, x_r) \text{ de grado } n\}$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) &= \left\{ \begin{array}{l} \{s_i \in \Gamma(U_{x_i}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = k[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i] \cdot x_i^n\}_i, \text{ tales que} \\ s_i = s_j \text{ en } \Gamma(U_{x_i} \cap U_{x_j}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = k[x_0/x_i, \dots, x_r/x_i]_{x_j/x_i} \cdot x_i^n \end{array} \right\} \\ &= \{\text{Pol. hom. } p(x_0, \dots, x_r) \text{ de grado } n\} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es una sencilla comprobación. □

La sucesión exacta de módulos graduados

$$0 \rightarrow k[x_0, \dots, x_n][n-1] \xrightarrow{x_0} k[x_0, \dots, x_n][n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n][n] \rightarrow 0$$

define la sucesión exacta de haces

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n-1) \xrightarrow{x_0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n) \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{r-1}}(n) \rightarrow 0 \quad *$$

donde  $\mathbb{P}_{r-1} \xrightarrow{i} \mathbb{P}_r$  es el hiperplano  $x_0 = 0$ . Denotemos por  $U = \mathbb{P}_r - \mathbb{P}_{r-1}$  y por  $\mathcal{O}_U$  al haz en  $\mathbb{P}_r$  definido por  $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}(U \cap V)$ , para cada abierto  $V \subset \mathbb{P}_r$ .

**8. Teorema:**

$$h^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = \begin{cases} \binom{n+r}{r} = \left| \frac{(n+r) \cdots (n+1)}{r!} \right|, & i = 0, n \geq 0; \quad i = r, n < 0 \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

*Demostración.* Conocemos ya, por 8.5.7,  $h^0(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n))$ . Por inducción sobre  $r$  obtenemos, de la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión \*:

1) Para  $n \geq 0$ ,  $H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) = H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n+1))$  para  $i > 0$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(n)) &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ m > n}} H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(m)) \stackrel{2}{=} H^i(\mathbb{P}_r, \lim_{\substack{\longrightarrow \\ m > n}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r}(m)) \\ &= H^i(\mathbb{P}_r, \mathcal{O}_U) = H^i(\mathbb{P}_r - \mathbb{P}_{r-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_r - \mathbb{P}_{r-1}}) = 0 \end{aligned}$$

2) Para  $n \leq 0$  se demuestra el teorema por inducción descendente sobre  $n$  (observemos que el caso  $n = 0$  ha sido resuelto en el caso anterior). □

**9. Teorema:** Sea  $X = \text{Proj } k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  una variedad algebraica y  $\mathcal{M}$  un haz coherente en  $X$ . Se cumple que  $h^i(X, \mathcal{M}) < \infty$  para todo  $i$ .

<sup>2</sup>En espacios topológicos noetherianos la cohomología conmuta con límites inductivos.

*Demostración.* Sea  $k[x_0, \dots, x_n] \rightarrow k[\xi_0, \dots, \xi_n]$  el epimorfismo graduado obvio, que induce una inmersión cerrada  $i: X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ . Por ser  $i$  un morfismo finito,  $h^i(X, \mathcal{M}) = h^i(X, i_*\mathcal{M})$  y  $i_*\mathcal{M}$  es un haz coherente en  $\mathbb{P}_n$ . Basta demostrar el teorema para  $X = \mathbb{P}_n$ . Por 7.2.5, sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(n_i) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

Tomando la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos que  $h^n(\mathbb{P}_n, \mathcal{M}) < \infty$ . En particular  $h^n(\mathbb{P}_n, \text{Ker}) < \infty$ . De nuevo, por la sucesión exacta larga de cohomología  $h^{n-1}(\mathbb{P}_n, \mathcal{M}) < \infty$ . En particular  $h^{n-1}(\mathbb{P}_n, \text{Ker}) < \infty$ . Por inducción descendente concluimos.  $\square$

**10. Proposición:** *Sea  $i: C \hookrightarrow \mathbb{P}_2$  la curva proyectiva plana definida por un polinomio homogéneo  $p_n(x_0, x_1, x_2) = 0$ , entonces  $h^1(C, \mathcal{O}_C) = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ .*

*Demostración.* Tómesese la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión

$$0 \rightarrow \mathfrak{p}_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n) \xrightarrow{\cdot p_n(x_0, x_1, x_2)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \rightarrow i_*\mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

donde  $\mathfrak{p}_C$  es el haz de ideales de funciones que se anulan en  $C$ .  $\square$

**11. Corolario:** *Si  $C$  es una curva proyectiva plana íntegra, de grado  $n$ , sobre un cuerpo algebraicamente cerrado entonces el género geométrico  $g = h^1(C, \mathcal{O}_C)$  es*

$$g = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} - \sum_{x \in \text{Sing } C} \sum_{y \in a_x} \frac{m_y \cdot (m_y - 1)}{2}$$

donde  $a_x$  es el árbol de explosión asociado a la desingularización de  $x$ , y  $m_y$  es la multiplicidad en el punto  $y$ .

*Demostración.* Sea  $\pi: \bar{C} \rightarrow C$  el morfismo de desingularización. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\bar{C}} \rightarrow \bigoplus_{x \in \text{Sing } C} \bar{\mathcal{O}}_{C,x}/\mathcal{O}_{C,x} \rightarrow 0$$

Como  $k$  es algebraicamente cerrado, tenemos que  $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \Gamma(C, \pi_*\mathcal{O}_{\bar{C}}) = \Gamma(\bar{C}, \mathcal{O}_{\bar{C}}) = k$ , luego

$$g = h^1(\bar{C}, \mathcal{O}_{\bar{C}}) = h^1(C, \mathcal{O}_C) - \dim_k \bigoplus_{x \in \text{Sing } C} \bar{\mathcal{O}}_{C,x}/\mathcal{O}_{C,x}$$

Sabemos que  $\dim_k \bigoplus_{x \in \text{Sing } C} \bar{\mathcal{O}}_{C,x}/\mathcal{O}_{C,x} = \sum_{x \in \text{Sing } C} \sum_{y \in a_x} \frac{m_y \cdot (m_y - 1)}{2}$ . Por la proposición anterior  $h^1(C, \mathcal{O}_C) = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$  y concluimos.  $\square$

## Capítulo 9

# Teoría de la dualidad en curvas algebraicas

### 9.1 Introducción

Si  $X$  es una variedad diferenciable compacta orientada, tenemos el isomorfismo  $H^i(X, \mathbb{R}) \simeq H^{n-i}(X, \mathbb{R})^*$ ,  $w_i \mapsto w_i: w_i(w_{n-i}) = \int_X w_i \wedge w_{n-i}$ . El objetivo de la teoría de la dualidad es dualizar la cohomología. Ahora en Geometría Algebraica, sea  $C$  es una curva completa y consideremos el funtor sobre la categoría de  $\mathcal{O}_C$ -módulos coherentes

$$\mathcal{M} \rightsquigarrow H^1(C, \mathcal{M})^*$$

Este funtor es exacto por la izquierda, por el teorema de representabilidad será representable por un  $\mathcal{O}_C$ -módulo cuasicoherente  $w_C$ . Es decir,

$$\text{Hom}_C(\mathcal{M}, w_C) = H^1(C, \mathcal{M})^*$$

Probaremos que si  $C$  es no singular entonces  $w_C = \Omega_{C/k}$ . Además, el morfismo  $\text{Id}: \Omega_{C/k} \rightarrow \Omega_{C/k}$  se corresponderá por dualidad con un elemento  $\text{Res} \in H^1(C, \Omega_{C/k})^*$ , que es el residuo del análisis complejo.

La teoría de dualidad, junto con el Riemann-Roch fuerte permite el cálculo de la dimensión de los espacios de las funciones con polos en determinados puntos de órdenes prefijados. Cálculo que resuelve muchos problemas de tipo geométrico. Veremos diversas aplicaciones de la teoría de dualidad: Teorema de Hurwitz, clasificación de las curvas elípticas e hiperelípticas, inmersión canónica de una curva en un espacio proyectivo, etc.

### 9.2 Teorema de Riemann-Roch débil

Sea  $C$  una curva completa y  $x_1, \dots, x_n$  puntos cerrados no singulares de  $C$ . Dado  $D = \sum_i n_i \cdot x_i$ , denotaremos  $\mathcal{L}_D$ , al haz de línea sobre  $C$ , determinado por

$$\mathcal{L}_D(V) = \begin{cases} \mathcal{O}_C(V) & \text{si } V \subseteq U' \\ \{f \in \Sigma_C: v_{x_i}(f) \geq -n_i, x_i \in V\} & \text{si } V \subseteq U \end{cases}$$

donde  $U$  es el abierto de puntos no singulares de  $C$  y  $U' = C - \{x_i\}_i$ .

**1. Teorema Riemann-Roch débil:** *Sea  $C$  una curva completa y  $\mathcal{L}_D$  el haz de línea definido por  $D$ . Se verifica*

$$\chi(C, \mathcal{L}_D) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr } D$$

*Demostración.* Dado un punto cerrado  $x \in C$  no singular, consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{-x} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow k(x) \rightarrow 0$$

donde  $k(x)$  es un haz concentrado en  $x$ , de modo que  $h^0(C, k(x)) = \dim_k k(x) = \text{gr } x$ . Tensorializando por  $\mathcal{L}_D$  resulta

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{D-x} \rightarrow \mathcal{L}_D \rightarrow k(x) \rightarrow 0$$

Luego  $\chi(\mathcal{L}_D) = \chi(\mathcal{L}_{D-x}) + 1$ . Así pues, el teorema de Riemann-Roch se verificará para  $\mathcal{L}_D$  si y sólo si se verifica para  $\mathcal{L}_{D-x}$ . Por tanto, por suma y resta de puntos a  $D$ , el teorema de Riemann-Roch se verificará para  $\mathcal{L}_D$  si y sólo si se verifica para  $\mathcal{O}_C$ , y en este caso es obvio.  $\square$

La siguiente proposición nos será útil en teoría de dualidad.

**2. Proposición:** *Sea  $C$  una curva completa y  $x \in C$  un punto no singular. Sea  $\mathcal{M}$  un módulo coherente de rango  $r$ . Denotemos  $\mathcal{M}_{nx} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{nx}$ . Entonces,*

$$1. h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = \text{cte para todo } n \gg 0, \text{ y } h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) = r \cdot \text{gr } x \cdot n + \text{cte. para todo } n \gg 0.$$

$$2. h^1(C, \mathcal{M}_{-nx}) = r \cdot \text{gr } x \cdot n + \text{cte para todo } n \gg 0, \text{ y } h^0(C, \mathcal{M}_{-nx}) = \text{cte}' \text{ para todo } n \gg 0.$$

*Demostración.* 1. Si  $\mathcal{M}$  es de rango cero, entonces  $\mathcal{M}_{nx} = \mathcal{M}$ ,  $H^0(C, \mathcal{M}_{nx}) = H^0(C, \mathcal{M})$  y  $H^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = 0$ . Se concluye.

Sea  $T(\mathcal{M})$  la torsión de  $\mathcal{M}$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/T(\mathcal{M}) \rightarrow 0$$

Tensorializando por  $\mathcal{L}_{nx}$ , obtenemos la sucesión exacta  $0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}_{nx} \rightarrow (\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_{nx} \rightarrow 0$ . Por tanto,  $h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) = h^0(C, T(\mathcal{M})) + h^0(C, (\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_{nx})$  y  $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = h^1(C, (\mathcal{M}/T(\mathcal{M}))_{nx})$ . En conclusión, podemos suponer que  $\mathcal{M}$  no tiene torsión.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{(n-1)x} \rightarrow \mathcal{L}_{nx} \rightarrow k(x) \rightarrow 0$$

Tensorializando por  $\otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{M}$ , la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_{(n-1)x} \xrightarrow{i} \mathcal{M}_{nx} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x) \rightarrow 0$$

es exacta, es decir  $i$  es inyectiva. En efecto, en  $C - x$  obviamente lo es, y en gérmenes en  $x$  lo es porque  $i$  es multiplicar por un parámetro de la curva que pase por  $x$ .

Tomando cohomología, tenemos el epimorfismo  $H^1(C, \mathcal{M}_{(n-1)x}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{M}_{nx})$ , luego  $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) \leq h^1(C, \mathcal{M}_{(n-1)x})$  y para todo  $n \gg 0$   $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = \text{cte}$ . Ahora, para todo  $n > N$ ,  $h^1(C, \mathcal{M}_{nx}) = \text{cte}$  y  $h^0(C, \mathcal{M}_{(n+1)x}) = h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) + h^0(C, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x))$ . Ahora bien,  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x)(C) = (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x))_x =$

$\mathcal{M}/\mathfrak{m}_x\mathcal{M}$ , que es un  $k(x)$ -espacio vectorial de dimensión  $r$ , porque  $\mathcal{M}_x$  es libre de torsión de rango  $r$ , luego libre de rango  $r$ . En conclusión,  $h^0(C, \mathcal{M}_{(n+1)x}) = h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) + r \cdot \text{gr } x$ , y en general  $h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) = h^0(C, \mathcal{M}_{Nx}) + (n - N) \cdot r \cdot \text{gr } x = r \cdot \text{gr } x \cdot n + \text{cte.}$ .

2. Pruébese primero que se puede suponer que  $\mathcal{M}$  no tiene torsión y a continuación considérese la sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathcal{M}_{(-n-1)x} \rightarrow \mathcal{M}_{-nx} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_C} k(x) \rightarrow 0$ .

□

**3. Proposición :** *Sea  $C$  una curva completa y  $x \in C$  un punto no singular. Sea  $\mathcal{M}$  un haz cuasicoherente. Si  $h^0(C, \mathcal{M}_{nx}) \leq r \cdot \text{gr } x \cdot n + \text{cte.}$ , para todo  $n \gg 0$  entonces  $\mathcal{M}$  es un módulo coherente de rango menor o igual que  $r$ .*

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre  $r$ .

Consideremos la sucesión exacta natural  $0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ . Tensorializando por  $\mathcal{L}_{nx}$ , tenemos  $0 \rightarrow T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}_{nx}$ . Por tanto,  $h^0(C, T(\mathcal{M})) < \infty$ . Ahora bien,  $H^0(C, T(\mathcal{M})) = \bigoplus_{x \in C} T(\mathcal{M})_x$ . Luego sólo para un número finito de puntos cerrados  $T(\mathcal{M})_x \neq 0$  y éstos son  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita. En consecuencia,  $T(\mathcal{M})$  es un módulo coherente de rango cero.

Haciendo cociente por  $T(\mathcal{M})$  podemos suponer que  $\mathcal{M}$  no tiene torsión.

Sea  $L$  coherente de rango 1 y una inclusión  $L \hookrightarrow \mathcal{M}$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow L_{nx} \rightarrow \mathcal{M}_{nx} \rightarrow (\mathcal{M}/L)_{nx} \rightarrow 0$$

Por la sucesión exacta larga de cohomología e inducción sobre  $r$ ,  $\mathcal{M}/L$  es coherente de rango menor o igual que  $r - 1$ . Luego  $\mathcal{M}$ , es coherente de rango menor o igual que  $r$ . □

**4. Ejercicio :** Sea  $C$  una curva completa no singular y  $x \in C$  un punto cerrado. Se verifica que  $C - x$  es una curva afín.

*Resolución:* Por 9.2.2  $h^0(C, \mathcal{L}_{(n+1)x}) \neq h^0(C, \mathcal{L}_{nx})$  para  $n \gg 0$ , luego existe una función  $f \in \Sigma_C$  con un único polo (de orden  $n + 1$ ) en  $x$ . Por tanto, el morfismo afín definido por  $f$

$$f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$$

verifica que  $f^{-1}(\infty) = (n + 1)x$ , luego  $C - x = f^{-1}(\mathbb{P}_1 - \infty)$ , que es afín.

## 9.3 Teoremas de dualidad y Riemann-Roch fuerte

Sea  $C$  una curva completa sobre  $k$ . Por los teoremas de finitud del capítulo anterior sabemos que  $H^2(C, \mathcal{M}) = 0$  para todo haz cuasicoherente  $\mathcal{M}$ . Por tanto, el funtor,  $H^1(C, \mathcal{M})^*$  definido en la categoría de módulos coherentes, que asigna a cada haz coherente el dual sobre  $k$  de su primer grupo de cohomología, es exacto por la izquierda.

**1. Definición :** Al haz cuasicoherente, que denotaremos por  $w_C$ , representante del funtor  $H^1(C, -)^*$ , que existe por 9.8.6, se le denomina haz dualizante de  $C$ . Por tanto, para todo módulo coherente  $\mathcal{M}$  se verifica

$$H^1(C, \mathcal{M})^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{M}, w_C).^1$$

<sup>1</sup>De hecho, como el funtor  $H^1(C, -)^*$  y  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(-, w_C)$ , transforman límites inductivos en límites proyectivos, y todo módulo cuasicoherente es límite inductivo de módulos coherentes, la igualdad también es cierta si suponemos  $\mathcal{M}$  cuasicoherente.

**2. Teorema Riemann-Roch fuerte** Sea  $C$  una curva completa,  $\{x_i\}$  puntos no singulares de  $C$ ,  $D = \sum_i n_i x_i$  y  $\mathcal{L}_D$  el haz de línea asociado a  $D$ . Se verifica que

$$h^0(C, \mathcal{L}_D) - h^0(C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-D}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr } D$$

*Demostración.*  $H^1(C, \mathcal{L}_D)^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}_D, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-D}) = \Gamma(C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-D})$ . Luego  $h^1(C, \mathcal{L}_D) = h^0(C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-D})$ . Ahora ya, por el Riemann-Roch débil se concluye el teorema.  $\square$

**3. Proposición:** El haz dualizante  $w_C$  es un haz coherente de rango 1 sin torsión. En particular, si  $C$  es una curva completa no singular,  $w_C$  es un haz de línea.

