Cálculo diferencial tensorial

20-2-2023

Índice general

Capítulo 1

Álgebra Lineal Tensorial

Estas notas son provisionales.

El cálculo diferencial tensorial es una de las teorías más hermosas que aparecen en toda la Matemática. En ella conviven en perfecta armonía el Álgebra, el Análisis, la Geometría Diferencial y la Física.

1.1. Definiciones. Construcciones

El punto de partida de las Matemáticas son los números naturales, a partir de ellos vamos definiendo y construyendo toda la Matemática, “Dios nos dio los números naturales, el resto de las Matemáticas la hicimos los hombres” (creo que dijo Kronecker). La piedra clave de las definiciones y construcciones en Matemáticas es la palabra “sea”, y a los matemáticos nos parece bien (¡como en el Génesis!). Demos algunos ejemplos.

1. Los matemáticos sabemos sustituir con todo rigor la palabra equivalente por la palabra igual, sabemos identificar una cosa con sus equivalentes. En efecto, consideremos una relación de equivalencia en un conjunto X. Un elemento de X y todos sus equivalentes, los podemos identificar, hacerlos todos una misma cosa, diciendo simplemente: “Sea el subconjunto de X formado por un elemento x y todos sus equivalentes. Denotemos este subconjunto por $\bar{x}$. Del mismo modo dado un elemento $y \in X$, sea el subconjunto de X formado por y y todos sus equivalentes y denotemos este subconjunto por $\bar{y}$. Ahora tendremos que x es equivalente a y si y solo si $\bar{x}$ es igual a $\bar{y}$. Llamemos $\bar{X}$ el conjunto que se obtiene al identificar en X cada elemento con sus equivalentes, es decir,

$$\bar{X} := \{\bar{x},\ x \in X\}.$$

Donde $\bar{x} = \bar{y}$ si y solo si x es equivalente a y. Misión cumplida”.

Terminología: A $\bar{x}$ (que es x y todos sus equivalentes), se le denomina clase de equivalencia de x; y se dice que x es un representante de la clase de equivalencia $\bar{x}$. $\bar{X}$ se dice que es el conjunto cociente de X por la relación de equivalencia. Si la relación de equivalencia se denota $\sim$, entonces suele denotarse $\bar{X} := X/\sim$.

1.1 Dado el anillo de números naturales $\mathbb{N}$, definamos o construyamos el anillo de los número enteros $\mathbb{Z}$. Para ello, en Matemáticas, no podremos hablar de grados bajo cero ni de deudas como se hace con los niños pequeños. Antes de empezar a construir $\mathbb{Z}$, diré que tengo en mente: sé que todo número entero es diferencia de dos naturales y sé decir, usando la operación $+$, cuándo $n-m$ es igual a $n'-m'$ (con $n,m,n',m' \in \mathbb{N}$), en efecto, son iguales cuando $n+m' = m+n'$. Basta con esto. "Consideremos el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de parejas de números naturales y consideremos en él la siguiente relación de equivalencia: diremos que $(n,m) \sim (n',m')$ cuando $n+m' = m+n'$. Denotaremos la clase de equivalencia de (n,m) por $n-m$ (léase "n guión m"). Por tanto, $n-m = n'-m'$ si y solo si $n+m' = m+n'$. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto cociente de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ por esta relación de equivalencia, es decir,

$$\mathbb{Z} := \{n-m, \text{ con } n,m \in \mathbb{N}\},$$

donde $n-m = n'-m'$ si y solo si $n+m' = m+n'$. Definido queda $\mathbb{Z}$. Seguiremos la siguientes notaciones $n = n-0$, $-m = 0-m$ y es fácil probar que

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

En $\mathbb{N}$ tenemos la relación de orden $\le$. Definamos la relación de orden en $\mathbb{Z}$: $n-m \le n'-m'$ cuando $n+m' \le m+n'$. Tenemos $\{\dots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3,\dots\}$ ¿Cómo definimos la suma en $\mathbb{Z}$? Así: $(n-m)+(n'-m') := (n+n')-(m+m')$. Pruebe el lector que $(\mathbb{Z},+)$ es un grupo abeliano ¿Cuánto vale $-(n-m)$? Defina el lector el producto en $\mathbb{Z}$".

1.2 Si establecemos en $\mathbb{Z}$ la relación de equivalencia $n \equiv m$ si y solo si $n-m$ es múltiplo de 5, tendremos que $\bar{n} = \bar{m}$ si y solo $n-m$ es múltiplo de 5. Si identificamos en $\mathbb{Z}$ cada entero con sus equivalentes, tenemos solo cinco elementos distintos, es decir, $\bar{\mathbb{Z}} = \{\bar{0},\bar{1}\dots,\bar{4}\}$.

1.3 Sea A un anillo. Dado un ideal $I \subset A$, establezcamos la siguiente relación de equivalencia: $a \in A$ es equivalente a $a' \in A$ si y solo si $a-a' \in I$, es decir, si y solo si existe algún $i \in I$ de modo que $a = a'+i$. En este caso, $\bar{A} := \{\bar{a},\, a \in A$, de modo que $\bar{a} = \bar{a}'$ si y solo si $a-a' \in I\}$ se denota A/I. Resulta que A/I tiene una estructura natural de anillo, definiendo la suma y el producto como sigue

$$\bar{a}+\bar{b} := \overline{a+b} \text{ y } \bar{a}\cdot\bar{b} := \overline{a\cdot b}.$$

el elemento neutro para la suma es $\bar{0}$ y para el producto $\bar{1}$.

2. Hemos definido ya el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$, definamos el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$. En Matemáticas no podemos hablar de pasteles y porciones de pasteles, como se habla a los niños. Pero antes de empezar a construir $\mathbb{Q}$, sabríamos decir cuándo $\frac{n}{m}$ es igual a $\frac{n'}{m'}$ $(n,m,n',m' \in \mathbb{Z})$ y sabemos sumar número racionales y multiplicarlos. No necesitamos nada más, salvo la palabra "sea": Consideremos en $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ la relación de equivalencia $(n,m) \sim (n',m')$ cuando $nm' = mn'$. Denotemos a la clase de equivalencia de (n,m) por $\frac{n}{m}$. Sea $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\})/\sim$, es decir

$$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m}, \text{ con } n \in \mathbb{Z} \text{ y } m' \in \mathbb{Z}-\{0\}, \text{ donde } \frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \text{ si y solo si } nm' = mn'\}.$$

¿Cómo definimos la suma en $\mathbb{Q}$? $\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'} := \frac{m'n+mn'}{mm'}$. Defina el lector el producto. Tenemos el morfismo de anillos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{n}{1}$, que es un morfismo de anillos inyectivo. Suele denotarse $\frac{n}{1} = n$.

2.1 Sea A un anillo y $S \subset A$, un subconjunto que cumpla $1 \in S$ y si $s,s' \in S$ entonces $s \cdot s' \in S$. Queremos definir el anillo (que denotaremos por A_S) formado por las fracciones a/s, $a \in A$, $s \in S$. Obviamente, queremos que se cumpla que $\frac{a}{s} = \frac{ta}{ts}$, para todo $t \in S$. No hay mayor problema, digamos que son equivalentes y a los equivalentes hagámoslos iguales:

$$\begin{aligned} A_S := \{\frac{a}{s}, \text{ con } a \in A \text{ y } s \in S \mid \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} & \text{ si existen } t,t' \in S \text{ tales que las fracciones} \\ & \frac{ta}{ts} \text{ y } \frac{t'a'}{t's'} \text{ tienen el mismo numerador y denominador } \} \end{aligned}$$

¿Cómo definimos la suma? $\frac{a}{s}+\frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st}$ ¿Y el producto? $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t} := \frac{ab}{st}$.

3. Hemos definido $\mathbb{Q}$, definamos ahora $\mathbb{R}$. Aquí a los niños se les habla de los números reales de un modo muy aproximado a lo que hacemos en Matemáticas (la construcción de número real en Matemáticas es la objetivación formal de la experiencia física de aproximación (interminable)). Se les dice algo así como: Vamos a ver cuánto mide media circunferencia. Mido y veo que es casi 3, pero si preciso más es $3,1$, si preciso más es $3,14$ y así sucesivamente nos va saliendo que mide $3,141592...$ con infinitas cifras decimales. Así, nos decían que los números reales son los números con infinitas cifras decimales (después nos decían que $0,999999999....$ era el mismo número que 1 ¡Identificábamos dos números equivalentes!). La construcción que damos en Matemáticas de los números reales es esencialmente la misma que la que damos para completar cualquier espacio métrico (como la construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$, es la misma esencialmente que la que damos para construir A_S a partir de A y S). Tenemos claro cuando una sucesión de números racionales se aproximan a algo [1], es decir, definimos primero qué es una sucesión de Cauchy. Tenemos claro también, cuándo dos aproximaciones son iguales o equivalentes (cuando la diferencia de las dos sucesiones de Cauchy se aproximen a 0). Así pues, dar un número real equivale a dar las aproximaciones a él, siempre que identifiquemos estas aproximaciones. Nos basta con esto para definir $\mathbb{R}$, salvo la palabra sea: “Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy, donde diremos que dos sucesiones de Cauchy son iguales si son equivalentes”. Definido queda $\mathbb{R}$ (véase la sección 2.1 para un desarrollo mucho más detallado).

4. Construyamos el cuerpo de los números complejos. A los niños pequeños se les dice que no existe ningún número (real) que sea solución de la ecuación $x^2+1=0$, porque todo número (real) al cuadrado es positivo. Más mayores, se les dice que sí

[1] Aunque ese algo no sea un número racional. En realidad, lo real, real de verdad son las aproximaciones, que éstas se aproximen a algo realmente existente es otra cuestión. Este algo es una abstracción, sin embargo suele pensarse que es muy real y que la aproximación es una abstracción matemática, pero esto es otro tema...

tiene solución: el número imaginario i ¿Cómo vamos a proceder? Obviamente $x \in \mathbb{R}[x]$ no cumple que $x^2+1=0$. En 1.2 podíamos haber dicho que $5 \neq 0$, pero ... $\bar{5}=0$. Vamos a proceder aquí de modo parecido. Consideremos el polinomio x^2+1 y el ideal $(x^2+1) := \{p(x)\cdot(x^2+1),\ \forall p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. Sea $\mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$, que es un anillo. Consideremos el morfismo de anillos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$, $r \mapsto \bar{r}$, sigamos las notaciones $\bar{r} =: r$ (para todo $r \in \mathbb{R}$) y $\bar{x} =: i$. Entonces, $i^2 = \bar{x}^2 = \overline{x^2} = \overline{-1} = -1$. Veamos que dado $\overline{p(x)} \in \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$, existen $a, b \in \mathbb{R}$ únicos de modo que $\overline{p(x)} = \overline{a+bx} = a + b\cdot i$. En efecto, existen polinomios $q(x), a+bx \in \mathbb{R}[x]$ tales que $p(x) = q(x)\cdot(x^2+1)+(ax+b)$, por tanto $\overline{p(x)} = \overline{a+bx}$. Si $\overline{p(x)} = \overline{a'+b'x}$, entonces

$$0 = \overline{p(x)} - \overline{p(x)} = \overline{a+bx} - \overline{a'+b'x} = \overline{(a-a')+(b-b')\cdot x}$$

Lo que implica que $(a-a')+(b-b')\cdot x$ es múltiplo de x^2+1, que es absurdo salvo que $a-a'=0$ y $b-b'=0$. En conclusión,

$$\mathbb{C} = \{a + b\cdot i,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Nota: El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ es un conjunto importante en Matemáticas. El teorema de D'Alambert dice que si $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ es un polinomio con coeficientes complejos de grado n (es decir, $a_i \in \mathbb{C}$ para todo i y $a_0 \neq 0$) entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ únicos (que se denominan las raíces de $p(x)$) de modo que

$$p(x) = a_0\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

Por ejemplo, x^2+1 no tiene raíces reales pero sí complejas: $x^2+1=(x-i)(x+i)$; con otras palabras, $\sqrt{-1} = i \in \mathbb{C}$ y $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$. Los números complejos son muy utilizados en Álgebra, Análisis, Electromagnetismo, Mecánica Cuántica, Química Cuántica, etc.

El **conjugado** de $z = x+yi$ es el número complejo $\bar{z} := x - yi$. Algunas propiedades de la conjugación:

$$\overline{z+u} = \bar{z}+\bar{u},\quad \overline{zu} = \bar{z}\bar{u},\quad \bar{\bar{z}} = z.$$

El **módulo** de $z = x+yi$ es el número real $|z| := \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$. Algunas propiedades del módulo:

$$|z| = |\bar{z}|,\quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,\qquad |zu| = |z|\cdot|u|,\qquad |z+u| \leq |z|+|u|.$$

Para demostrar la última propiedad, basta ver que $|z+u|^2 \leq (|z|+|u|)^2$: Para ello, empecemos observando que si $w = c+di$ es un número complejo entonces $w+\bar{w} = 2c \leq 2|c| \leq 2\sqrt{c^2+d^2} = 2|w|$. Sea $w := z\bar{u}$. Entonces,

$$\begin{aligned} |z+u|^2 &= (z+u)(\overline{z+u}) = (z+u)(\bar{z}+\bar{u}) = |z|^2+|u|^2+z\bar{u}+\bar{z}u \\ &= |z|^2+|u|^2+z\bar{u}+\overline{z\bar{u}} = |z|^2+|u|^2+w+\bar{w} \\ (|z|+|u|)^2 &= |z|^2+|u|^2+2|z|\cdot|u| = |z|^2+|u|^2+2|z|\cdot|\bar{u}| = |z|^2+|u|^2+2|w|. \end{aligned}$$

Luego, $|z+u|^2 \leq (|z|+|u|)^2$.

Sea $z = x+yi$ un número complejo no nulo y $z' = x'+y'i$. Calculemos $\frac{z'}{z}$:

$$\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{(x'x-y'y)+(x'y+y'x)i}{x^2+y^2} = \frac{x'x-y'y}{x^2+y^2} + \frac{x'y+y'x}{x^2+y^2} \cdot i.$$

En particular, $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\, i$.

1.2. Espacios vectoriales

"Un espacio vectorial es un conjunto en el que podemos sumar sus elementos y multiplicar cada elemento por un escalar, y estas operaciones cumplen propiedades muy naturales".

Sea k un cuerpo (ejemplos: $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

1. Definición: Un *k-espacio vectorial* es un conjunto, E, dotado de dos operaciones, una llamada suma $E \times E \to E$ y se escribe $(e,e') \mapsto e+e'$, y otra llamada producto por escalares $k \times E \to E$ y se escribe $(\lambda, e) \mapsto \lambda \cdot e$, verificando:

1. $(E,+)$ es un grupo abeliano, es decir,
   a) $e+(e'+e'') = (e+e')+e''$, para todo $e,e',e'' \in E$.
   b) Existe un elemento que denotamos por 0 tal que $0+e = e+0 = e$, para todo $e \in E$.
   c) Para cada $e \in E$ existe otro elemento que denotamos $-e$ tal que $e+(-e) = 0$.
   d) $e+e' = e'+e$, para todo $e,e' \in E$.
2. $\lambda \cdot (e+v) = \lambda \cdot e + \lambda \cdot v$, $\forall \lambda \in k$, $e,v \in E$
3. $(\lambda+\mu)\cdot e = \lambda \cdot e + \mu \cdot e$ $\forall \lambda,\mu \in k$, $e \in E$
4. $(\lambda \cdot \mu)\cdot e = \lambda \cdot (\mu \cdot e)$, $\forall \lambda,\mu \in k$, $e \in E$
5. $1 \cdot e = e$, $\forall e \in E$.

Los elementos de un espacio vectorial se denominan vectores y los de k escalares.

2. Ejemplos: 1. k^n, con la suma $(\lambda_i)+(\mu_i) := (\lambda_i+\mu_i)$ y el producto por escalares $\lambda \cdot (\lambda_i) := (\lambda \cdot \lambda_i)$ es un k-espacio vectorial. $\mathbb{R}^3$ que es el espacio en el que pensamos que vivimos es un ejemplo de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2, Sea X un conjunto y $C(X) = \text{Aplic}(X,k)$. $C(X)$ con la suma estándar de funciones $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ y producto estándar por escalares $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ es un k-espacio vectorial.

3. Dado un conjunto de espacios vectoriales $\{E_i\}_{i\in I}$, el conjunto $\prod_{i\in I} E_i$ es de modo natural un espacio vectorial:

$$(e_i)_{i\in I}+(e'_i)_{i\in I}:=(e_i+e'_i)_{i\in I} \quad \lambda\cdot(e_i)_{i\in I}:=(\lambda\cdot e_i)_{i\in I}$$

Diremos que $\prod_i E_i$ es el producto directo de los espacios vectoriales E_i.

Definimos la suma directa de los espacios vectoriales E_i, que denotamos $\oplus_{i\in I} E_i$, como

$$\oplus_{i\in I} E_i = \{(e_i)_{i\in I}\in \prod_{i\in I} E_i: \text{ todos los } e_i \text{ salvo un número finito son nulos}\}$$

Si $\#I<\infty$ entonces $\oplus_{i\in I} E_i=\prod_{i\in I} E_i$.

Observemos que $0\cdot e=(0+0)\cdot e=0\cdot e+0\cdot e$ y por tanto $0\cdot e=0$. Observemos que si $e+e'=0$ sumando $-e$, obtenemos que $e'=-e$. Como $0=(1-1)\cdot e=e+(-1)\cdot e$, tenemos que $(-1)\cdot e=-e$.

Las aplicaciones que conservan la estructura de espacio vectorial ("los morfismos de la categoría de k-espacios vectoriales") son las aplicaciones lineales. Con precisión: Sean E,E' dos k-espacios vectoriales,

1.3. Aplicaciones lineales

1. Definición: Una aplicación $T:E\to E'$ es un *morfismo de k-espacios vectoriales* (o *aplicación k-lineal*) si

$$T(e+v)=T(e)+T(v) \quad \text{y} \quad T(\lambda\cdot e)=\lambda\cdot T(e)$$

para cualesquiera $e,v\in E$, $\lambda\in k$.

2. Ejemplos: Si E un k-espacio vectorial y $\lambda\in k$ un escalar, entonces la homotecia de razón λ, $h_\lambda: E\to E$, $h_\lambda(e)=\lambda\cdot e$ es una aplicación lineal.

El giro $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(\cos(\theta)\cdot x-\operatorname{sen}(\theta)\cdot y, \operatorname{sen}(\theta)\cdot x+\cos(\theta)\cdot y)$ de θ radianes es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal.

Es claro que la composición $T_1\circ T_2: E\to G$ de dos aplicaciones lineales $T_2: E\to F$, $T_1: F\to G$, es una aplicación lineal.

3. Definición: Una aplicación lineal $T:E\to E'$ es un *isomorfismo* si existe otra aplicación lineal $S:E'\to E$ tal que $T\circ S=Id_{E'}$, $S\circ T=Id_E$.

T es un isomorfismo de espacios vectoriales si y solo si es una aplicación biyectiva (lineal).

Denotaremos por $\operatorname{Hom}_k(E,E')$ al conjunto de aplicaciones lineales de E en E', que es un espacio vectorial de modo natural, con la suma y producto por escalares siguientes:

$$(T+T')(e):=T(e)+T'(e) \quad \text{y} \quad (\lambda\cdot T)(e):=\lambda\cdot T(e)$$

4. Definición: Decimos que $F \subset E$ es un *subespacio vectorial* de E si $f+f' \in F$ y $\lambda \cdot f \in F$, para todo $f,f' \in F$ y $\lambda \in k$.

F con la suma y producto por escalares es un espacio vectorial y la inclusión $F \subset E$ es una aplicación k-lineal. Si F_i son subespacios vectoriales de E entonces $\cap_i F_i$ es un subespacio vectorial de E.

Si F,F' son dos subespacios vectoriales de E se denota $F+F'$ como el mínimo subespacio vectorial que contiene a F y F'. Es fácil probar que

$$F+F' = \{f+f' \in E,\ f \in F, f' \in F'\}.$$

El morfismo natural $F \oplus F' \to F+F'$, $(f,f') \mapsto f+f'$ es epiyectivo, y es inyectivo si y solo si $F \cap F' = 0$. Se dice que E es la suma directa de dos subespacios F,F' si y solo si $F \cap F' = 0$ y $F+F' = E$, es decir, el morfismo $F \oplus F' \to E$, $(f,f') \mapsto f+f'$ es un isomorfismo, es decir, todo vector $e \in E$ se escribe de modo único como suma de un vector $f \in F$ y otro vector $f' \in F'$.

La aplicación

$$\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_k(E,E'_i) \to \mathrm{Hom}_k(E, \prod_i E'_i),\ (T_i)_{i \in I} \mapsto T,\ T(e) := (T_i(e))_{i \in I}$$

es un isomorfismo lineal de morfismo inverso $T \mapsto (\pi_i \circ T)_{i \in I}$, donde $\pi_i \colon \prod_j E'_j \to E'_i$, $\pi_i((e'_j)_{j \in I}) := e'_i$.

La aplicación

$$\prod_i \mathrm{Hom}_k(E_i,E') \to \mathrm{Hom}_k(\oplus_{i \in I} E_i, E'),\ (T_i)_{i \in I} \mapsto T,\ T((e_i)_{i \in I}) := \sum_i T_i(e_i)$$

es un isomorfismo lineal de morfismo inverso $T \mapsto (T_i)_{i \in I}$, $T_i(e_i) := T((0,\ldots,\overset{i}{e_i},\ldots,0))$.

5. Cociente por un subespacio vectorial: Sea E un espacio vectorial y $F \subset E$ un subespacio vectorial. Consideremos la relación de equivalencia que dice que dos vectores $e_1,e_2 \in E$ son equivalentes si y solo si $e_1 - e_2 \in F$. En particular, los vectores de F son equivalentes a 0. Si identificamos cada vector de E con sus equivalentes, obtenemos el conjunto que denotamos E/F, que es el siguiente

$$E/F := \{\bar e \mid e \in E, \text{ de modo que } \bar e_1 = \bar e_2 \iff e_1 - e_2 \in F\}$$

Observemos que $\bar e = 0$ si y solo si $e \in F$ y que $\bar e = \bar v$ si y solo si existe un vector $e' \in F$ tal que $v = e + e'$.

E/F es de modo natural un espacio vectorial: $\bar e + \bar v := \overline{e+v}$ y $\lambda \cdot \bar e := \overline{\lambda \cdot e}$. El morfismo natural $\pi \colon E \to E/F$, $\pi(e) := \bar e$ es una aplicación lineal epiyectiva.

6. Definición: Dada una aplicación lineal $T \colon E \to E'$, se denomina núcleo de la aplicación lineal T, que denotamos por $\mathrm{Ker}\, T$, a

$$\mathrm{Ker}\, T := T^{-1}(0) := \{e \in E \mid T(e) = 0\}$$

Es fácil comprobar que $\operatorname{Ker} T$ es un subespacio vectorial de E. $T(e) = T(v)$ si y solo si $T(e)-T(v) = T(e-v) = 0$, es decir, $e-v \in \operatorname{Ker} T$. Es decir, $T(e) = T(v)$ si y solo si existe un $e' \in \operatorname{Ker} T$ tal que $v = e+e'$. Por tanto, T es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker} T = 0$.

La aplicación $\bar{T}\colon E/\operatorname{Ker} T \to E'$, $\bar{T}(\bar{e}) := T(e)$, está bien definida, pues si $\bar{e} = \bar{v}$ existe un $e' \in \operatorname{Ker} T$ tal que $v = e+e'$ y $T(v) = T(e)+T(e') = T(e)$ (luego $\bar{T}(\bar{v}) = \bar{T}(\bar{e})$, como ha ser si hablamos con sentido). Además, la aplicación $\bar{T}\colon E/\operatorname{Ker} T \to E'$ es inyectiva: $0 = \bar{T}(\bar{e}) = T(e)$ si y solo si $e \in \operatorname{Ker} T$, es decir, si y solo si $\bar{e} = 0$.

7. Definición: Definimos la imagen de T, que denotamos por $\operatorname{Im} T$ como

$$\operatorname{Im} T := T(E) := \{T(e) \in E',\ e \in E\}$$

Es fácil comprobar que $\operatorname{Im} T$ es un subespacio de E'.