*Demostración.* Probemos que el dualizante no tiene torsión: Sea  $T$  un módulo coherente incluido en la torsión de  $w_C$ , se verifica  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(T, w_C) = H^1(C, T)^* = 0$  porque  $T$  es flasco. Luego,  $T = 0$  y  $w_C$  es libre de torsión.

Nos falta ver que el rango de  $w_C$  es 1. Sea  $x \in C$  no singular. Tenemos que  $H^0(C, (w_C)_{nx}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, w_C \otimes \mathcal{L}_{nx}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}_{-nx}, w_C) = H^1(C, \mathcal{L}_{-nx})^*$ . Por 9.2.3,  $h^0(C, (w_C)_{nx}) = \text{gr } x \cdot n + \text{cte}$ , para  $n \gg 0$ . Por 9.2.2,  $w_C$  es de rango 1.  $\square$

**4. Definición:** Sea  $C$  una curva completa. Denominamos género aritmético,  $g_a$ , de  $C$  a  $h^1(C, \mathcal{O}_C)$  y género geométrico,  $g$ , al género aritmético de su desingularización.

**5. Proposición:** Sea  $C$  una curva completa.

$$1. h^0(C, w_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C) \underset{\text{def}}{=} \underset{\text{Not}}{\text{género aritmético}} = g_a$$

$$2. \text{Supongamos que } C \text{ es no singular, entonces } h^1(C, w_C) = h^0(C, \mathcal{O}_C).$$

*Demostración.* 1.  $H^0(C, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, w_C) = H^1(C, \mathcal{O}_C)^*$ . Luego,  $h^0(C, w_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ .

$$2. H^1(C, w_C)^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(w_C, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \mathcal{O}_C).$$

$\square$

**6. Definición:** Sea  $C$  una curva completa no singular. Llamaremos divisores canónicos a los divisores cuyo haz de línea asociado sea el haz dualizante.

**7. Proposición:** Sea  $C$  una curva no singular y  $\mathcal{L}_K = w_C$  el haz dualizante. Se verifica que  $\text{gr } K = 2\chi(C, \mathcal{O}_C)$ . En particular, si  $k$  es algebraicamente cerrado en  $\Sigma_C$ , y denotamos por  $g = h^1(C, \mathcal{O}_C)$  al género geométrico de  $C$  tenemos que

$$\text{gr } K = 2g - 2$$

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata del Riemann-Roch débil para  $\mathcal{L}_K$  y la proposición anterior.  $\square$

**8. Ejercicio:** Sea  $C$  una curva completa sobre un cuerpo  $k$  íntegramente cerrado en  $\Sigma_C$ . Probar que  $h^1(C, w_C) = 1$ .

**9. Ejercicio:** Si  $L$  es un haz coherente libre de torsión de rango 1 sobre una curva completa  $C$ , de modo que  $h^0(C, L) = g_a$  y  $h^1(C, L) = h^0(C, \mathcal{O}_C)$ , entonces  $L$  es isomorfo al haz dualizante.

**10. Ejercicio:** Sea  $C \xrightarrow{i} \mathbb{P}_2$  una curva proyectiva plana de grado  $n$ . Demuéstrese que  $\mathcal{O}_C(n-3) \underset{\text{def}}{=} i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n-3))$  es el haz dualizante de  $C$ . (Pista: Tensorialícese por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n-3)$  la sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \rightarrow i_*\mathcal{O}_C \rightarrow 0$  y utilícese el ejercicio anterior).

## 9.4 Dualizante de una curva lisa

**1. Definición:** Sea  $X$  un  $k$ -esquema. Denotamos por  $\Omega_{X/k}$  y lo denominamos haz de diferenciales de Kähler de  $X$ , al haz asociado al prehaz

$$U \rightsquigarrow \Omega_{\mathcal{O}_X(U)/k}, \quad \text{para cada abierto } U \subseteq X$$

Con toda generalidad,

**2. Definición:** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas. Sea  $\delta: X \rightarrow X \times_Y X$  el morfismo diagonal y  $\Delta$  es el núcleo del morfismo  $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \rightarrow \delta_* \mathcal{O}_X$ . Se define, el haz de módulos de diferenciales relativas de  $X$  sobre  $Y$ , que denotaremos  $\Omega_{X/Y}$ , por

$$\Omega_{X/Y} \stackrel{\text{def}}{=} \delta^* \Delta$$

Si  $V \subseteq Y$  es un abierto afín y  $U \subseteq X$  es un abierto afín tal que  $f(U) \subseteq V$ , entonces  $\Omega_{X/Y}(U) = \Omega_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}$ .

**3. Ejercicio:** Sea  $\mathbb{P}_1$  la variedad de Riemann de  $k(x)$ . Calcular el divisor de ceros y polos de  $dx \in \Omega_{k(x)/k}$ . Demostrar que  $\Omega_{\mathbb{P}_1/k} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2)$ .

Sea  $C$  una curva no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea  $U = \text{Spec } A \subseteq C$  un abierto afín. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Delta_A \rightarrow A \otimes_k A \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$$

Tenemos que  $\pi$  es un epimorfismo de un anillo regular de dimensión 2 en un anillo regular de dimensión 1. Por tanto,  $\Delta_A$  es un ideal de  $A \otimes_k A$  localmente principal. Luego  $\Delta_A/\Delta_A^2 = \Omega_{C/k}(U)$  es un  $A$ -módulo localmente principal. Hemos demostrado la proposición siguiente.

**4. Proposición:** Si  $C$  es una curva no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces  $\Omega_{C/k}$  es un haz de línea.

**Preámbulo:** Sea  $C$  una curva no singular, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Sean  $U_1 = \text{Spec } B_1 = C - y_1$ ,  $U_2 = \text{Spec } B_2 = C - y_2$  dos abiertos afines, que recubren  $C$ . Sea  $U = \text{Spec } A \stackrel{i}{\subset} C$  un abierto afín, de modo que  $A = (B_1)_{b_1} = (B_2)_{b_2}$ .

Dado un haz de  $k$ -módulos  $M$ , denotamos  $M \otimes_k A$  como el haz sobre  $C$  definido por  $(M \otimes_k A)(V) = M(V) \otimes_k A$ . Es sencillo probar que  $H^i(C, M \otimes_k A) = H^i(C, M) \otimes_k A$ . Además, si  $\mathcal{M}$  es cuasicoherente entonces  $\mathcal{M} \otimes_k A$  también lo es.

Denotemos  $i_* (\mathcal{M}|_U) \stackrel{\text{Not}}{=} \mathcal{M}_U$ . Sea  $\Delta$  al haz cuasicoherente núcleo del morfismo  $\pi: \mathcal{O}_C \otimes_k A \rightarrow \mathcal{O}_U$ ,  $a' \otimes a \mapsto a \cdot a'$ . Sea  $\Delta_i$  el núcleo del morfismo  $B_i \otimes_k B_i \rightarrow B_i, b \otimes b' \mapsto bb'$ . Consideremos las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Delta(U_i) \rightarrow B_i \otimes_k A \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \Delta_i \rightarrow B_i \otimes_k B_i \xrightarrow{\pi} B_i \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Obviamente  $\Delta(U_i) = (\Delta_i)_{1 \otimes b_i}$ .

$\Delta(U_i)$  es un  $B_i \otimes A$ -módulo localmente principal, porque  $\Delta_i$  es un  $B_i \otimes_k B_i$ -módulo localmente principal. Es una sencilla comprobación (en los abiertos  $U_i$ ) que dado un haz coherente  $\mathcal{M}$ , se verifica que  $(\mathcal{M} \otimes_k A)/\Delta(\mathcal{M} \otimes_k A) = \mathcal{M}_U$ . También es fácil ver (en los abiertos  $U_i$ ) que  $\Delta/\Delta^2 = (\Omega_{C/k})_U$ .

**5. Teorema:** Sea  $C$  una curva no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Se verifica que

$$w_C \simeq \Omega_{C/k}$$

*Demostración.* Sea  $x \in C$  un punto cerrado. Se verifica la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow w_C & \xrightarrow{i} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, w_C) & \xrightarrow{\pi} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) & \rightarrow & 0 \\ & & w & \mapsto & i(w): a \mapsto a \cdot w & & \\ & & f & \mapsto & \pi(f): \bar{a} \mapsto f(\bar{a}) & & \end{array}$$

Observemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}_{-x}, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_x) = w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_x$ . Tomando la sucesión exacta larga de cohomología obtenemos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) \xrightarrow{\delta_x} H^1(C, w_C) \rightarrow H^1(C, w_C \otimes L_x) = H^0(C, L_{-x}) = 0$$

Por tanto, por dimensiones  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) \stackrel{\delta_x}{\cong} H^1(C, w_C)$ . Así pues, tenemos que dado  $\xi \in H^1(C, w_C)$  no nulo, un isomorfismo canónico

$$\delta_x^{-1}(\xi): \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = w_C/\mathfrak{m}_x w_C$$

Tomando en vez de  $x$  un “punto general” obtendremos el isomorfismo  $\Omega_{C/k} \simeq w$ :

Siguiendo las notaciones del preámbulo, consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow w_C \otimes_k A \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_C \otimes_k A}(\Delta, w_C \otimes_k A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_C \otimes_k A}(\Delta/\Delta^2, w_U) \rightarrow 0$$

Por paso a fibras en el punto  $x \in U = \text{Spec } A$ , tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & w_C \otimes_k A & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C \otimes_k A}(\Delta, w_C \otimes_k A) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C \otimes_k A}(\Delta/\Delta^2, w_U) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & w_C & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, w_C) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Así pues, tomando la sucesión exacta larga de cohomología, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{A \otimes_k A}(\Omega_{C/k}(U), w_C(U)) & \xrightarrow{\delta} & H^1(C, w_C \otimes_k A) = H^1(C, w_C) \otimes_k A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, w_C/\mathfrak{m}_x w_C) & \stackrel{\delta_x}{\cong} & H^1(C, w_C) \end{array}$$

De modo que,  $\delta$  es un morfismo entre  $A$ -módulos localmente principales que en fibras sobre  $x$ , es isomorfismo. Luego  $\delta$  es un isomorfismo y  $\delta^{-1}(\xi): \Omega_{C/k}(U) \rightarrow w_C(U)$  es un isomorfismo que en fibras sobre  $x$  es  $\delta_x^{-1}(\xi \otimes 1)$ . Luego existe un isomorfismo global  $\Omega_{C/k} \rightarrow w_C$  (que en fibras es  $\delta_x^{-1}(\xi)$ ).  $\square$

## 9.5 Residuo y morfismo traza

Sea  $C$  una curva completa y  $(w_C, R)$  un dualizante. Sabemos que  $w_C$  es un haz de módulos sin torsión. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow w_C \rightarrow \widetilde{w_{C,p_g}} \rightarrow \widetilde{w_{C,p_g}}/w_C \rightarrow 0$$

Obviamente,  $(\widetilde{w_{C,p_g}/w_C})_{p_g} = 0$ , luego  $(\widetilde{w_{C,p_g}/w_C})(U) = \bigoplus_{x \in U} w_{C,p_g}/w_{C,x}$  y

$$H^1(C, w_C) = [\bigoplus_{x \in C} w_{C,p_g}/w_{C,x}]/w_{C,p_g} \text{ y } R: [\bigoplus_{x \in C} w_{C,p_g}/w_{C,x}]/w_{C,p_g} \rightarrow k$$

Si denotamos la composición  $w_{C,p_g} \rightarrow w_{C,p_g}/w_{C,x} \rightarrow H^1(C, w_C) \xrightarrow{R} k$ ,  $R_x$ , tenemos que dada  $w = \bigoplus_x w_x \in H^1(C, w_C)$  entonces  $R(\bigoplus_x w_x) = \sum_x R_x(w_x)$  y dada  $w \in w_{C,p_g}$

$$0 = R(\bar{w}) = \sum_x R_x(w)$$

Por definición, si  $w_x \in w_{C,x}$ ,  $R_x(w_x) = 0$ . Veamos que dada  $w \in w_{C,p_g}$ , si  $R_x(\mathcal{O}_{C,x} \cdot w) = 0$ , para todo  $x \in U$ , entonces  $w \in w_C(U)$ . Sea  $w'$  el  $\mathcal{O}_C$ -módulo coherente definido por ser el subhaz de  $\widetilde{w_{C,p_g}}$ , tal que  $w'_U = w_C|_U + \mathcal{O}_U \cdot w$  y  $w'_{C-U} = w_C|_{C-U}$ . Por la definición de  $w'$ , tenemos  $w'_{p_g} = w_{C,p_g}$ , una inclusión  $w_C \xrightarrow{i} w'$  y el morfismo  $R': H^1(C, w') \rightarrow k$ , que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [\bigoplus_{x \in C} w_{C,p_g}/w_{C,x}]/w_{C,p_g} & \xrightarrow{\text{epi}} & [\bigoplus_{x \in C} w_{C,p_g}/w'_x]/w_{C,p_g} \\ \downarrow R & \swarrow R' & \\ k & & \end{array}$$

Es decir, por el morfismo  $i^*: H^1(C, w')^* \rightarrow H^1(C, w_C)^*$ ,  $i^*(R') = R$ . Por definición, de dualizante existe un morfismo  $j: w' \rightarrow w$  de modo que por el morfismo  $j^*: H^1(C, w_C)^* \rightarrow H^1(C, w')^*$ ,  $j^*(R) = R'$ . Por tanto, por dualidad,  $j \circ i = \text{Id}$  y por ser  $w_C$  y  $w'$  módulos de rango uno sin torsión, la inclusión  $i: w \hookrightarrow w'$ , es la identidad. En conclusión,  $w' = w_C$  y  $w \in w_C(U)$ .

En 9.4.5, hemos probado que  $w_C = \Omega_{C/k}$ . En el isomorfismo canónico antes definido

$$\delta: \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\Omega_{C/k}, \Omega_{C/k}) \simeq H^1(C, \Omega_{C/k})$$

existe un único  $R \in H^1(C, \Omega_{C/k}^*)$  tal que  $R(\delta(\text{Id})) = 1$ . Este  $R$  lo denotaremos  $Res$  y lo llamaremos residuo. El residuo está definido canónicamente. La pareja  $(\Omega_{C/k}, Res)$  representa al funtor  $H^1(C, -)^*$ .

Observemos que  $\Omega_{\Sigma_C/k}/\Omega_{\mathcal{O}_{C,x}/k} = \{\sum_{i>0} \frac{a_i dt_x}{t_x^i}, a_i \in k\}$ . Veamos que  $Res_x(\frac{dt_x}{t_x}) = 1$ .

En el isomorfismo antes definido

$$\delta_x: \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \Omega_{C/k} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x) \simeq H^1(C, \Omega_{C/k})$$

vimos que  $\delta_x(d_x) = \delta(\text{Id})$ , donde  $d_x: \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \Omega_{C/k} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x$ , está definido por  $d_x(\bar{a}) = d_x a$ , es decir, vía la identificación canónica  $\Omega_{C/k} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ ,  $d_x$  es el morfismo identidad. En conclusión,  $Res(\delta_x(d_x)) = 1$ . Observemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, \Omega_{C/k})_x = \mathcal{O}_{C,x} \frac{dt_x}{t_x}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, \Omega_{C/k})|_{C-x} = \Omega_{C/k}|_{C-x}$ . Denotemos  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, \Omega_{C/k}) = \Omega_{C/k}[\frac{dt_x}{t_x}]$ . Observemos que  $\Omega_{C/k}[\frac{dt_x}{t_x}]_{p_g} = \Omega_{\Sigma_C/k}$  y en el morfismo natural  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x, \Omega_{C/k})_x \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \Omega_{C/k} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x)_x$ ,  $\frac{dt_x}{t_x}$  se aplica en  $d_x$ .

Del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_{C/k} & \longrightarrow & \Omega_{C/k}[\frac{dt_x}{t_x}] & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \Omega_{C/k}/\mathfrak{m}_x\Omega_{C/k}) \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Omega_{C/k} & \longrightarrow & \widetilde{\Omega}_{\Sigma_C/k} & \longrightarrow & \widetilde{\Omega}_{\Sigma_C/k}/\Omega_{C/k} \longrightarrow 0
\end{array}$$

es inmediato comprobar,  $\text{Res}_x(\frac{d_x t_x}{t_x}) = \text{Res}(\delta_x(d_x)) = 1$ .

Sean  $x = 0 \in \mathbb{P}_1$ ,  $\mathfrak{m}_0 = (t) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1,0}$ , y el automorfismo  $h_\lambda: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ ,  $h_\lambda(\alpha) = \lambda \cdot \alpha$ . Entonces  $\text{Res}_0(\frac{d_0(\lambda \cdot t)}{(\lambda \cdot t)^n}) = \text{Res}_0(\frac{d_0 t}{t^n})$  y  $\text{Res}_0(\frac{d_0 t}{t^n}) = 0$ , para  $n > 1$ . Veamos que en curvas el residuo valora de modo similar. Para ello vamos a proyectar la curva sobre una recta proyectiva y compararemos el residuo en la curva con el residuo en la recta proyectiva.