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & E' & e \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & T(e) \\ E/\operatorname{Ker} T \arrow[r, "\bar{T}", "\sim"'] & \operatorname{Im} T \arrow[u, hook, "i"'] & \bar{e} \arrow[r, mapsto] & \bar{T}(\bar{e}) = T(e) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Donde la flecha horizontal inferior es isomorfismo porque es epiyectiva e inyectiva.

1.4. Sistemas de generadores. Bases

1. Definición: Sea $C = \{c_i\}_{i\in I}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial E. Llamamos subespacio vectorial de E generado por C al mínimo subespacio vectorial de E que contiene a C, y lo denotamos $\langle C\rangle$.

Es fácil probar que

$$\langle C\rangle = \{e \in E \mid e = \lambda_1 \cdot c_1 + \cdots + \lambda_n c_n,\ c_i \in C, \lambda_i \in k, n \in \mathbb{N}\}$$

Si $C = \{e_1,\dots,e_r\}$ entonces denotamos $\langle e_1,\dots,e_r\rangle = \langle C\rangle$ y se cumple que $\langle e_1,\dots,e_r\rangle = \{\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_r e_r,\ \lambda_i \in k\}$.

2. Definiciones: Se dice que los vectores de C son un sistema generador de E si $\langle C\rangle = E$. Decimos que un espacio vectorial E es finito generado si existen $e_1,\dots,e_r \in E$ de modo que $\langle e_1,\dots,e_r\rangle = E$. Se dice que los vectores de C son linealmente independientes si $\lambda_1 \cdot c_1 + \cdots + \lambda_n \cdot c_n \neq 0$ si algún $\lambda_i \neq 0$, para todo n y $\{c_1,\dots,c_n\} \subset C$. Se dice que los vectores de C forman una base de E si son un sistema generador de E y son linealmente independientes.

Los vectores $(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0.\dots,1)$ forman una base de k^n, denominada "base estándar" de k^n.

3. Observación : Hasta aquí no hemos necesitado en esta sección, ni en las anteriores (secciones 1.2, 1.3) que k sea un cuerpo, podría haber sido anillo, en las definiciones y en los resultados obtenidos. Ahora bien, cuando k es un anillo y E cumple las propiedades exigidas en la definición 1.2.1, diremos que E es un k-módulo.

4. Teorema de la base: *Todo espacio vectorial $E \neq 0$ contiene alguna base. Todas las bases de E tienen el mismo número de vectores, tal número se dice que es la dimensión de E y se denota* $\dim_k E$.

Demostración. Voy a suponer que E es finito generado, para no embarullar al lector con la teoría de cardinales, lema de Zorn, etc.

Supongamos, pues, que $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Sea $I \subset \{1, \dots, n\}$ un subconjunto máximo con la condición de que los vectores $\{e_i\}_{i \in I}$ sean linealmente independientes. Obviamente $I \neq \emptyset$, pues si $I = \emptyset$ entonces $e_i = 0$ para todo i y $E = 0$. Veamos que los vectores $\{e_i\}_{i \in I}$ forman una base de E. Tenemos que probar que $\langle e_i \rangle_{i \in I} = E$. Dado e_j, $1 \leq j \leq n$, si $e_j \notin \langle e_i \rangle_{i \in I}$ entonces $\{e_j, e_i\}_{i \in I}$ serían linealmente independientes, pues si $\lambda_j \cdot e_j + \sum_i \lambda_i e_i = 0$ entonces: 1. Si $\lambda_j \neq 0$ tendremos que $e_j = -\sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \cdot e_i$ y $e_j \in \langle e_i \rangle_{i \in I}$, contradicción. 2. Si $\lambda_j = 0$, entonces $\sum_i \lambda_i e_i = 0$ y entonces $\lambda_i = 0$, para todo $i \in I$, pues los vectores $\{e_i\}_{i \in I}$ son linealmente independientes. En conclusión, $\lambda_j = \lambda_i = 0$ para todo i, luego $\{e_j, e_i\}_{i \in I}$ son linealmente independientes. Ahora bien, por la maximalidad de I, esto es contradictorio. En conclusión, $e_j \in \langle e_i \rangle_{i \in I}$, para todo $1 \leq j \leq n$. Por tanto, $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subseteq \langle e_i \rangle_{i \in I}$ y $E = \langle e_i \rangle_{i \in I}$.

Veamos que todas las bases tienen el mismo número de vectores. Sea n el número de vectores de una base (hay muchas) con el mínimo número de vectores. Voy a proceder por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces $E = \langle e \rangle$ para cierto vector no nulo e. Dados dos vectores no nulos cualesquiera e'_1, e'_2 tendremos que $e'_1 = \lambda_1 \cdot e$ y $e'_2 = \lambda_2 \cdot e$, con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, entonces $\frac{1}{\lambda_1} \cdot e_1 + \frac{-1}{\lambda_2} \cdot e_2 = e - e = 0$, luego e'_1 y e'_2 no son linealmente independientes. En conclusión, las bases de E han de estar formadas todas por un único vector.

Supongamos que el teorema es cierto hasta $n - 1 \leq 1$, veamos que es cierto para n. Sea ahora $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ dos bases de E. Tenemos que $e_1 = \sum_i \lambda_i e'_i$, reordenando la base $\{e'_1, \dots, e'_m\}$, podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0$. Pruebe el lector que $\{\bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ y $\{\bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_m\}$ son bases de $E/\langle e_1 \rangle$ (le costará un poco más ver que la segunda lo es). Obviamente, el número de vectores de una base de $E/\langle e_1 \rangle$ con el número mínimo de vectores es menor que n. Por inducción sobre n, tendremos que $n - 1 = m - 1$, luego $n = m$.

□

Si k es un anillo (y no un cuerpo) no es cierto en general que los k-módulos tengan bases. Por ejemplo el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ no tiene bases, pues para todo $\bar{n} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $5 \cdot \bar{n} = 0$. Los k-módulos que tienen bases se denominan k-módulos libres. k^n es un k-módulo libre y una base de él es la base estándar.

Si $\{e_i\}_{i\in I}$ son linealmente independientes y $\{\bar{e}_j\}_{j\in J}$ es una base de $E/\langle e_i\rangle_{i\in I}$ entonces $\{e_i, e_j\}_{i\in I, j\in J}$ es una base de E: Son linealmente independientes, pues si $\sum_i \lambda_i e_i + \sum_j \lambda_j e_j = 0$ entonces $0 = \overline{\sum_i \lambda_i e_i + \sum_j \lambda_j e_j} = \sum_j \lambda_j \bar{e}_j$, luego $\lambda_j = 0$, para todo j, luego $\sum_i \lambda_i e_i = 0$ y $\lambda_i = 0$ para todo i. Generan, pues dado $e \in E$, tendremos que $\bar{e} = \sum_j \lambda_j \bar{e}_j$, luego $e = \sum_j \lambda_j e_j + e'$, con $e' \in \langle e_i\rangle_{i\in I}$, es decir, $e' = \sum_i \lambda_i e_i$ y $e = \sum_j \lambda_j e_j + \sum_i \lambda_i e_i$.

Como consecuencias tenemos que si F es un subespacio vectorial de E entonces $\dim E = \dim F + \dim E/F$, y todo sistema de vectores linealmente independiente se puede ampliar a un sistema de vectores que formen base.

Un conjunto de vectores $\{e_i\}_{i\in I}$ de E es un sistema generador de E si y solo si el morfismo

$$\oplus_{i\in I} k \to E,\ (\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_i \lambda_i \cdot e_i$$

es epiyectivo; son linealmente independientes si y solo si es inyectivo, y son una base si y solo si es un isomorfismo. Por tanto, todo espacio vectorial es isomorfo a un $\oplus_{i\in I} k$, pues siempre existen bases.

5. Proposición: *Una aplicación lineal $T\colon E \to E'$ es inyectiva si y solo si aplica una (o toda) base en un sistema de vectores linealmente independientes. T es epiyectiva si y solo si aplica una base (o toda) en un sistema generador. T es un isomorfismo si y solo si aplica una base (o toda) en una base.*

1.5. Coordenadas. Matrices

Fijada una base $\{e_i\}_{i\in I}$ de un espacio vectorial y dado un vector $e = \sum_i \lambda_i e_i$ suele escribirse de modo abreviado $e = (\lambda_i)_{i\in I}$ (es decir, tenemos un isomorfismo $E = \prod_I k$, $e \mapsto (\lambda_i)_{i\in I}$). Se dice que $(\lambda_i)_{i\in I}$ son las coordenadas del vector e en la base $\{e_i\}_{i\in I}$.

Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de E. Toda aplicación lineal $T\colon E \to E'$, está determinada por los valores $T(e_i)$, $i \in I$, pues dado $e \in E$ entonces $e = \sum_i \lambda_i e_i$ y $T(e) = \sum_i \lambda_i T(e_i)$. Recíprocamente, dados $v_i \in E'$, $i \in I$, la aplicación lineal $S\colon E \to E'$ definida por $S(e) := \sum_i \lambda_i v_i$, para $e = \sum_i \lambda_i e_i$, cumple que $S(e_i) = v_i$. Formalmente,

$$\mathrm{Hom}_k(E,E') = \mathrm{Hom}_k(\oplus_{i\in I} k, E') = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_k(k,E') = \prod_{i\in I} E', \quad T \mapsto (T(e_i))_{i\in I}$$

Si $\{e'_j\}$ es una base de E', entonces $T(e_i) = \sum_j \lambda_{ji} e'_j$, para ciertos $\lambda_{ij} \in k$ (fijado i, todos los λ_{ji} son nulos salvo un número finito) y existe una correspondencia biunívoca entre T y las uplas de escalares $(\lambda_{ji})_{(i,j)\in I\times J}$, "caja" de números que es denominada matriz asociada a T en las bases $\{e_i\}$ y $\{e'_j\}$ de E y E' respectivamente.

"Así pues, T, que es una transformación de un espacio en otro que supera fácilmente nuestra capacidad de ideación geométrica, está determinada por unos cuantos escalares $\lambda_{ij} \in k$".

Fijadas unas bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ en E y E' (por sencillez, suponemos que $\dim E = n < \infty$ y $\dim E' = n' < \infty$), escribamos $e = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y $T(e) = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$.

Ahora bien, $T(e) = T(\sum_i \lambda_i e_i) = \sum_i \lambda_i T(e_i) = \sum_i \lambda_i(\sum_j \lambda_{ji} e'_j) = \sum_j(\sum_i \lambda_{ji}\lambda_i)e'_j$, luego $\lambda'_j = \sum_i \lambda_{ji}\lambda_i$, para todo j. Ecuaciones que escribimos de modo abreviado

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si $T\colon E \to E'$ es una aplicación lineal de matriz asociada (λ_{ji}), entonces la matriz asociada a $\lambda \cdot T$ es $(\lambda \cdot \lambda_{ji})$. Escribiremos

$$\lambda \cdot (\lambda_{ji}) = (\lambda \cdot \lambda_{ji})$$

y diremos que es el producto de una matriz por un escalar.

Si $T, T'\colon E \to E'$ son dos aplicaciones lineales de matrices asociadas (λ_{ji}) y (λ'_{ji}) entonces la matriz asociada a $T + T'$ es $(\lambda_{ji} + \lambda'_{ji})$. Escribiremos

$$(\lambda_{ji}) + (\lambda'_{ji}) = (\lambda_{ji} + \lambda'_{ji})$$

y diremos que es la suma de matrices.

Sea $T\colon E \to E'$ y $S\colon E' \to E''$ dos aplicaciones lineales. Sea $\{e_i\}_{i\in I}$, $\{e'_j\}_{j\in J}$ y $\{e''_k\}_{k\in K}$ bases de E,E' y E'' respectivamente. Sea (λ_{ji}) y (μ_{kj}) las matrices respectivas de T y S. Calculemos la matriz (c_{ki}) de $S \circ T$: $(S \circ T)(e_i) = S(\sum_j \lambda_{ji} e'_j) = \sum_j \lambda_{ji} S(e'_j) = \sum_j \lambda_{ji} \cdot (\sum_k \mu_{kj} e''_k) = \sum_k(\sum_j \mu_{kj} \cdot \lambda_{ji}) \cdot e''_k$. En conclusión, $c_{ki} = \sum_j \mu_{kj} \cdot \lambda_{ji}$. Seguiremos la notación,

$$(\mu_{kj}) \circ (\lambda_{ji}) = (c_{ki})$$

y diremos que (c_{ki}) es el producto de las matrices (μ_{kj}) y (λ_{ji}).

1.6. Espacio vectorial dual

1. Definición: El conjunto de las aplicaciones lineales de un k-espacio vectorial E en k se denomina espacio vectorial dual de E y se denota E^*, es decir,

$$E^* := \mathrm{Hom}_k(E, k)$$

Los vectores $w \in E^*$ se denominan formas lineales.

2. Proposición: *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, de base $\{e_1, \dots, e_n\}$ entonces las formas lineales $\{w_1, \dots, w_n\}$, determinadas por $w_i(e_j) = \delta_{ij}$ forman una base de E^*. Se dice que $\{w_1, \dots, w_n\}$ es la base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$.*

Demostración. Dada $w \in E^*$ se tiene que $w = w(e_1)\cdot w_1 + \ldots + w(e_n)\cdot w_n$, porque ambas formas lineales coinciden sobre los vectores e_i de la base de E. Si $\sum_i \lambda_i w_i = 0$ entonces $0 = (\sum_i \lambda_i w_i)(e_j) = \lambda_j$, para todo j. En conclusión, $\{w_1,\ldots,w_n\}$ son un sistema generador de E^* y son linealmente independientes, es decir, son una base. □

3. Teorema de reflexividad: *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. La aplicación lineal canónica*

$$E \to (E^*)^*, \; e \mapsto \tilde{e}, \; \tilde{e}(w) := w(e)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de E y $\{w_1,\ldots,w_n\}$ la base dual. Es inmediato que $\{\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_n\}$ es la base dual de $\{w_1,\ldots,w_n\}$. La aplicación canónica aplica la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ en la base $\{\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_n\}$ y es un isomorfismo. □

Será usual escribir $E = (E^*)^*$ y $e = \tilde{e}$.

4. Matriz transpuesta: *Dada una aplicación lineal $T\colon E \to E'$ sea $T^*\colon E'^* \to E^*$ la aplicación lineal definida por $T^*(w') := w' \circ T$. Se dice que T^* es el morfismo transpuesto de T.*

Si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ son bases de E y E' y (λ_{ji}) es la matriz asociada a T en estas bases, calculemos la matriz (λ^*_{ij}) de T^*, en las bases duales $\{w_1,\ldots,w_n\}$, $\{w'_1,\ldots,w'_m\}$: $T^*(w'_j) = \sum_i \lambda^*_{ij} w_i$. Entonces,

$$\lambda^*_{ij} = T^*(w'_j)(e_i) = w'_j(T(e_i)) = w'_j(\sum_k \lambda_{ki} e'_k) = \lambda_{ji}$$

que se expresa diciendo que la matriz de T^* es la transpuesta de la matriz de T.

1.7. Producto tensorial

Queremos definir o construir el producto tensorial de dos espacios vectoriales E, E'. Veamos qué cosas queremos y cómo queremos que operen.

Quiero un "producto" que denotaré $\otimes$, entre los vectores de E (que escribiré en primer lugar) y los de E' (en segundo lugar). Dados $e \in E$ y $e' \in E'$, quiero construir $e \otimes e'$. Quiero sumar cosas de éstas, quiero cosas de la forma $e_1 \otimes e'_1 + \cdots + e_n \otimes e'_n$, con $e_i \in E$ y $e'_i \in E'$. Por último quiero que el producto verifique las siguientes propiedades (lineales):

$$\begin{aligned}
&(e_1 + e_2) \otimes e' = e_1 \otimes e' + e_2 \otimes e' \\
&e \otimes (e'_1 + e'_2) = e \otimes e'_1 + e \otimes e'_2 \\
&\lambda(e \otimes e') = \lambda e \otimes e' = e \otimes \lambda e'
\end{aligned}$$

y no quiero imponer ninguna condición más (salvo las que se deriven de estas condiciones). Esto es muy fácil, con la palabra sea.

Hablemos con todo rigor. Sean E y E' dos k-espacios vectoriales. Sea M el k-espacio vectorial de base $\{\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'\}_{e\in E, e'\in E'}$. Es decir,

$$M := \underset{e\in E, e'\in E'}{\oplus} k\cdot\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'$$

“lo escrito en negrita es mera notación".

“Queremos identificar $(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})\otimes\mathbf{e}'$ con $\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e}'+\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e}'$; $\lambda\cdot(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}')$ con $\lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'$ y con $\mathbf{e}\otimes\lambda\mathbf{e}'$; y $\mathbf{e}\otimes(\mathbf{e}'_1+\mathbf{e}'_2)$ con $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'_1+\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'_2$.”

Sea $N := \left\langle \begin{array}{l} (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})\otimes\mathbf{e}'-\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e}'-\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e}' \\ \mathbf{e}\otimes(\mathbf{e}'_1+\mathbf{e}'_2)-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'_1-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'_2 \\ \lambda\cdot(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}')-\lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}', \lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'-\mathbf{e}\otimes\lambda\mathbf{e}' \end{array} \right\rangle_{e,e_1,e_2\in E, e',e'_1e'_2\in E', \lambda\in k}$ $\quad(*)$

1. Definición: Llamaremos producto tensorial del espacio vectorial E por el espacio vectorial E', que denotaremos por $E\otimes_k E'$, a

$$E\otimes_k E' := M/N.$$

2. Notación: *Dado $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'\in M$, denotaremos $\overline{\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'}\in M/N = E\otimes E'$ por $e\otimes e'$.*

Pues bien, $E\otimes E'$ es un espacio vectorial y está generado por los vectores $e\otimes e'$, variando $e\in E$ y $e'\in E'$ (porque los vectores $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'$ generan M y $E\otimes E' = M/N$). Tomando clases en $(*)$ se tienen las igualdades

$$\begin{array}{l} (e_1+e_2)\otimes e' = e_1\otimes e'+e_2\otimes e' \\ e\otimes(e'_1+e'_2) = e\otimes e'_1+e\otimes e'_2 \\ \lambda e\otimes e' = e\otimes\lambda e' \end{array} \qquad (*)$$

Calculemos las aplicaciones lineales de $E\otimes E'$ en otro espacio vectorial V. Como $E\otimes E' = M/N$, dar una aplicación lineal $\varphi\colon E\otimes E'\to V$ equivale a dar una aplicación lineal $\phi\colon M\to V$ que se anule en N (de modo que $\varphi(e\otimes e') = \phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}')$). Ahora bien, M es un es un espacio vectorial de base $\{\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'\}_{e\in E, e'\in E'}$, así pues, ϕ está determinado por $\phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}')$ (variando $e\in E, e'\in E'$) y se anula en N si y solo si

$$\begin{array}{l} \phi((\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})\otimes\mathbf{e}') = \phi(\mathbf{e_1}\otimes\mathbf{e}')+\phi(\mathbf{e_2}\otimes\mathbf{e}') \\ \phi(\lambda\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}') = \phi(\mathbf{e}\otimes\lambda\mathbf{e}')) = \lambda\phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}') \\ \phi(\mathbf{e}\otimes(\mathbf{e}'_1+\mathbf{e}'_2)) = \phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'_1)+\phi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}'_2) \end{array}$$

En conclusión, dar una aplicación k-lineal $\varphi\colon E\otimes_k E'\to V$, equivale a definir $\varphi(e\otimes e')$ (para todo $e\in E, e'\in E'$) de modo que se cumpla

$$\begin{array}{l} \varphi((e_1+e_2)\otimes e') = \varphi(e_1\otimes e')+\varphi(e_2\otimes e') \\ \varphi(\lambda e\otimes e') = \varphi(e\otimes\lambda e') = \lambda\varphi(e\otimes e') \\ \varphi(e\otimes(e'_1+e'_2)) = \varphi(e\otimes e'_1)+\varphi(e\otimes e'_2) \end{array}$$

3. Definición: Se dice que una aplicación $\beta\colon E\times E'\to V$ es k-bilineal si $\beta(\lambda\cdot e_1+e_2,v)=\lambda\cdot\beta(e_1,v)+\beta(e_2,v)$ y $\beta(e,\lambda\cdot v_1+v_2)=\lambda\cdot\beta(e,v_1)+\beta(e,v_2)$. Al conjunto de las de todas las aplicaciones bilineales de $E\times E'$ en V lo denotaremos por $\mathrm{Bil}_k(E,E';V)$.

Se dice que una aplicación $\mu\colon E_1\times\cdots\times E_n\to V$ es k-multilineal si

$$\mu(e_1,\ldots,\lambda\cdot e_i+e'_i,\ldots,e_n)=\lambda\cdot\mu(e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_n)+\mu(e_1,\ldots,e'_i,\ldots,e_n).$$

Al conjunto de las de todas las aplicaciones multilineales de $E_1\times\cdots\times E_n$ en V lo denotaremos por $\mathrm{Multl}_k(E_1,\ldots,E_n;V)$.

Hemos probado la siguiente proposición.

4. Proposición: *Tenemos la igualdad*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_k(E\otimes_k E',V) & = & \mathrm{Bil}_k(E,E';V) \\ \phi & \longmapsto & \beta_\phi,\ \beta_\phi(e,e'):=\phi(e\otimes e') \\ \phi_\beta(e\otimes e'):=\beta(e,e'),\ \phi_\beta & \longleftarrow & \beta \end{array}$$

Dadas dos aplicaciones lineales $T\colon E\to V$, $T'\colon E'\to V'$ podemos definir el morfismo $E\otimes E'\to V\otimes V'$, $e\otimes e'\mapsto T(e)\otimes T'(e')$, morfismo que lo denotaremos por $T\otimes T'$.

5. Propiedades del producto tensorial: *1.* $E\otimes_k E'=E'\otimes_k E$.

2. $(E\oplus E')\otimes_k V=(E\otimes_k V)\oplus(E'\otimes_k V)$.

3. $(\underset{i\in I}{\oplus}E_i)\otimes_k V=\underset{i}{\oplus}(E_i\otimes V)$.

4. $k\otimes_k E=E$.

Demostración. 1. Tenemos el morfismo $E\otimes E'\to E'\otimes E$, $e\otimes e'\mapsto e'\otimes e$ y su inverso $E'\otimes E\to E\otimes E'$, $e'\otimes e\mapsto e\otimes e'$.

2. Tenemos el morfismo $(E\oplus E')\otimes V\to(E\otimes V)\oplus(E'\otimes V)$, $(e,e')\otimes v\mapsto(e\otimes v,e'\otimes v)$ y el inverso $(E\otimes V)\oplus(E'\otimes V)\to(E\oplus E')\otimes V$, $(e\otimes v,e'\otimes v')\mapsto(e,0)\otimes v+(0,e')\otimes v'$.

3. Idem que 2.

4. Tenemos el morfismo $k\otimes E\to E$, $\lambda\otimes e\mapsto\lambda e$ y el inverso $E\to k\otimes E$, $e\mapsto 1\otimes e$.

□

6. Teorema: *Si E es un espacio vectorial de base $\{e_i\}_{i\in I}$ y E' es un espacio vectorial de base $\{e'_j\}_{j\in J}$ entonces $E\otimes_k E'$ es un espacio vectorial de base $\{e_i\otimes e'_j\}_{i\in I,j\in J}$.*

Demostración. Tenemos que $E=\oplus_I k$, $\sum_i\lambda_i\cdot e_i\mapsto(\lambda_i)$ y $E'=\oplus_J k$, $\sum_j\lambda_j\cdot e'_j\mapsto(\lambda_j)$. Estamos afirmando que

$$(\oplus_I k)\otimes_k(\oplus_J k)=\oplus_I k\otimes_k(\oplus_J k)=\oplus_I(\oplus_J k)=\oplus_{I\times J}k.$$

□

7. Proposición: *Sea E' un k-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces*

$$E'^* \otimes_k E = \mathrm{Hom}_k(E', E).$$

Demostración. Si $E' = k$ es obvio. Supongamos $E' = k^n$. Como $\mathrm{Hom}_k(-, E)$ y $-\otimes_k E$ conmutan con sumas directas finitas, hemos concluido.