### Morfismo traza

Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un morfismo finito entre curvas completas. Observemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{M}, w_C) = H^1(C, \mathcal{M})^* = H^1(C', \pi_* \mathcal{M})^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\pi_* \mathcal{M}, w_{C'})$ . Así pues,  $\text{Id}: w_C \rightarrow w_C$ , se corresponde con un morfismo, denotémoslo  $Tr$ ,  $Tr: \pi_* w_C \rightarrow w_{C'}$ . Cada morfismo  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow w_C$ , se corresponde biunívocamente con  $Tr \circ \pi_*(\varphi): \pi_* \mathcal{M} \rightarrow w_{C'}$ . En particular, dado el morfismo  $tr: \pi_* \pi^* w_{C'} = w_{C'} \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} \pi_* \mathcal{O}_C \rightarrow w_{C'}$ ,  $tr(w \otimes a) \stackrel{\text{def}}{=} tr(a) \cdot w$ , tenemos un morfismo  $\varphi: \pi^* w_{C'} \rightarrow w_C$  y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\pi_* w_C & \xrightarrow{Tr} & w_{C'} \\
\swarrow \pi_*(\varphi) & & \nearrow tr \\
& w_{C'} \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} \pi_* \mathcal{O}_C &
\end{array}$$

**1. Teorema:** Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un morfismo finito entre curvas completas. Se cumple que

$$\pi_* w_C = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\pi_* \mathcal{O}_C, w_{C'})$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\mathcal{M}, \pi_* w_C) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\pi^* \mathcal{M}, w_C) = H^1(C, \pi^* \mathcal{M})^* = H^1(C', \pi_* \pi^* \mathcal{M})^* \\
&= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\pi_* \pi^* \mathcal{M}, w_{C'}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} \pi_* \mathcal{O}_C, w_{C'}) \\
&= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\mathcal{M}, \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\pi_* \mathcal{O}_C, w_{C'}))
\end{aligned}$$

□

Si denotamos por  $\phi: \pi_* w_C = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\pi_* \mathcal{O}_C, w_{C'})$ , el morfismo identidad del teorema 9.5.1, entonces  $\phi(w)(a) = Tr(a \cdot w)$  (compruébese).

Si  $(w_C, R_C)$  y  $(w_{C'}, R_{C'})$  representan los funtores  $H^1(C, -)^*$  y  $H^1(C', -)^*$  respectivamente, el morfismo  $Tr: \pi_* w_C \rightarrow w_{C'}$  transforma  $R_{C'}$  en  $R_C$ , es decir,  $Tr^*: H^1(C', w_{C'})^* \rightarrow H^1(C', \pi_* w_C)^* = H^1(C, w_C)^*$  cumple

$$\boxed{Tr^*(R_{C'}) = R_C}$$

Sean  $g$  y  $g'$  los puntos genéricos de  $C$  y  $C'$ . Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_* \widetilde{w_{C',g}} & \pi_* (\widetilde{w_{C',g}}/w_C) & \\
 \parallel & \parallel & \\
 0 \rightarrow \pi_* w_C \rightarrow (\pi_* w_C)_{g'} \rightarrow (\pi_* w_C)_{g'}/\pi_* w_C \rightarrow 0 & & \Gamma(C, \widetilde{w_{C',g}}/w_C)/w_{C,g} \\
 \downarrow Tr & \downarrow Tr & \downarrow Tr \\
 0 \rightarrow w_{C'} \rightarrow \widetilde{w_{C',g'}} \rightarrow \widetilde{w_{C',g'}}/w_{C'} \rightarrow 0 & & \Gamma(C', \widetilde{w_{C',g'}}/w_{C'})/w_{C',g'}
 \end{array}$$

Además,  $w_{C,g}/\pi_*(w_C)_x = \bigoplus_{\pi(x_i)=x} w_{C,g}/w_{C,x_i}$ , como puede comprobarse localmente, luego

$$\boxed{R_x(Tr(w)) = \sum_{\pi(x_i)=x} R_{x_i}(w)}$$

Supongamos ahora que  $C$  y  $C'$  son curvas no singulares sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $y$   $\pi$  un morfismo separable (entre los cuerpos de funciones). Sabemos que  $w_C = \Omega_{C/k}$  y  $w_{C'} = \Omega_{C'/k}$ . Determinemos  $Tr$ . Observemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\pi_* w_C, w_{C'}) = H^1(C, w_C)^* = k$ , luego  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\pi_* w_C, w_{C'}) = k \cdot Tr$ .

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Omega_{C'/k} \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} \pi_* \mathcal{O}_C \rightarrow \pi_* \Omega_{C/k} \rightarrow \pi_* \Omega_{C/C'} \rightarrow 0$$

Si  $U = \text{Spec } A \subset C'$  y  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } B$ , tomando secciones en  $U$ , tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k} \rightarrow \Omega_{B/A} \rightarrow 0$$

Se cumple que  $\Omega_{B/k} = \Omega_{A/k} \otimes_A B + \langle b^n db \mid b \in B, n \in \mathbb{N} \rangle_A$ , pues completando en cada punto  $\widehat{B} = \widehat{A}[x]/(x^m)$ . Sea  $\Sigma$  la envolvente de Galois de la extensión  $\Sigma_{C'} \hookrightarrow \Sigma_C$  y  $\{\sigma_i\} = \text{Hom}_{\Sigma_{C'}}(\Sigma_C, \Sigma)$ . Recordemos que  $tr(b) = \sum_i \sigma_i(b)$ , para cada  $b \in B$ . Consideremos los morfismos  $\sigma_i: \Omega_{B/k} \rightarrow \Omega_{\Sigma/k}$ ,  $\sigma_i(bdb') = \sigma_i(b)d\sigma_i(b')$ . Se verifica que  $\text{Im}(\sum_j \sigma_j) \subseteq \Omega_{A/k}$ . Efectivamente, consideremos la  $\mathbb{Z}$ -álgebra  $\mathbb{Z}[x_{\sigma_i}]$ , el grupo  $G = \{\sigma_i\}$  y la acción  $\sigma_i(x_{\sigma_j}) = x_{\sigma_i \cdot \sigma_j}$ . Sea  $x = x_{\text{Id}}$ , tenemos que  $\sum_i \sigma_i(x_{\sigma_i}^{p^n \cdot m}) = (\sum_i \sigma_i(x_{\sigma_i}^m))^{p^n} + p^n \cdot \text{inv.}$ , donde  $\text{inv.} \in \mathbb{Z}[x_{\sigma_i}]^G$ ,  $p$  es un número primo y  $m$  es primo con  $p$ . Por tanto, formalmente se tiene la igualdad  $\sum_i \sigma_i(m \cdot x_{\sigma_i}^{p^n \cdot m-1} dx) = \sum_i \sigma_i(d \frac{x_{\sigma_i}^{p^n \cdot m}}{p^n}) = d \frac{(tr(x_{\sigma_i}^m)^{p^n} + p^n \cdot \text{inv.})}{p^n} = tr(x_{\sigma_i}^m)^{p^n-1} dtr(x_{\sigma_i}^m) + d \text{inv.}$ . Si consideramos el morfismo  $\mathbb{Z}[x_{\sigma_i}] \rightarrow \Sigma$ ,  $x_{\sigma_i} \mapsto \sigma_i(b)$ , fácilmente tendremos que  $\sum_i \sigma_i(b^n db) \in \Omega_{(\Sigma^G \cap B)/k} = \Omega_{A/k}$ . En conclusión, tenemos el morfismo

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_{B/k} & \rightarrow & \Omega_{A/k} \\
 w & \mapsto & \sum_i \sigma_i(w)
 \end{array}$$

Así pues,  $Tr = \lambda \cdot \sum_i \sigma_i$ ,  $\lambda \in k^*$ . Sea  $\pi(x) = x' \in C'$ , un punto que no sea de ramificación. Escribamos  $\mathfrak{m}_{x'} = (t') \subseteq \mathcal{O}_{C',x'}$ . Pensemos el morfismo  $\Sigma_{C'} \hookrightarrow \Sigma_C$  como una inclusión. Sea  $w = (0, \dots, \frac{dt'}{t'}, \dots, 0) \in H^1(C, \Omega_{C/k})$ , tenemos que

$$1 = \text{Res}_x(\frac{dt'}{t'}) = \text{Res}_C(w) = \text{Res}_{C'}(Tr(w)) = \text{Res}_{\pi(x)}(\lambda \cdot \frac{dt'}{t'}) = \lambda$$

Por tanto,  $Tr = \sum_i \sigma_i$ .

**2. Proposición:** *Sea  $C$  una curva no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado,  $x \in C$  y  $\mathfrak{m}_x = (t_x) \in \mathcal{O}_{C,x}$ . Se cumple que*

$$\boxed{Res_x\left(\frac{dt_x}{t_x^n}\right) = 0}$$

para  $n > 1$ .

*Demostración.* Consideremos el morfismo  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$ , inducido por la inclusión  $k(t_x) \hookrightarrow \Sigma_C$ . Sea  $w = (0, \dots, \frac{dt_x}{t_x}, \dots, 0) \in H^1(C, \Omega_{C/k})$ , tenemos que

$$Res_x\left(\frac{dt_x}{t_x^n}\right) = Res_C(w) = Res_{\mathbb{P}_1}(Tr(w)) = Res_{\pi(x)}\left(\frac{dt_x}{t_x^n}\right) = 0 \text{ si } n > 1$$

□

Concluamos esta sección con la formulación clásica del teorema de Riemann-Roch. Por dualidad  $H^0(C, \Omega_{C/k}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, \Omega_{C/k}) = H^1(C, \mathcal{O}_C)^*$ . Explícitamente, dado  $w \in H^0(C, \Omega_{C/k})$  define el morfismo  $\mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_{C/k}$ ,  $f \mapsto f \cdot w$ , y este morfismo define la composición de morfismos

$$\begin{array}{ccc} H^1(C, \mathcal{O}_C) & \rightarrow & H^1(C, \Omega_{C/k}) \\ f & \mapsto & f \cdot w \end{array} \xrightarrow{Res} \begin{array}{c} k \\ Res(f \cdot w) \end{array}$$

con  $f \in \Gamma(C, \tilde{\Sigma}_C/\mathcal{O}_C)$ . Así pues, si  $\{w_1, \dots, w_g\}$  es una base de  $H^0(C, \Omega_{C/k})$ , lo es de  $H^1(C, \mathcal{O}_C)^*$  y tenemos

$$\begin{array}{ccc} H^1(C, \mathcal{O}_C) & = & k \oplus \dots \oplus k \\ \tilde{f} & \mapsto & (Res(f \cdot w_1), \dots, Res(f \cdot w_g)) \end{array}$$

**3. Teorema:** *Sean  $x_1, \dots, x_r \in C$  puntos cerrados y  $f_i = \sum_{n=1}^{m_i} \frac{a_{i,n}}{t_i^n}$  desarrollos de Laurent, de órdenes  $m_i$  prefijados, en los puntos  $x_i$ . Sea  $\{w_1, \dots, w_g\}$  una base de  $H^0(C, \Omega_{C/k})$ . Existe una  $f \in \Sigma_C$ , cuyos únicos polos son los  $x_i$ , con desarrollos de Laurent los prefijados si y sólo si*

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^r Res_{x_i}(f_i \cdot w_1) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^r Res_{x_i}(f_i \cdot w_g) = 0 \end{array}$$

*Demostración.* Sea  $D = \sum_i m_i x_i$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{L}_D \rightarrow \mathcal{L}_D/\mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

Observemos que  $\Gamma(C, \mathcal{L}_D/\mathcal{O}_C) = \{g = \bigoplus_i g_i = \bigoplus_i \sum_{n=1}^{m_i} \frac{b_{i,n}}{t_i^n}\}$  y el morfismo  $\Gamma(C, \mathcal{L}_D) \rightarrow \Gamma(C, \mathcal{L}_D/\mathcal{O}_C)$  asigna a cada  $g \in \Sigma_C$  tal que  $D(g) + D \geq 0$ , sus desarrollos de Laurent en los puntos  $x_i$ . Explícitamente, tenemos en cohomología la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(C, \mathcal{L}_D) & \rightarrow & \Gamma(C, \mathcal{L}_D/\mathcal{O}_C) \\ g & \mapsto & g = (Res(g \cdot w_1), \dots, Res(g \cdot w_g)) \end{array} \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C)$$

y recordemos que  $Res(g \cdot w_j) = \sum_{i=1}^r Res_{x_i}(g_i \cdot w_j)$ . Fácilmente se concluye. □

## 9.6 Dualizante de curvas singulares

**1. Proposición:** Sean  $C \xrightarrow{\pi} C' \xrightarrow{\pi'} C''$  morfismos finitos entre curvas completas. Con las notaciones obvias, se cumple que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \pi'_* w_{C'} & \xrightarrow{Tr_{C'/C}} & w_{C''} \\
 \uparrow \pi'_*(Tr_{C/C'}) & \nearrow Tr_{C/C''} & \\
 (\pi' \circ \pi)_* w_C & & 
 \end{array}$$

*Demostración.* Sea  $(w_C, R_C)$  un dualizante de  $C$ , etc. Sabemos que

$$Tr_{C'/C''}^*(R_{C''}) = R_C \quad \text{y} \quad (Tr_{C'/C''} \circ \pi'_*(Tr_{C/C'}))^*(R_{C''}) = (\pi_*(Tr_{C/C'}))^*(R_{C'}) = R_C$$

por dualidad concluimos la conmutatividad del triángulo.  $\square$

Dado un morfismo finito  $\pi: C \rightarrow C'$ ,  $\pi_* w_C = Hom_{\mathcal{O}_{C'}}(\pi_* \mathcal{O}_C, w_{C'})$ . Si  $\pi$  es además un morfismo birracional, localizando en el punto genérico  $g'$  de  $C'$ , tenemos que  $w_{C,g} = w_{C',g'}$ . Considerando  $\pi_* w_C$  y  $w_{C'}$  como subhaces del haz constante  $\tilde{w}_{C,g}$ , tenemos que el morfismo  $\pi_* w_C \rightarrow w_{C'}$  es la inclusión. Además tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 [\bigoplus_{x' \in C'} w_{C,g}/(\pi_* w_C)_{x'}]/w_{C,g} & \longrightarrow & [\bigoplus_{x' \in C'} w_{C,g}/w_{C',x'}]/w_{C,g} \\
 \downarrow R & \nearrow R' & \\
 k & & 
 \end{array}$$

Como  $w_{C,g}/(\pi_* w_C)_{x'} = \bigoplus_{\pi(x_i)=x'} w_{C,g}/w_{C,x_i}$ , tenemos que  $R'_{x'}(w) = \sum_{\pi(x_i)=x'} R_{x_i}(w)$ , para  $w \in w_{C,g}$ . Si  $C$  es lisa, entonces  $w_C = \Omega_{C/k}$  y tenemos que

$$w_{C'}(U) = \{w \in \Omega_{\Sigma_C/k}: R'_{x'}(a \cdot w) = \sum_{\pi(x_i)=x'} Res_{x_i}(a \cdot w) = 0, \text{ para todo } x' \in U, \text{ y } a \in \mathcal{O}_{C',x'}\}$$

El estudio de las curvas planas es importante porque toda curva lisa es birracional a una curva plana.

**2. Proposición:** Sea  $C \equiv \{p_n(x_0, x_1, x_2) = 0\} \xrightarrow{i} \mathbb{P}_2$  una curva proyectiva plana irreducible, de grado  $n$ . Se verifica que

$$w_C = \mathcal{O}_C(n-3)$$

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n) \xrightarrow{p_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \rightarrow i_* \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

tensorializando por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n-3)$  obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-3) \xrightarrow{p_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n-3) \rightarrow i_* \mathcal{O}_C(n-3) \rightarrow 0$$

De la sucesión exacta larga de cohomología y el cálculo de la cohomología de los  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ , obtenemos que  $h^1(C, \mathcal{O}_C(n-3)) = 1$ . Tenemos pues, un morfismo no nulo, luego inyectivo,  $\mathcal{O}_C(n-3) \rightarrow w_C$ . Morfismo que es un isomorfismo porque  $h^0(C, \mathcal{O}_C(n-3)(n)) = h^0(C, \mathcal{O}_C(2n-3)) \stackrel{*}{=} h^1(C, \mathcal{O}_C(-n)) = h^0(C, w_C(n))$ , donde dejamos que el lector compruebe  $*$ , para todo  $n$ .  $\square$

Deshomogeneizando,  $x = \frac{x_1}{x_0}$ ,  $y = \frac{x_2}{x_0}$ , sea  $p(x, y) = 0$  la ecuación de la curva  $C$  en coordenadas afines. Supongamos que  $\partial_y(p(x, y)) = p_y(x, y)$  es un polinomio de grado  $n-1$ . La proyección vertical de la curva  $C$  en la recta  $y=0$  es separable, es decir, el morfismo  $k(x) \hookrightarrow \Sigma_C = k(x, \bar{y})$ ,  $p(x, \bar{y}) = 0$ , es separable. Denotemos  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ , tal morfismo. Sabemos que  $\pi_* w_C = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\pi_* \mathcal{O}_C, w_{\mathbb{P}^1}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\pi_* \mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} w_{\mathbb{P}^1}$ . Sea  $U = \text{Spec } k[x]$  y  $V = \pi^{-1}(U)$ . Por ?? (donde no es necesario que el dominio  $B$  sea de Dedekind),  $\text{Hom}_{k[x]}(\mathcal{O}_C(V), k[x]) = \langle \frac{1}{p_y(x, \bar{y})}, \dots, \frac{\bar{y}^{n-1}}{p_y(x, \bar{y})} \rangle \cdot \text{tr}$ . Por tanto,  $w_C(V) = \{ \frac{q(x, \bar{y})}{p_y(x, \bar{y})} dx : q(x, y) \text{ es de grado menor o igual que } n-1 \text{ en } y \}$ . Efectuando un cálculo similar en el abierto  $U' = \text{Spec } k[\frac{1}{x}]$  se llega a que

$$w_C(C) = \left\{ \frac{q(x, \bar{y})}{p_y(x, \bar{y})} dx : q(x, y) \text{ es de grado menor o igual que } n-3 \right\}$$

cuya dimensión ha de coincidir con  $h^1(C, \mathcal{O}_C)$ . Explícitamente, tenemos que  $w_C \stackrel{x_0^{n-3}}{=} \mathcal{O}_C(n-3) \cdot \frac{dx}{p_y(x, \bar{y})}$ . Por último, si  $\bar{\pi}: \bar{C} \rightarrow C$  es el morfismo de desingularización de  $C$  y  $\alpha$  el ideal anulador de  $\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{\bar{C}}/\mathcal{O}_C$ , sabemos que

$$\bar{\pi}_* w_{\bar{C}} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, w_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_C} w_C = \alpha \cdot w_C$$

De la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{\pi}_* w_{\bar{C}} & \longrightarrow & w_C & \longrightarrow & w_C / \bar{\pi}_* w_{\bar{C}} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \alpha \cdot w_C = \alpha \cdot \mathcal{O}_C(n-3) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(n-3) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(n-3)/\alpha \cdot \mathcal{O}_C(n-3) \longrightarrow 0 \end{array}$$

obtenemos que

$$\Omega_{\bar{C}/k}(\bar{C}) = w_{\bar{C}}(\bar{C}) = \left\{ \frac{q(x, \bar{y})}{p_y(x, \bar{y})} dx : q(x, y) \text{ es de grado menor o igual que } n-3, \text{ y pasa por el conductor} \right\}$$

## 9.7 Aplicaciones de la teoría de dualidad

### 9.7.1 Teorema de Hurwitz

**1. Definición:** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  de esquemas, se dice que es plano si para todo  $x \in X$ , existen entornos afines  $U$  de  $x$  y  $V$  de  $y$ , con  $f(U) \subseteq V$ , de modo que el morfismo  $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$  es plano.