Explícitamente, la aplicación lineal $E'^* \otimes_k E \to \mathrm{Hom}_k(E', E)$, $w \otimes e \mapsto (w \otimes e)$, donde $(w \otimes e)(e') := w(e') \cdot e$, es un isomorfismo.

□

8. Proposición: $\mathrm{Hom}_k(E \otimes_k E', E'') = \mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(E', E''))$.

Demostración. Asignamos a $\phi \in \mathrm{Hom}_k(E \otimes_k E', E'')$, $\tilde{\phi} \in \mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(E', E''))$, definido por $\tilde{\phi}(e) := \phi(e \otimes -)$, donde $\phi(e \otimes -)(e') := \phi(e \otimes e')$. Recíprocamente, asignamos al morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(E, \mathrm{Hom}_k(E', E''))$, $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_k(E \otimes_k E', E'')$, definido por $\tilde{\varphi}(e \otimes e') := (\varphi(e))(e')$. □

Del mismo modo que hemos definido el producto tensorial de dos espacios vectoriales podríamos haber definido el producto tensorial de tres espacios vectoriales, e igualmente dar una aplicación lineal $\phi\colon E_1 \otimes_k E_2 \otimes_k E_3 \to V$ equivale a definir los $\phi(e_1 \otimes e_2 \otimes e_3)$, para todo $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, e_3 \in E_3$, de modo que sea k-lineal en cada uno de los tres factores, es decir, $\mathrm{Hom}_k(E_1 \otimes_k E_2 \otimes_k E_3, V) = \mathrm{Multl}_k(E_1, E_2, E_3 : V)$. Igualmente podemos definir el producto tensorial de n-espacios vectoriales.

9. Proposición: $(E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n) \otimes_k (E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m) = E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n \otimes_k E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m$.

Demostración. El morfismo

$$\phi \in \mathrm{Hom}_k(E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n,\ \mathrm{Hom}_k(E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m,\ E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n \otimes_k E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m))$$

definido por $\phi(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n)(e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m) := e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \otimes e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m$, define por la proposición anterior, el morfismo

$$(E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n) \otimes_k (E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m) \to E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n \otimes_k E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m,$$

definido por $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \otimes (e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m) \mapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \otimes e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m$.

El morfismo $E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n \otimes_k E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m \to (E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n) \otimes_k (E'_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E'_m)$, $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \otimes e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m \mapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \otimes (e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m)$ es el morfismo inverso.

□

Hemos demostrado, además, la propiedad asociativa del producto tensorial, pues fácilmente tenemos que

$$E_1 \otimes_k (E_2 \otimes_k E_3) = E_1 \otimes_k E_2 \otimes_k E_3 = (E_1 \otimes_k E_2) \otimes_k E_3.$$

10. Definición: $TE := k \oplus E \oplus (E \otimes E) \oplus \cdots \oplus (E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E) \otimes \ldots$, con la suma, $+$, y con el producto, $\otimes$, se dice que es el álgebra tensorial asociada a E.

11. Teorema: *Sean E_i k-espacios vectoriales de dimensión finita. La aplicación lineal*

$$\begin{array}{ccl} E_1^* \otimes_k \ldots \otimes_k E_n^* & \xrightarrow{\phi} & (E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n)^* = \mathrm{Multl}_k(E_1, \ldots, E_n; k) \\ w_1 \otimes \cdots \otimes w_n & \mapsto & (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) \end{array}$$

con $(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) := w_1(e_1) \cdots w_n(e_n)$, es un isomorfismo lineal.

Demostración. Sea $\{e_{ij}\}_i$ una base de E_j y $\{w_{ij}\}_i$ la base dual. Por tanto, una base de $E_1^* \otimes_k \cdots \otimes_k E_n^*$ es $\{w_{i_1 1} \otimes \cdots \otimes w_{i_n n}\}_{i_1, \ldots, i_n}$, que resulta ser vía ϕ la base dual de la base $\{e_{i_1 1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n n}\}_{i_1, \ldots, i_n}$ de $E_1 \otimes_k \cdots \otimes_k E_n$.

□

12. Notación: *Por abuso de notación suele denotarse $(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)$ por $w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$. Recíprocamente, $w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \in E_1^* \otimes \cdots \otimes E_n^*$ suele pensarse como la aplicación multilineal $(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)$.*

13. Ejercicio: Dadas $T_n \in E_1^* \otimes \cdots \otimes E_n^*$ y $S_m \in F_1^* \otimes \cdots \otimes F_m^*$ (con $\dim_k E_i, \dim_k F_j < \infty$), prueba que

$$(T_n \otimes S_m)(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m) = T_n(e_1, \ldots, e_n) \cdot S_m(f_1, \ldots, f_m).$$

1.8. Potencia exterior n-ésima de un espacio vectorial

"Queremos definir ahora un producto $\wedge$, con las propiedades multilineales de $\otimes$ y de modo que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ sea cero si y solo $v_1, \ldots, v_n \in E$ no son linealmente dependientes. Basta imponer solo que $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ es nulo si dos de los v_i son iguales".

Sea V el k-subespacio vectorial de $E \otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k E$, generado por los vectores

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_{j-1} \otimes e \otimes \cdots \otimes e_{k-1} \otimes e \otimes \cdots \otimes e_n$$

variando e_i, e, j, k.

1. Definición: Llamaremos n-ésima potencia exterior de E, que denotaremos por $\Lambda^n E$, a

$$\Lambda^n E := (E \otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes_k E)/V$$

2. Notación: *Diremos que $\Lambda^0 E = k$ y que $\Lambda^1 E = E$.*

3. Notación: *Denotaremos* $\overline{e_1\otimes e_2\otimes\cdots\otimes e_n}\in(E\otimes_k\overset{n}{\cdots}\otimes_k E)/V=\Lambda^n E$ *por* $e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$.

Observemos que $\wedge$ además de las propiedades de multilinealidad heredadas de $\otimes$, cumple que $e_1\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e_n=0$. Si e_i es combinación lineal de los $\{e_j\}_{j\neq i}$, entonces $e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_i\wedge\cdots\wedge e_n=0$: $e_i=\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j e_j$, luego

$$\begin{aligned}e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n&=e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge(\sum_{j\neq i}\lambda_j e_j)\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_n\\&=\sum_{j\neq i}\lambda_j e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge e_j\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_n=0\end{aligned}$$

Como $0=e_1\wedge\cdots\wedge(e+e')\wedge\cdots\wedge(e+e')\wedge\cdots\wedge e_n=e_1\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge(e+e')\wedge\cdots\wedge e_n+e_1\wedge\cdots\wedge e'\wedge\cdots\wedge(e+e')\wedge\cdots\wedge e_n=e_1\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e_n+e_1\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e'\wedge\cdots\wedge e_n+e_1\wedge\cdots\wedge e'\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e_n+e_1\wedge\cdots\wedge e'\wedge\cdots\wedge e'\wedge\cdots\wedge e_n=e_1\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e'\wedge\cdots\wedge e_n+e_1\wedge\cdots\wedge e'\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e_n$ obtenemos que

$$e_1\wedge\cdots\wedge\underset{j}{e}\wedge\cdots\wedge\underset{k}{e'}\wedge\cdots\wedge e_n=-e_1\wedge\cdots\wedge\underset{j}{e'}\wedge\cdots\wedge\underset{k}{e}\wedge\cdots\wedge e_n$$

Recordemos que toda permutación es producto de transposiciones y que el signo de la permutación es igual a -1 elevado al número de las transposiciones. Por tanto, dada una permutación σ, de $\{1,\dots,n\}$, tenemos que

$$e_{\sigma(1)}\wedge e_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge e_{\sigma(n)}=\text{signo}(\sigma)\cdot e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$$

4. Como $\Lambda^n E=(E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E)/V$, dar un morfismo lineal $\phi\colon\Lambda^n E\to F$ equivale a dar un morfismo $E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E\to F$, que se anule en V, es decir, equivale a definir $\phi(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)$ (para todo $e_1,\dots,e_n\in E$) que sea k-lineal en cada factor y de modo que cumpla que $\phi(e_1\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e\wedge\cdots\wedge e_n)=0$.

Dada una aplicación lineal $T\colon E\to E'$ induce el morfismo $\Lambda^n T\colon\Lambda^n E\to\Lambda^n E'$, definido por $\Lambda^n T(e_1\wedge\cdots\wedge e_n):=T(e_1)\wedge\cdots\wedge T(e_n)$.

5. Ejercicio: La composición del morfismo

$$H\colon\Lambda^n E\to E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E,\ H(e_1\wedge\cdots\wedge e_n):=\sum_{\sigma\in S_n}\text{sign}(\sigma)\cdot e_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(n)}$$

con el morfismo natural de paso a cociente $\pi\colon E\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes E\to\Lambda^n E$ es igual a $n!\cdot\text{Id}$.

6. Teorema: *Sea E un espacio vectorial de base $\{e_i\}_{i\in I}$, por sencillez consideremos un orden total en I. Entonces,*

$$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\}_{i_1<i_2<\cdots<i_r}$$

es una base de $\Lambda^r E$.

Demostración. Sabemos que $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\}_{i_1,,\dots,i_r\in I}$ es una base de $E\otimes\overset{r}{\cdots}\otimes E$. Por tanto, tomando clases tenemos que $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\}_{i_1,\dots,i_r\in I}$ es un sistema generador de $\Lambda^r E$. Si en el producto exterior de r-vectores aparecen vectores repetidos entonces es nulo. Además

$$e_{i_{\sigma(1)}}\wedge e_{i_{\sigma(2)}}\wedge\cdots\wedge e_{i_{\sigma(r)}}=\text{signo}(\sigma)\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$$

Por tanto, $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\}_{i_1<i_2<\cdots<i_r}$ es un sistema generador de $\Lambda^r E$.

Supongamos que existe una combinación lineal

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}\lambda_{i_1,i_2,\dots,i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}=0.$$

probemos que $\lambda_{i_1,i_2,\dots,i_r}=0$. Sean $\{w_i\in E^*\}_{i\in I}$ tales que $w_i(e_j)=0$ si $i\neq 1$ y $w_i(e_i)=1$. Consideremos la aplicación lineal

$$w\colon\Lambda^r E\to k,\ v_1\wedge\cdots\wedge v_r\mapsto\sum_{\sigma\in S_r}\text{signo}(\sigma)\cdot w_{i_1}(v_{\sigma(1)})\cdots w_{i_r}(v_{\sigma(r)})$$

Se cumple que $0=w(\sum\limits_{i_1<i_2<\cdots<i_r}\lambda_{i_1,i_2,\cdots,i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r})=\lambda_{i_1,\dots,i_r}$.

□

7. Corolario: *$v_1,\dots,v_n\in E$ son linealmente independientes si y solo si $v_1\wedge\cdots\wedge v_n\neq 0$.*

Demostración. Si $v_1,\dots,v_n\in E$ son linealmente independientes entonces forman parte de una base, luego $v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ forma parte de una base de $\Lambda^n E$ y es distinto de cero. □

Si E es un espacio vectorial de dimensión n y base $\{e_1,\dots,e_n\}$ entonces $\Lambda^n E$ es un espacio vectorial de dimensión 1 de base $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$. Dados $v_1,\cdots,v_n\in E$, con $v_i=\sum\limits_j\lambda_{ij}e_j$, tendremos que

$$\begin{aligned}v_1\wedge\cdots\wedge v_n&=(\lambda_{11}e_1+\cdots+\lambda_{1n}e_n)\wedge\cdots\wedge(\lambda_{n1}e_1+\cdots+\lambda_{nn}e_n)\\&=\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_n}\lambda_{1i_1}\cdots\lambda_{ni_n}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}=\sum_{\sigma\in S_n}\lambda_{1\sigma(1)}\cdots\lambda_{n\sigma(n)}\cdot e_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge e_{\sigma(n)}\\&=(\sum_{\sigma\in S_n}\text{signo}(\sigma)\lambda_{1\sigma(1)}\cdots\lambda_{n\sigma(n)})\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n.\end{aligned}$$

1.8.1. Aplicaciones multilineales hemisimétricas

8. Definición: Una aplicación multilineal $H\colon E\times\ldots\times E\to V$ es una aplicación hemisimétrica si $H(e_1,\cdots,e_n)=0$ si $e_i=e_j$, para un $i\neq j$.

Observemos que si e_i es combinación lineal de los demás e_j, por la multilinealidad y hemisimetría de H, se cumple que $H(e_1,\dots,e_n)=0$. Por otra parte,

$$0=H(e_1,\cdots,e+v,\cdots,e+v,\cdots,e_n)=H(e_1,\cdots,e,\cdots,v,\cdots,e_n)+H(e_1,\cdots,v,\cdots,e,\cdots,e_n)$$

Luego $H(e_1,\cdots,e,\cdots,v,\cdots,e_n)=-H(e_1,\cdots,v,\cdots,e,\cdots,e_n)$ y en general

$$H(e_1,\cdots,\cdots,e_n)=\text{signo}(\sigma)\cdot H(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)})$$

Denotemos $\text{Hem}_k(E\times\cdots\times E,V)$, el conjunto de todas las aplicaciones hemisimétricas de $E\times\cdots\times E$ en V.

9. Proposición: *La aplicación lineal*

$$\text{Hem}_k(E\times\overset{m}{\cdots}\times E,V)\to\text{Hom}_k(\Lambda^m E,V),\ H\mapsto\tilde H,$$

donde $\tilde H(e_1\wedge\cdots\wedge e_n):=H(e_1,\dots,e_n)$, es un isomorfismo.

En particular, $\text{Hem}_k(E\times\overset{m}{\cdots}\times E,k)=(\Lambda^m E)^*$.

Demostración. Estamos repitiendo lo dicho en 1.8.4. □

10. Proposición: *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. El morfismo natural*

$$\begin{array}{rcl}\Lambda^m E^* & \to & (\Lambda^m E)^*\\ \omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_m & \mapsto & (\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_m),\end{array}$$

donde $(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_m)(v_1\wedge\cdots\wedge v_m):=\sum_{\sigma\in S_m}\text{signo}(\sigma)\cdot\omega_1(v_{\sigma(1)})\cdots\omega_m(v_{\sigma(m)})$, es un isomorfismo.

Demostración. Si $e_1,\dots,e_n$ es una base de E y $w_1,\dots,w_n$ la base dual, entonces ϕ aplica la base $\{w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_m}\}_{i_1<\cdots<i_m}$ de $\Lambda^m E^*$ en la base dual de la base $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_m}\}_{i_1<\cdots<i_m}$ de $\Lambda^m E$. □

Con las dos proposiciones anteriores obtenemos la siguiente proposición.

11. Proposición: *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces*

$$\begin{array}{rcl}\Lambda^m E^* & = & \text{Hem}_k(E\times\overset{m}{\cdots}\times E,k)\\ w_1\wedge\cdots\wedge w_m & \mapsto & (w_1\wedge\cdots\wedge w_m)\end{array}$$

donde $(w_1\wedge\cdots\wedge w_m)(e_1,\dots,e_m):=\sum_{\sigma\in S_m}\text{sign}(\sigma)\cdot w_1(e_{\sigma(1)})\cdots w_m(e_{\sigma(m)})$.

12. Proposición: *Sea $T\colon E \to E'$ una aplicación lineal y $T^*\colon E'^* \to E^*$ el morfismo inducido en los duales. El diagrama*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n E'^* \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda^n T^*"'] & (\Lambda^n E')^* \arrow[d, "(\Lambda^n T)^*"] \\ \Lambda^n E^* \arrow[r] & (\Lambda^n E)^* \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} &[\Lambda^n T^*(w_1' \wedge \cdots \wedge w_n')](e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = [T^* w_1' \wedge \cdots \wedge T^* w_n')](e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= w_1' \wedge \cdots \wedge w_n'(T(e_1) \wedge \cdots \wedge T(e_n)) = w_1' \wedge \cdots \wedge w_n'(\Lambda^n T(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)) \\ &= [(\Lambda^n T)^*(w_1' \wedge \cdots \wedge w_n')](e_1 \wedge \cdots \wedge e_n). \end{aligned}$$

□

1.8.2. Producto exterior y contracción interior

Si un morfismo $\phi\colon E \otimes E' \to E''$ se anula sobre los elementos $v \otimes e'$ para todo $v \in V \subset E$ y $e' \in E'$ entonces factoriza vía el morfismo $\bar\phi\colon (E/V) \otimes E' \to E''$, $\bar\phi(\bar e \otimes e') := \phi(e \otimes e')$.

La composición de morfismos

$$\begin{aligned} (E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E) \otimes (E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E) = E \otimes \overset{n+m}{\cdots} \otimes E \to \Lambda^{n+m} E \\ (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \otimes (e_{n+1} \otimes \cdots \otimes e_{n+m}) \mapsto e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+m} \end{aligned}$$

factoriza vía el morfismo

$$\Lambda^n E \otimes \Lambda^m E \to \Lambda^{n+m} E,\ (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes (e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{n+m}) \mapsto e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+m},$$

que llamaremos "producto exterior de coformas",

13. Proposición: *El producto exterior de coformas es asociativo: Es decir, se cumple que $(\Omega_n \wedge \Omega_m) \wedge \Omega_r = \Omega_n \wedge (\Omega_m \wedge \Omega_r)$, con $\Omega_i \in \Lambda^i E$.*

El producto exterior de coformas es anticonmutativo: $\Omega_n \wedge \Omega_m = (-1)^{n\cdot m} \Omega_m \wedge \Omega_n$, para toda $\Omega_n \in \Lambda^n E$ y $\Omega_m \in \Lambda^m E$.

Demostración. La asociatividad es clara, en cuanto a la anticonmutatividad digamos solo que

$$(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \wedge (e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{n+m}) = (-1)^{n\cdot m} (e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{n+m}) \wedge (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$$

□

14. Definición: Se dice que $\Lambda E := k \oplus E \oplus (\Lambda^2 E) \oplus \cdots \oplus (\Lambda^n E) \otimes \ldots$, con la suma, $+$, y con el producto, $\wedge$ es el álgebra exterior asociada a E.

El epimorfismo $TE \to \Lambda E$, $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \mapsto e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ es un morfismo de álgebras (= de anillos).

15. Ejercicio: Sean $w_n \in \Lambda^n E^*$ y $w'_m \in \Lambda^m E^*$, que podemos pensar como aplicaciones multilineales hemisimétricas. Prueba que

$$w_n \wedge w'_m(e_1, \ldots, e_{n+m}) = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_n \\ j_1 < \cdots < j_m}} (-1)^{\sum_{r=1}^{n}(i_r - r)} \cdot w_n(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \cdot w'_m(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}).$$

(suponemos que $\{i_r, j_s\}_{r,s} = \{1, \ldots, n+m\}$).

16. Dado $w \in E^*$ consideremos la contracción interior hemisimétrica por w

$$\hat{i}_w \colon E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \to E \otimes \overset{n-1}{\cdots} \otimes E,\ \hat{i}_w(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) := \sum_i (-1)^{i-1} \cdot w(e_i) \cdot e_1 \otimes \cdots \otimes \hat{e}_i \otimes \cdots \otimes e_n$$

que llamaremos contracción interior hemisimétrica, que es la suma de la contracción interior por w en cada factor afectada de un signo.

17. Proposición : *La contracción interior hemisimétrica es una antiderivación del álgebra tensorial, es decir, dadas $T_n \in (E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)$ y $T_m \in (E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E)$, entonces*

$$\hat{i}_w(T_n \otimes T_m) = (\hat{i}_w T_n) \otimes T_m + (-1)^n T_n \otimes (\hat{i}_w T_m).$$

Demostración. Basta demostrar la proposición para $T_n = e_1 \otimes \cdots \otimes e_n$ y $T_m = e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m$. Ahora bien, la suma de las contracciones interiores por w en cada factor (afectado por un signo) es contraer primero en los n-primeros factores más contraer después en los últimos m factores. La cuestión del signo se la dejamos al lector. □

La contracción interior hemisimétrica en el álgebra tensorial define por paso al cociente un aplicación lineal que denominaremos "la contracción interior" en el álgebra exterior. En efecto, si $v_i = v_j$ $(i < j)$ entonces

$$\begin{aligned}
&\overline{\hat{i}_w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)} = \\
&= (-1)^{i-1} w(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_r + (-1)^{j-1} w(v_j) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_r \\
&= ((-1)^{i-1} + (-1)^{j-1} \cdot (-1)^{j-i-1}) w(v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_r = 0.
\end{aligned}$$

Tenemos pues el morfismo

$$i_w \colon \Lambda^r E \to \Lambda^{r-1} E, \quad i_w(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) := \overline{\hat{i}_w(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)} = \sum_i (-1)^{i-1} w(v_i) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_r$$

18. Corolario : *La contracción interior es una antiderivación del álgebra exterior, es decir, dadas $\Omega_n \in \Lambda^n E$ y $\Omega_m \in \Lambda^m E$, entonces*

$$i_w(\Omega_n \wedge \Omega_m) = (i_w \Omega_n) \wedge \Omega_m + (-1)^n \Omega_n \wedge (i_w \Omega_m).$$

19. Las n-formas se identifican con aplicaciones hemisimétricas de orden n. Dado $e_1 \in E$ y $\Omega_n = w_1 \wedge \cdots \wedge w_n \in \Lambda^n E^* = \mathrm{Hem}_k(E \times \overset{n}{\cdots} \times E, k)$ (con $\dim_k E < \infty$), entonces

$$\begin{aligned}
(i_{e_1}\Omega_n)(e_2,\dots,e_n) &= (i_{e_1}(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n))(e_2,\dots,e_n) \\
&= (\sum_i (-1)^{i-1} w_i(e_1) w_1 \wedge \cdots \wedge \hat{w}_i \wedge \cdots \wedge w_n))(e_2,\dots,e_n) \\
&\overset{1}{=} \sum_i \sum_{\sigma \in S_{n-1}} (-1)^{i-1} \mathrm{signo}(\sigma) \cdot w_1(e_{\sigma(2)}) \cdots w_i(e_1) \cdots w_n(e_{\sigma(n)}) \\
&\overset{2}{=} w_1 \wedge \cdots \wedge w_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = \Omega_n(e_1, e_2, \dots, e_n)
\end{aligned}$$

$\overset{1}{=}$ Consideramos S_{n-1} como el subgrupo de S_n formado por las permutaciones que dejan el 1 fijo.

$\overset{2}{=}$ Si $\tau_i \in S_n$ es la permutación que transforma $\{1,\dots,n\}$ en $\{2,\dots,i-1,1,i,\dots,n\}$, entonces $\mathrm{signo}(\tau_i) = (-1)^{i-1}$ y $S_n = S_{n-1} \cdot \tau_1 \coprod \cdots \coprod S_{n-1} \cdot \tau_n$ (porque $S_{n-1} \cdot \tau_i$ son las permutaciones que transforman el i en el 1).

1.9. Potencia simétrica n-ésima de un espacio vectorial

"Queremos definir ahora un producto conmutativo, con las propiedades multilineales de $\otimes$".

Sea V el k-subespacio vectorial de $E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E$, generado por los vectores

$$e_1 \otimes \overset{j}{\cdots} \otimes e_j \otimes \cdots \otimes e_k \otimes \cdots \otimes e_n - e_1 \otimes \overset{j}{\cdots} \otimes e_k \otimes \cdots \otimes e_j \otimes \cdots \otimes e_n$$

variando e_i, j, k.

1. Definición : Llamaremos n-ésima potencia simétrica de E, que denotaremos por $S^n E$, a

$$S^n E := (E \otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes E)/V$$

2. Notación: *Denotaremos $\overline{e_1 \otimes \cdots \otimes e_n} \in (E \otimes_k \overset{n}{\cdots} \otimes E)/V = S^n E$ por $e_1 \cdots e_n$.*

Observemos que $\cdot$ además de las propiedades multilineales heredadas de $\otimes$, cumple que

$$e_1 \cdots e_n = e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(n)}$$

para todo $\sigma \in S_n$.

3. Como $S^nE = (E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)/V$, dar un morfismo lineal $\phi\colon S^nE \to F$ equivale a dar un morfismo $E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \to F$ que se anule en V, es decir, equivale a definir $\phi(e_1\cdots e_n)$ (para todo $e_1,\dots,e_n \in E$) que sea k-lineal en cada factor y de modo que $\phi(e_1\cdots e_n) = \phi(e_{\sigma(1)}\cdots e_{\sigma(n)})$ para todo $\sigma \in S_n$. Es decir,

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_k(S^nE,F) &= \{T \in \operatorname{Multl}_k(E\times \overset{n}{\cdots} \times E, F) \mid T(e_1,\cdots,e_n) = T(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)}), \forall \sigma \in S_n\}\\ &= \text{Aplic. n-mult. simétricas de } E \text{ en } F =: \operatorname{Sim}_k(E\times \overset{n}{\cdots} \times E, F)\end{aligned}$$

4. Ejercicio: La composición del morfismo

$$S\colon S^nE \to E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E,\ \ S(e_1\cdots e_n) := \sum_{\sigma\in S_n} e_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(n)}$$

con el morfismo natural de paso a cociente $\pi\colon E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \to S^nE$ es igual a $n!\cdot \mathrm{Id}$.

5. Teorema: *Sea E un k-espacio vectorial y $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de E. Por sencillez consideremos un orden total en I. Entonces, $\{e_{i_1}\cdots e_{i_r}\}_{i_1\leq\cdots\leq i_r}$ es una base de S^rE.*

Demostración. Sabemos que $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\}_{i_1,\dots,i_r\in I}$ es una base de $E\otimes \overset{r}{\cdots} \otimes E$. Por tanto, tomando clases tenemos que $\{e_{i_1}\cdots e_{i_r}\}_{i_1,\dots,i_r\in I}$ es un sistema generador de S^rE. Como $e_{i_1}\cdots e_{i_r} = e_{i_{\sigma(1)}}\cdots e_{i_{\sigma(r)}}$ para todo $\sigma\in S_r$, tendremos que $\{e_{i_1}\cdots e_{i_r}\}_{i_1\leq\cdots\leq i_r}$ es un sistema generador de S^rE.

Nos falta probar que $\{e_{i_1}\cdots e_{i_r}\}_{i_1\leq\cdots\leq i_r}$ son k-linealmente independientes. Sea $t = \sum\limits_{i_1\leq\cdots\leq i_r} \lambda_{i_1,\dots,i_r} e_{i_1}\cdots e_{i_r} = 0$. Sean $\{w_i \in E^*\}$ tales que $w_i(e_j) = 0$ si $i\neq j$ y $w_i(e_i) = 1$. Dado $i_1\leq\cdots\leq i_r$ sea $J = \{(j_1,\dots,j_r)\in I^r$ tales que exista $\sigma\in S_r$ de modo que $i_{\sigma(1)} = j_1,\dots,i_{\sigma(r)} = j_r\}$ y sea $w = \sum\limits_{(j_1,\dots,j_r)\in J} w_{j_1}\otimes\cdots\otimes w_{j_r} \in \operatorname{Hom}_k(S^rE,k)$. Entonces,

$$\lambda_{i_1,\dots,i_r} = w(t) = 0.$$

□

S_n opera de modo natural en $E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E$ permutando los factores: dada $\sigma\in S_n$ y $e_1\otimes\cdots\otimes e_n$, $\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_n) := e_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(n)}$. Sea

$$(E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)^{S_n} := \{T \in E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \mid \sigma(T) = T \text{ para todo } \sigma\in S_n\}$$

La composición de morfismos

$$\begin{aligned}(E\otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)\otimes(E\otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E) = E\otimes \overset{n+m}{\cdots} \otimes E &\to S^{n+m}E\\ (e_1\otimes\cdots\otimes e_n)\otimes(e_{n+1}\otimes\cdots\otimes e_{n+m}) &\mapsto e_1\cdots e_{n+m}\end{aligned}$$

factoriza vía el morfismo, que llamaremos producto simétrico de tensores simétricos, $S^nE\otimes S^mE \to S^{n+m}E$, $(e_1\cdots e_n)\otimes(e_{n+1}\cdots e_{n+m}) \mapsto e_1\cdots e_{n+m} =: (e_1\cdots e_n)\cdot(e_{n+1}\cdots e_{n+m})$.

6. Proposición: *El producto simétrico de tensores simétricos es asociativo: Es decir, $(T_n \cdot T_m)\cdot T_r = T_n \cdot (T_m \cdot T_r)$, con $T_i \in S^iE$.*

El producto simétrico de tensores simétricos es conmutativo: $T_n \cdot T_m = T_m \cdot T_n$, para toda $T_n \in S^nE$ y $T_m \in S^mE$.

$S^{\cdot}E := k \oplus E \oplus (S^2E) \oplus \cdots \oplus (S^nE) \otimes \dots$, con la suma, $+$, y con el producto, $\cdot$, se dice que es el álgebra simétrica asociada a E. El epimorfismo $TE \to S^{\cdot}E$, $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \mapsto e_1 \cdots e_n$ es un morfismo de álgebras (= de anillos). Denotaremos $S^0E = k$ y $S^1E = E$.

7. Ejercicio: Sean $s_n \in S^nE^*$ y $s'_m \in S^mE^*$, que podemos pensar como aplicaciones multilineales simétricas. Prueba que

$$s_n \cdot s'_m(e_1,\dots,e_{n+m}) = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_n \\ j_1<\cdots<j_m}} s_n(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\cdot s'_m(e_{j_1},\dots,e_{j_m}).$$

(suponemos que $\{i_r, j_s\}_{r,s} = \{1,\dots,n+m\}$).

8. Sea $w \in E^*$, llamaremos al morfismo

$$\tilde{i}_w : E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E \to E \otimes \overset{n-1}{\cdots} \otimes E,\ \tilde{i}_w(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) := \sum_i w(e_i)\cdot e_1 \otimes \cdots \otimes \hat{e}_i \otimes \cdots \otimes e_n$$

contracción interior simétrica, que es la suma de la contracción interior por w en cada factor.

9. Proposición: *La contracción interior simétrica es una derivación del álgebra tensorial, es decir, dadas $T_n \in (E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E)$ y $T_m \in (E \otimes \overset{m}{\cdots} \otimes E)$, entonces*

$$\tilde{i}_w(T_n \otimes T_m) = (\tilde{i}_w T_n) \otimes T_m + T_n \otimes (\tilde{i}_w T_m)$$

Demostración. Basta demostrar la proposición para $T_n = e_1 \otimes \cdots \otimes e_n$ y $T_m = e'_1 \otimes \cdots \otimes e'_m$. Ahora bien, la suma de las contracciones interiores por w en cada factor es contraer primero en los n-primeros factores más contraer después en los últimos m factores. □

La contracción interior simétrica en el álgebra tensorial define por paso al cociente un aplicación lineal que denominaremos "la contracción interior" en el álgebra simétrica. En efecto, el morfismo

$$i_w : S^rE \to S^{r-1}E, \quad i_w(v_1 \cdots v_r) := \sum_i w(v_i)\cdot v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_r$$

está bien definido.

10. Corolario: *La contracción interior es una derivación del álgebra simétrica, es decir, dadas $T_n \in S^nE$ y $T_m \in S^mE$, entonces*

$$i_w(T_n \cdot T_m) = (i_w T_n)\cdot T_m + T_n \cdot (i_w T_m)$$

11. Los tensores simétricos de orden n se identifican con aplicaciones multilineales simétricas de orden n. Dado $e_1 \in E$ y $T_n = w_1 \cdots w_n \in S^n E^* = \mathrm{Sim}_k(E \times \overset{n}{\cdots} \times E, k)$ entonces

$$\begin{aligned}
(i_{e_1} T_n)(e_2, \dots, e_n) &= (i_{e_1}(w_1 \cdots w_n))(e_2, \dots, e_n) \\
&= (\sum_i w_i(e_1) \cdot w_1 \cdots \hat{w}_i \cdots w_n)(e_2, \dots, e_n) \\
&\overset{1}{=} \sum_i \sum_{\sigma \in S_{n-1}} w_1(e_{\sigma(2)}) \cdots w_i(e_1) \cdots w_n(e_{\sigma(n)}) \\
&\overset{2}{=} w_1 \cdots w_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = T_n(e_1, e_2, \dots, e_n)
\end{aligned}$$

$\overset{1}{=}$ Consideramos S_{n-1} como el subgrupo de S_n formado por las permutaciones que dejan el 1 fijo.

$\overset{2}{=}$ Si $\tau_i \in S_n$ es la permutación que transforma $\{1, \dots, n\}$ en $\{2, \dots, i-1, 1, i, \dots, n\}$, entonces $S_n = S_{n-1} \cdot \tau_1 \coprod \cdots \coprod S_{n-1} \cdot \tau_n$ (porque $S_{n-1} \cdot \tau_i$ son las permutaciones que transforman el i en el 1).

1.10. Aplicaciones

1.10.1. Determinante de un endomorfismo lineal

1. Definición: Sea E un espacio vectorial de dimensión n y $T: E \to E$ un endomorfismo lineal. Entonces $\Lambda^n E = k$ y $\Lambda^n T : \Lambda^n E \to \Lambda^n E$ es la homotecia por cierto escalar de k, que llamaremos determinante de T y denotaremos $\det(T)$.

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y la matriz de T en esta base es (λ_{ij}), entonces tenemos que $T(e_1) \wedge \cdots \wedge T(e_n) = (\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{signo}(\sigma) \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \lambda_{n\sigma(n)}) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, luego

$$\det(T) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{signo}(\sigma) \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \lambda_{n\sigma(n)}.$$

Denotaremos $\det(\lambda_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{signo}(\sigma) \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \lambda_{n\sigma(n)}$ y diremos que es el determinante de la matriz (λ_{ij}).

2. Proposición : *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. $T: E \to E$ es un isomorfismo si y solo si* $\det(T) \neq 0$.

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E. T es un isomorfismo $\iff$ $T(e_1), \dots, T(e_n)$ son linealmente independientes $\iff$ $T(e_1) \wedge \cdots \wedge T(e_n) \neq 0$ $\iff$ $\det(T) \neq 0$. □

3. Teorema: $\det(T \circ T') = \det(T) \cdot \det(T')$.

Demostración. Se verifica que $\Lambda^n(T)\circ\Lambda^n(T') = \Lambda^n(T\circ T')$: $(\Lambda^n(T)\circ\Lambda^n(T'))(e_1\wedge\cdots\wedge e_n) = \Lambda^n(T)(T'(e_1)\wedge\cdots\wedge T'(e_n)) = (T\circ T')(e_1)\wedge\cdots\wedge(T\circ T')(e_n) = \Lambda^n(T\circ T')(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)$.

Por tanto, multiplicar (en $\Lambda^n E = k$) por $\det(T')$ y después multiplicar por $\det(T)$ es igual a multiplicar por $\det(T\circ T')$. Es decir, $\det(T\circ T') = \det(T)\cdot\det(T')$. □

4. Definición: Dada una matriz $A = (a_{ij})$ llamaremos menor pq de la matriz, que denotaremos por A_p^q, al determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo en (a_{ij}) la columna q y la fila p.

5. Proposición: $\det(a_{ij}) = \sum\limits_q (-1)^{q+1} a_{q1} A_q^1$.

Demostración. Sea $\{e_i\}$ una base. Entonces

$$\begin{aligned}
&\det(a_{ij})e_1\wedge\cdots\wedge e_n = (\sum_j a_{j1}e_j)\wedge\cdots\wedge(\sum_j a_{j1}e_j) = \sum_k\ a_{k1}e_k\wedge(\sum_j a_{j2}e_j)\wedge\cdots\wedge(\sum_j a_{jn}e_j)\\
&= a_{11}e_1\wedge(\sum_{j\neq 1} a_{j2}e_j)\wedge\cdots\wedge(\sum_{j\neq 1} a_{jn}e_j)+\cdots+a_{n1}e_n\wedge(\sum_{j\neq n} a_{j2}e_j)\wedge\cdots\wedge(\sum_{j\neq n} a_{jn}e_j)\\
&= a_{11}A_1^1\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n+\cdots+a_{n1}A_n^1\cdot e_n\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}\\
&= (\sum_j(-1)^{j+1}a_{j1}A_j^1)\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n
\end{aligned}$$

y hemos concluido. □

6. Proposición: *Sea* $\dim_k E = n < \infty$ *y* $T\colon E\to E$ *un endomorfismo lineal. Se cumple que* $\det(T) = \det(T^*)$.

Demostración. $\Lambda^n T$ es una homotecia de factor $\det(T)$, luego $(\Lambda^n T)^*$ también y como coincide con $\Lambda^n T^*$, que es una homotecia de factor $\det(T^*)$ concluimos. □

7. Matriz inversa: *Sea* $T\colon E\to E'$ *un isomorfismo lineal y sea* $A = (a_{ij})$ *la matriz de* T *en unas bases* $\{e_j\}$ *de* E *y* $\{e'_j\}$ *de* E'. *Calculemos la matriz* $B = (b_{ij})$ *de* A^{-1}: $T^{-1}(e'_i) = \sum\limits_j b_{ji}e_j$, *luego*

$$T^{-1}(e'_i)\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\hat{e}_j\wedge\cdots\wedge e_n = b_{ji}e_j\wedge e_1\wedge\cdots\wedge\hat{e}_j\wedge\cdots\wedge e_n = (-1)^{j+1}b_{ji}e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$

Aplicando $\Lambda^n T$, *obtenemos*

$$e'_i\wedge T(e_1)\wedge\cdots\wedge\widehat{T(e_j)}\wedge\cdots\wedge T(e_n) = b_{ji}(-1)^{j+1}\det(T)\cdot e'_1\wedge\cdots\wedge e'_n.$$

Como $e'_i\wedge T(e_1)\wedge\cdots\wedge\widehat{T(e_j)}\wedge\cdots\wedge T(e_n) = A_i^j\cdot(-1)^{i+1}e'_1\wedge\cdots\wedge e'_n$, *entonces*

$$b_{ji} = (-1)^{i+j}\frac{A_i^j}{\det(a_{ij})}.$$

1.10.2. Rango. Regla de Cramer

Sea $T\colon E \to E'$ una aplicación k-lineal entre k-espacios vectoriales de dimensión finita.

8. Definición: Se llama rango de T, que denotaremos $\operatorname{rango} T$, a la dimensión de $\operatorname{Im} T$.

Como $E/\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$, $\bar{e} \mapsto T(e)$, se tiene que $\operatorname{rango} T = \dim \operatorname{Im} T = \dim E - \dim \operatorname{Ker} T$.

9. Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de E, entonces $\operatorname{Im} T = \langle T(e_1),\dots,T(e_n)\rangle$ y hemos definido $\operatorname{rango} T$ como el número máximo de $T(e_i)$ que son linealmente independientes entre sí. Si (λ_{ij}) es una matriz asociada a T entonces $\operatorname{rango} T$ es el número máximo de columnas linealmente independientes entre sí.

Sea $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de un espacio vectorial V y $u_i = \sum_j \lambda_{ij} v_j$, $1 \le i \le s$. Tendremos que

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_s = \sum \lambda_{j_1,\dots,j_s} v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_s}$$

Calculemos $\lambda_{j_1,\dots,j_s}$. Sea $i\colon \langle u_1,\dots,u_s\rangle \hookrightarrow V$, la inclusión y $\pi\colon V \to \langle v_{j_1},\dots,v_{j_s}\rangle$ tal que $\pi(v_j) = 0$ si $j \neq \{j_1,\dots,j_s\}$ y $\pi(v_{j_i}) = v_{j_i}$, para $1 \le i \le s$. Entonces

$$\begin{aligned}\det(\pi\circ i)\cdot v_{j_1}\wedge\ldots\wedge v_{j_s} &= \Lambda^s(\pi\circ i)(u_1\wedge\cdots\wedge u_s) = \Lambda^s(\pi)(u_1\wedge\cdots\wedge u_s)\\ &= \Lambda^s\pi(\sum \lambda_{j'_1,\dots,j'_s} v_{j'_1}\wedge\cdots\wedge v_{j'_s}) = \lambda_{j_1,\dots,j_s} v_{j_1}\wedge\cdots\wedge v_{j_s}\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\lambda_{j_1,\dots,j_s} = \det(\,(\lambda_{ij})_{j\in\{j_1,\dots,j_s\}})$$

Recordemos que $u_1,\cdots,u_s$ son linealmente independientes si y solo $u_1\wedge\cdots\wedge u_s \neq 0$, luego $u_1,\dots,u_s$ son linealmente independientes si y solo si algún $\lambda_{j_1,\dots,j_s} \neq 0$.

10. Proposición: *Sea (λ_{ij}) una matriz asociada a $T\colon E \to E'$. El rango de T es el máximo de los órdenes de los menores de la matriz (λ_{ij}) no nulos.*

Demostración. Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E y $\{e'_1,\dots,e'_m\}$ una base de E' de modo que $T(e_i) = \sum_j \lambda_{ij} e'_j$. El rango de T es el número máximo de los $T(e_1),\dots,T(e_n)$ linealmente independientes. □

11. Corolario: *El número máximo de columnas linealmente independientes de una matriz coincide con el número máximo de filas linealmente independientes.*

Dada una aplicación lineal $T\colon E \to E'$, $e' \in E'$, se cumple que $e' \in \operatorname{Im} T$ si y solo si $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T + \langle e'\rangle$. Así pues, si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de E, $\{e'_1,\dots,e'_m\}$ es una base de E', $T(e_i) = \sum_j \lambda_{ij} e'_j$ y $e' = \sum_j b_j e'_j$, tendremos que $e' \in \operatorname{Im} T$ si y solo si el rango de la matriz (λ_{ij}) es igual al rango de la matriz (λ_{ij}) ampliada por la columna $(b_1,\dots,b_m)$.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{11}x_1+ & \cdots & +\lambda_{n1}x_n = b_1 \\ & \cdots & \\ \lambda_{1m}x_1+ & \cdots & +\lambda_{nm}x_n = b_m \end{array}$$

Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal de matriz asociada (λ_{ij}) en las bases estándar y $e' = (b_1, \dots, b_m)$. Las soluciones del sistema de ecuaciones lineales se corresponden con los vectores $e = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(e) = e'$. Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución si y solo si el rango de la matriz (λ_{ij}) es igual al rango de la matriz (λ_{ij}) ampliada por la columna $(b_1, \dots, b_m)$.

Supongamos que el sistema de ecuaciones lineales tiene solución. Supongamos que el menor M obtenido de las columnas $\{i_1, \dots, i_r\}$ y filas $\{j_1, \dots, j_r\}$ de la matriz (λ_{ij}) es de determinante no nulo ($r = \operatorname{rango} T$). Por tanto, las filas $j' \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ dependen linealmente de las filas $j_1, \dots, j_r$ y para calcular las soluciones del sistema las podemos quitar. Pasemos las variables $x_{i'}$, con $i' \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ al otro lado de la igualdad. Tendremos que

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{j_1} - \sum_{i' \notin \{i_1,\dots,i_r\}} \lambda_{i'j_1} x_{i'} \\ \vdots \\ b_{j_r} - \sum_{i' \notin \{i_1,\dots,i_r\}} \lambda_{i'j_r} x_{i'} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_{j_1} - \sum_{i' \notin \{i_1,\dots,i_r\}} \lambda_{i'j_1} x_{i'} \\ \vdots \\ b_{j_r} - \sum_{i' \notin \{i_1,\dots,i_r\}} \lambda_{i'j_r} x_{i'} \end{pmatrix}$$

1.10.3. Polinomio característico. Diagonalización

Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo k-lineal. Nuestro objetivo es encontrar (si existe) una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E tal que $T(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$, es decir, $T \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

12. Definición: Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo k-lineal. Diremos que $0 \neq e \in E$ es un autovector de T si $T(e) = \lambda \cdot e$, para cierto $\lambda \in k$, en este caso diremos que λ es un autovalor de T ("el autovalor asociado al autovector e").

Sea A la matriz asociada a T en una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Entonces, $e = (x_1, \dots, x_n$ es un autovector de T de autovalor λ si y solo si

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Diremos que $(x_1, \dots, x_n)$ es un autovector de A de autovalor λ.

13. Ejemplo : Calculemos los autovectores del giro de α radianes alrededor del origen de $\mathbb{R}^2$ (en sentido antihorario). La matriz del giro en la base usual es

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Buscamos vectores $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ no nulos tales que $T(x,y)=\lambda\cdot(x,y)$. Tenemos que $T(x,y)=(x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha, x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha)$. Entonces,

$$\begin{aligned} x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha &= \lambda\cdot x \\ x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha &= \lambda\cdot y \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x\cdot(\cos\alpha-\lambda) - y\cdot\operatorname{sen}\alpha = 0 \\ x\cdot\operatorname{sen}\alpha + y\cdot(\cos\alpha-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

El sistema es compatible y $(x,y)=(0,0)$ es una solución. Tiene más soluciones si y solo si

$$0=\begin{vmatrix} \cos\alpha-\lambda & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-(2\cos\alpha)\cdot\lambda+1$$

Es decir, si y solo si $\lambda=\frac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4\cos\alpha-4}}{2}\in\mathbb{R}$. Lo cual solo sucede si $\alpha=0,\pi$. Si $\alpha=0$, entonces todos los vectores (no nulos) son autovectores de autovalor 1. Si $\alpha=\pi$ todos los vectores (no nulos) son autovectores de autovalor -1. Para $\alpha\neq 0,\pi$ no hay autovectores.

14. Ejercicio : Sea $T\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el endomorfismo lineal de matriz en la base usual

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprueba que los vectores $(1,-1,0)$ y $(0,0,1)$ son autovectores de T.

15. Proposición : *Sea $T\colon E\to E$ un endomorfismo k-lineal. Entonces,*

1. *Si $\lambda\in k$ es un autovalor de T, entonces*

$$\{\textit{Autovectores de autovalor } \lambda\} = \operatorname{Ker}(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})\backslash\{0\}$$

2. *$\lambda\in k$ es un autovalor de T si y solo si* $\det(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})=0$.

Demostración. 1. En efecto, $0\neq e\in E$ es un autovector de autovalor λ si y solo si $T(e)=\lambda\cdot e$, que equivale a $(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})(e)=0$, es decir, si y solo si $e\in\operatorname{Ker}(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})$.

2. En efecto, $\lambda\in k$ es un autovalor de T si y solo si existe un autovector $0\neq e\in E$ de autovalor λ, es decir, $\operatorname{Ker}(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})\neq 0$. Ahora bien, $\operatorname{Ker}(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})=0$ si y solo si $\operatorname{rango}(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})=\dim E$ y esto sucede si y solo si $\det(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})\neq 0$. Luego, $\operatorname{Ker}(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})\neq 0$ si y solo si $\det(T-\lambda\cdot\operatorname{Id})=0$ y hemos concluido. □

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada, definimos

$$c_A(x) = \det(A - x\cdot \mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

que es un polinomio mónico de grado $n = \dim E$. Si $A' = C\cdot A\cdot C^{-1}$, entonces

$$c_{A'}(x) := |A' - x\cdot \mathrm{Id}| = C\cdot A\cdot C^{-1} - x\cdot \mathrm{Id}| = |C\cdot (A - x\cdot \mathrm{Id})\cdot C^{-1}| = |A - x\cdot \mathrm{Id}| = c_A(x).$$

16. Definición: Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo lineal, cuya matriz asociada en una cierta base sea A. Llamaremos polinomio característico de T, que denotaremos $c_T(x)$, al polinomio definido por

$$c_T(x) := c_A(x) = \det(A - x\cdot \mathrm{Id})$$

(que no depende de la base escogida).

17. Proposición: *Sea $T\colon E\to E$ un endomorfismo lineal. Entonces, $\lambda \in k$ es un autovalor de T si y solo si λ es una raíz del polinomio característico de T.*

18. Ejemplo: Calculemos los autovectores y autovalores del endomorfismo lineal del ejercicio 1.10.14: Calculemos primero el polinomio característico de T

$$c_T(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -2 & 2-x & 0 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = -(x^3 - 5x^2 + 6x) = -x(x-2)(x-3).$$

Los autovalores son las raíces $0, 2, 3$ de $c_T(x)$.