Es fácil ver que  $f$  es plano si y sólo si para todo  $x \in X$ , el morfismo  $\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  es plano. Se dice que  $f$  es fielmente plano si es plano y epiyectivo.

Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un morfismo finito entre curvas completas no singulares sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $k$ . El haz de funciones de  $C'$  es localmente un anillo de ideales principales, y los

anillos de secciones de  $\mathcal{O}_C$  no tienen torsión, por lo tanto  $\pi$  es un morfismo plano. En conclusión, para cada abierto afín  $U \subseteq C'$ ,  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$  es un revestimiento.

Las nociones que ahora vamos a definir (en esquemas) son esencialmente una repetición de las ya vistas en el capítulo 9.

Se dice que un punto cerrado  $y \in C$  es un punto de ramificación de  $\pi$ , si  $\dim_k(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_C)_y = r > 1$ , donde  $x = \pi(y)$ <sup>2</sup>. A  $r$  se le denomina el índice de ramificación y coincide con la multiplicidad con que aparece  $y$  en la fibra de  $x$ . Los puntos de ramificación coinciden con los puntos donde el haz de diferenciales relativas  $\Omega_{C/C'}$  son no nulas:  $(\Omega_{C/C'})_y$  es un  $\mathcal{O}_{C,y}$ -módulo finito nulo si y sólo si, por Nakayama, lo es

$$(\Omega_{C/C'})_y \otimes_{\mathcal{O}_{C'}} \mathcal{O}_{C'}/\mathfrak{m}_x = \Omega_{(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_C)_y/k}$$

que es cero si y sólo si  $(\mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_C)_y = \mathcal{O}_{C'}/\mathfrak{m}_x = k$ .

**2. Proposición:** *Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un morfismo finito, entre curvas completas no singulares. Sea  $D = \sum n_x \cdot x$  un divisor en  $C'$  y  $\mathcal{L}_D$  el haz de línea asociado. Se verifica que  $\pi^*\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_{\pi^{-1}D}$ , con  $\pi^{-1}D = \sum n_x \cdot \pi^{-1}(x)$  (donde  $\pi^{-1}(x)$  son los puntos de la fibra de  $x$ , contando multiplicidades).*

*Demostración.* Sea  $t_x \in \Sigma_{C'}$  un generador de  $\mathfrak{m}_x$  en un entorno de  $x$ . Sabemos que  $\mathcal{L}_D$  en un entorno  $U$  afín de  $x$ , tal que  $D|_{U=n_x x}$ , es igual a  $t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_U$ . Sea  $y \in C$  tal que  $\pi(y) = x$ , sea  $V$  un entorno afín de  $y$ , contenido en  $\pi^{-1}(U)$ . En el morfismo inducido entre los anillos de funciones  $\pi_{VU}^*: \mathcal{O}_{C'}(U) \rightarrow \mathcal{O}_C(V)$ , se verifica que  $(\pi_{VU}^*(t_x)) = t_x \cdot \mathcal{O}_C(V) = \mathfrak{m}_{y_1}^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_{y_r}^{n_r}$ , donde  $y_1, \dots, y_r$  son los puntos de la fibra de  $x$  en  $V$  y  $n_1, \dots, n_r$  son la multiplicidad con que aparece cada uno.

Se verifica

$$\begin{aligned} (\pi^*(\mathcal{L}_D))|_V &= \pi_{VU}^*((\mathcal{L}_D)|_U) = \pi_{VU}^*(t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_U) = t_x^{-n_x} \cdot \mathcal{O}_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_V \\ &= (\mathfrak{m}_{y_1}^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_{y_r}^{n_r})^{-n_x} = (\mathcal{L}_{\pi^{-1}D})|_V \end{aligned}$$

con lo que se concluye. □

**3. Definición:** Diremos que un morfismo finito  $C \rightarrow C'$  es separable si el morfismo inducido  $\Sigma_{C'} \rightarrow \Sigma_C$  es separable.

**4. Teorema Hurwitz** *Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  es un morfismo separable entre curvas completas no singulares sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Se cumple que el módulo de las diferenciales relativas  $\Omega_{C/C'}$  es de torsión y*

$$2g - 2 = \text{gr } \pi \cdot (2g' - 2) + \dim_k(\Omega_{C/C'})$$

donde  $g$  y  $g'$  son los géneros de  $C$  y  $C'$  respectivamente.

*Demostración.* Sea  $p_g$  el punto genérico de  $C$ , entonces  $(\Omega_{C/C'})_{p_g} = \Omega_{\Sigma_C/\Sigma_{C'}} = 0$  por ser  $\Sigma_C \rightarrow \Sigma_{C'}$  separable. Por tanto, como  $\Omega_{C/C'}$  es un haz coherente cuya fibra en el punto genérico es cero, es de torsión.

Consideremos la sucesión exacta

$$\pi^*\Omega_{C'/k} \xrightarrow{\pi^*} \Omega_{C/k} \rightarrow \Omega_{C/C'} \rightarrow 0$$

El morfismo  $\pi^*$  ha de ser inyectivo, porque todo morfismo entre haces de línea que es isomorfismo en el punto genérico es inyectivo.

<sup>2</sup>Si el cuerpo no es algebraicamente cerrado, la condición sería que  $(B/\mathfrak{m}_x B)_y$  no fuese una  $A/\mathfrak{m}_x$ -álgebra separable.

Si denotamos por  $K$  y  $K'$  los divisores canónicos de  $C$  y  $C'$ , tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{\pi^{-1}K'} \rightarrow \mathcal{L}_K \rightarrow \Omega_{C/C'} \rightarrow 0$$

Tomando características, tenemos  $\chi(\mathcal{L}_K) = \chi(\mathcal{L}_{\pi^{-1}K'}) + \dim_k \Omega_{C/C'}$ , que por el Riemann-Roch equivale a  $\text{gr}(K) = \text{gr}(\pi^{-1}K') + \dim_k \Omega_{C/C'}$ . Ahora ya, dado que  $\text{gr}(\pi^{-1}K') = \text{gr}(\pi) \cdot \text{gr} K'$ , deducimos la fórmula de Hurwitz. □

Diremos que un morfismo  $\pi: C \rightarrow C'$  finito es un revestimiento no ramificado si es separable y no tiene puntos de ramificación.

**5. Corolario:** *La recta proyectiva no tiene revestimientos no ramificados, salvo los isomorfismos (se dice que  $\mathbb{P}_1$  es simplemente conexa).*

*Demostración.* Dado un revestimiento  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  no ramificado, por Hurwitz tenemos  $2g - 2 = \text{gr} \pi \cdot (2 \cdot 0 - 2)$ . Luego  $g = 0$  y  $\text{gr} \pi = 1$ . □

**6. Corolario Lüroth:** *Toda subextensión de  $k(x)$  es igual a  $k(p(x))$ , para cierto  $p(x) \in k(x)$ . Supongamos  $\text{car } k = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $L \subset k(x)$  una subextensión. Consideremos el morfismo inducido entre las variedades de Riemann,  $\pi: \mathbb{P}_1 \rightarrow C$ . Por el teorema de Hurwitz,  $2 \cdot 0 - 2 = \text{gr} \pi \cdot (2g_C - 2) + \dim_k(\Omega_{\mathbb{P}_1/C})$ . Por tanto,  $g_C = 0$  y  $C = \mathbb{P}_1$ . Es decir,  $L = k(p(x))$ . □

### 9.7.2 Morfismos en espacios proyectivos

Vamos a ver que toda variedad de Riemann es una curva proyectiva.

Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado, por sencillez de exposición. Sea  $C$  una curva completa y  $\mathcal{L}$  un haz de línea en  $C$ . Dado un punto cerrado  $x \in C$  y un isomorfismo  $\mathcal{L}/\mathfrak{m}_x \mathcal{L} \simeq k$ , para cada  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L})$  podemos definir el valor de  $s$  en  $x$ , “ $s(x)$ ”:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L}/\mathfrak{m}_x \mathcal{L} \simeq k \\ s &\mapsto \bar{s} \stackrel{\text{Not}}{=} s(x) \end{aligned}$$

El valor  $s(x)$  depende del isomorfismo  $\mathcal{L}/\mathfrak{m}_x \mathcal{L} \simeq k$ , luego está definido para toda  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L})$ , salvo un factor  $\lambda \in k$ . Ahora bien, si tiene sentido decir si  $s(x) = 0$  o no. Además, los puntos donde  $s(x) = 0$ , que denotaremos  $(s)_0$ , es un cerrado de  $C$ . Recordemos que el divisor de ceros (no hay polos) de  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L})$ , es un divisor efectivo cuyo haz de línea asociado es  $\mathcal{L}$ . Por tanto,  $(s)_0$  es el soporte del divisor  $D(s)$ , asociado a  $s$ .

Sea  $\{s_0, \dots, s_n\}$  una base de  $V \subseteq \Gamma(C, \mathcal{L})$  sin puntos base, i.e.,  $\bigcap_{i=0}^n (s_i)_0 = \emptyset$ . Definamos “puntualmente” el morfismo

$$C \rightarrow \mathbb{P}_n, \quad x \stackrel{\text{def}}{\mapsto} (s_0(x), \dots, s_n(x))$$

Definámoslo ahora esquemáticamente (no necesitaremos que  $k$  es algebraicamente cerrado):

Dados dos secciones  $s_i, s_j \in \Gamma(C, \mathcal{L})$  entonces  $s_i = f_{ij} \cdot s_j$ , para una  $f_{ij} \in \Sigma_C$ , de modo que  $D(s_i) = D(f_{ij}) + D(s_j)$ . Por tanto,  $f_{ij}$  no tiene polos en  $U_j = C - (s_j)_0$ , es decir,  $f_{ij} \in \mathcal{O}_C(U_j)$ . Escribiremos  $f_{ij} = \frac{s_i}{s_j}$ .

Sea  $U_j = C - (s_j)_0$ . Los morfismos

$$\begin{aligned} U_i &\longrightarrow \operatorname{Spec} k\left[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right] \\ \mathcal{O}_C(U_i) &\longleftarrow k\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \\ \frac{s_i}{s_j} &\longleftarrow \frac{x_i}{x_j} \end{aligned}$$

nos definen el morfismo

$$C \rightarrow \mathbb{P}_n$$

antes definido “puntualmente”.

El morfismo  $C \rightarrow \mathbb{P}_n$  definido por el haz de línea  $\mathcal{L}$ , y el subespacio  $V \subseteq \Gamma(C, \mathcal{L})$ , depende de la elección de una base de  $V$ . Obviamente, si se considera otra base el nuevo morfismo definido diferirá del primero en una proyectividad de  $\mathbb{P}_n$ . Así pues,  $\mathcal{L}$  si consideramos todo  $\Gamma(C, \mathcal{L})$  y suponemos que no hay puntos base, define un único morfismo de  $C$  en un espacio proyectivo, salvo proyectividades.

Recíprocamente, todo morfismo  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_m$ , de modo que  $\operatorname{Im} \pi$  no yace en ningún hiperplano (“ $C$  es alabeada”), es el definido por un subespacio vectorial de las secciones de un haz de línea de  $C$ : Sea  $\mathcal{L} = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1)$ , el morfismo natural  $\pi^*: H^0(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1))$  y  $V = \operatorname{Im} \pi^*$ . Pues bien,  $\pi$  es el morfismo definido por el haz de línea  $\mathcal{L}$  y  $V$ , como puede comprobarse.

Por último, si  $H \equiv \sum_i a_i x_i = 0$  es un hiperplano de  $\mathbb{P}_m$ , entonces  $H \cap C \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(H) = D(\sum_i a_i s_i)$ .

Los hiperplanos cortan a  $C$  en los divisores efectivos asociados a  $\mathcal{L}$ . En el caso de que  $\pi$  sea una inmersión cerrada el grado de la curva  $C$  es igual al grado de los divisores asociados a  $\mathcal{L}$ .

**7. Definición:** Se dice que las secciones globales de  $\mathcal{L}$  separan los puntos de  $C$ , cuando para cada par de puntos  $x, x'$  existe una sección tal que  $s(x) = 0$  y  $s(x') \neq 0$ .

**8. Definición:** Se dice que las secciones globales de  $\mathcal{L}$  separan puntos infinitesimalmente próximos, cuando para cada punto cerrado  $x \in C$ , las secciones globales de  $\mathcal{L}$  que se anulan en  $x$  generan  $\mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$ . Es decir, para cada punto cerrado  $x \in C$ , existe  $s \in H^0(C, \mathcal{L})$  tal que  $v_x(s) = 1$ .

**9. Definición:** Un haz de línea se dice que es muy amplio cuando sus secciones globales generan la fibra en cada punto del haz de línea (es decir, no tienen puntos base), separan puntos y separan puntos infinitesimalmente próximos.

Sea  $\Gamma(C, \mathcal{L}) = \langle s_0, \dots, s_n \rangle$ . Sobre  $U_j = C - (s_j)_0$  tenemos el isomorfismo  $\mathcal{L}_{U_j} \xrightarrow{s_j^{-1}} \mathcal{O}_{U_j}$ . Dados  $x, y \in U_j$ , que las secciones globales de  $\mathcal{L}$  separen  $x$  de  $y$ , equivale a decir que las funciones  $\langle f_{ij} = s_i/s_j \rangle_i$  separen  $x$  de  $y$ , es decir, existe  $f \in \langle f_{ij} = s_i/s_j \rangle_i$  tal que  $f(x) = 0$  y  $f(y) \neq 0$ . Que las secciones globales que se anulan en  $x$  generan  $\mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$  equivale a decir que las funciones de  $\langle f_{ij} = s_i/s_j \rangle_i$  que se anulan en  $x$  generan  $\mathfrak{m}_x$ .

**10. Teorema:** El morfismo definido por una “serie lineal completa”  $\langle s_0, \dots, s_n \rangle = \Gamma(C, \mathcal{L})$ , sin puntos base,

$$i: C \rightarrow \mathbb{P}_n, \quad x \mapsto (s_0(x), \dots, s_n(x))$$

es una inmersión cerrada, si y sólo si  $\mathcal{L}$  es un haz de línea muy amplio.

*Demostración.* En coordenadas, tenemos localmente

$$\begin{array}{ccc} k\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] & \longrightarrow & k\left[\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_n}{s_i}\right] \xrightarrow{i^*} \mathcal{O}_C(U_i) \\ \frac{x_j}{x_i} & \longrightarrow & \frac{s_j}{s_i} \longleftarrow \frac{s_j}{s_i} \end{array}$$

Tenemos que probar que las inclusiones  $i^* : k[\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_n}{s_i}] \hookrightarrow \mathcal{O}_C(U_i)$  son isomorfismos si y sólo si  $\mathcal{L}$  es muy amplio.

El morfismo  $i^*$  es finito: Si  $v_x(s_j/s_i) \geq 0$  para todo  $j$ , y  $x \in (s_i)_0$  entonces  $v_x(s_j) = v_x((s_j/s_i) \cdot s_i) = v_x(s_j/s_i) + v_x(s_i) > 0$ , para todo  $j$ . Es decir,  $x$  sería un punto base, que no existe. Luego  $x \in U_i$ . Por tanto,  $\mathcal{O}_{v_x}$  contiene a  $\mathcal{O}_C(U_i)$ , y  $\mathcal{O}_C(U_i)$  es el cierre entero de  $k[\frac{s_0}{s_i}, \dots, \frac{s_n}{s_i}] = B$ .

Por ser  $i^*$  un morfismo finito, en espectros es epiyectivo, y todo ideal maximal  $\mathfrak{m}_y \subset B$  es  $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}_x \cap B$ , para cierto ideal maximal  $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_C(U_i)$ .

La inclusión  $B \xrightarrow{i^*} \mathcal{O}_C(U_i)$  es un isomorfismo si y sólo si para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}_y \subset B$ , el morfismo  $B/\mathfrak{m}_y \rightarrow \mathcal{O}_C(U_i)/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_C(U_i)$  es un isomorfismo. Es decir, si y sólo si  $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_C(U_i) = \mathfrak{m}_x$ , donde  $\mathfrak{m}_x \cap B = \mathfrak{m}_y$ . Ahora bien,  $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_C(U_i) = \mathfrak{m}_x$  si y sólo si las secciones globales de  $\mathcal{L}$ , que se anulan en  $x$  no se anulan, todas a la vez, ni en otro punto ni dos veces en  $x$ .

Concluimos que  $i$  es una inmersión cerrada si y sólo si  $\mathcal{L}$  es muy amplio.  $\square$

**11. Ejercicio:** Demuéstrese que la condición de que las secciones separen puntos equivale a que  $i$  sea inyectiva y la condición de que las secciones separen puntos infinitesimalmente próximos equivale a que  $i$  sea inyectiva a nivel tangente.

**12. Lema:** Sea  $C$  una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

1. La condición necesaria y suficiente para que la serie lineal  $\Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  no tenga puntos base es que  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) < h^0(C, \mathcal{L}_D)$ , para todo  $x \in C$ .
2. La condición necesaria y suficiente para que la serie lineal  $\Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  separe puntos es que  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) < h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$  para todo  $x \neq y \in C$ .
3. La condición necesaria y suficiente para que la serie lineal  $\Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  separe puntos infinitesimalmente próximos es que  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-2x}) < h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$ , para todo  $x \in C$ .

*Demostración.* 1. Observemos que  $\mathcal{L}_{D-x} = \mathcal{L}_D \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}_{-x} = \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{L}_D$ , que está incluido naturalmente en  $\mathcal{L}_D$ . Así pues, las secciones globales de  $\mathcal{L}_{D-x}$  se identifican con las  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  tales que en gérmenes pertenezcan a  $\mathcal{L}_{D-x}$ . Es decir,

$$H^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) = \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s_x \in \mathfrak{m}_x(\mathcal{L}_D)_x\} = \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s(x) = 0\}$$

Luego,  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) < h^0(C, \mathcal{L}_D)$  si y sólo si existe  $s \in H^0(C, \mathcal{L}_D)$  tal que  $s(x) \neq 0$ , es decir, si y sólo si  $x$  no es un punto base.

2. Observemos que  $\mathcal{L}_{D-x-y} = \mathfrak{m}_x \cdot \mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{L}_D$ , que está incluido naturalmente en  $\mathcal{L}_D$ . Así pues, las secciones globales de  $\mathcal{L}_{D-x-y}$  se identifican con las  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  tales que en gérmenes pertenezcan a  $\mathcal{L}_{D-x-y}$ . Es decir,

$$\begin{aligned} H^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) &= \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s_x \in \mathfrak{m}_x(\mathcal{L}_D)_x \text{ y } s_y \in \mathfrak{m}_y(\mathcal{L}_D)_y\} \\ &= \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s(x) = 0 \text{ y } s(y) = 0\} \end{aligned}$$

Luego,  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) < h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$  si y sólo si existe  $s \in H^0(C, \mathcal{L}_D)$ , tal que  $s(x) = 0$  y  $s(y) \neq 0$ , con lo que se concluye.

3. Observemos que  $\mathcal{L}_{D-2x} = \mathfrak{m}_x^2 \cdot \mathcal{L}_D$ , que está incluido naturalmente en  $\mathcal{L}_D$ . Así pues, las secciones globales de  $\mathcal{L}_{D-2x}$  se identifican con las  $s \in \Gamma(C, \mathcal{L}_D)$  tales que en gérmenes pertenezcan a  $\mathcal{L}_{D-2x}$ . Es decir,

$$H^0(C, \mathcal{L}_{D-2x}) = \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : s_x \in \mathfrak{m}_x^2(\mathcal{L}_D)_x\} = \{s \in H^0(C, \mathcal{L}_D) : v_x(s) \geq 2\}$$

Luego,  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-2x}) < h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$  si y sólo si existe  $s \in H^0(C, \mathcal{L}_D)$ , tal que  $v_x(s) = 1$ , con lo que se concluye.  $\square$

**13. Proposición:** *Si  $D$  es un divisor de grado mayor que dos veces el género geométrico, entonces  $\mathcal{L}_D$  es muy amplio.*

*Si  $D$  es un divisor de grado mayor o igual que el género geométrico, entonces las secciones globales de  $\mathcal{L}_D$  no tiene puntos base.*

*Demostración.* Por ser  $D$  un divisor de grado mayor que el canónico  $h^1(C, \mathcal{L}_D) = h^0(C, \mathcal{L}_{K-D}) = 0$ . Lo mismo decimos  $D - x$ ,  $D - 2x$ ,  $D - x - y$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} h^0(C, \mathcal{L}_D) &= \chi(C, \mathcal{L}_D) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr}D \\ h^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) &= \chi(C, \mathcal{L}_{D-x}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr}D - 1 \\ h^0(C, \mathcal{L}_{D-2x}) &= \chi(C, \mathcal{L}_{D-2x}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr}D - 2 \\ h^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) &= \chi(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \text{gr}D - 2 \end{aligned}$$

Ahora es fácil concluir la tesis primera utilizando el lema anterior. Para la segunda afirmación se procede igual.  $\square$

**14. Teorema:** *Toda curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es una curva proyectiva.*

*Demostración.* Si  $D$  es un divisor de grado  $2g + 1$ , entonces por la proposición anterior  $\mathcal{L}_D$  es muy amplio. Por el teorema anterior  $\mathcal{L}_D$  define una inmersión cerrada de la curva en un espacio proyectivo.  $\square$

Sea  $C$  es una curva completa no singular de género mayor que 1, y  $K$  es un divisor canónico.  $3K$  es un divisor muy amplio, es decir,  $w_C^3 = w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} w_C \otimes_{\mathcal{O}_C} w_C$  es un haz de línea muy amplio. Luego  $w_C^3$  define una inmersión cerrada, canónica de  $C$  en  $\mathbb{P}_{5g-6}$ , salvo proyectividades de modo que  $C$  es una curva alabeada de grado  $6g - 6$  y los hiperplanos cortan a  $C$  en divisores linealmente equivalentes a  $3K$ .

### 9.7.3 Curvas elípticas e hiperelípticas

Sea  $C$  una curva completa no singular, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Supondremos que  $\text{car } k \neq 2$ .

**15. Proposición:** *En las curvas de género menor o igual que dos el dualizante no es muy amplio.*

*Demostración.* Si el género es dos y el dualizante es muy amplio, entonces el dualizante define una inmersión cerrada de la curva en la recta proyectiva, luego la curva sería la recta proyectiva que es de género cero, contradicción. Si el género es 1 o cero es obvio.  $\square$

**16. Definición:** Las curvas de género mayor o igual que dos tales que su haz dualizante no sea muy amplio se denominan curvas hiperelípticas. Las curvas de género 1 se denominan curvas elípticas.

Así, si  $C$  es una curva de género mayor que uno no hiperelíptica el dualizante define una inmersión canónica  $C \hookrightarrow \mathbb{P}_{g-1}$  que identifica  $C$  con una curva no singular de grado  $2g - 2$ .

**17. Proposición:** *La condición necesaria y suficiente para que un haz de línea  $\mathcal{L}_D$  sea muy amplio es que para cada par de puntos  $x, y \in C$  (distintos o no), se verifique  $h^1(C, \mathcal{L}_{D-x-y}) = h^1(C, \mathcal{L}_D)$ .*

*Demostración.* Por la sucesión exacta larga de cohomología asociada a

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{D'-x} \hookrightarrow \mathcal{L}_{D'} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

donde  $\mathcal{C}$  está concentrado en  $x$  y  $h^0(C, \mathcal{C}) = 1$ , se tiene que

$$h^1(C, \mathcal{L}_{D'-x}) = \begin{cases} h^1(C, \mathcal{L}_{D'}) \\ h^1(C, \mathcal{L}_{D'}) + 1 \end{cases} \quad h^0(C, \mathcal{L}_{D'-x}) = \begin{cases} h^0(C, \mathcal{L}_{D'}) - 1 \\ h^0(C, \mathcal{L}_{D'}) \end{cases}$$

La condición  $h^1(C, \mathcal{L}_D) = h^1(C, \mathcal{L}_{D-x-y})$  equivale a que  $h^1(C, \mathcal{L}_D) = h^1(C, \mathcal{L}_{D-x})$  y  $h^1(C, \mathcal{L}_{D-x}) = h^1(C, \mathcal{L}_{D-x-y})$ , que equivalen a  $h^0(C, \mathcal{L}_D) > h^0(C, \mathcal{L}_{D-x})$  y  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-x}) > h^0(C, \mathcal{L}_{D-x-y})$ . Por el lema 9.7.12, se concluye.  $\square$

**18. Corolario:** *Una curva de género mayor que cero es elíptica o hiperelíptica si y sólo si admite un morfismo de grado dos en la recta proyectiva.*

*Demostración.*  $C$  es elíptica o hiperelíptica  $\Leftrightarrow$  Existen dos puntos  $x, y$  de modo que  $h^1(C, \mathcal{L}_{K-x-y}) < h^1(C, \mathcal{L}_K) \stackrel{\text{dualidad}}{\Leftrightarrow} h^0(C, \mathcal{L}_{x+y}) > h^0(C, \mathcal{O}_C) = 1 \Leftrightarrow$  Existe una  $f \in \Sigma_C$  cuyo divisor de polos es  $x + y$  (si el divisor de polos fuese de grado 1 entonces la curva sería la recta proyectiva, contradicción)  $\Leftrightarrow$  Existe un morfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  de grado dos.  $\square$

**19. Corolario:** *Toda curva elíptica o hiperelíptica es brracionalmente isomorfa a una curva plana de ecuaciones  $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - \alpha_i)$ , donde  $g$  es el género de la curva. Supongamos  $\text{car } k \neq 2$ .*

*Demostración.* Sea  $C \rightarrow \mathbb{P}_1$  un morfismo de grado dos de la curva en la recta proyectiva.

Se cumple que  $\Sigma_C = \Sigma_{\mathbb{P}_1}(\xi)$ , de modo que  $\xi^2 + s\xi + t = 0$ , con  $s, t \in k(x) = \Sigma_{\mathbb{P}_1}$ . Cambiando  $\xi$  por  $\xi + \frac{s}{2}$ , podemos suponer que  $\xi^2 + u = 0$ , con  $u \in \Sigma_{\mathbb{P}_1} = k(x)$ . Es decir,  $\xi^2 = \frac{p(x)}{q(x)}$ , con  $p(x), q(x) \in k[x]$ . Sustituyendo,  $\xi$  por  $\xi \cdot q(x)$ , podemos suponer que  $\xi^2 = p(x)$ , con  $p(x) \in k[x]$ . Sustituyendo,  $\xi$  por  $\xi \cdot (x - \alpha)^n$  (para  $n$  conveniente), podemos suponer que las raíces de  $p(x)$  son simples.

Por Hurwitz, el número de puntos de ramificación es  $2g + 2$ , y todos ellos han de ser distintos de índice de ramificación 2. Además, podemos suponer que el punto del infinito es de ramificación.

Con todo tenemos que  $C$  es brracionalmente isomorfa a la curva plana  $y^2 = p(x)$  y la proyección a la recta afín tiene  $2g + 1$  puntos de ramificación luego  $p(x) = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - \alpha_i)$ .  $\square$

El dualizante de una curva hiperelíptica no tiene puntos base:  $H^0(C, \mathcal{L}_x) = H^0(C, \mathcal{O}_C)$ , porque si no  $C = \mathbb{P}_1$ , luego por el Riemann-Roch fuerte  $H^0(C, \mathcal{L}_{K-x}) < H^0(C, \mathcal{L}_K)$ . Así pues,  $w_C$  define un morfismo canónico, que no es inmersión cerrada,

$$\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_{g-1}$$

La imagen esquemática de  $\pi$ ,  $C'$ , es una curva proyectiva íntegra alabeada. Consideremos la sucesión de morfismos  $C \xrightarrow{\pi} C' \xrightarrow{i} \mathbb{P}_{g-1}$ . Tenemos que  $\text{gr } C' \cdot \text{gr } \pi = 2g - 2$ . Como  $\text{gr } \pi \geq 2$ , entonces  $\text{gr } C' \leq g - 1$ . Ahora bien, toda curva alabeada de  $\mathbb{P}_{g-1}$  de grado menor o igual que  $g - 1$ , es una curva de grado  $g - 1$  isomorfa a la recta proyectiva: tómanse  $g - 2$  puntos de  $C'$  y un  $(g - 3)$ -plano que pase por ellos. El haz de hiperplanos que pasa por el  $(g - 3)$ -plano es isomorfo a la recta proyectiva. Considérese el morfismo  $C' \rightarrow \mathbb{P}_1$ , que asigna a cada punto de  $C'$  el hiperplano del haz que pasa por ese punto. Es fácil concluir que este morfismo ha de ser grado 1 y que  $C'$  ha de ser de grado  $g - 1$ . Así pues,  $C' = \mathbb{P}_1$  y el morfismo  $i$  es el definido por el haz de línea asociado a un divisor de grado  $g - 1$ , es decir, por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(g - 1) = \mathcal{L}_{(g-1)x}$ , para cualquier punto  $x \in C'$ . Además,  $\text{gr } \pi = 2$  y por Hurwitz  $\pi$  tiene  $2g + 2$  puntos (distintos) de ramificación. Observemos que  $p \in C$  es de ramificación si y sólo si todo divisor canónico efectivo  $K$ , que pasa por  $p$  pasa por  $2p$ . Tales puntos se denominan puntos hiperelípticos de  $C$ . Un punto  $p$  será hiperelíptico si y sólo si

$$h^0(C, L_{2p}) = 3 - g + h^0(C, L_{K-2p}) = 3 - g + h^0(C, L_{K-p}) = 3 - g + g - 1 = 2$$

y sólo las curvas (de género mayor que 1) hiperelípticas tienen puntos verificando esta condición. El morfismo  $C \rightarrow C' = \mathbb{P}_1$  es el definido por el haz de línea  $\mathcal{L}_{2p}$ , siendo  $p$  cualquier punto hiperelíptico. En conclusión, sólo existe un morfismo de grado dos de una curva hiperelíptica en  $\mathbb{P}_1$ , salvo proyectividades de  $\mathbb{P}_1$ . Por la proposición 9.7.19, “La clasificación de curvas hiperelípticas de género  $g$  es la misma que la de los subconjuntos (divisores) de  $2g + 2$  puntos distintos de  $\mathbb{P}_1$ , módulo proyectividades”.

Observemos que si  $p \in C$  es un punto hiperelíptico, entonces  $(g - 1) \cdot 2p$  es un divisor canónico.

**20. Proposición:** *El grupo de automorfismos de una curva elíptica actúa transitivamente sobre los puntos racionales de la curva.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in C$  dos puntos racionales. El haz de línea  $\mathcal{L}_{x+y}$  no tiene puntos base, por 9.7.13. Además,  $h^0(C, \mathcal{L}_{x+y}) = 2$ , por Riemann-Roch fuerte. Luego,  $\mathcal{L}_{x+y}$  define un morfismo finito

$$\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$$

Las fibras de los puntos de  $\mathbb{P}_1$  son los divisores efectivos linealmente equivalentes a  $x+y$ . En particular,  $\pi(x) = \pi(y)$ . El morfismo  $\pi$  define un morfismo  $\Sigma_{\mathbb{P}_1} = k(x) \hookrightarrow \Sigma_C$  de grado 2.  $\Sigma_C$  es una extensión separable, luego de Galois, de  $k(x)$ , incluso en característica 2, porque si no  $\Sigma_C = k(\sqrt[2]{x})$  y  $C$  sería de género cero. Sea  $\sigma$  el generador de  $\text{Aut}_{k(x)}(\Sigma_C) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . El morfismo  $\bar{\sigma}: C \rightarrow C$  inducido por  $\sigma$ , conmuta con  $\pi$ , luego deja estables las fibras de  $\pi$ . Es más,  $\sigma$  intercambia los dos puntos de cada fibra: Se debe al hecho de que  $C/\langle \sigma \rangle = \mathbb{P}_1$ , pero demos una demostración ad hoc. Sea  $\pi(x) = \pi(y)$  y  $f \in \Sigma_C$  con un cero en  $x$  y no en  $y$ . Si  $\sigma(x) = x$  y  $\sigma(y) = y$  entonces  $f \cdot \sigma(f) \in k(x)$  tiene un cero en  $x$  y no en  $y$ , luego esta función por un lado se anula en  $\pi(x)$  y por el otro no se anula en  $\pi(y) = \pi(x)$ . En conclusión,  $\sigma(x) = y$ . □

**21. Proposición:** *Sea  $C$  una curva elíptica y  $\pi_1, \pi_2: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  dos morfismos de grado dos. Existen isomorfismos  $\tau: C \rightarrow C$ ,  $\sigma: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$  de modo que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\tau} & C \\ \left| \begin{array}{cc} \pi_1 & \pi_2 \end{array} \right. & & \\ \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

*es conmutativo.*

*Demostración.* Por Hurwitz sabemos que  $\pi_1$  y  $\pi_2$  ramifican en cuatro puntos. Sea  $x$  un punto de ramificación de  $\pi_1$ ,  $y$  un punto de ramificación de  $\pi_2$  y  $\sigma$  un automorfismo de  $C$  tal que  $\sigma(x) = y$ . El morfismo  $\pi_2$  es el morfismo definido por el haz de línea  $\mathcal{L}_{2y}$  y el morfismo  $\pi_1 \circ \sigma$  también es el morfismo definido por el haz de línea  $\mathcal{L}_{2y}$ . Por tanto,  $\pi_2$  y  $\pi_1 \circ \sigma$  difieren en un automorfismo  $\tau$  de  $\mathbb{P}_1$ . □