Calculemos los autovectores de autovalor 0, es decir, $\mathrm{Ker}\, T$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, T &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+y, 2x+2y, x+y+2z) = (0,0,0)\} = \langle (1,-1,0)\rangle. \end{aligned}$$

Calculemos los autovectores de autovalor 2, es decir, $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T-2\,\mathrm{Id}) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (T-2\,\mathrm{Id})(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (-x+y, 2x, x+y) = (0,0,0)\} = \langle (0,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

Calculemos los autovectores de autovalor 3, es decir, $\mathrm{Ker}(T - 3\,\mathrm{Id})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T-3\,\mathrm{Id}) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (T-3\,\mathrm{Id})(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (-2x+y, 2x-y, x+y-z) = (0,0,0)\} = \langle (1,2,3)\rangle. \end{aligned}$$

La matriz de T en la base $B = \{(1,1,0),(1,0,-1),(1,1,0)\}$ es igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Buscamos bases en las que la matriz asociada a un endomorfismo lineal sea muy simple.

19. Definición: Se dice que un endomorfismo lineal $T\colon E \to E$ es diagonalizable si existe una base de E, $B = \{e_1,\dots,e_n\}$, tal que $T(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$, para todo i, es decir, si la matriz asociada a T en la base B es igual a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Demos condiciones computables que caractericen los endomorfismos diagonalizables.

20. Proposición: *Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal y escribamos el polinomio característico $c_T(x) = \pm(x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_r)^{n_r}$, con $\alpha_i \neq \alpha_j \in \mathbb{C}$ si $i \neq j$. Entonces, el endomorfismo lineal T es diagonalizable $\iff$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $n_i = \dim \operatorname{Ker}(T - \alpha_i \cdot \operatorname{Id})$, para todo i.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si T es diagonalizable existe una base en la que la matriz asociada a T es diagonal, reordenando los vectores de esta base podemos suponer que

$$T \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \overset{n_1}{\ddots} & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \alpha_r & & \\ & & & & & \overset{n_r}{\ddots} & \\ & & & & & & \alpha_r \end{pmatrix}$$

con $\alpha_i \neq \alpha_j \in \mathbb{R}$, si $i \neq j$. En este caso, $c_T(x) = \pm(x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_r)^{n_r}$, con $\alpha_i \neq \alpha_j \in \mathbb{R}$, para $i \neq j$, y $\dim \operatorname{Ker}(T - \alpha_i \cdot \operatorname{Id}) = n_i$, para todo i.

$\Leftarrow$) Observemos que $\sum_i n_i = \operatorname{gr}(c_T(x)) = \dim E$. Además, los $\operatorname{Ker}((T - \alpha_i \operatorname{Id})$ están en suma directa, pues

$$\operatorname{Ker}((T-\alpha_1 \operatorname{Id})\cdots(T-\alpha_r \operatorname{Id})) = \operatorname{Ker}(T-\alpha_1 \operatorname{Id}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(T-\alpha_r \operatorname{Id}).$$

Por dimensiones, $E = \operatorname{Ker}(T-\alpha_1 \operatorname{Id}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(T-\alpha_r \operatorname{Id})$. Si consideramos una base en cada $\operatorname{Ker}((T-\alpha_i \operatorname{Id})$, obtendremos una base de E en la que T diagonaliza.

□

21. Proposición: *Sea $T : E \to E$ un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal. Si el polinomio característico de T tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$ y son distintas, entonces T diagonaliza.*

Demostración. Tenemos $c_T(x) = \pm(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, con $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$ y $n = \dim E$. Por tanto, $\dim \operatorname{Ker}(T - \alpha_i \operatorname{Id}) \geq 1$ y por dimensiones tenemos que

$$\operatorname{Ker}((T-\alpha_1\cdot \operatorname{Id})\cdots(T-\alpha_n \operatorname{Id})) = \operatorname{Ker}(T-\alpha_1\cdot\operatorname{Id})\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(T-\alpha_n\operatorname{Id}) = E.$$

Si consideramos una base en cada $\operatorname{Ker}(T-\alpha_i \operatorname{Id})$, obtendremos una base de E en la que T diagonaliza.

□

22. Ejemplo: Comprobemos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 0'5 & 0'4 & 0'6 \\ 0'3 & 0'4 & 0'3 \\ 0'2 & 0'2 & 0'1 \end{pmatrix}$ diagonaliza. Tenemos que $c_A(x) = -(x-1)\cdot(x-0'1)\cdot(x+0'1)$, luego diagonaliza (en una base de autovectores). Calculemos la base.

$$\operatorname{Ker}(A-\operatorname{Id}) = \langle(16,11,6)\rangle,\quad \operatorname{Ker}(A-0'1\operatorname{Id}) = \langle(1,-1,0)\rangle,\quad \operatorname{Ker}(A+0'1\operatorname{Id}) = \langle(1,0,-1)\rangle.$$

23. Ejemplo: Comprobemos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliza. Tenemos que $c_A(x) = -(x-1)^3$ y $\operatorname{Ker}(A-\operatorname{Id}) = \langle(1,0,0)\rangle$. Por la proposición 1.10.20, no diagonaliza.

1.10.4. Orientación. Forma de volumen

Hablemos, primero sin rigor, de orientación de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, para ligar la intuición vaga que tenemos de orientación con la definición matemática de orientación que daremos más adelante.

"Decimos que un espacio vectorial E de dimensión 1 (una recta) lo tenemos orientado, si sabemos decir qué está a la derecha del cero y qué está a la izquierda del cero. Para esto es necesario y suficiente con que tengamos un vector no nulo $e \in E$, de modo que diremos que un punto $e' \in E$ distinto de 0, está a la derecha de 0 si $e' = \lambda \cdot e$, con $\lambda > 0$, diremos que está a la izquierda si $\lambda < 0$. Otro vector, v define la misma orientación que e si y solo si $v = \mu e$, con $\mu > 0$. En conclusión, dar una orientación en E, equivale a dar un $e \in E$ (o cualquier otro λe, con $\lambda > 0$).

Sea ahora E un plano. Decimos que en el plano E estamos orientados, si siempre que tengamos una recta (pongamos que pasa por el origen) orientada sabemos decir qué está a la derecha de la recta o qué está a la izquierda de la recta. Así si tenemos una recta orientada $r = \langle e \rangle \subset E$ (donde e orienta la recta), dado e' (que no yazca en la recta) sabemos decir si está a la derecha o a la izquierda de la recta. Además, si e' está a la derecha de la recta, entonces los puntos de la derecha son de la forma $\lambda e+\mu e'$, con $\mu>0$. Así si fijamos la recta orientada $r=\langle e\rangle$ y decimos que e' está a la derecha de r, definamos $e\wedge e'$ que es una base de $\Lambda^2 E$, entonces $v=\alpha e+\beta e'$ está a la derecha de r, si y solo si $e\wedge v=\beta\cdot e\wedge e'$ con $\beta>0$. En conclusión, dada una dos coforma $c_2\in\Lambda^2 E$, tenemos una orientación en E: Dada una recta orientada $r=\langle e\rangle$ (donde e, o λe con $\lambda>0$, orienta la recta) diremos que e' está a la derecha de la recta r, si $e\wedge e'=\beta\cdot c_2$, con $\beta>0$. Así pues, dar una orientación en E, es dar una $c_2\in\Lambda^2 E$ (o cualquier otra $\lambda\cdot c_2$, con $\lambda>0$).

Sea ahora E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3. Decimos que estamos orientados en E, si dado un plano orientado sabemos decir qué está a su derecha y qué está a su izquierda. Dar un plano $V\subset E$ orientado, es dar una dos coforma $c_2\in\Lambda^2 V$ (o cualquier otra λc_2, con $\lambda>0$). Así si tengo, una tres coforma $c_3\in\Lambda^3 E$ (o cualquier otra $\lambda\cdot c_3$, con $\lambda>0$), dado $e'\in E$, diré que está a la derecha de V si $c_2\wedge e'=\alpha\cdot c_3$, con $\alpha>0$. Observemos, que si $e''=\mu e'+v$, con $\mu>0$ y con $v\in V$, entonces $c_2\wedge e''=\mu\cdot c_2\wedge e'=\mu\lambda c_3$. En conclusión, dar una orientación en E, es dar una $c_3\in\Lambda^3 E$ (o cualquier otra $\lambda\cdot c_3$, con $\lambda>0$)”.

24. Definición: Dar una orientación en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión n, es dar una n-coforma no nula $c_n\in\Lambda^n E$. Decimos que dos orientaciones c_n y c'_n son iguales si $c_n=\lambda\cdot c'_n$, con $\lambda>0$.

Como $\Lambda^n E\simeq\mathbb{R}$, en E solo podemos dar dos orientaciones, “una y su opuesta”.

Dada una orientación $c_n\in\Lambda^n E$ existe una única $w_n\in\Lambda^n E^*$, salvo un factor multiplicativo positivo, de modo que $w_n(c_n)\geq 0$. Equivalentemente, dada una n-forma w_n, salvo un factor multiplicativo positivo, tenemos definida una orientación.

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n orientado, y $e_1\wedge\ldots\wedge e_n\in\Lambda^n E$ una n-coforma que orienta E (o equivalentemente una n-forma w_n que orienta E).

25. Definición: Diremos que una base ordenada $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ está positivamente orientada si $e'_1\wedge\cdots\wedge e'_n=\lambda\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n$, con $\lambda>0$ (o equivalentemente si $w_n(e'_1,\ldots,e'_n)>0$).

26. Proposición: *Sea* $e'_i=\sum_j\lambda_{ij}e_j$*. Entonces* $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ *está positivamente ordenada si y solo si* $\det(\lambda_{ij})>0$.

Demostración. $e'_1\wedge\cdots\wedge e'_n=\det(\lambda_{ij})\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n$. □

27. Forma de volumen: *“Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, con una orientación. Fijemos una unidad de volumen, es decir, digamos que el paralelepípedo con vértice en el origen y aristas (con origen el origen) $e_1,\ldots,e_n$ tiene volumen 1. La función $F\colon E\times\cdots\times E\to\mathbb{R}$ que asigna a n vectores el volumen del parelelepípedo de aristas los n vectores, multiplicado por -1 si los n vectores no están positivamente orientados, es una aplicación lineal hemisimétrica. Observemos que $\Lambda^n E^*=\langle F\rangle$ y que F está determinado por la igualdad $F(e_1,\ldots,e_n)=1$.”*

28. Definición: A los vectores no nulos de $\Lambda^n E^*$ se les llama formas de volumen. Dada una forma de volumen $\Omega_n \in \Lambda^n E^*$, llamaremos volumen del paralelepípedo de aristas $v_1, \dots, v_n$ al número real $|\Omega_n(v_1, \dots, v_n)|$.

29. Proposición: *Sea $T\colon E \to E$ un endomorfismo lineal. Entonces, T manda paralepípedos de volumen V a paralelepípedos de volumen $|\det(T)| \cdot V$.*

Demostración. Sea Ω_n una forma de volumen. Observemos que

$$\Omega_n(T(v_1), \dots, T(v_n)) = [\Lambda^n T^*(\Omega_n)](v_1, \dots, v_n) = \det(T) \cdot \Omega_n(v_1, \dots, v_n).$$

□

30. Si $v_i = \sum\limits_j \lambda_{ij} e_j$, tendremos que

$$\Omega_n(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \Omega_n(\det(\lambda_{ij}) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \det(\lambda_{ij}) \Omega_n(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n).$$

Es decir, el volumen del paralelepípedo de aristas $v_1, \dots, v_n$ es $|\det(\lambda_{ij})|$ por el volumen del paralelepípedo de aristas $e_1, \dots, e_n$.

31. Definición: Dada una forma de volumen $\Omega_n \in \Lambda^n E^*$, llamaremos coforma de volumen $c_n \in \Lambda^n E$, a la única coforma tal que $\Omega_n(c_n) = 1$.

Evidentemente, Ω_n y c_n se determinan mutuamente. Dados $v_1, \dots, v_n$, tenemos que

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \Omega_n(v_1, \dots, v_n) \cdot c_n$$

como se observa aplicando Ω_n a ambos términos de la igualdad.

32. Ejemplo: Dada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ y un vector $v = \sum_i \lambda_i e_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_i e_1 \wedge \cdots \wedge e_n &= e_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{v} \wedge \cdots \wedge e_n = \Omega_n(e_1, \dots, \overset{i}{v}, \dots, e_n) \cdot c_n \\ \lambda_i e_1 \wedge \cdots \wedge e_n &= \lambda_i \Omega_n(e_1, \dots, e_n) \cdot c_n \end{aligned}$$

Luego, $\lambda_i = \frac{\Omega_n(e_1, \dots, \overset{i}{v}, \dots, e_n)}{\Omega_n(e_1, \dots, e_n)}$ y $v = \sum_i \frac{\Omega_n(e_1, \dots, \overset{i}{v}, \dots, e_n)}{\Omega_n(e_1, \dots, e_n)} \cdot e_i$.

1.11. Métricas

Uno de los conceptos difíciles de definir en la enseñanza básica es la noción de ángulo. Se dice algo así como que el ángulo entre dos semirectas concurrentes es la región que hay entre las dos rectas ¿Qué es la región? ¿Es un número? ¡Pero la región es muy grande! Para sortear esta objección, se considera la circunferencia de radio 1 centrada en el punto de corte de las dos semirectas. Entonces el ángulo (medido en radianes) es la longitud del arco de esta circunferencia comprendida entre las dos semirectas , o si se quiere el área multiplicada por 2 del sector circular comprendida entre los dos semirectas. Procedamos de otro modo: Consideremos vectores v_1, v_2 de módulo uno sobre cada semirecta. Calculemos la proyección ortonormal $\lambda \cdot v_2$ de v_1 sobre $\langle v_2 \rangle$. El número real $N(v_1, v_2) := \lambda$ nos dará una idea exacta del ángulo. Esta asignación de un número a cada par de semirectas concurrentes, puede extenderse a una asignación de un número a cada par de vectores. En efecto, dados dos vectores e_1, e_2 sean $|e_1|$ y $|e_2|$ sus módulos y consideremos $e'_1 = \frac{e_1}{|e_1|}$ y $e'_2 = \frac{e_2}{|e_2|}$. Sea $N(e_1, e_2) = |e_1| \cdot |e_2| \cdot N(e'_1, e'_2)$. Resulta que $N : E \times E \to \mathbb{R}$, $(e_1, e_2) \mapsto N(e_1, e_2)$ es una aplicación bilineal. En conclusión, la noción de ángulo en un espacio euclídeo está estrechamente relacionada con la noción de aplicación bilineal. Veremos como a partir de una aplicación bilineal definimos lo que es espacio euclídeo, ángulo y módulo.

1. Notación: En esta sección E será un espacio vectorial de dimensión finita, $e_1, \dots, e_n$ una base de E y $w_1, \dots, w_n \in E^*$ la base dual.

2. Sabemos que $\mathrm{Bil}_k(E \times E, k) = \mathrm{Hom}_k(E, E^*)$. Explícitamente, dada $T_2 \in \mathrm{Bil}_k(E \times E, k)$ tenemos la aplicación lineal $E \to E^*$, denominado la polaridad asociada a T_2 y que lo denotamos también por T_2, definido por

$$T_2(e)(e') := T_2(e, e').$$

Recíprocamente, dado una aplicación lineal $T_2 : E \to E^*$, podemos definir una aplicación bilineal que seguimos denotando T_2, $T_2(e, e') := T_2(e)(e')$.

Sabemos que

$$\mathrm{Bil}_k(E \times E, k) = E^* \otimes_k E^*$$

Una base de $E^* \otimes_k E^*$ es $\{w_i \otimes w_j\}$. Dada una aplicación bilineal $T_2 \in \mathrm{Bil}_k(E \times E, k)$, tendremos que $T_2 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} w_i \otimes w_j$ y

$$T_2(e, e') = \sum_{i,j} \lambda_{ij} w_i(e) \cdot w_j(e')$$

En particular, $T_2(e_i, e_j) = \lambda_{ij}$. Se dice que (λ_{ij}) es la matriz asociada a T_2 en la base $\{e_i\}$. La polaridad asociada cumple que

$$T_2(e) := \sum_{ij} \lambda_{ij} \cdot w_i(e) \cdot w_j.$$

Luego la matriz de la polaridad T_2 es $(\lambda_{ij})^t$. Si $e = \sum_i x_i e_i$ y $e' = \sum_i x'_i e_i$, entonces

$$T_2(e, e') = \sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x'_j = (x_1, \dots, x_n) \cdot (\lambda_{ij}) \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^t.$$

3. Dada una aplicación lineal $\phi\colon E' \to E$ y una aplicación bilineal T_2 en E, denotamos por $\phi^* T_2$ la aplicación bilineal de E' definida por

$$\phi^* T_2(e', v') := T_2(\phi(e'), \phi(v')).$$

Si $\{e'_j\}$ y $\{e_i\}$ son bases de E' y E respectivamente, (b_{ij}) es la matriz de ϕ en estas bases y (a_{rs}) la matriz asociada a T_2, entonces la matriz asociada a $\phi^* T_2$ es

$$(b_{rs})^t \cdot (a_{ij}) \cdot (b_{rs})$$

porque el diagrama

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi^* T_2"'] & E \arrow[d, "T_2"] \\ E'^* & E^* \arrow[l, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, pues

$$\begin{aligned}(\phi^* \circ T_2 \circ \phi)(e')(v') &= (\phi^* \circ T_2)(\phi(e'))(v') = T_2(\phi(e'))(\phi(v')) \\ &= T_2(\phi(e'), \phi(v')) = (\phi^* T_2)(e', v') = (\phi^* T_2)(e')(v').\end{aligned}$$

Se dice que un isomorfismo lineal $\phi\colon (E, T_2) \to (E', T'_2)$, $e \mapsto \phi(e)$ es una isometría si $\phi^* T'_2 = T_2$.

4. Definición: Se dice que T_2 es no singular si la polaridad asociada $T_2\colon E \to E^*$ es un isomorfismo (es decir, $\det(\lambda_{ij}) \neq 0$).

Si $T_2\colon E \to E^*$ es un isomorfismo, entonces $T^2 := (T_2)^{-1}\colon E^* \to E$ es un isomorfismo. Por tanto, T^2 define una aplicación bilineal en E^* (pues $E = (E^*)^*$). Si la matriz de T_2 es (λ_{ij}) la matriz de T^2 es $(\lambda^{ij}) := (\lambda_{ij})^{-1}$. Si $T_2 = \sum_{ij} \lambda_{ij} w_i \otimes w_j$, entonces $T^2 = \sum_{ij} \lambda^{ij} e_i \otimes e_j$. Por último observemos que si $w = T_2(e)$ y $w' = T_2(e')$ entonces

$$T^2(w, w') = T^2(w)(w') = T^2(T_2(e))(T_2(e')) = e(T_2(e')) = T_2(e')(e) = T_2(e', e).$$

5. Ortogonalidad. Dado un subespacio $V \subseteq E$ diremos que $V^\perp := \{e \in E \mid T_2(v, e) = 0$ para todo $v \in V\}$ es el espacio ortogonal de V. Denotaremos ${}^\perp V := \{e \in E \mid T_2(e, v) = 0$ para todo $v \in V\}$.

Dado un subespacio vectorial $V \subseteq E$ diremos que $V^0 := \{w \in E^* \mid w(v) = 0$ para todo $v \in V\}$ es el subespacio (de E^*) incidente de V. Si tomamos una base $\{e_1, \dots, e_r\}$ de V y la ampliamos a una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y consideramos la base de E^* dual $\{w_1, \dots, w_n\}$ entonces $\{w_{r+1}, \dots, w_n\}$ es una base de V^0. Por tanto, $\dim V^0 = \dim E - \dim V$.

Vía el teorema de reflexividad, dado $W \subset E^*$ se tiene que $W^0 = \{e \in E \mid w(e) = 0$ para todo $w \in W\}$. Dado $V \subseteq E$ se tiene que

$$V^\perp = \{e \in E \mid 0 = T_2(v, e) = T_2(v)(e) \text{ para todo } v \in V\} = T_2(V)^0$$

6. Si definimos $T_2^t(e,e') := T_2(e',e)$, entonces la matriz asociada T_2^t es la matriz transpuesta de T_2 y el ortogonal a V por T_2^t, $V^{\perp t}$, es igual a ${}^{\perp}V$; igualmente ${}^{\perp t}V = V^{\perp}$.

7. Proposición: *Si T_2 es una métrica no singular de un espacio vectorial de dimensión finita E y $V \subseteq E$ es un subespacio vectorial entonces* $\dim V^{\perp} = \dim E - \dim V$. *Además,* ${}^{\perp}(V^{\perp}) = V$.

Demostración. $\dim V^{\perp} = \dim T_2(V)^0 = \dim E^* - \dim T_2(V) = \dim E - \dim V$.

$(V^{\perp})^{\perp} = V$. Si $v' \in V^{\perp}$ entonces $T_2(v',v) = 0$ para todo $v \in V$. Por tanto, $V \subset {}^{\perp}(V^{\perp})$. Por otra parte, ${}^{\perp}(V^{\perp}) = \dim E - \dim V^{\perp} = \dim E - (\dim E - \dim V) = \dim V$. Por dimensiones, ${}^{\perp}(V^{\perp}) = V$. □

Dos subespacios E', E'' de E, se dicen que son ortogonales entre sí si $T_2(e',e'') = T_2(e'',e') = 0$ para todo $e' \in E'$ y $e'' \in E''$. Se dice que E es la suma ortogonal de dos subespacios E' y E'' si son ortogonales entre sí y E es la suma directa de los dos subespacios. En este caso escribiremos $E = E' \perp E''$. Observemos que

$$T_2(e'_1 + e''_1, e'_2 + e''_2) = T_2(e'_1, e'_2) + T_2(e''_1, e''_2)$$

para todo $e'_1, e'_2 \in E'$ y $e''_1, e''_2 \in E''$.

Si E' y E'' son dos espacios vectoriales con sendas métricas T'_2 y T''_2 entonces podemos definir en $E = E' \oplus E''$ la métrica

$$T_2(e' + e'', v' + v'') := T'_2(e', v') + T''_2(e'', v'')$$

Obviamente, E es la suma ortogonal de E' y E''.

8. Definición: Se denomina radical de T_2, que denotaremos $\operatorname{Rad} T_2$, al núcleo de la polaridad T_2, es decir,

$$\operatorname{Rad} T_2 := \{e \in E \mid T_2(e,e') = 0 \text{ para todo } e' \in E\}.$$

T_2 es no singular si y solo si $\operatorname{Rad} T_2 = 0$.

La restricción de T_2 a $\operatorname{Rad} T_2$ es la métrica nula.

En general, si $E = E' \perp E''$ entonces $\operatorname{Rad} T_2 = \operatorname{Rad} T_{2|E'} \oplus \operatorname{Rad} T_{2|E''}$.

9. Definición: Se dice que T_2 es una métrica simétrica si $T_2(e,e') = T_2(e',e)$, para todo $e,e' \in E$. Se dice que T_2 es una métrica hemisimétrica si $T_2(e,e') = -T_2(e',e)$, para todo $e,e' \in E$.

Si T_2 es simétrica entonces $\lambda_{ij} = T_2(e_i,e_j) = T_2(e_j,e_i) = \lambda_{ji}$. Recíprocamente, si $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, para todo i,j, entonces $T_2(e,e') = T_2(e',e)$ para todo $e,e' \in E$. Es decir, T_2 es simétrica si y solo si la polaridad T_2 coincide con su morfismo transpuesto T_2^*. Si T_2 es hemisimétrica entonces $\lambda_{ij} = T_2(e_i,e_j) = -T_2(e_j,e_i) = -\lambda_{ji}$. Recíprocamente, si $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$, para todo i,j, entonces $T_2(e,e') = -T_2(e',e)$ para todo $e,e' \in E$. Es decir, T_2

es hemisimétrica si y solo si la polaridad T_2 coincide con su morfismo transpuesto T_2^*, multiplicado por -1.