En la proposición 9.7.19 probamos que si  $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}_1$  es un morfismo de grado dos y escribimos  $\Sigma_{\mathbb{P}_1} = k(x)$ , existe  $y \in \Sigma_C$ , de modo que  $\Sigma_C = k(x, y)$ ,  $y^2 = (x - \alpha_0) \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$ , donde  $\infty, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{P}_1$  resultan ser los puntos (distintos) donde ramifica  $\pi$ . Los puntos donde ramifica  $\pi$  es invariante por automorfismos de  $C$ . Componiendo con una proyectividad, podemos suponer que  $\alpha_0 = 0$  y  $\alpha_1 = 1$  y tendremos que  $C \equiv y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - \lambda)$ . Además,  $C \equiv y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - \lambda')$ , si y sólo si existe una proyectividad  $\sigma$  tal que  $\{\infty, 0, 1, \lambda'\} = \{\sigma(\infty), \sigma(0), \sigma(1), \sigma(\lambda)\}$ , que permutará los puntos  $\{\infty, 0, 1\}$  y queda determinada por cómo lo haga. El grupo de las proyectividades que permutan los puntos  $\{\infty, 0, 1\}$ , es isomorfo al grupo simétrico de las permutaciones de tres letras,  $S_3$ . En conclusión,

$$\{\text{Curvas elípticas}\} = k - \{1, 0\}/S_3$$

Sea  $\sigma$  la proyectividad que permuta el  $\infty$  con el 0, y deja fijo el 1, entonces  $\sigma(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ . Sea  $\sigma'$  la proyectividad que permuta el 1 con el 0 y deja fijo  $\infty$ , entonces  $\sigma'(\lambda) = 1 - \lambda$ . Se cumple que  $S_3 = \langle \sigma, \sigma' \rangle$ . Sea  $j(\lambda) = 2^8 \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$ ,<sup>3</sup> se cumple que

$$k(\lambda)^{S_3} = k(j(\lambda))$$

pues  $j(\lambda)$  es  $S_3$ -invariante y la inclusión  $k(j(\lambda)) \hookrightarrow k(\lambda)$  es de grado 6, porque el divisor de ceros de  $j(\lambda)$  es de grado 6. Por tanto,  $\mathbb{P}_1/S_3 = \mathbb{P}_1$ ,  $\mathbb{P}_1 - \{\infty, 0, 1\}/S_3 = \mathbb{P}_1 - \infty$  y el morfismo de paso al cociente es

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1 & \rightarrow & \mathbb{P}_1/S_3 = \mathbb{P}_1 \\ \lambda & \mapsto & j(\lambda) \end{array}$$

Con todo,

$$\{\text{Curvas elípticas}\} \stackrel{\text{=====}}{=} \mathbb{A}_1$$

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda) \longrightarrow j(\lambda)$$

**22. Teorema:** *Sea  $C$  una curva elíptica sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y  $\text{Pic}^0(C)$  el grupo de los divisores de  $C$  de grado cero módulo el grupo los divisores principales. Fijemos un punto cerrado  $x \in C$ . Se cumple que la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Puntos cerrados de } C\} & \rightarrow & \text{Pic}^0(C) \\ y & \mapsto & \mathcal{L}_{y-x} \end{array}$$

*es biyectiva.*

*Demostración.* Veamos que la aplicación es inyectiva: si  $\mathcal{L}_{y-x} \simeq \mathcal{L}_{y'-x}$  entonces  $\mathcal{L}_{y-y'} \simeq \mathcal{O}_C$ , luego existe una función  $f \in \Sigma_C$  tal que  $D(f) = y' - y$ . Si  $y' \neq y$  esta función define un isomorfismo  $f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$ , contradicción.

<sup>3</sup>El factor  $2^8$  se introduce, a pesar de lo que pueda parecer, para que en característica 2 todo vaya bien

Veamos que la aplicación es epiyectiva: Sea  $D$  un divisor de grado cero. Por Riemann-Roch fuerte  $h^0(C, \mathcal{L}_{D+x}) = 1$ , dado que los divisores canónicos tienen grado cero (de hecho  $w_C = \mathcal{O}_C$ ). Por tanto,  $D+x$  es linealmente equivalente a un divisor efectivo de grado 1, digamos  $y$ , luego  $D$  es linealmente equivalente a  $y-x$ . □

Dado que  $\text{Pic}^0(C)$  tiene estructura de grupo abeliano, tenemos que el conjunto de los puntos cerrados de  $C$  tiene estructura de grupo abeliano:  $y+y' = y''$  si el divisor  $(y-x) + (y'-x)$  es linealmente equivalente a  $y''-x$ , es decir,  $y+y'-x-y'' = D(f)$  es un divisor principal. Sabemos por 9.7.19 que  $C$  es isomorfa a una cúbica proyectiva plana,  $y^2 - x \cdot (x-1) \cdot (x-\lambda) = 0$ , para cierta  $\lambda \in k - \{1, 0\}$ . Sea  $r$  la ecuación de la recta que pasa por  $y$  e  $y'$ , sea  $x'$  el tercer punto de corte de la recta con la cúbica, y sea  $r'$  la ecuación de la recta que pasa por  $x$  y  $x'$ , sea  $x''$  el tercer punto de corte de la recta  $r'$  con la cúbica. Se cumple que  $D(\frac{r}{r'}) = y+y'-x-x''$ . Por tanto,  $D(\frac{r}{r'} \cdot f^{-1}) = y''-x''$  y como el género de  $C$  no es cero  $y'' = x''$ . En conclusión, si denotamos  $\phi: C \times C \rightarrow C$  el morfismo que asigna a cada pareja  $(y, y')$  el tercer punto de corte de la recta que pasa por  $y$  e  $y'$  con  $C$ , tenemos que el morfismo

$$C \times C \rightarrow C, (y, y') \mapsto \phi(\phi(y, y'), x)$$

en los puntos racionales es la ley de grupo recién definida en  $C$ .

### 9.7.4 Curvas en $\mathbb{P}_3$

**23. Definición:** Se dice que un divisor  $D$  es especial si  $h^0(C, \mathcal{L}_{K-D}) > 0$ . En caso contrario, se dice que  $D$  es no especial.

El teorema de Riemann-Roch da un cálculo exacto de  $h^0(C, \mathcal{L}_D)$  si  $D$  es no especial. El teorema de Clifford nos dará una acotación de este número.

**24. Lema:** Sean  $D, D'$  divisores efectivos en una curva. Se cumple que

$$h^0(C, \mathcal{L}_D) + h^0(C, \mathcal{L}_{D'}) \leq h^0(C, \mathcal{L}_{D+D'}) + 1$$

*Demostración.* Consideremos el morfismo

$$\mathbb{P}(H^0(C, \mathcal{L}_D)) \times \mathbb{P}(H^0(C, \mathcal{L}_{D'})) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}(H^0(C, \mathcal{L}_{D+D'}))$$

$$(E, E') \longrightarrow E + E'$$

donde  $E$  y  $E'$  son divisores efectivos linealmente equivalentes a  $D$  y  $D'$  respectivamente.  $\Phi$  es el morfismo inducido de la aplicación bilineal

$$H^0(C, \mathcal{L}_D) \times H^0(C, \mathcal{L}_{D'}) \rightarrow H^0(C, \mathcal{L}_{D+D'}), (f, g) \mapsto f \cdot g$$

Observemos que las fibras de  $\Phi$  son finitas, porque todo divisor efectivo se escribe como suma de divisores efectivos de un número finito de modos. Por tanto, la dimensión de  $\text{Im } \Phi$  coincide con la dimensión de la variedad inicial y se obtiene el lema. □

**25. Teorema Clifford** Sea  $D$  un divisor especial de una curva  $C$ . Entonces

$$h^0(C, \mathcal{L}_D) \leq \frac{1}{2} \deg D + 1$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si  $D$  es linealmente equivalente a  $2r \cdot x$ , donde  $x$  es un punto hiperelíptico.

*Demostración.* Por el lema anterior,  $h^0(C, \mathcal{L}_D) + h^0(C, \mathcal{L}_{K-D}) \leq h^0(C, \mathcal{L}_K) + 1 = g + 1$ . Por Riemann-Roch,  $h^0(C, \mathcal{L}_D) - h^0(C, \mathcal{L}_{K-D}) = \deg D + 1 - g$ . Sumando estas dos expresiones obtenemos

$$h^0(C, \mathcal{L}_D) \leq \frac{1}{2} \deg D + 1$$

Demostremos la segunda afirmación del teorema. Si  $x \in C$  es hiperelíptico entonces  $h^0(C, \mathcal{L}_{2x}) = 2$ . Escribamos  $H^0(C, \mathcal{L}_{2x}) = \langle 1, f \rangle$ , con  $v_x(f) = 2$ . Entonces  $\{1, f, \dots, f^r\}$  son linealmente independientes y pertenecen a  $\Gamma(C, \mathcal{L}_{2r \cdot x})$ . Por la desigualdad anterior,  $h^0(C, \mathcal{L}_{2r \cdot x}) = \frac{1}{2} \deg(2r \cdot x) + 1$ .

Recíprocamente, sea  $D$  un divisor especial que cumpla la igualdad, que deberá tener grado par  $2r$ . Se cumple que  $h^0(C, \mathcal{L}_{D-y}) < h^0(C, \mathcal{L}_D)$ , por Riemann-Roch si  $D - y$  no es especial, por la desigualdad del teorema si  $D - y$  es especial. Por tanto,  $\mathcal{L}_D$  define un morfismo de  $C$  en  $\mathbb{P}_r$ . Ahora ya, igual que hacíamos para los divisores canónicos de las curvas hiperelípticas, se tiene que  $D$  es linealmente equivalente a  $2r \cdot x$ , con  $x$  hiperelíptico. □

Dada una curva  $C \subset \mathbb{P}_3 = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_3]$ .  $\Omega_{\Sigma_C/k} = \langle d\frac{x_1}{x_0}, d\frac{x_2}{x_0}, d\frac{x_3}{x_0} \rangle$ . Supongamos  $\Omega_{\Sigma_C/k} = \langle d\frac{x_1}{x_0} \rangle$ . Por tanto, el morfismo  $k(\frac{x_1}{x_0}) \hookrightarrow \Sigma_C$  es separable. Sea  $\mathbb{P}_1$  el haz de hiperplanos que pasan por la recta  $x_0 = 0, x_1 = 0$ . Consideremos morfismo  $C \rightarrow \mathbb{P}_1$ , que asigna a cada punto de  $C$  el hiperplano del haz que pasa por ese punto. Este morfismo es el inducido por la inclusión de cuerpos anterior en sus variedades de Riemann. Este morfismo ramifica en los hiperplanos del haz tangentes a la curva. Por Hurwitz, casi todos los hiperplanos del haz no son tangentes a la curva.

Diremos que una recta es una secante de la curva  $C \subset \mathbb{P}_3$  si corta a la curva en dos puntos distintos. Se dice que una recta es una multisecante de la curva  $C \subset \mathbb{P}_3$  si corta a la curva en más de dos puntos (contando multiplicidades). Veamos que si la curva es alabeada existen secantes que no son multisecantes. Probemos primero que si todas las secantes son multiseccantes entonces todas las tangentes a la curva pasan por un mismo punto. Sea  $p \in C$  y  $H$  un hiperplano que no contenga a  $p$ . Sea  $\phi: C \rightarrow H$  la proyección de  $C$  desde  $p$  en  $H$ . Sea  $C' = \text{Im } \phi$  y  $r \geq 2$  el grado del morfismo  $\phi: C \rightarrow C'$ . Sea  $R$  una secante no tangente a  $C$  que pase por  $p$ , que existe sin más que considerar cualquier secante incluida en cualquier plano no tangente a  $C$ , que pase por  $p$ . Dado  $q \in R \cap C$ ,  $\phi$  proyecta la tangente a  $C$  en  $q$ , en la tangente a  $C'$  en  $\phi(q)$ . Para cada tangente en  $\phi(q)$  existen  $r$  puntos en  $R \cap C$ , cuyas tangentes se proyectan por  $\phi$  en la tangente dada. Proyectando desde otro punto de  $R \cap C$  llegamos a la conclusión de que todas las tangentes de los puntos  $R \cap C$ , incluido  $p$ , son coplanarias. Ahora bien, como la condición de que la tangente en un punto sea coplanaria con la tangente en  $p$  es cerrada, variando  $R$  obtenemos que todos los puntos de  $C$  tienen tangentes coplanarias con la de  $p$ . Variando  $p$ , obtenemos que todas las tangentes son coplanarias. Si  $p' \in C$  es un punto no alineado que no yace en el plano que contiene a  $p \in C$  y  $q \in C$  y sus tangentes, entonces la tangente a  $p'$  corta a la tangente en  $p$  y a la tangente en  $q$  en un mismo punto. En conclusión, todas las tangentes a  $C$  pasan por un mismo punto.

Proyectemos  $C$  en un hiperplano desde un punto que no yazca en las tangentes a  $C$ , yazca en un hiperplano  $H$  no tangente a  $C$ , y no yazca en ninguna de las secantes de  $C$  que están en el hiperplano  $H$ . La proyección es un morfismo de grado 1, de imagen una curva plana  $\tilde{C}$  no singular,

cuyas tangentes pasan todas por un punto  $x$ . Sea  $y \notin \bar{C}$ , distinto de  $x$ . La proyección desde  $y$ ,  $\pi: \bar{C} \rightarrow \mathbb{P}_1 = R$ , en una recta, sólo ramifica en los puntos de recta  $R'$  que une  $x$  e  $y$ , es decir, si  $x' = R \cap R'$ , en  $\pi^{-1}(x')$ . Luego el número de ramificación ( $\dim_k \Omega_{\bar{C}/\mathbb{P}_1}$ ) será menor o igual que  $\#\pi^{-1}(x') = \text{gr } \bar{C} = n$ . Por Hurwitz,

$$2g_{\bar{C}} - 2 \leq n \cdot (2g_{\mathbb{P}_1} - 2) + n = -n$$

luego  $g_{\bar{C}} = 0$  y  $n$  es 1 o 2. Por tanto, el grado de  $C$ , que coincide con el de  $\bar{C}$ , es 1 o 2, y  $C$  no es alabeada (además  $g_C = g_{\bar{C}} = 0$ ).

**26. Teorema Castelnuova** *Sea  $C$  una curva de grado  $d$  y género  $g$  en  $\mathbb{P}_3$ , alabeada. Entonces,  $d \geq 3$  y*

$$g \leq \begin{cases} \frac{1}{4}d^2 - d + 1 & \text{si } d \text{ es par} \\ \frac{1}{4}(d^2 - 1) - d + 1 & \text{si } d \text{ es impar} \end{cases}$$

*Si una curva verifica tal igualdad yace sobre una cuádrlica (la igualdad se alcanza por ciertas curvas para todo  $d \geq 3$ ).*

*Demostración.* Existe un hiperplano  $H$  de  $\mathbb{P}_3$  que corta a la curva en los puntos  $\{p_1, \dots, p_d\}$ , de modo que tres cualesquiera de ellos no son colineales: Sea  $X$  el “conjunto” de las rectas de  $\mathbb{P}_3$ . Sea  $U = \{(a, b, c, r) \in C \times C \times C \times X : a \neq b \neq c, a, b, c \in r\}$ . Sea  $\pi: Y \rightarrow C$  la primera proyección. Sea  $q \in C$  un punto tal que toda cuerda es multicuerda. Sea  $p \in C$ , por el que pase alguna cuerda que no sea multicuerda. Proyectando  $C$  desde  $p$ , por Hurwitz obtendremos que por  $p$  sólo pasa un número finito de multicuerdas. Los puntos de  $C$  que no yacen en estas multicuerdas cumplen, como  $p$ , que por ellos sólo pasan un número finito de multicuerdas. Ahora es fácil probar que las fibras de  $\pi$  son de dimensión cero, salvo quizás para un número finito de puntos para los que es de dimensión 1. Por tanto,  $\dim Y = 1$ . Proyectando  $Y$  en  $X$ , tenemos que el “conjunto” de rectas que son multicuerdas es de dimensión 1. Luego el “conjunto” de hiperplanos que contienen a alguna multicuerda es de dimensión 2, luego existe un hiperplano que no contiene multicuerdas.

Sea  $D = p_1 + \dots + p_d$ , luego  $\mathcal{L}_D = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)|_C$ .

Para cada  $i = 1, 2, \dots, \min(d, 2n + 1)$ ,  $p_i$  no es un punto base de  $\Gamma(C, \mathcal{L}_{nD - p_1 - \dots - p_{i-1}})$ : Sea  $H_1$  un plano que pase por  $p_1$  y  $p_2$  y no pase por ningún otro  $p_j$ . Sea  $H_2$  un hiperplano que pase por  $p_3$  y  $p_4$  y no pase por ningún otro  $p_j$ . Así hasta  $H_{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor}$ . Para  $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor < j \leq n$ , consideramos planos que no pasen por los  $p_j$  (si  $i - 1$  es impar, consideramos  $H_{\frac{i}{2}}$ , que pasa sólo por  $p_{i-1}$ ). La unión de los  $H_i$  corta a  $C$  en un divisor linealmente equivalente a  $nD$  que pasa por  $p_1, \dots, p_{i-1}$  y no por  $p_i$ .