Si T_2 es simétrica o hemisimétrica entonces

$$\operatorname{Rad} T_2 = \{e \in E \mid T_2(e,e') = 0 \text{ para todo } e' \in E\} = \{e \in E \mid T_2(e',e) = 0 \text{ para todo } e' \in E\}$$

e induce sobre $E/\operatorname{Rad} T_2$ la métrica $\bar{T}_2$ definida por $\bar{T}_2(\bar{e},\bar{e}') := T_2(e,e')$. Además, $\bar{T}_2$ es no singular porque si $\bar{T}_2(\bar{e},\bar{e}') = 0$ para todo $\bar{e}'$, entonces $T_2(e,e') = 0$ para todo e', luego $e \in \operatorname{Rad} T_2$ y $\bar{e} = 0$. Si E' es un suplementario de $\operatorname{Rad} T_2$, entonces el morfismo

$$(E', T_{2|E'}) \to (E/\operatorname{Rad} T_2, \bar{T}_2),\ e \mapsto \bar{e}$$

es una isometría. Por último,

$$E = \operatorname{Rad} T_2 \perp E' \simeq \operatorname{Rad} T_2 \perp E/\operatorname{Rad} T_2.$$

10. Definición: Sea T_2 una métrica simétrica. Se dice que una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E es ortonormal si $T_2(e_i,e_j) = 0$ si $i \neq j$ y $T_2(e_i,e_i) = \pm 1$.

11. Teorema de Sylvester: *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y T_2 una métrica simétrica no singular en E. Entonces existe una base ortonormal $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E, luego la matriz asociada a T_2 en esta base es*

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Veamos en primer lugar que si $T_2(e,e) = 0$ para todo $e \in E$ entonces $T_2 = 0$: Sean $e,e' \in E$, $0 = T_2(e+e',e+e') = T_2(e,e) + T_2(e,e') + T_2(e',e) + T_2(e,e') = 2T_2(e,e')$, luego $T_2 = 0$.

Sea, pues, $e \in E$ tal que $T_2(e,e) \neq 0$. Sea $E' = \langle e \rangle^{\perp}$. Se tiene que $\langle e \rangle \cap E' = 0$, por tanto, por dimensiones, $E = \langle e \rangle \perp E'$. La restricción de T_2 a E' es no singular, pues $0 = \operatorname{Rad} T_2 = \operatorname{Rad} T_{2|\langle e \rangle} \oplus \operatorname{Rad} T_{2|E'}$. Por inducción sobre la dimensión, existe una base ortonormal $\{e_2,\dots,e_n\}$ en E'. Si consideramos $e_1 = \frac{1}{\sqrt{|T_2(e,e)|}} \cdot e$ tenemos que $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base ortonormal de E.

□

Reordenando la base, podemos suponer en el teorema anterior que

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \overset{p}{\ddots} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \overset{q}{\ddots} & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos que el número p no depende de la base escogida: para todo $e \in E' = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$, no nulo, se tiene que $T_2(e,e) > 0$; del mismo modo para todo $e \in E'' = \langle e_{p+1}, \dots e_n \rangle$ no nulo se cumple que $T_2(e,e) < 0$. Supongamos que existe un subespacio vectorial V tal que para todo $v \in V$ no nulo $T_2(v,v) > 0$. Obviamente $V \cap E'' = 0$, luego $\dim V \le \dim E - \dim E'' = \dim E' = p$. En conclusión, p es la dimensión máxima de los subespacios $E' \subset E$, tales que $T_2(e', e') > 0$, para todo $e' \in E'$. Se dice que T_2 tiene signatura (p,q).

Si $2 \neq 0$ en k y T_2 es hemisimétrica, entonces $T_2(e,e) = 0$ para todo $e \in E$, ya que $T_2(e,e) = -T_2(e,e)$.

12. Teorema : *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y T_2 una métrica hemisimétrica en E. Entonces,* $\dim E - \dim \operatorname{rad} T_2$ *es un número par. Si T_2 es no singular (luego* $\dim E$ *es par), entonces existe una base $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ tal que $T_2(e_i, e_j) = 0$ para todo i, j, salvo $i = 2r-1$ y $j = 2r$ (para todo r) en los que $T_2(e_{2r-1}, e_{2r}) = 1$.*

Demostración. Sea E' un suplementario de $\operatorname{Rad} T_2$. Entonces, $E = \operatorname{Rad} T_2 \perp E'$ y T_2 restringido a E' es no singular. Podemos suponer que $E = E'$ y que T_2 es no singular. Dado $e_1 \in E$ no nulo, sea $e' \in E$ no nulo tal que $T_2(e, e') \neq 0$, que existe porque $\dim \langle e \rangle^\perp = \dim E - 1$. Sea $e_2 := \frac{e'}{T_2(e,e')}$. La dimensión del subespacio vectorial $\langle e_1, e_2 \rangle$ es dos, porque si $e_2 = \lambda e_1$ entonces $T_2(e_1, \lambda e_1) = 0$ y se tiene que $T_2(e_1, e_2) = 1$. Además, la restricción de T_2 a $\langle e_1, e_2 \rangle$ es no singular. El subespacio $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp$ es ortogonal a $\langle e_1, e_2 \rangle$ y $\langle e_1, e_2 \rangle \cap \langle e_1, e_2 \rangle^\perp = 0$. Por dimensiones, $E = \langle e_1, e_2 \rangle \perp \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$. La restricción de T_2 a $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp$ es no singular, luego es fácil concluir el teorema procediendo por inducción sobre la dimensión. □

1.11.1. Espacio vectorial euclídeo

Comencemos con la definición de producto escalar y la definición de espacio vectorial euclídeo.

13. Definiciones: Un producto escalar en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E es una aplicación bilineal simétrica T_2 tal que $T_2(e,e) > 0$ para todo vector no nulo $e \in E$. Denotaremos $T_2(e,v) = e \cdot v$ ó $\langle e | v \rangle$.

Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E con un producto escalar $\cdot$ se dice que es un **espacio vectorial euclídeo**, también diremos "$(E, \cdot)$ es un espacio vectorial euclídeo".

14. Ejemplos: 1. El producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$ es

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

2. El producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$ es

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

3. El producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ es

$$(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) := x_1y_1+\dots+x_ny_n.$$

4. Un producto escalar en el espacio vectorial $C([0,1],\mathbb{R}) = \{f\colon [0,1]\to\mathbb{R}, \text{ continuas}\}$ es

$$\langle f|g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. Ejercicio: Calcula en el ejemplo segundo anterior $(1,2,3)\cdot(1,-1,-2)$. Calcula en el ejemplo cuarto anterior $\langle x|x^2+1\rangle$.

Si $(E,\cdot)$ es un espacio vectorial euclídeo y $W\subseteq E$ es un subespacio vectorial, entonces en particular tenemos en W un producto escalar, luego W es de modo natural un espacio vectorial euclídeo.

16. Definición: El **módulo** de un vector $e\in E$ es el número real $\|e\| := +\sqrt{e\cdot e}$.

Observemos que $\|e\|^2 = e\cdot e$.

17. Proposición: *Se cumple que* $\|\lambda\cdot e\| = |\lambda|\cdot\|e\|$.

Demostración. En efecto,

$$\|\lambda\cdot e\| = \sqrt{(\lambda e)\cdot(\lambda e)} = \sqrt{\lambda^2(e\cdot e)} = |\lambda|\cdot\|e\|.$$

□

Por tanto, $\frac{e}{\|e\|}$ (con $e\neq 0$) es un vector de módulo 1.

18. Teorema de Pitágoras: *Sea* $(E,\cdot)$ *un espacio euclídeo y* $e,v\in E$*. Entonces,*

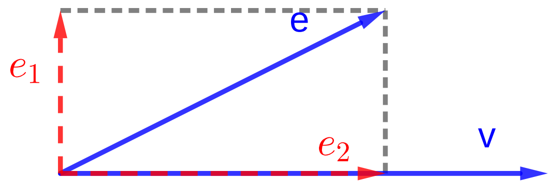
$$e\cdot v = 0 \iff \|e+v\|^2 = \|e\|^2+\|v\|^2.$$

Demostración. Como $\|e+v\|^2 = (e+v)\cdot(e+v) = e\cdot e+v\cdot v+2(e\cdot v) = \|e\|^2+\|v\|^2+2(e\cdot v)$, es fácil concluir el teorema. □

19. Definición: Diremos que dos vectores $e,v\in E$ son ortogonales cuando $e\cdot v = 0$.

20. Ejercicio: Calcula un vector de $\mathbb{R}^2$ ortogonal a $(1,2)$.

21. Proyección ortogonal de un vector e sobre $\langle v\rangle$: Suponemos que $v\neq 0$ y queremos expresar $e = e_1+e_2$ de modo que e_1 sea ortogonal a v y $e_2 = \lambda\cdot v$, para cierto $\lambda\in\mathbb{R}$. Diremos que e_2 es la proyección ortogonal de e sobre la recta $\langle v\rangle$.



Calculemos e_2 o equivalentemente λ:

$$e \cdot v = (e_1 + \lambda \cdot v) \cdot v = e_1 \cdot v + \lambda(v \cdot v) = \lambda(v \cdot v).$$

Por tanto, $\lambda = \frac{e \cdot v}{v \cdot v}$ y $e_2 = \frac{e \cdot v}{v \cdot v} \cdot v$. Si definimos $e_1 := e - \frac{e \cdot v}{v \cdot v} \cdot v$, tenemos que $e_1 \cdot v = 0$ y

$$e = e_1 + e_2.$$

22. Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|e \cdot v| \leq \|e\| \cdot \|v\|$.

Demostración. Escribamos $e = e_1 + \lambda \cdot v$, con $e_1 \cdot v = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&|e \cdot v| = |(e_1 + \lambda \cdot v) \cdot v| = |\lambda(v \cdot v)| = |\lambda| \cdot \|v\|^2 \\
&\|e\| \cdot \|v\| = \sqrt{(e_1 + \lambda \cdot v) \cdot (e_1 + \lambda \cdot v)} \cdot \|v\| = \sqrt{e_1^2 + \lambda^2 (v \cdot v)} \cdot \|v\| \geq \sqrt{\lambda^2 (v \cdot v)} \cdot \|v\| \\
&\qquad = |\lambda| \cdot \|v\|^2 = |e \cdot v|.
\end{aligned}$$

□

23. Desigualdad triangular: $\|e + v\| \leq \|e\| + \|v\|$.

Demostración. Basta probar que $\|e + v\|^2 \leq (\|e\| + \|v\|)^2$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\|e + v\|^2 &= (e + v) \cdot (e + v) = e \cdot e + v \cdot v + 2 \cdot e \cdot v = \|e\|^2 + \|v\|^2 + 2 \cdot e \cdot v \\
&\leq \|e\|^2 + \|v\|^2 + 2\|e\|\|v\| = (\|e\| + \|v\|)^2.
\end{aligned}$$

□

24. Definición: La **distancia** entre dos puntos $p, q \in E$ es $d(p,q) := \|q - p\|$.

25. Ejemplo: Calculemos la distancia entre $(1,2,3)$ y $(1,1,1)$:

$$d((1,2,3),(1,1,1)) = \|(1,1,1) - (1,2,3)\| = \|(0,-1,-2)\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Observemos que $d(p,q) = \|q - p\| = \|p - q\| = d(q,p)$.
Por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(p,q) + d(q,r) = \|q - p\| + \|r - q\| \geq \|r - p\| = d(p,r).$$

26. Ejercicio: La configuración espacial del ion hexaacuocobre $Cu(H_2O)_6$ es la de un octaedro regular de vértices las moléculas de agua y centro el átomo de cobre. Si la longitud de los enlaces $Cu - OH_2$ es 167 pm (pm= $10^{-12}\,m$), calcula la distancia entre los átomos de oxígeno de dos moléculas de agua adyacentes.

27. Definición: Cuando $e, v \neq 0$ tenemos que $-1 \leq \frac{e \cdot v}{\|e\| \cdot \|v\|} \leq 1$, y diremos que el **coseno** del ángulo α que forman e y v es

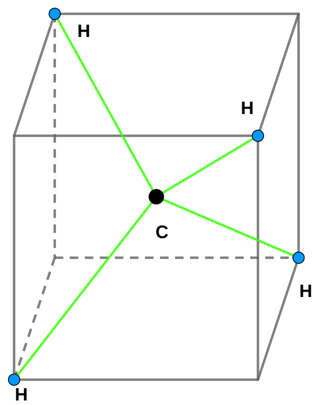
$$\cos\alpha := \frac{e \cdot v}{\|e\| \cdot \|v\|},$$

de modo que (la medida en radianes de) el ángulo α está bien definido entre 0 y π, y $\alpha = \frac{\pi}{2}$ justo cuando $e \cdot v = 0$.

El ángulo que forman 3 puntos distintos a, b, c se define como el ángulo que forman los vectores $\vec{ba} := a - b$ y $\vec{bc} := c - b$.

28. Ejercicio: Sean e y v dos vectores de módulo 1 y α el ángulo que forman. Prueba que la proyección ortogonal de e en v es igual a $(\cos\alpha) \cdot v$.

29. Ejercicio: La molécula de metano CH_4 tiene la siguiente configuración espacial: El átomo de carbono está situado en el centro de un cubo y los átomos de hidrógeno están localizados alternativamente en los vértices del cubo. Puede pensarse también, que los átomos de hidrógeno son los vértices de un tetraedro de centro el átomo de carbono. Calcula el ángulo que forman H, C, H.



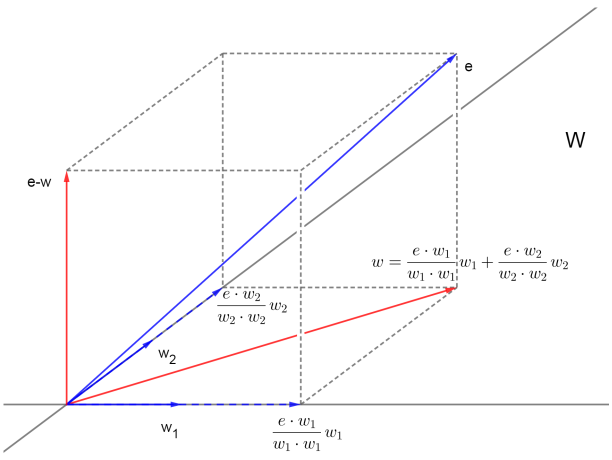
30. Definición: Sea $(E, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y $W \subseteq V$ un subespacio. Diremos que $e \in E$ es ortogonal a W, si $e \cdot w = 0$ para todo $w \in W$.

31. Ejercicio: Calcula un vector de $\mathbb{R}^3$ perpendicular al plano $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$ (el plano $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ formado por los $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$.)

32. Proyección ortogonal sobre un subespacio: Sea $(E, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y $W \subseteq E$ un subespacio. Sea $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base ortogonal de W y $e \in E$ un vector. Diremos que

$$w = \frac{e \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \cdots + \frac{e \cdot w_n}{w_n \cdot w_n} w_n.$$

es la proyección ortogonal de e sobre W.



Observemos que $(e-w)\cdot w_i = 0$, para todo i, luego $e-w$ es ortogonal a W. Por último, w es el vector de W más cercano a e: Dado $w' \in W$, sea $w'' = w' - w \in W$. Entonces, $w' = w + w''$ y

$$d(e,w')^2 = \|e-w'\|^2 = \|(e-w)+(-w'')\|^2$$
$$= \|e-w\|^2 + \|w''\|^2 = d(e,w)^2 + \|w''\|^2.$$

Luego, $d(e,w') \geq d(e,w)$ y $d(e,w') = d(e,w)$ si y solo si $w'' = 0$, es decir, $w' = w$.

33. Definición: Sea $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo. Dado un subespacio vectorial $L \subseteq E$ se define el ortogonal de L, que denotaremos $L^\perp$, como

$$L^\perp := \{e \in E : e\cdot l = 0, \forall l \in L\}.$$

$L^\perp$ es un subespacio vectorial de E: Dados $v_1, v_2 \in L^\perp$, entonces $(v_1+v_2)\cdot l = v_1\cdot l + v_2\cdot l = 0$, para todo $l \in L$, luego $v_1+v_2 \in L^\perp$. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in L^\perp$, entonces $(\lambda\cdot v)\cdot l = \lambda\cdot(v\cdot l) = 0$ para todo $l \in L$, luego $\lambda\cdot v \in L^\perp$.

34. Propiedades del ortogonal: *Sea $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y $L.L' \subseteq E$ subespacios vectoriales. Entonces,*

1. $E^\perp = \{0\}$ *y* $\{0\}^\perp = E$.
2. *Si* $L \subseteq L'$ *entonces* $L^\perp \supseteq L'^\perp$.
3. $(L^\perp)^\perp = L$.
4. $E = L \oplus L^\perp$ *(*$E = L + L^\perp$ *y* $L \cap L^\perp = \{0\}$*).*
5. $\dim E = \dim L + \dim L^\perp$.
6. $(L+L')^\perp = L^\perp \cap L'^\perp$ *y* $(L\cap L')^\perp = L^\perp + L'^\perp$.

Demostración. 1. Si $e \in E^\perp$ entonces $e\cdot e = 0$, luego $e = 0$ y $E^\perp = 0$. Obviamente, $\{0\}^\perp = E$.

2. Obvio.

3. 4. y 5. Sea $\langle e_1,\dots,e_n\rangle$ una base ortonormal de L. Ampliando esta base, sea $\{e_1,\dots,e_n,e'_1,\dots,e'_m\}$ una base de E. Por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, obtenemos una base ortonormal

$$\{e_1,\dots,e_n,e''_1,\dots,e''_m\}$$

de E. Ahora ya es claro que $L^\perp = \langle e''_1,\dots,e''_m\rangle$ y $(L^\perp)^\perp = \langle e_1,\dots,e_n\rangle = L$.

Además, $E = L \oplus L^\perp$ y tomando dimensiones

$$\dim E = \dim L + \dim L^\perp$$

6. Obviamente, $(L+L')^\perp = L^\perp \cap L'^\perp$. Veamos la otra igualdad. Sea $N = L^\perp$ y $N' = L'^\perp$. Entonces sabemos que $(N+N')^\perp = N^\perp \cap N'^\perp$. Tomando ortogonales, por 3. obtenemos

$$N + N' = (N^\perp \cap N'^\perp)^\perp = (L \cap L')^\perp.$$

Luego, $L^\perp + L'^\perp = (L \cap L')^\perp$.

□

35. Ejemplo: Consideremos el plano Π de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0.$$

Es decir, $\Pi = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que $3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\}$. Sea $v := (3,1,-5)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle v\rangle^\perp &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } v\cdot(x_1,x_2,x_3) = 0\}\\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\} = \Pi.\end{aligned}$$

Por tanto, $\Pi^\perp = (\langle v\rangle^\perp)^\perp = \langle v\rangle = \langle(3,1,-5)\rangle$.

Calculemos la distancia de $p = (1,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ a Π, $d(p,\Pi)$. Se define $d(p,\Pi)$ como la distancia de p al punto de Π más cercano a p, es decir, a la proyección de p sobre Π. Consideremos la proyección de p sobre $\langle v\rangle$,

$$p_1 = \frac{p\cdot v}{v\cdot v}\cdot v = \frac{9}{35}(3,1,-5).$$

Entonces, la proyección de p sobre Π es $p_2 = p - p_1$ y

$$d(p,\Pi_1) = d(p,p_2) = \|p - p_2\| = \|p_1\| = \|\frac{9}{35}(3,1,-5)\| = \frac{9}{35}\sqrt{35} = \frac{9}{\sqrt{35}}.$$

36. Ejemplo: Consideremos ahora la recta R de $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\end{aligned}$$

Es decir, $R = \Pi_1 \cap \Pi_2$, donde Π_1 es el plano $3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$ y Π_2 es el plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Por tanto,

$$R^\perp = (\Pi_1 \cap \Pi_2)^\perp = \Pi_1^\perp + \Pi_2^\perp = \langle(3,1,-5),(1,1,1)\rangle.$$

37. Ejemplo: Dados dos vectores $(3,1,-5),(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$, calculemos $\langle(3,1,-5),(1,1,1)\rangle^\perp$. Observemos que $\langle(3,1,-5),(1,1,1)\rangle$ es el plano de ecuación

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, $\langle(3,1,-5),(1,1,1)\rangle$ es el plano de ecuación $6x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0$. Por lo tanto, $\langle(3,1,-5),(1,1,1)\rangle^\perp = \langle(6,-8,2)\rangle$.

1.11.2. Isometrías. Matrices ortogonales

38. Notación: Supondremos en esta sección que E y E' son espacios vectoriales euclídeos y que $T: E \to E'$ un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal.

39. Definición: Diremos que T es una isometría si "conserva distancias", es decir,

$$d(T(e), T(v)) = d(e, v), \text{ para todo } e, v \in E.$$

40. Ejemplo: Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de E. La aplicación $\mathbb{R}$-lineal $E \to \mathbb{R}^n$, $e \mapsto e_B$ es una isometría.

41. Proposición: *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es una isometría.*
2. *$\|T(e)\| = \|e\|$, para todo $e \in E$.*
3. *"T conserva el producto escalar": $T(e) \cdot T(v) = e \cdot v$, para todo $e, v \in E$.*

Demostración. Observemos que $d(T(e), T(v)) = \|T(e) - T(v)\| = \|T(e - v)\|$ y $d(e, v) = \|e - v\|$. Por tanto, T conserva distancias si y solo si $\|T(w)\| = \|w\|$, para todo $w \in E$, que equivale a decir que $T(w) \cdot T(w) = w \cdot w$.

Si T conserva distancias, entonces como

$$\begin{aligned} T(e+v) \cdot T(e+v) &= (T(e) + T(v)) \cdot (T(e) + T(v)) = T(e) \cdot T(e) + T(v) \cdot T(v) + 2T(e) \cdot T(v) \\ T(e+v) \cdot T(e+v) &= (e+v) \cdot (e+v) = e \cdot e + v \cdot v + 2e \cdot v \end{aligned}$$

entonces, $T(e) \cdot T(v) = e \cdot v$. Recíprocamente, si $T(e) \cdot T(v) = e \cdot v$, para todo $e, v \in E$, entonces $T(w) \cdot T(w) = w \cdot w$, para todo $w \in E$ y T conserva distancias.

□

42. Proposición: *Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de E. T es una isometría si y solo si $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ es una base ortonormal.*

Demostración. $\Rightarrow$) $T(e_i) \cdot T(e_i) = e_i \cdot e_i = 1$, para todo i y $T(e_i) \cdot T(e_j) = e_i \cdot e_j = 0$, para todo $i \neq j$, luego $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ es una base ortonormal.

$\Leftarrow$) Dado $e = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, tenemos que $T(e) = x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n)$ y

$$e \cdot e = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = T(e) \cdot T(e).$$

□

43. Corolario: *Sean $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ y $B'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ bases ortonormales de E y E', repectivamente. Sea A la matriz asociada a T en dichas bases. Entonces, la aplicación lineal T es una isometría $\iff A^tA=\mathrm{Id}$.*

Demostración. La columna i de A es el vector $T(e_i)^{B'}$. $A^tA=\mathrm{Id}$ si y solo si el producto escalar de la fila i de A^t con la columna j de A^t es 0 si $i\neq j$ y es 1 si $i=j$. Es decir, $A^tA=\mathrm{Id}$ si y solo si $T(e_i)_{B'}\cdot T(e_j)_{B'}=0$ si $i\neq j$ y $T(e_i)_{B'}\cdot T(e_j)_{B'}=1$ si $i=j$. Luego, $A^tA=\mathrm{Id}$ si y solo si $\{T(e_1),\dots,T(e_n)\}$ es una base ortonormal. Por la proposición anterior $A^tA=\mathrm{Id}$ si y solo si T es una isometría.

□

44. Nota: Las matrices $A\in M_n(\mathbb{R})$ que cumplen que $A^t\cdot A=\mathrm{Id}$ se las llama matrices ortogonales. Si A es ortogonal, entonces $\det(A)^2=\det(A^tA)=\det(\mathrm{Id})=1$, luego $\det(A)=\pm1$. Por tanto, si $T\colon E\to E$ es una isometría $\det(T)=\pm1$.

45. Ejemplo: Los giros del plano alrededor del origen son isometrías: La matriz de un giro $g_\alpha\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de ángulo α, en la base usual, es

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

g_α es una isometría. Observemos que $\det(g_\alpha)=1$.

46. Ejemplo: Sea $S\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la simetría respecto del eje OX. La matriz de S en la base usual es $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Como $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ entonces S es una isometría. Observemos que $\det(S)=-1$.

47. Ejemplo: Dado un hiperplano $H\subset\mathbb{R}^n$ (que pasa por el origen) sea e un vector perpendicular a H y $\{v_1\dots,v_{n-1}\}$ una base ortonormal de H. La aplicación lineal S definida por $S(e)=-e$ y $S(e_i)=e_i$ para todo i, es una isometría, denominada simetría respecto del hiperplano plano H. Observemos que $S=S^{-1}$. Una isometría que sea la identidad sobre un hiperplano H, pero que no sea igual a $\mathrm{Id}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, es justamente la simetría respecto del hiperplano H.

Toda isometría $T\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es igual a composición de n simetrías o menos respecto de hiperplanos: Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base usual de $\mathbb{R}^n$. Veamos que componiendo con cierta simetría S_1 respecto de un plano (o con $S_1=\mathrm{Id}$) probemos que $S_1\circ T(e_1)=e_1$. Si $T(e_1)=e_1$ no hay nada que probar. Si $T(e_1)=-e_1$, entonces S_1 es la simetría respecto del hiperplano $H=\langle e_1\rangle^\perp$. En los demás casos S es la isometría respecto del hiperplano $H=\langle\frac{e_1+T(e_1)}{2}\rangle\oplus\langle e_1,T(e_1)\rangle^\perp$. Entonces, $(S_1\circ T)(\langle e\rangle^\perp)=\langle e\rangle^\perp$. Por inducción sobre n, existen

$S'_2,\dots,S'_n$ simetrías de $\langle e\rangle^\perp$ tales que $S'_2\circ\cdots\circ S'_n = (S_1\circ T)_{\langle e\rangle^\perp}$. La aplicación lineal S_i tal que $S_i(e_1) = e_1$ y $S_{i,|\langle e\rangle^\perp} = S'_i$ es una simetría. Además, $S_2\circ\cdots S_n = S_1\circ T$ y $T = S_1\circ\cdots\circ S_n$.

48. Definición: Sea $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo Diremos que un endomorfismo lineal $T\colon E\to E$ es autoadjunto si $T(e)\cdot v = e\cdot T(v)$, para todo $e,v\in E$.

49. Proposición: *Sea $(E,\cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base ortonormal de E. Un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal $T\colon E\to E$ es autoadjunto si y solo si la matriz A asociada a T en la base B es simétrica, es decir, $A^t = A$.*

Demostración. Sea $e_B = (x_1,\dots,x_n)$ e $v_B = (y_1,\dots,y_n)$. Entonces, $T(e)\cdot v = e\cdot T(v)$ si y solo si

$$(x_1,\dots,x_n)A^t(y_1,\dots,y_n)^t = (x_1,\dots,x_n)A(y_1,\dots,y_n)^t$$

es decir, $A^t = A$. □

50. Teorema de descomposición espectral: *Sea $(E,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y sea $T\colon E\to E$ un endomorfismo autoadjunto. Entonces, todos los autovalores de T son reales y existe una base ortonormal de E donde T diagonaliza.*

Demostración. Consideremos el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} E$, la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $T_{\mathbb{C}}\colon E_{\mathbb{C}}\to E_{\mathbb{C}}$, $T_{\mathbb{C}}(\lambda\otimes e) := \lambda\otimes T(e)$ y el producto "escalar hermítico $*$" en $E_{\mathbb{C}}$ definido por $(\sum_i \lambda_i\otimes e_i) * (\sum_j \mu_j\otimes e'_j) := \sum_{ij}\lambda_i\bar\mu_j\cdot e_i\cdot e'_j$ (dado $z\in\mathbb{C}$, denotamos su conjugado por $\bar z$).. Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal, dado $v = \sum_i \lambda_i\otimes e_i\in E_{\mathbb{C}}$, tenemos que $v*v = \sum_i |\lambda_i|^2\geq 0$ y es cero si y solo si $v = 0$. Es fácil comprobar que $T_{\mathbb{C}}(v)*v' = v*T_{\mathbb{C}}(v')$, para todo $v,v'\in E_{\mathbb{C}}$.

Sea $\alpha\in\mathbb{C}$ un autovalor de T (es decir, de $T_{\mathbb{C}}$) y $e\in E_{\mathbb{C}}$ un autovector de autovalor α. Entonces,

$$\alpha\cdot(e*e) = T_{\mathbb{C}}(e)*e = e*T_{\mathbb{C}}(e) = e*(\alpha e) = \bar\alpha\cdot(e*e),$$

luego $\alpha = \bar\alpha$, es decir, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Veamos que existe una base ortonormal donde T diagonaliza. Si $\dim_{\mathbb{R}} E = 1$ la afirmación es obvia. Supongamos que la hemos probado para cuando $\dim_{\mathbb{R}} E = 1,\dots,n-1$. Tenemos que probarla cuando $\dim_{\mathbb{R}} E = n$.

Sea $e_1\in E$ un autovector de T, de módulo 1, de autovalor $\alpha\in\mathbb{R}$. Sea $E' = \langle e_1\rangle^\perp$. Observemos que para todo $e'\in E'$ se cumple que $T(e')\in E'$, ya que

$$T(e')\cdot e_1 = e'\cdot T(e_1) = e'\cdot(\alpha e_1) = \bar\alpha(e'\cdot e_1) = 0.$$

$T'\colon E'\to E'$, $T'(e') := T(e')$ es obviamente autoadjunto. Como $\dim_{\mathbb{R}} E' = n-1$ entonces existe una base ortonormal $\{e_2,\dots,e_n\}$ de E' en la que T' diagonaliza. Obviamente, $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ es una base ortonormal de E y T diagonaliza en ella.

□

51. Proposición: *Sea E un espacio vectorial euclídeo y $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base ortonormal de E. Sea $S\colon E \to E$ un endomorfismo lineal. Existen isometrías $P, P'\colon E \to E$ y un endomorfismo lineal $D\colon E \to E$ que diagonaliza en la base B, de modo que $S = P' \circ D \circ P$.*

Demostración. Sea A la matriz del endomorfismo lineal S en la base B y consideremos el endomorfismo lineal $T\colon E \to E$ de matriz A^tA, que es simétrica, en la base B. Por tanto, existe una base ortonormal $B' = \{e'_1,\dots,e'_n\}$ de E en la que $T(e'_i) = \mu_i \cdot e_i$, de modo que $0 \neq \mu_i \in \mathbb{R}$ si $i \leq r$ y $\mu_i = 0$ si $i > r$. Escribamos $e'_i = (x_{i1},\dots,x_{in})$ en la base B. Entonces,

$$S(e'_i)\cdot S(e'_j) = (x_{i1},\dots,x_{in})A^tA(x_{j1},\dots,x_{jn})^t = e'_i \cdot T(e'_j) = e'_i \cdot (\mu_j \cdot e'_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j. \\ \mu_i, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Observemos que $S(e'_i)\cdot S(e'_i) = 0$ si $i > r$, luego $S(e'_i) = 0$ si $i > r$, además $S(e'_1),\dots,S(e'_r)$ son ortogonales entre sí. Sea $B'' = \{v_1 = \frac{S(e'_1)}{\sqrt{\mu_1}},\dots,v_r = \frac{S(e'_r)}{\sqrt{\mu_r}}, v_{r+1},\dots,v_m\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. Entonces, si P es la isometría que aplica la base B' en B, P' la isometría que aplica la base B en B'' y $D\colon E \to E$, está definida por $D(e_i) = \sqrt{\mu_i}\cdot e_i$, entonces $S = P' \circ D \circ P$, porque coinciden sobre la base B'.

□

52. Nota: Recordemos que las isometrías son composición de simetrías, luego S es composición de simetrías y D.

1.11.3. Forma de volumen. Producto vectorial

Toda métrica en E extiende de modo natural a $\Lambda^m E$: Dar una métrica T_2 en E, equivale a definir “la polaridad” $T_2\colon E \to E^*$, $T_2(e)(e') := T_2(e,e')$. La polaridad T_2 define el morfismo, $\Lambda^m T_2\colon \Lambda^m E \to \Lambda^m E^*$, $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \mapsto T_2(e_1) \wedge \cdots \wedge T_2(e_m)$. Ahora bien, $\Lambda^m E^* = (\Lambda^m E)^*$, luego tengo un morfismo $\Lambda^m E \to (\Lambda^m E)^*$, luego una métrica $\Lambda^m T_2$ en $\Lambda^m E$ definida por

$$\begin{aligned}
\Lambda^m T_2(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m, e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m) &= (T_2(e_1) \wedge \cdots \wedge T_2(e_m))(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m) \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} \text{signo}(\sigma)\cdot T_2(e_1)(e'_{\sigma(1)}) \cdots T_2(e_m)(e'_{\sigma(m)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_m} \text{signo}(\sigma)\cdot T_2(e_1, e'_{\sigma(1)}) \cdots T_2(e_m, e'_{\sigma(m)})
\end{aligned}$$

Si T_2 es una métrica simétrica en E, entonces $\Lambda^m T_2$ también es una métrica simétrica, porque $(\Lambda^m T_2)^* = \Lambda^m T_2^* = \Lambda^m T_2$.

53. Definición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial orientado de dimensión n, con una métrica simétrica no singular T_2. Llamaremos coforma de volumen de E, a la única coforma c_n, tal que $\Lambda^n T_2(c_n, c_n) = \pm 1$ y tal que la orientaciónde de E es la que define c_n.

Sea $e_1, \dots, e_n$ una base ortonormal orientada de E. Entonces, $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}\}_{i_1 < \cdots < i_m}$ es una base ortonormal de $\Lambda^m E$. La coforma $c_n = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \Lambda^n E$, es la coforma de volumen de E. Si $w_1, \dots, w_n$ es la base dual de $e_1, \dots, e_n$ entonces la forma de volumen es $\Omega_n = w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$. Recordemos (1.10.30) que si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base y $v_i = \sum_j \mu_{ij} e_j$, entonces

$$\Omega_n(v_1, \dots, v_n) = \Omega_n(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \Omega_n(\det(\mu_{ij}) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \det(\mu_{ij}).$$

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base orientada de E y $T_2 \equiv (\lambda_{ij})$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Lambda^n T_2(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= (T_2(v_1) \wedge \cdots \wedge T_2(v_n))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \\ &= \det(\lambda_{ij}) \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \det(\lambda_{ij}) \end{aligned}$$

Así pues, la coforma de volumen es $\frac{1}{\sqrt{|\det(\lambda_{ij})|}} \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$. Por tanto, la forma de volumen es

$$\Omega_n = \sqrt{|\det(\lambda_{ij})|} \cdot w'_1 \wedge \cdots \wedge w'_n,$$

donde $\{w'_1, \dots, w'_n\}$ es la base dual de $\{v_1, \dots, v_n\}$. Además,

$$\Omega_n(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{|\det(\lambda_{ij})|}.$$

Para los ejercicios que siguen observemos que dado un subespacio vectorial $V \subseteq E$, tomando duales tenemos el morfismo "de restricción" $E^* \to V^*$, $w \mapsto w_{|V}$ $(w_{|V}(v) := w(v)$, para toda $v \in V)$, y los morfismos $\Lambda^i E^* \to \Lambda^i V^*$, $w_1 \wedge \cdots \wedge w_i \mapsto (w_1 \wedge \cdots \wedge w_i)_{|V} := w_{1|V} \wedge \cdots \wedge w_{i|V}$.

54. Ejercicio: Sea E un espacio euclídeo orientado de dimensión n y $E' \subseteq E$ un hiperplano. Sea N un vector normal a E' de módulo 1. Sea Ω_E la forma de volumen de E.

1. Probar que $i_N \Omega_E$ restringida a E' es igual a la forma de volumen $\Omega_{E'}$ de E' que lo orienta, de modo que si $e_2, \dots, e_n$ es una base positivamente orientada de E' entonces $N, e_2, \dots, e_n$ es una base positivamente orientada de E.

2. Dado $e \in E$, $(i_e \Omega_E)_{|E'} = T_2(e, N) \cdot \Omega_{E'}$.

55. Ejercicio: Sea (E, T_2) un espacio vectorial euclídeo y $R \subset E$ un subespacio vectorial de dimensión 1. Sea r un vector de R de módulo 1 que oriente a R y sea w_R la forma de "longitud" de R. Dado $e \in E$ probar que $(i_e T_2)_{|R} = T_2(e, r) \cdot w_R$.

56. Definición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial orientado de dimensión 3, con una métrica simétrica no singular T_2 y forma de volumen Ω_E. Dados dos vectores $v_1, v_2 \in E$, llamamos producto vectorial de v_1 por v_2, que denotamos por $v_1 \times v_2$, al determinado por

$$T_2(v_1 \times v_2, e) = \Omega_E(v_1, v_2, e), \quad \forall\, e \in E.$$

Observemos que $v_1 \times v_2$ es ortogonal a v_1 y v_2. El producto vectorial, $\times$, es multilineal hemisimétrico.

Si e_1, e_2, e_3 es una base ortonormal orientada de E y en esta base $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ y $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$, entonces se puede comprobar que

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

57. Proposición: *Sea (E, T_2) es un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión 3. Sean $v_1, v_2 \in E$ dos vectores linealmente indedependientes. Entonces, $v_1 \times v_2$ es el vector ortogonal a v_1 y v_2, de modo que $v_1, v_2, v_1 \times v_2$ están positivamente orientados, y $||v_1 \times v_2||$ es igual al área del paralelogramo de vectores con vertices en el origen v_1 y v_2.*

Demostración. La base de vectores $v_1, v_2, v_1 \times v_2$ está positivamente orientada porque $\Omega_3(v_1, v_2, v_1 \times v_2) = T_2(v_1 \times v_2, v_1 \times v_2) > 0$.

Sea $V = \langle v_1, v_2 \rangle$. La forma de área de V es $\Omega_V = i_{\frac{v_1 \times v_2}{||v_1 \times v_2||}} \Omega_E$ y

$$\begin{aligned} \Omega_V(v_1, v_2) &= i_{\frac{v_1 \times v_2}{||v_1 \times v_2||}} \Omega_E(v_1, v_2) = \Omega_E\Big(\frac{v_1 \times v_2}{||v_1 \times v_2||}, v_1, v_2\Big) = \frac{1}{||v_1 \times v_2||} \cdot \Omega_E(v_1, v_2, v_1 \times v_2) \\ &= \frac{1}{||v_1 \times v_2||} \cdot T_2(v_1 \times v_2, v_1 \times v_2) = ||v_1 \times v_2||. \end{aligned}$$

□

1.11.4. Relatividad Especial

Hipótesis del espacio-tiempo newtoniano

Un espacio-tiempo newtoniano es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4, junto con una métrica T_2 de signatura $(1,0)$, denominada métrica del tiempo, junto con un producto escalar en $E' := \mathrm{Rad}(T_2)$.

Sea $v \in E$ tal que $T_2(v, v) = 1$. Consideremos la aplicación

$$t\colon E \to \mathbb{R},\ t(p) := T_2(p, v),$$

que no depende de la elección de v (salvo la multiplicación por -1, porque $T_2(v',v')=1$ si y solo si $v' \in \pm v + \operatorname{Rad} T_2$[2]), que llamaremos la función tiempo. Dado $p \in E$, se dice que $p+E'$ es el espacio simultáneo a p, porque

$$\{q \in E : t(q) = t(p)\} = p + \langle v \rangle^{\perp} = p + E'.$$

Obsérvese que el tiempo t y el espacio E' son datos absolutos del espacio-tiempo newtoniano.

Diremos que un observador (o móvil) es una aplicación diferenciable $\sigma\colon \mathbb{R} \to E$, tal que $T_2(\sigma'(t),v)=1$[3] (es decir, $t(\sigma(s)) = s + cte.$). Diremos que las rectas $\{e + t\cdot e',\, \forall t \in \mathbb{R}\}$ (con $T_2(e',v)=1$), son observadores inerciales.

Un sistema de referencia inercial (en el origen) es una base e_0,e_1,e_2,e_3 de E tal que $T_2(e_0,v)=1$[4] y e_1,e_2,e_3 es una base ortonormal de E'. Es decir, es dar un observador inercial $\{t\cdot e_0,\, \forall t \in \mathbb{R}\}$ (con $T_2(e_0,e_0)=1$) y una base ortonormal en E'. Si (t,x_1,x_2,x_3) son las coordenadas de $e \in E$ en el sistema de referencia inercial, entonces $t(e) = T_2(e,e_0) = t$ y se dice que (x_1,x_2,x_3) son las coordenadas espaciales de e en el sistema de referencia inercial. Dado un observador $\gamma\colon \mathbb{R} \to E$, tendremos que $\gamma(t) = (t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ y diremos que $(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$ es el vector (espacial) de velocidad de γ medido por el observador inercial, cuyo módulo respecto de la métrica espacial es $\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2}$. Es fácil comprobar que la longitud del arco de curva γ entre $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, medido por T_2, es $\int_a^b \sqrt{T_2(\gamma'(t),\gamma'(t))}\cdot dt = \int_a^b 1\cdot dt = b-a$.

Hipótesis del espacio-tiempo de la relatividad especial

El espacio-tiempo de la relatividad especial es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión 4 junto con una métrica simétrica no singular T_2 de signatura $(1,3)$, métrica que denominaremos métrica del tiempo.

Nos falta orientar el tiempo. Necesitamos probar antes el siguiente lema.

Definición : Diremos que $e \in E$ es un vector tipo tiempo si $T_2(e,e) > 0$.

Lema : Sean $v_1, v_2, v_3 \in E$ vectores tipo tiempo y supongamos que $T_2(v_1,v_2) > 0$. Entonces, $T_2(v_1,v_3) > 0 \iff T_2(v_2,v_3) > 0$.

Demostración. Por simetría, solo tenemos que probar la implicación directa. Dividiendo v_i por $\sqrt{T_2(v_i,v_i)}$, podemos suponer que $T_2(v_i,v_i)=1$, para todo i. Sea $E' = \langle e_1 \rangle^{\perp}$. Entonces, E' con la métrica $\cdot = -T_2$ es un espacio euclídeo. Escribamos $v_2 = \lambda v_1 + v_2'$ y $v_3 = \mu v_1 + v_3'$ (donde $\lambda, \mu > 0$ y $v_2', v_3' \in E'$). Entonces, $1 = T_2(v_2,v_2) = \lambda^2 - v_2' \cdot v_2'$ y $1 = T_2(v_3,v_3) = \mu^2 - v_3'\cdot v_3'$. Luego

---

[2] Añadamos esta hipótesis: el tiempo está orientado, hemos escogido $\bar{v}$ que es uno de los dos vectores de módulo uno de $E/\operatorname{Rad} T_2$. Diremos que $e \in E$ está positivamente orientado si $T_2(e,v) > 0$.

[3] O equivalentemente $T_2(\sigma'(t),\sigma'(t)) = 1$ y $\sigma'(t)$ está positivamente orientado

[4] O equivalentemente, $T_2(e_0,e_0)=1$ y e_0 está positivamente orientado.

$$T_2(v_2,v_3)=\lambda\mu-v_2'\cdot v_3' > \sqrt{\lambda^2-1}\cdot\sqrt{\mu^2-1}-v_2'\cdot v_3' = \sqrt{v_2'\cdot v_2'}\cdot\sqrt{v_3'\cdot v_3'}-v_2'\cdot v_3' \geq 0.$$

□

Definición: Fijemos un vector tiempo v (o cualquier otro v' tal que $T_2(v,v')>0$). Diremos que un vector de tipo tiempo w está positivamente orientado si $T_2(v,w)>0$.

Un observador es una aplicación diferenciable $\sigma\colon [a,b]\to E$, tal que $T_2(\sigma'(t),\sigma'(t))>0$, para todo t (reparametrizando, podemos suponer que $T_2(\sigma'(t),\sigma'(t))=1$ y que $\sigma'(t)$ está positivamente orientado). Por sencillez, como estamos en Álgebra Lineal, las curvas estarán formadas por segmentos. Diremos que la longitud del arco de la curva σ entre dos puntos, medida con la métrica del tiempo, es el tiempo absoluto transcurrido a lo largo del arco de curva. Las rectas $e+\mathbb{R}\cdot e'$ (con $T_2(e',e')=1$ y $T_2(v,e')>0$) diremos que son observadores inerciales. Consideremos un punto p en la curva σ y sea v_0 el vector tangente a la curva en p (con $T_2(v_0,v_0)=1$ y v_0 positivamente orientado). Consideremos el observador inercial $p+\mathbb{R}\cdot v_0$. El observador inercial tiene un modo particular de medir el tiempo

$$t_{v_0}\colon E\to\mathbb{R},\ t_{v_0}(e'):=T_2(e',v_0).$$

Diremos que $p+\langle v_0\rangle^\perp$ es el espacio simultáneo a p, para el observador inercial y para el observador σ (pues consideramos que cerca de p las observaciones de σ y el observador inercial son muy parecidas, luego en p ambos observan el mismo espacio simultáneo). Se cumple que $\langle v_0\rangle^\perp$ con la métrica $-c^2T_2$ es un espacio euclídeo, La métrica $-c^2T_2$ se llama métrica espacial porque (restringida a $\langle v_0\rangle^\perp$ mide los conceptos espaciales (distancias, ángulos, etc.). Sea q otro punto de la curva σ y v_1 un vector tangente a σ en q. Si $p'\in p+\langle v_0\rangle^\perp$ y $q'\in q+\langle v_1\rangle^\perp$, son puntos de la curva σ, entonces el observador σ dirá que la distancia temporal entre p' y q' es igual a la longitud del arco de curva de σ entre p y q.

Observemos que no hay noción absoluta de espacio . Observemos que hay un tiempo absoluto: T_2, por otra parte cada observador mide el tiempo de un modo particular o relativo.

58. Sistema de referencia inercial: Llamaremos sistema de referencia inercial (en el origen) a una base ortogonal e_0,e_1,e_2,e_3 tal que $T_2(e_0,e_0)=1$, $T_2(e_0,v)>0$ y $T_2(e_i,e_i)=\frac{-1}{c^2}$, para todo $i>0$. Es decir, es dar un observador inercial $\{t\cdot e_0\}$ (con $T_2(e_0,e_0)=1$ y $T_2(v,e_0)>0$) y una base ortonormal en $\langle e_0\rangle^\perp$ (que es euclídeo con la métrica $S_2=-c^2T_2$). Si (t,x_1,x_2,x_3) son las coordenadas de un vector e en un sistema de referencia inercial entonces $T_2(e,e)=t^2-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{c^2}$. Diremos que las trayectorias de los rayos de luz son las rectas $p+\mathbb{R}\cdot e$, con e isótropo ($T_2(e,e)=0$). El conjunto de los rayos de luz que salen del origen es el cono $t^2-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{c^2}=0$. Si $e=(t,x_1,x_2,x_3)$ entonces se dice que $t=T_2(v,e)$ y $(0,x_1,x_2,x_3)=e-T_2(e,v)\cdot v\in\langle v\rangle^\perp$ (o abreviadamente (x_1,x_2,x_3)) son el tiempo y posición de e medidos por el observador inercial.

Dada una curva $\gamma\colon [a,b] \to E$ (suponemos $T_2(v,\gamma'(t)) > 0$, para todo t), reparametrizando podemos suponer que $\gamma(t) = (t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Diremos que $(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))$ es el vector (espacial) de velocidad de γ medido por el observador inercial, cuyo módulo respecto de la métrica espacial es $\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2}$.

59. Velocidad máxima: Si γ es un observador entonces

$$\begin{aligned} 0 < T_2(\gamma'(t),\gamma'(t)) &= T_2((1,x_1'(t),x_2'(t),x_3'(t)),(1,x_1'(t),x_2'(t),x_3'(t))) \\ &= 1 - \frac{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2}{c^2}, \end{aligned}$$

luego el módulo de la velocidad de γ medido por el observador inercial es menor que c.

60. Velocidad de la luz: Si $\gamma(t)$ es un rayo de luz entonces

$$\begin{aligned} 0 = T_2(\gamma'(t),\gamma'(t)) &= T_2((1,x_1'(t),x_2'(t),x_3'(t)),(1,x_1'(t),x_2'(t),x_3'(t))) \\ &= 1 - \frac{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2}{c^2}, \end{aligned}$$

luego el módulo de la velocidad del rayo de luz medido por el observador inercial es igual a c.