Por tanto, tenemos  $\min(d, 2n + 1)$  desigualdades  $h^0(C, \mathcal{L}_{nD - p_1 - \dots - p_{i-1}}) > h^0(C, \mathcal{L}_{nD - p_1 - \dots - p_i})$  y

$$h^0(C, \mathcal{L}_{nD}) - h^0(C, \mathcal{L}_{(n-1)D}) \geq \min(d, 2n + 1)$$

Sumando estas desigualdades desde 1 hasta  $n \gg 0$ , obtenemos

$$h^0(C, \mathcal{L}_{nD}) \geq r(r + 2) + (n - r)d + 1 \quad *$$

con  $r = \lfloor \frac{1}{2}(d - 1) \rfloor$ .

Por otra parte, para  $n \gg 0$ ,  $nD$  es no especial, luego por Riemann-Roch

$$h^0(C, \mathcal{L}_{nD}) = nd - g + 1$$

Combinando las dos fórmulas, obtenemos

$$g \leq d - r(r + 2)$$

que es la fórmula del teorema, escrita de modo conciso.

Si se cumple la igualdad, entonces las inecuaciones de  $*$  son igualdades. En particular, tendremos que  $h^0(C, \mathcal{L}_{2D}) < 9$ . De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathfrak{p}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta  $0 \rightarrow H^0(C, \mathfrak{p}_C(2)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(2)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{L}_{2D})$ , que nos dice existe una cuádrica que pasa por  $C$ . □

### 9.7.5 Integración por funciones elementales (J.A.Navarro)

**27. Definición:** Diremos que un cuerpo  $K$ , con una (ley de) derivación es un cuerpo diferencial. Denotaremos la ley de derivación por  $'$ . Diremos que  $a \in K$  es una constante si  $a' = 0$ . Diremos que  $i: K \rightarrow L$  es una extensión diferencial si  $L$  es un cuerpo diferencial e  $i$  es un morfismo de anillos que conmuta con las derivaciones.

$\mathbb{C}$  será el cuerpo de constantes de todos los cuerpos diferenciales.

La “derivación logarítmica” cumple:

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} \Leftrightarrow v = cu \text{ para alguna constante } c \in \mathbb{C}$$

**28. Definición:** Cuando  $v' = u'/u$ , diremos que  $v = \ln u$  es el *logaritmo* de  $u$ , ó que  $u = e^v$  es la *exponencial* de  $v$ .

Diremos que una extensión diferencial  $K \rightarrow L$  es una extensión por *funciones elementales* si  $L = K(u_1, \dots, u_n)$  donde cada función  $u_i$  verifica una de las siguientes condiciones:

1.  $u_i$  es algebraico sobre  $K(u_1, \dots, u_{i-1})$ .
2.  $u_i$  es la exponencial de algún elemento de  $K(u_1, \dots, u_{i-1})$ .
3.  $u_i$  es el logaritmo de algún elemento de  $K(u_1, \dots, u_{i-1})$ .

y diremos que  $f \in K$  es *integrable con funciones elementales* si existe alguna extensión  $L$  por funciones elementales y  $u \in L$  tal que  $u' = f$ .

**Nota:** Las funciones elementales de una variable en sentido clásico son los elementos de las extensiones por funciones elementales del cuerpo de funciones racionales  $\mathbb{C}(x)$ , contenidas en el cuerpo de funciones meromorfas en un abierto del plano complejo (que jugaría el papel de un cierre algebraico). Las funciones trigonométricas (incluso hiperbólicas) y sus inversas son elementales: se expresan con exponenciales y logaritmos.

En principio, la integración con funciones elementales en sentido clásico sería un concepto más restrictivo (pues no hemos probado que toda extensión de  $\mathbb{C}(x)$  por funciones elementales pueda sumergirse en un cuerpo de funciones meromorfas); pero el teorema de Liouville mostrará que las funciones integrables con funciones elementales también lo son en el sentido clásico, por lo que ambos coinciden:

**29. Teorema Liouville** Si una función  $f \in K$  es integrable con funciones elementales, entonces existen funciones  $h, g_1, \dots, g_n \in K$  y constantes  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  tales que

$$\int f dx = h + c_1 \ln g_1 + \dots + c_n \ln g_n$$

*Demostración.* Si  $f$  admite una primitiva elemental en  $K(u, u_2, \dots, u_r)$ , por inducción sobre  $r$  y considerando la extensión diferencial

$$K(u) \rightarrow K(u, u_2, \dots, u_r)$$

podemos suponer que existen  $q(u), p_1(u), \dots, p_n(u) \in K(u)$  tales que

$$f = q(u)' + c_1 \frac{p_1(u)'}{p_1(u)} + \dots + c_n \frac{p_n(u)'}{p_n(u)}$$

y hemos de hallar una descomposición similar en  $K$ .

**Caso algebraico:** La derivación de  $K$  se extiende de modo *único* a cada extensión finita (porque ésta es separable). Luego tal extensión es compatible con cualquier morfismo y, por tanto, con trazas y normas. Además  $\text{tr}(p'/p) = N(p)'/N(p)$ :

$$[K(u) : K] \cdot f = \text{tr}(f) = (\text{tr } q)' + c_1 \frac{N(p_1)'}{N(p_1)} + \dots + c_n \frac{N(p_n)'}{N(p_n)}$$

**Caso trascendente:**

**(1) Si  $u$  es una exponencial:**  $u' = g'u$ . En este caso  $(fu^n)' = (f' + ng')u^n$ , así que disponemos

de una "traza"  $\text{tr}(\sum f_i u^i) := f_0$  que también es compatible con las derivaciones de  $K$  y  $K(u)$ , y se concluye de igual modo que en el caso algebraico, ya que si  $v = f_n u^n + f_{n+1} u^{n+1} + \dots$ , entonces

$$\text{tr} \frac{v'}{v} = (ng)' + \frac{f'_n}{f_n}$$

**(2) Si  $u$  es un logaritmo:**  $u' = g'/g$ . Descomponiendo las funciones racionales  $p_i(u)$  en factores

irreducibles podemos suponer que son polinomios mónicos irreducibles o constantes. Descomponiendo  $q(u)$  en fracciones simples tenemos:

$$(*) \quad f = \sum \left( \frac{s_j(u)}{q_j(u)^r} \right)' + c_1 \frac{p_1(u)'}{p_1(u)} + \dots + c_n \frac{p_n(u)'}{p_n(u)}$$

Según el lema 9.7.30, la derivada  $p(u)'$  de un polinomio es otro polinomio de igual grado, ó baja en una unidad si el coeficiente de mayor grado es constante. Luego las fracciones  $p_i(u)'/p_i(u)$  son simples y vemos que no hay términos con  $r \geq 1$  en la descomposición de  $q(u)$ , porque

$$\left( \frac{s(u)}{q(u)^r} \right)' = -r \frac{s(u) \cdot q(u)'}{q(u)^{r+1}} + \dots$$

y  $q(u)$  no divide a  $s(u) \cdot q(u)'$ . Es decir, los polinomios  $p_i(u) \in K$  y  $q(u)$  es un polinomio tal que  $q(u)' \in K$ ; luego  $q(u) = cu + h$  por el lema,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $h \in K$ , y concluimos que  $f = h' + c(g'/g) + c_1(p'_1/p_1) + \dots + c_n(p'_n/p_n)$ .  $\square$

**30. Lema:** Si  $u$  es trascendente y  $u' = g \in K$ , el grado de  $p(u)'$  coincide con el de  $p(u)$ , salvo que el primer coeficiente sea constante, caso en que el grado baja en una unidad.

*Demostración.*  $(f_0u^n + f_1u^{n-1} + \dots)' = f_0'u^n + (nf_0g + f_1')u^{n-1} + \dots$  sólo baja de grado cuando  $f_0' = 0$ , caso en que  $0 = nf_0g + f_1' = (nf_0u + f_1)'$  contradice el carácter trascendente de  $u$ .  $\square$

Queda por averiguar cuándo una función elemental satisface la condición del Teorema de Liouville. Cuando al cuerpo de funciones racionales  $\mathbb{C}(x)$  se le adjunta una exponencial o un logaritmo (trascendentes) puede decidirse descomponiendo  $f$  en fracciones simples y usando el lema 9.7.30 en el caso de un logaritmo y el lema 9.7.31 en el de una exponencial:

**31. Lema:** Si  $u$  es trascendente y  $u' = gu$ ,  $g \in K$ , entonces la derivada de cualquier monomio  $hu^n \neq 0$  es un monomio no nulo de igual grado, y la derivada  $p(u)'$  de un polinomio sólo es múltiplo de  $p(u)$  cuando éste es un monomio.

*Demostración.*  $(hu^n)' = (h' + nhg)u^n$ , y su anulación implica que  $hu^n$  es constante y contradice el carácter trascendente de  $u$ . Además, si  $n > m$  y

$$\frac{h' + nhg}{h} = \frac{f' + mfg}{f}$$

entonces  $(n - m)(u'/u) = (f'/f) - (h'/h)$  vuelve a contradecir el carácter trascendente de  $u$ .  $\square$

**32. Ejemplo:** Vamos a estudiar si la integral  $\int f(x)e^{g(x)}dx$  es elemental, donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones racionales. En este caso  $K := \mathbb{C}(x, e^g)$ , y pondremos  $u := e^g$ , de modo que  $u'/u = g'$ . Si  $g(x)$  no es constante, entonces  $u$  es trascendente sobre  $\mathbb{C}(x)$ :

$$\begin{aligned} u^n + f_1(x)u^{n-1} + \dots + f_n(x) &= 0 \\ (ng')u^n + (f_1' + (n-1)f_1g')u^{n-1} + \dots + f_n' &= 0 \\ ng' &= f_n'/f_n \end{aligned}$$

y como  $f_n'/f_n$  es nula o descompone en suma de fracciones con denominadores lineales, concluimos que  $g' = 0$ . (O bien  $e^g$  es trascendente porque tiene una singularidad esencial en cualquier polo de  $g$ ). Ahora, si

$$fu = q(u)' + c_1 \frac{p_1(u)'}{p_1(u)} + \dots + c_n \frac{p_n(u)'}{p_n(u)}$$

descomponiendo  $q(u)$  en fracciones simples, el lema 9.7.31 permite obtener que  $p_i(u) = u$  ó está en  $\mathbb{C}(x)$ , y que  $q(u) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i(x)u^i$ . Luego  $q(u) = z(x)u$  para alguna función racional  $z(x)$ , y concluimos que  $fu = (z' + g'z)u$ . Es decir, la ecuación diferencial

$$z' + g'z = f$$

tiene alguna solución racional  $z(x) \in \mathbb{C}(x)$ . Recíprocamente, si  $z(x)$  es una de tales soluciones, la integral  $\int fe^g dx = ze^g$  es elemental. La existencia de soluciones racionales de esta ecuación puede decidirse descomponiendo en fracciones simples:  $\int e^{x^2} dx$  origina la ecuación  $z' + 2xz = 1$ , cuya solución

ha de ser un polinomio, lo que es imposible. Tal integral no es una función elemental.  $\int x^{-1}e^x dx$

origina la ecuación  $z' + z = x^{-1}$ , que claramente no tiene solución racional. No es una función elemental.

Con el cambio  $y = e^x$  obtenemos que  $\int \frac{dy}{\ln y}$  no es una función elemental. Como esta integral se obtiene al integrar por partes  $\int \ln(\ln x) dx$ , ésta tampoco es una función elemental.

**33. Ejercicio:**  $\int x^{-1} \sin x dx$  no es una función elemental.

Veamos ahora el

**Caso algebraico:**  $K = \mathbb{C}(x, y)$  donde  $y$  es algebraico sobre  $\mathbb{C}(x)$ . Dada una 1-forma diferencial  $\omega = f(x, y) dx$ , consideramos una base  $\{r_1, \dots, r_s\}$  del grupo generado por sus residuos y los divisores  $D_1, \dots, D_s$ , donde el coeficiente en  $D_i$  de un punto  $p$  es el coeficiente de  $r_i$  en el residuo de  $\omega$  en  $p$ .

Si la integral  $\int \omega$  es elemental, entonces los divisores  $D_1, \dots, D_s$  definen elementos de torsión en la variedad jacobiana,  $m_i D_i = D(g_i)$ , y existe una función meromorfa  $h \in K$  tal que

$$\omega = dh + \sum_{i=1}^s \frac{r_i}{m_i} \frac{dg_i}{g_i}$$

En efecto, de acuerdo con el Teorema de Liouville tenemos

$$\omega = dh + \sum_j c_j \frac{dh_j}{h_j}, \quad c_j \in \mathbb{C}$$

y considerando una base  $\{r_1, \dots, r_s, a_1, \dots\}$  del  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial que generan los residuos y las constantes  $c_j$  tendremos:

$$\begin{aligned} c_j &= \left( \sum_i \frac{m_{ij}}{m_i} r_i \right) + \frac{n_{1j}}{n_1} a_1 + \dots \\ \omega &= dh + \sum_i r_i \left( \sum_j \frac{m_{ij}}{m_i} \frac{dh_j}{h_j} \right) + a_1 \left( \sum_j \frac{n_{1j}}{n_1} \frac{dh_j}{h_j} \right) + \dots \\ &= dh + \sum_i \frac{r_i}{m_i} \frac{dg_i}{g_i} + \frac{a_1}{n_1} \frac{dv_1}{v_1} + \dots \end{aligned}$$

Considerando el residuo de  $\omega$  en cualquier cero de  $v_1$  vemos que éstos no existen:

$$\omega = dh + \sum_{i=1}^s \frac{r_i}{m_i} \frac{dg_i}{g_i}$$

y al observar que el residuo de  $(df)/f$  en un punto  $p$  es precisamente el coeficiente de  $p$  en el divisor  $D(f)$ , concluimos que

$$D_i = \frac{D(g_i)}{m_i}$$

**Nota:** Aunque aparentemente este resultado sólo sea una condición necesaria para que una integral  $\int \omega$  sea elemental, realmente es una caracterización, y permite averiguar el carácter elemental de  $\int \omega$  (siempre que se sepa decidir cuándo un elemento de la jacobiana es de torsión):

Primero se calculan los residuos de  $\omega$  y los correspondientes divisores  $D_i$ . Si alguno no es de torsión, la integral no es elemental. Si todos son de torsión,  $m_i D_i = D(g_i)$ , consideramos la forma diferencial

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \omega - \sum_{i=1}^s \frac{r_i}{m_i} \frac{dg_i}{g_i}$$

y el resultado anterior afirma que  $\theta$  es exacta precisamente cuando la integral  $\int \omega$  es elemental. Esta forma diferencial  $\theta$  ya tiene residuo nulo en todo punto así que las partes principales de sus polos pueden integrarse y obtenemos unos desarrollos de Laurent  $\delta_p$ . Podemos decidir si tales desarrollos de Laurent son los de alguna función meromorfa  $h \in K$  (pues tal condición equivale a que  $\sum_p \text{res}_p(\delta_p \omega_i) = 0$  para toda forma diferencial regular  $\omega_i$ ). Si no existe tal función  $h$ , la integral no es elemental. Si existe, es única salvo la adición de una constante, y la integral  $\int \omega$  es elemental si y sólo si  $\theta = dh$ .

**34. Ejemplo:** Si  $\omega$  es regular, ya tiene residuo nulo en todo punto. En tal caso  $\theta = \omega$ ; luego los desarrollos de Laurent  $\delta_p$  son idénticamente nulos y  $h = 0$ . Concluimos que la integral  $\int \omega$  es elemental si y sólo si  $\omega = 0$ . *Ninguna forma diferencial regular no nula tiene integral elemental.*

En particular, las integrales elípticas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-c)}} \quad , \quad c \neq 0, 1$$

no son elementales.

## 9.8 Apéndice: Teorema de representabilidad

Es bien conocido que los funtores representables  $F = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{M})$  son exactos por la izquierda.

Queremos demostrar el recíproco. Para construir el representante  $\mathcal{M}$  del funtor contravariante por la izquierda  $F$ , vamos a caracterizar los submódulos  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$ , en términos de  $F$ , para concluir demostrando que  $\mathcal{M}$  es el límite inductivo de los submódulos  $\mathcal{N}$ .

Un submódulo de  $\mathcal{M}$  es un haz coherente  $\mathcal{N}$  y un morfismo  $\mu: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  inyectivo, es decir, un morfismo  $\mu$  que verifica que para todo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{M} \\ \delta \downarrow & \nearrow \mu' & \\ \mathcal{N}' & & \end{array}$$

si  $\delta$  es un epimorfismo,  $\delta$  ha de ser un isomorfismo.

**1. Definición:** Dado un funtor contravariante  $F$  llamamos pareja a un  $\mathcal{O}_X$ -módulo coherente  $\mathcal{N}$  y un elemento  $\mu \in F(\mathcal{N})$ . Llamamos morfismo de parejas  $(\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\mathcal{N}', \mu')$  a un morfismo  $\delta: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$  tal que  $F(\delta): F(\mathcal{N}') \rightarrow F(\mathcal{N})$  aplica  $\mu'$  en  $\mu$ . Diremos que  $(\mathcal{N}, \mu)$  es una pareja mínima si todo epimorfismo  $(\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\mathcal{N}', \mu')$  de parejas es isomorfismo.

Pues bien, las parejas mínimas de un funtor contravariante representable se corresponderán con los submódulos del representante del funtor.

**2. Lema:** *Todo morfismo de parejas de una pareja mínima en otra pareja es inyectivo.*

*Demostración.* Sea  $\phi: (\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\mathcal{N}', \mu')$  un morfismo de parejas, siendo  $(\mathcal{N}, \mu)$  mínima. Sea  $i: \text{Im } \phi \hookrightarrow \mathcal{N}'$  la inclusión natural y  $\bar{\mu} = F(i)(\mu')$ . El morfismo de parejas natural  $(\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\text{Im } \phi, \bar{\mu})$  es un epimorfismo de parejas, luego  $\mathcal{N} = \text{Im } \phi$  y  $\phi$  es inyectivo.  $\square$

**3. Lema:** *Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $F$  un funtor contravariante sobre la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos coherentes y  $(P, \phi)$  una pareja de  $F$ . Existe un morfismo de parejas de  $(P, \phi)$  en una mínima.*

*Demostración.* Si  $(P, \phi)$  es una pareja mínima hemos concluido. Si no, existe un epimorfismo de parejas  $(P, \phi) \rightarrow (P_1, \phi_1)$ , que no es isomorfismo. Si  $(P_1, \phi_1)$  es mínima hemos acabado. Si no, existe un epimorfismo de parejas  $(P_1, \phi_1) \rightarrow (P_2, \phi_2)$ , que no es isomorfismo. Este proceso finitiza, porque la cadena  $\text{Ker } \phi_1 \subset \text{Ker}(\phi_1 \circ \phi_2) \subset \dots$  ha de ser finita por la noetherianidad de  $X$ .  $\square$

**4. Corolario:** *Sea  $X$  un esquema noetheriano,  $F$  un funtor contravariante exacto por la izquierda y  $(P, \phi), (P', \phi')$  dos parejas de  $F$ . Existe un morfismo de parejas de estas dos parejas en una misma pareja mínima.*

*Demostración.* Observemos en primer lugar que  $F$ , por ser exacto por la izquierda, es aditivo, i.e.,  $F(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') = F(\mathcal{M}) \oplus F(\mathcal{M}')$ : De la sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow 0$  se deduce la exactitud de la sucesión  $0 \rightarrow F(\mathcal{M}') \rightarrow F(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') \rightarrow F(\mathcal{M})$ . Ahora bien, como el morfismo  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}'$  tiene retracto, entonces  $F(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') \rightarrow F(\mathcal{M})$  tiene sección y con todo  $F(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') = F(\mathcal{M}) \oplus F(\mathcal{M}')$ .

Por tanto, podemos considerar la pareja  $(P \oplus P', \phi \oplus \phi')$ . Por el lema anterior, existe un morfismo de esta pareja en una pareja mínima. Como tenemos morfismos naturales de  $(P, \phi)$  y  $(P', \phi')$  en  $(P \oplus P', \phi \oplus \phi')$  concluimos el corolario.  $\square$

**5. Lema:** *Si  $F$  es un funtor contravariante exacto por la izquierda, dos morfismos de parejas  $u, v: (\mathcal{N}', \mu') \xrightarrow{\quad} (\mathcal{N}, \mu)$  en una pareja mínima coinciden.*

*Demostración.* Consideremos el conúcleo de los dos morfismos  $u, v$ , es decir sea  $\text{Coker}(u - v)$  y denotemos por  $\pi: \mathcal{N} \rightarrow \text{Coker}(u - v)$  el morfismo de paso al cociente.

Como  $u, v$  son morfismos de parejas se verifica que  $F(u)(\mu) = F(v)(\mu) = \mu'$ . Como  $F$  es un funtor exacto por la izquierda, existe un  $\delta \in F(\text{Coker}(u - v))$  de modo que  $F(\pi)(\delta) = \mu$ . Por tanto  $\pi: (\mathcal{N}, \mu) \rightarrow (\text{Coker}(u - v), \delta)$  es un epimorfismo de parejas que ha de ser isomorfismo porque  $(\mathcal{N}, \mu)$  es mínima. Luego  $u = v$ .  $\square$

**6. Teorema de representabilidad:** *Sea  $X$  un esquema noetheriano. La condición necesaria y suficiente para que un funtor contravariante, sobre la categoría de  $\mathcal{O}_X$ -módulos coherentes, sea representable por un haz cuasicoherente es que sea exacto por la izquierda.*

*Demostración.* La necesidad es bien conocida. Probemos que un funtor  $F$  contravariante y exacto por la izquierda es representable.

Por 9.8.3, 9.8.4 y 9.8.5, podemos definir el límite inductivo de las parejas mínimas, denotémoslo por  $R$ . Veamos que  $F = \text{Hom}(-, R)$ :

Si  $\mathcal{M}$  es un módulo coherente se define  $\alpha: F(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}, R)$  así: Dado  $\xi \in F(\mathcal{M})$ , por el lema 9.8.3 existe un morfismo  $u: (\mathcal{M}, \xi) \rightarrow (\mathcal{N}, \mu)$  en una pareja mínima. Sea  $i: \mathcal{N} \rightarrow R$  el morfismo natural de  $\mathcal{N}$  en el límite inductivo. Definimos  $\alpha(\xi): \mathcal{M} \rightarrow R$ , por  $\alpha(\xi) = i \circ u$ . Es fácil comprobar que  $\alpha$  está bien definido y es funtorial en  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{M}$  es un módulo coherente se define  $\beta: \text{Hom}(\mathcal{M}, R) \rightarrow F(\mathcal{M})$  así: Dado  $\phi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, R)$ , factoriza a través de un morfismo  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{N}, \mu)$  en una pareja mínima. Se define  $\beta(\phi) = F(\varphi)(\mu)$ . Es fácil comprobar que  $\beta$  está bien definido y es funtorial en  $\mathcal{M}$ .

Comprobando que  $\alpha \circ \beta$  y  $\beta \circ \alpha$  son la identidad sobre sus respectivos dominios se concluye.  $\square$

## 9.9 Problemas

Supondremos siempre que el cuerpo base es algebraicamente cerrado y que las curvas consideradas son completas no singulares, salvo mención expresa contraria.

1. Sea  $k$  de característica cero. Sea  $C$  una curva proyectiva plana no singular de grado  $n$ . Probar que el número de tangentes que se pueden trazar desde un punto  $p \notin C$  del plano proyectivo a la curva es  $2n + 2g - 2$ , siendo  $n$  el grado de la curva y  $g$  el género de la curva. Calcular el número de tangentes que se pueden trazar desde un punto  $p \in C$ .
2. En el ejercicio anterior admitamos que  $C$  tenga puntos singulares de multiplicidad 2 que desingularizan con la primera explosión. Entonces el número de tangentes es  $2n + 2g - 2 - K$ , siendo  $K$  el número de cúspides de  $C$ .
3. Sea  $C \subset \mathbb{P}_2$  una curva proyectiva plana no singular de grado  $d$ , sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Para cada punto  $x \in C$ , sea  $T_x C$  la recta tangente a  $C$  en  $x$ . Consideremos  $T_p C$  como un punto del plano proyectivo dual  $\mathbb{P}_2^*$ . El morfismo  $\phi: C \rightarrow \mathbb{P}_2^*$ ,  $\phi(x) = T_x C$ , define un morfismo de  $C$  en su curva dual  $C^*$ . Calcular el grado de  $C^*$ . Calcular el número de puntos de inflexión de  $C$ , considérese para ello el morfismo  $C \rightarrow R$ ,  $x \mapsto T_x C \cap R$ , donde  $R$  es cualquier recta de  $\mathbb{P}_2$ .

4. Sea  $\pi: C \rightarrow C'$  un revestimiento de Galois entre curvas, sobre un cuerpo de característica cero. Sea  $G$  el grupo de Galois de  $\pi$  y  $n = \#G$ . Sean  $p_1, \dots, p_s$  un conjunto maximal de puntos de ramificación de  $C$  cuyas imágenes por  $\pi$  sean distintas. Sean  $r_i = e_{p_i}$  los índices de ramificación de los  $p_i$ . Probar que

$$\frac{2g - 2}{n} = 2g_{C'} - 2 + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$$

Probar que si  $g_C \geq 2$  el valor mínimo de  $2g_{C'} - 2 + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$  es  $\frac{1}{42}$  y concluir que  $n \leq 84(g_C - 1)$ .

Probar que el orden del grupo de automorfismos de una curva de género  $g$  mayor o igual que dos es menor igual que  $84(g - 1)$ .

5. Probar que la condición necesaria y suficiente para que una curva tenga estructura de grupo es que sea de género 1.
6. Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Sea  $C$  una cúbica proyectiva plana no singular. Probar que cada par de puntos de  $C$  es un par de los tres puntos de contacto de cuatro cónicas tritangentes a  $C$ .
7. Sea  $C$  una cónica irreducible del plano proyectivo. Probar que todo automorfismo de  $C$  levanta a un automorfismo del plano proyectivo.
8. Probar que la inclusión de una curva no singular plana proyectiva de grado 4 en el plano proyectivo es la inmersión canónica.

9. Sea  $C$  la curva hiperelíptica birracional a  $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - \alpha_i)$ . Probar que  $\Gamma(C, \Omega_{C/k}) = \left\{ \sum_{i=0}^{g-1} \lambda_i \frac{x^i dx}{y} \right\}$ . Expresar en coordenadas el morfismo canónico de  $C$ .

- 
10. Sea  $C$  una cúbica proyectiva plana. Probar que desde un punto  $p$  (que no sea de inflexión) de la cúbica se pueden trazar cuatro tangentes. Demostrar que la cónica que pasa por los cuatro puntos de tangencia y  $p$ , es tangente a la cúbica en  $p$ .
  11. Sea  $C$  una curva completa no singular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Probar que si existe una función  $f \in \Sigma_C$ , de modo que  $f$  y  $df$  sólo tienen único polo y un único cero en lo mismos puntos, entonces  $C = \mathbb{P}_1$ .
  12. Sea  $C$  una curva de género  $g$  y  $x \in C$ . Probar que existen exactamente  $g$  números naturales  $0 \leq n_1 < \dots < n_g < 2g$  de modo que no existe una función meromorfa con un único polo, de orden  $n_i$  en  $x$ . Se dice que  $x$  es de Weierstrass si y sólo si  $n_g \neq g$ . Demostrar que  $x$  es de Weierstrass si y sólo si existe una diferencial holomorfa con un cero de orden  $g$  en  $x$ .
  13. Probar que toda curva se puede meter como una curva cerrada en un espacio proyectivo  $\mathbb{P}_3$ .
  14. Sea  $C$  una cúbica alabeada de  $\mathbb{P}_3$ . Sea  $C'$  otra curva y  $\phi: C \rightarrow C'$  un morfismo de grado 3. Demostrar que cada fibra de  $\phi$  es la intersección de  $C$  con cada uno de los planos de un haz de planos.
  15. Sea  $C$  una curva plana de ecuación  $x^4 + y^4 - 1 = 0$ . Demostrar que 4 puntos de la curva son el divisor de ceros de una diferencial holomorfa si y sólo si están alineados. (car  $k \neq 2$ ).
  16. Sea  $C$  la desingularización de  $y^5 + 3x^4y + x^2 + xy = 0$ . Dados 4 puntos arbitrarios de la curva existe una diferencial holomorfa que tiene ceros en esos cuatro puntos. Existe una diferencial holomorfa con ceros en 8 puntos si y sólo si los 8 puntos yacen en una cónica que pasa por el origen.
  17. Toda cuártica de género 1 en  $\mathbb{P}_3$  es intersección de dos cuádricas.

# Índice de Materias

- A*-álgebra finita, 53
- A*-álgebras, 35
- I*-filtración, 75
- Árbol de explosión, 112
- Álgebra graduada, 66
  
- Anillo, 9
- Anillo íntegramente cerrado, 100
- Anillo íntegro, 11
- Anillo conmutativo con unidad, 9
- Anillo de la explosión, 111
- Anillo de la transformación cuadrática, 111
- Anillo de Rees, 76, 109
- Anillo de valoración, 99
- Anillo de valoración discreta, 99
- Anillo graduado, 76
- Anillo local regular, 95
- Anillo noetheriano, 52
- Anillo normal, 100
- Aplicación bilineal, 33
  
- Cambio de base, 35
- Castelnuovo, 203
- Categoría, 31
- Cerrado irreducible, 14
- Cierre entero, 100
- Clifford, 202
- Cohen-Seidenberg, 56
- Completación de un módulo, 72
- Componente irreducible, 14
- Componente sumergida, 64
- Conjunto filtrante creciente, 42
- Conjunto filtrante decreciente, 40
- Cono tangente, 75
- Contacto maximal, 120
- Cuerpo, 10
- Curva, 139
- Curvas elípticas, 197
  
- Curvas hiperelípticas, 197
  
- Datos de construcción, 142, 144
- Datos de construcción efectivos, 143, 144
- Desarrollo de Puiseux, 121
- Descomposición primaria reducida, 62
- Dilatado de un módulo, 76
- Dimensión de Krull, 55, 88
- Dimensión de un esquema, 139
- Divisor de cero, 11
- Divisor especial, 201
- Divisor no especial, 201
- Divisores canónicos, 184
- Divisores de una curva, 157
- Dominio de Dedekind, 101
  
- Elemento algebraico, 54
- Elemento entero, 53
- Elementos algebraicamente independientes, 57
- Equivalencia lineal de divisores, 158
- Espacio étale, 132
- Espacio anillado, 134
- Espacio anillado en anillos locales, 134
- Espacio noetheriano, 53
- Espectro primo, 13
- Espectro proyectivo, 66
- Esquema, 137
- Esquema irreducible, 137
- Esquema reducido, 137
  
- Fórmula de la fibra, 20
- Fibra de un prehaz, 130
- Fibra excepcional, 112
- Filtración *I*-ádica, 75
- Filtración *I*-estable, 75
- Filtración de un módulo, 71
- Función de Hilbert, 85
- Función de Samuel, 85

- 
- Funtor contravariante, 31
  - Funtor covariante, 31
  
  - Género aritmético de una curva, 184
  - Género geométrico de una curva, 184
  - Gérmenes de secciones, 130
  - Grado de un divisor, 157
  - Graduado por una filtración, 73
  - Grupo de Picard, 159
  - Grupos de cohomología de un haz, 169
  
  - Haz, 131
  - Haz acíclico, 171
  - Haz de diferenciales relativas, 185
  - Haz de línea, 158
  - Haz de localizaciones homogéneas, 138
  - Haz de morfismos de haces, 149
  - Haz dualizante de una curva, 183
  - Haz flasgo, 170
  
  - Ideal, 10
  - Ideal  $\mathfrak{p}$ -primario, 60
  - Ideal anulador de un módulo, 28
  - Ideal de valoración, 99
  - Ideal homogéneo, 66
  - Ideal irreducible, 62
  - Ideal irrelevante, 66
  - Ideal maximal, 11
  - Ideal primario, 60
  - Ideal primo, 11
  - Ideales primos asociados, 64
  - Imagen directa de haces, 133
  - Imagen inversa de haces, 133
  - Imagen inversa de un haz de módulos, 156
  
  - Límite inductivo, 43
  - Límite proyectivo, 40
  - Lema de Krull, 78
  - Lema de Nakayama, 24
  - Lema de normalización de Noether, 58
  - Longitud de un módulo, 25
  
  - Módulo, 21
  - Módulo de presentación finita, 39
  - Módulo de tipo finito, 24
  - Módulo fielmente plano, 37
  - Módulo graduado, 76
  - Módulo libre, 24
  - Módulo noetheriano, 51
  - Módulo plano, 36
  - Módulo proyectivo, 38
  - Módulo simple, 25
  - Morfismo afín, 141
  - Morfismo birracional, 69, 141
  - Morfismo de anillos, 10
  - Morfismo de anillos fielmente plano, 38
  - Morfismo de anillos plano, 38
  - Morfismo de espacios anillados, 134
  - Morfismo de espacios anillados en anillos locales, 134
  - Morfismo de esquemas, 137
  - Morfismo de explosión, 109
  - Morfismo de módulos, 22
  - Morfismo de prehaces, 130
  - Morfismo dominante, 102
  - Morfismo finito, 53, 141
  - Morfismo plano, 192
  - Multiplicidad de intersección, 115
  - Multiplicidad en un punto, 112
  
  - Núcleo de un morfismo de módulos, 22
  
  - Parte de torsión de un haz cuasicoherente, 177
  - Polinomio de Hilbert, 86
  - Polinomio de Samuel, 87
  - Prehaz, 129
  - Prehaz de módulos, 130
  - Producto tensorial de haces de módulos, 150
  - Producto tensorial de módulos, 33
  - Punto cuspidal, 120
  - Punto genérico, 15
  - Punto no singular, 104
  - Punto singular, 104
  - Puntos hiperehépticos, 199
  
  - Radical de Jacobson, 30
  - Radical de un anillo, 19
  - Radical de un ideal, 60
  - Ramas analíticas, 119
  - Rango de un módulo coherente, 177
  - Residuo, 187
  - Resolución de Godement, 169
  - Revestimiento no ramificado, 194
  
  - Serie de composición de módulos, 25
  - Sistema de parámetros, 88

Sistema generador de un módulo, 24  
Sistema inductivo de objetos, 42  
Sistema proyectivo de objetos, 40  
Soporte de un divisor, 157  
Soporte de un haz, 173  
Soporte de un módulo, 29  
Subanillo, 10  
Submódulo, 22  
Sucesión exacta de módulos, 27  
Sucesión exacta escindida, 47  
Sucesión exacta que rompe, 47

Teorema de Artin-Rees, 77  
Teorema de Bézout, 117  
Teorema de Cohen, 80  
Teorema de De Rham, 172  
Teorema de los ceros de Hilbert, 58  
Teorema de Max Noether, 118  
Teorema de Pappus, 124, 164  
Teorema de Pascal, 124, 164  
Teorema del ascenso, 55  
Teorema del ideal principal de Krull, 90, 91  
Teorema formal de la función inversa, 79  
Teorema fuerte de los ceros de Hilbert, 59  
Topología  $I$ -ádica, 75  
Topología de Zariski, 14  
Transformación cuadrática, 109

Valoración discreta, 98  
Variedad íntegra, 59  
Variedad algebraica, 139  
Variedad completa, 139  
Variedad de Riemann, 140  
Variedad racional, 69  
Variedades catenarias, 91  
Variedades proyectivas, 139