61. Paradoja de los gemelos: Sean $v_1, v_2, v_3 \in E$ vectores tiempo positivamente orientados, tales que $v_1 = v_2 + v_3$. Entonces,

$$\sqrt{T_2(v_1,v_1)} \geq \sqrt{T_2(v_2,v_2)} + \sqrt{T_2(v_3,v_3)}$$

y se da la igualdad si y solo si $v_2 \in \langle v_1 \rangle$. En efecto, $E = \langle v_1 \rangle \perp E'$, donde $T_2(e',e') < 0$, para todo $e' \in E'$ no nulo. Entonces, $v_2 = \lambda v_1 + e'$ y $v_2 = \mu v_1 - e'$, donde $e' \in E'$ no nulo, $\lambda \cdot \mu > 0$ y $\lambda + \mu = 1$ (luego, $|\lambda| + |\mu| = 1$). Entonces,

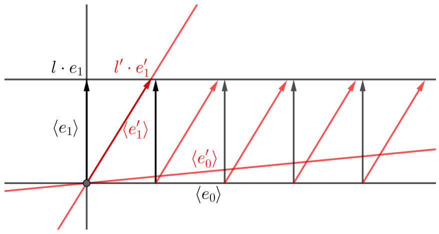
$$\begin{aligned} \sqrt{T_2(v_2,v_2)} + \sqrt{T_2(v_3,v_3)} &\leq \sqrt{T_2(\lambda v_1, \lambda v_1)} + \sqrt{T_2(\mu v_1, v_1)} \\ &= (|\lambda| + |\mu|) \cdot \sqrt{T_2(v_1,v_1)} = \sqrt{T_2(v_1,v_1)}. \end{aligned}$$

y se da la igualdad si y solo si $v_2 \in \langle v_1 \rangle$. Sean $v_1, \ldots, v_n \in E$ vectores tiempo positivamente orientados, tales que $v_1 = v_2 + \cdots + v_n$. Puede probarse inductivamente que

$$\sqrt{T_2(v_1,v_1)} \geq \sum_{i=2}^{n} \sqrt{T_2(v_i,v_i)}$$

y se da la igualdad si y solo si $v_i \in \langle v_1 \rangle$, para todo i.

Como consecuencia el camino (poligonal) más largo que une dos puntos p y q (con $T_2(p-q, p-q) > 0$), recorrido por un observador, es la línea recta. Es decir, un observador que coincide en p y q con un observador inercial, dirá que el tiempo que ha transcurrido (en su viaje) es menor que el tiempo que dice el observador inercial que ha trancurrido (en su viaje). Además un observador no puede viajar al pasado, porque tendríamos un camino en E que une un punto consigo mismo, de longitud (temporal) menor que cero.



62. Contracción de longitudes: Consideremos una varilla de longitud l, en reposo en un sistema de referencia inercial e_0, e_1, e_2, e_3, y calculemos su longitud l' para un observador inercial que se mueve con velocidad v en la dirección de la varilla (digamos e_1). Consideremos el sistema de referencia inercial

$$e_0' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \cdot (e_0 + v \cdot e_1),\ e_1' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \cdot (\frac{v}{c^2} \cdot e_0 + e_1),\ e_2' = e_2,\ e_3' = e_3.$$

El extremo (superior) de la varilla sigue la recta $le_1 + \langle e_0 \rangle$ (y el extremo inferior la recta $\langle e_0 \rangle$). El punto de corte de $le_1 + \langle e_0 \rangle$ con $\langle e_0' \rangle^\perp$ es $l'e_1'$. Entonces, $l'e_1' = le_1 + \lambda e_0$, donde

$$0 = T_2(le_1 + \lambda e_0, e_0 + ve_1) = \lambda - \frac{lv}{c^2}.$$

Luego, $\lambda = \frac{lv}{c^2}$ y

$$\begin{aligned} l' &= -c^2 T_2(l'e_1', e_1') = -c^2 T_2(le_1 + \lambda e_0, \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \cdot (\frac{v}{c^2} \cdot e_0 + e_1)) \\ &= \frac{l}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - \frac{\lambda v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = l\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}. \end{aligned}$$

1.12. Apéndice

1.12.1. Cambio de cuerpo base

En la definición de producto tensorial hemos supuesto que k es un cuerpo, pero puede suponerse que k es un anillo. Todas las proposiciones son igualmente válidas, ahora bien, si en alguna proposición decíamos que E es un k-espacio vectorial de dimensión finita, tendremos que decir en cambio que E es un k-módulo libre finito generado.

Dado un morfismo de anillos $A \to B$ y un A-módulo, denotaremos $M_B = M \otimes_A B$.

1. Proposición: *Sea $A \to B$ un morfismo de anillos y M y N dos A-módulos. Se cumple que*

1. $A \otimes_A M = M$.
2. $(M \otimes_A N)_B = M_B \otimes_B N_B$.

Demostración. 1. Los morfismos $A \otimes M \to M$, $a \otimes m \mapsto am$, $M \to A \otimes_A M$, $m \mapsto m \otimes 1$ son inversos entre sí.

2. Los morfismos de B-módulos $(M \otimes_A N)_B \to M_B \otimes_B N_B$, $(m \otimes n) \otimes b \mapsto (m \otimes b) \otimes (n \otimes 1)$ y $M_B \otimes_B N_B \to (M \otimes_A N)_B$, $(m \otimes b) \otimes (n \otimes b') \mapsto (m \otimes n) \otimes bb'$ son inversos entre sí. □

2. Proposición: *Sean $A \to B$ y $B \to C$ morfismos de anillos y M un A-módulo. Entonces, $M_C = (M_B)_C$ (es decir, $M \otimes_A C = (M \otimes_A B) \otimes_B C$).*

3. Proposición: *Sea $A \to B$ un morfismo de anillos y M un A-módulo. Se cumple que*

1. $T^n_A M \otimes_A B = T^n_B M_B$.
2. $\Lambda^n_A M \otimes_A B = \Lambda^n_B M_B$.
3. $S^n_A M \otimes_A B = S^n_B M_B$.

Demostración. Que el lector explicite los morfismos y sus inversos. □

Dado un ideal $I \subset A$ y un A-módulo M se denota por $I \cdot M$ el mínimo submódulo de M que contiene a los elementos $\{i \cdot m\}_{i \in I, m \in M}$, de modo más explícito

$$I \cdot M = \{i_1 \cdot m_1 + \cdots + i_n \cdot m_n;\ \forall\, i_j \in I, m_j \in M, n \in \mathbb{N}\}.$$

4. Proposición: *Sea $I \subset A$ un ideal y M un A-módulo. El morfismo natural*

$$A/I \otimes_A M \to M/I \cdot M,\ \bar{a} \otimes m \mapsto \overline{a \cdot m}$$

es un isomorfismo.

Demostración. El morfismo inverso es la asignación $\bar{m} \mapsto \bar{1} \otimes m$. □

5. Proposición: *Sea $N \subset M$ un A-submódulo y $A \to B$ un morfismo de anillos. Denotemos la imagen del morfismo $N \otimes_A B \to M \otimes_A B$, $n \otimes b \mapsto n \otimes b$, abusando de la notación, por $N \otimes_A B$. Entonces,*

$$(M/N) \otimes_A B = (M \otimes_A B)/(N \otimes_A B).$$

Demostración. Tenemos el morfismo $M/N \otimes_A B \to M \otimes_A B/N \otimes_A B$, $\bar{m} \otimes b \mapsto \overline{m \otimes b}$. El morfismo $M \otimes_A B \to M/N \otimes_A B$, $m \otimes b \mapsto \bar{m} \otimes b$, se anula sobre $N \otimes_A B$, luego factoriza vía el morfismo $M \otimes_A B/N \otimes_A B \to M/N \otimes_A B$, $\overline{m \otimes b} \mapsto \bar{m} \otimes b$. El primer morfismo y este último son inversos entre sí.

□

Sea $S \subset A$ un sistema multiplicativo y M un A-módulo. Definimos la localización de M por el sistema multiplicativo S, que denotaremos por M_S, a

$$M_S := \{\frac{m}{s}, \text{ con } m \in M \text{ y } s \in S \mid \frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \text{ si existen } t, t' \in S \text{ tales que las fracciones } \frac{tm}{ts} \text{ y } \frac{t'm'}{t's'} \text{ tienen el mismo numerador y denominador } \}$$

¿Cómo definimos la suma? $\frac{m}{s}+\frac{b}{t}:=\frac{at+bs}{st}$ ¿Y el producto por elementos de A_S? $\frac{a}{s}\cdot\frac{m}{t}:=\frac{am}{st}$.

Si $N\subset M$ es un A-submódulo, entonces el morfismo natural $N_S\to M_S$, $\frac{n}{s}\mapsto\frac{n}{s}$ es inyectivo, porque si $\frac{n}{s}=0=\frac{0}{1}$ en M_S, existen $t,t'\in S$ tales que $tn=t'\cdot 0$ y $ts=t'1$, luego $\frac{n}{s}=0$ en N_S.

6. Proposición: *Sea $S\subset A$ un sistema multiplicativo y M un A-módulo. El morfismo*

$$M\otimes_A A_S\to M_S,\ m\otimes\frac{a}{s}\mapsto\frac{am}{s}$$

es un isomorfismo de A_S-módulos.

Demostración. El morfismo inverso es la asignación $\frac{m}{s}\mapsto m\otimes\frac{1}{s}$. □

7. Corolario: *Sea $N\subset M$ un A-submódulo y $S\subset A$ un sistema multiplicativo. Entonces, N_S es un A_S-módulo de M_S y*

$$(M/N)_S=M_S/N_S.$$

1.12.2. Módulos proyectivos

8. Lema: *Sea $\pi\colon M\to N$ un epimorfismo de A-módulos. Si $s\colon N\to M$ es una sección de π, es decir, $\pi\circ s=\mathrm{Id}$, entonces $M\simeq\operatorname{Ker}\pi\oplus N$.*

Demostración. El morfismo $N\oplus\operatorname{Ker}\pi\to M$, $(n,n')\mapsto s(n)+n'$ es un isomorfismo: Es inyectiva, porque si $s(n)+n'=0$, aplicando π tenemos que $n=0$ y por tanto $n'=0$. Es epiyectiva, porque dado m, tenemos que $m-s(\pi(m))\in\operatorname{Ker}\pi$ y $m=s(\pi(m))+(m-s(\pi(m)))$. □

9. Definición: Se dice que un A-módulo P es proyectivo si es sumando directo de un A-módulo libre.

10. Proposición: *P es un módulo proyectivo si y solo si todo epimorfismo $M\to P$ tiene sección.*

Demostración. $\Rightarrow$) Tenemos que $P\oplus Q=\oplus_I A$ y dado el epimorfismo $\pi\colon M\to P$ consideremos el epimorfismo $\pi\oplus\mathrm{Id}\colon M\oplus Q\to P\oplus Q$, $\pi\oplus\mathrm{Id}(m.q)=(\pi(m),q)$. Como $P\oplus Q$ es libre, entonces $\pi\oplus\mathrm{Id}$ tiene una sección $s\colon P\oplus Q\to M\oplus Q$, $s(p,q)=(s_1(p,q),q)$. El morfismo $P\to M$, $p\mapsto s_1(p,0)$ es una sección de π.

$\Leftarrow$) Consideremos un sistema generador $\{p_i\}_{i\in I}$ de P. El morfismo $\pi\colon\ \oplus_I A\to P$, $\pi((a_i))=\sum_i a_i\cdot p_i$ es un epimorfismo, luego tiene sección y $\oplus_I A=\operatorname{Ker}\pi\oplus P$. □

Si $M = M' \oplus M''$ y M es un A-módulo finito generado entonces M' es un A-módulo finito generado: Consideremos la inclusión $M'' \hookrightarrow M$, $m'' \mapsto (0, m'')$ y denotemos la imagen de esta inclusión M''. El morfismo $M' \to M/M''$, $m' \mapsto \overline{(m',0)}$ es un isomorfismo. M/M'' es finito generado porque lo es M, entonces M' es finito generado.

11. Proposición: *Sea P es un módulo proyectivo finito generado. Entonces,*

1. *P^* es un módulo proyectivo finito generado.*
2. *El morfismo natural $P \to P^{**}$, $p \mapsto (p)$ (donde $(p)(w) := w(p)$) es isomorfismo.*
3. *El morfismo natural $P^* \otimes_A M \to \operatorname{Hom}_A(P, M)$, $w \otimes m \mapsto (w \otimes m)$ (donde $(w \otimes m)(p) := w(p) \cdot m$) es isomorfismo.*

Demostración. 1. $P \oplus P' = A^n$, entonces $P^* \oplus P'^* = (P \oplus P')^* = (A^n)^* \simeq A^n$.

2. Se deduce del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \oplus P' \arrow[rr, equal] \arrow[d] & & A^n \arrow[d, equal, "1.6.3"] \\ (P \oplus P)^{**} = P^{**} \oplus P'^{**} \arrow[rr, equal] & & (A^n)^{**} \end{tikzcd}$$

3. Se deduce de las igualdades

$$\begin{aligned}(P^* \otimes M) \oplus (P'^* \otimes M) = (P \oplus P')^* \otimes M = (A^n)^* \otimes M &\overset{1.7.7}{=} \operatorname{Hom}_A(A^n, M) \\ &= \operatorname{Hom}_A(P, M) \oplus \operatorname{Hom}_A(P', M).\end{aligned}$$

□

12. Proposición: *Sean P y Q módulos proyectivos. Entonces, $P \otimes Q$, $\Lambda^r P$ y $S^r P$ son proyectivos. Si P y Q son además finito generados, entonces $(P \otimes Q)^* = P^* \otimes Q^*$, $(\Lambda^r P)^* = \Lambda^r P^*$ y $(S^r P)^* = S^r P^*$.*

Demostración. Tenemos $P \oplus P' = \oplus_I A$, $Q \oplus Q' = \oplus_J A$. Entonces

$$\oplus_{I \times J} A = \oplus_I A \otimes_A \oplus_J A = (P \oplus P') \otimes_A (Q \oplus Q') = (P \otimes Q) \oplus (P \otimes Q') \oplus (P' \otimes Q) \oplus (P' \otimes Q'),$$

luego $P \otimes P'$ es proyectivo

Obsérvese que si la composición de dos morfismos de A-módulos $P \xrightarrow{s} \oplus_I A \xrightarrow{\pi} P$ es el morfismo identidad, entonces la composición $\Lambda^r P \to \Lambda^r \oplus_I A \to \Lambda^r P$ es la identidad.

Igualmente, si P es proyectivo entonces $S^r P$ es proyectivo.

Consideremos una morfismo $i\colon P \hookrightarrow A^n$, con una sección $s\colon A^n \to P$. Tomando duales tenemos los morfismo $i^*\colon (A^n)^* \to P^*$ y $s^*\colon P^* \to (A^n)^*$ y $i^* \circ s^* = (s \circ i)^* = \mathrm{Id}$. Los diagramas

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n A^* \arrow[r, equal, "1.8.10"] \arrow[d, "\Lambda^n i^*"'] & (\Lambda^n A)^* \arrow[d, "\Lambda^n i^*"] \\ \Lambda^n P^* \arrow[r] & (\Lambda^n P)^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Lambda^n A^* \arrow[r, equal, "1.8.10"] & (\Lambda^n A)^* \\ \Lambda^n P^* \arrow[r] \arrow[u, "\Lambda^n s^*"] & (\Lambda^n P)^* \arrow[u, "\Lambda^n s^*"'] \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Como $\Lambda^n i^* \circ \Lambda^n s^* = \mathrm{Id}$, tenemos que $\Lambda^n i^*$ es epiyectivo y $\Lambda^n s^*$ es inyectivo. Por el primer diagrama el morfismo $\Lambda^n P^* \to \Lambda^n P^*$ es epiyectivo, por el segundo es inyectivo.

□

13. Proposición: *Sea $A \to B$ un morfismo de anillos. Si P es un A-módulo proyectivo entonces P_B es un B-módulo proyectivo.*

Si P es un A-módulo finito generado proyectivo, entonces $(P^*)_B = (P_B)^*$ (denoto $(P_B)^* = \mathrm{Hom}_B(P_B, B)$).

Demostración. Tenemos que $P \oplus P' = \oplus_I A$, entonces $P_B \oplus P'_B = (P \oplus P')_B = (\oplus_I A)_B = \oplus_I B$ y P_B es un B-módulo proyectivo.

Sea Q tal que $P \oplus Q = A^n$. Es fácil probar que $((A^n)_B)^* = B^n = ((A^n)^*)_B$. Del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (P^*)_B \oplus (Q^*)_B = (P^* \oplus Q^*)_B & = & ((A^n)^*)_B \\ \downarrow & & \| \\ (P_B)^* \oplus (Q_B)^* = (P_B \oplus Q_B)^* & = & ((A^n)_B)^* \end{array}$$

se deduce que $(P^*)_B = (P_B)^*$.

□

1.13. Problemas

1. Calcular las ecuaciones de las cónicas (no singulares) con foco en el origen, en coordenadas polares.

   Solución: Sea $F = (0,0)$ un foco de la cónica. Existe una recta L (una directriz de la cónica) y un número $e > 0$ (excentricidad de la cónica), tal que la cónica es el conjunto de de los puntos (x, y) tales que

   $$e = \frac{||(x,y)||}{d((x,y),L)}$$

   Girando un ángulo α (es decir, estoy haciendo el cambio de variable $\theta' = \theta + \alpha$) podemos suponer que la directriz es la recta $y = a$ (con $a > 0$). Entonces,

   $$\pm e = \frac{||(x,y)||}{y-a} = \frac{\rho}{\rho \operatorname{sen} \theta' - a}$$

   es decir,
   $$\rho = \frac{ae}{\pm 1 + e \operatorname{sen} \theta'}, \qquad (\rho > 0)$$
   (si $e < 1$ entonces $\rho = \frac{ae}{1+e\operatorname{sen}\theta'}$ y la cónica es una elipse, si $e = 1$, entonces $\rho = \frac{ae}{1+\operatorname{sen}\theta'}$ y es una parábola, si $e > 1$ es una hipérbola).

Capítulo 2

Espacio topológico. Aplicación continua

2.1. Cuerpo de los números reales

2.1.1. El orden en $\mathbb{Q}$

Dados dos números enteros $z, z' \in \mathbb{Z}$ se dice que $z \leq z'$ si $z' - z \in \mathbb{N}$. Se define $|z| := z$ si $z \in \mathbb{N}$ y $|z| := -z$ si $z \notin \mathbb{N}$. No aburriremos al lector con la enumeración y prueba de las propiedades de $\leq$ y $||$ en $\mathbb{Z}$, que el lector conoce perfectamente.

1. Definición : Diremos que $\frac{n}{m} \leq \frac{n'}{m'}$ (supongamos $m, m' > 0$) "si multiplicados por mm' se mantiene la desigualdad", es decir (con precisión) si $nm' \leq n'm$.

Dejamos que el lector pruebe que $\leq$ así definido está bien definido y que pruebe:

1. $\frac{n}{m} \leq \frac{n}{m}$.

2. O $\frac{n}{m} \leq \frac{n'}{m'}$, o bien $\frac{n'}{m'} \leq \frac{n}{m}$; y si se dan estas dos desigualdades entonces son iguales.

3. Si $\frac{n}{m} \leq \frac{n'}{m'}$ y $\frac{n'}{m'} \leq \frac{n''}{m''}$ entonces $\frac{n}{m} \leq \frac{n''}{m''}$

Denotamos por

$$\mathbb{Q}^+ := \{\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid \frac{n}{m} > 0\} = \{\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid n \neq 0 \text{ y } \operatorname{sign}(n) = \operatorname{sign}(m)\}.$$

2. Proposición: *Sean $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{c'}{d'} \in \mathbb{Q}^+$. Se cumple que*

1. $\frac{n}{m} \leq \frac{n'}{m'} \iff \frac{-n}{m} \geq \frac{-n'}{m'}$ *(es decir, $\frac{-n'}{m'} \leq \frac{-n}{m}$).*

2. $\frac{n}{m} \leq \frac{n'}{m'} \iff \frac{n}{m} + \frac{c}{d} \leq \frac{n'}{m'} + \frac{c}{d}$.

3. $\frac{n}{m} \leq \frac{n'}{m'} \iff \frac{n}{m} \cdot \frac{c'}{d'} \leq \frac{n'}{m'} \cdot \frac{c'}{d'}$.

3. Definición: Dado $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ se define el módulo de $\frac{n}{m}$, que denotaremos $|\frac{n}{m}|$ como sigue:

$$|\frac{n}{m}| = \begin{cases} \frac{n}{m}, & \text{si} \quad \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+. \\ \frac{-n}{m}, & \text{si} \quad \frac{n}{m} \notin \mathbb{Q}^+. \end{cases}$$

4. Proposición: *Se cumple que*

1. $|\frac{n}{m}| = \frac{|n|}{|m|}$.

2. $|\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'}| = |\frac{n}{m}| \cdot |\frac{n'}{m'}|$.

3. $|\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'}| \leq |\frac{n}{m}| + |\frac{n'}{m'}|$.

Demostración. 1. es inmediato. 2. $|\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'}| = \frac{|nn'|}{|mm'|} = \frac{|n| \cdot |n'|}{|m| \cdot |m'|} = |\frac{n}{m}| \cdot |\frac{n'}{m'}|$. Probemos 3. Multiplicando ambos términos de la desigualdad por $|mm'|$, solo tenemos que probar que $|nm' + n'm| \leq |nm'| + |n'm|$, desigualdad bien conocida de $\mathbb{Z}$. □

5. Ejercicio: Dado $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, prueba que existe un único número entero $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z < \frac{n}{m} \leq z + 1$.

2.1.2. Sucesiones de Cauchy

6. Definición: Una sucesión de elementos del conjunto X es una aplicación $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$. Usualmente esta aplicación la denotaremos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (o abreviadamente $\{x_n\}$).

7. Definición: Diremos que una sucesión de números racionales $\{q_n\}$ es convergente (en $\mathbb{Q}$), si existe un número racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que para cada $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geq n_\epsilon$ entonces $|q_n - q| < \epsilon$.

8. Proposición: *Si la sucesión $\{q_n\}$ es convergente, entonces existe un único $q \in \mathbb{Q}$ cumpliendo la definición anterior.*

Demostración. Sean $q, q' \in \mathbb{Q}$ distintos cumpliendo la definición anterior. Sea $\epsilon = \frac{|q-q'|}{2}$ y n_ϵ tal que si $n \geq n_\epsilon$ entonces $|q_n - q| < \epsilon$ y $|q_n - q'| < \epsilon$. Entonces,

$$|q - q'| \leq |q - q_n| + |q_n - q'| < \epsilon + \epsilon = \frac{|q - q'|}{2} + \frac{|q - q'|}{2} = |q - q'|$$

y hemos llegado a contradicción.

□

9. Definición: Si una sucesión de números racionales es convergente, al único número racional q que cumple la definición 2.1.7 se le llama límite de la sucesión $\{q_n\}$ y escribiremos $q = \lim_{n\to\infty} q_n$.

10. Ejercicio: Prueba que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

11. Proposición: *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números racionales convergentes. Entonces,*

1. *La sucesión $\{a_n + b_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.*
2. *La sucesión $\{a_n \cdot b_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Demostración. Sean $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

1. Dado $\epsilon > 0$, sea n_0 tal que $|a_n - a|, |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Entonces, se cumple que $|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, para todo $n > n_0$.

2. Dado $\epsilon > 0$, sean $\epsilon' = \text{mín}\{\frac{\epsilon}{3|b|}, 1\}$, $\epsilon'' = \text{mín}\{\frac{\epsilon}{3|a|}, \frac{\epsilon}{3}\}$ y n_0 tal que $|a_n - a| < \epsilon'$ y $|b_n - b| < \epsilon''$, para todo $n \geq n_0$. Luego,

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |(a_n - a + a)\cdot(b_n - b + b) - ab| = |(a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + a(b_n - b)|\\ &< \epsilon'\epsilon'' + \epsilon'|b| + |a|\epsilon'' \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

□

12. Definición: Diremos que una sucesión de números racionales $\{q_n\}$ es de Cauchy, si para cada $\epsilon > 0$ existe m de modo que para todo $n \geq m$ se cumple que $|a_n - a_m| < \epsilon$.

13. Proposición: *Toda sucesión de números racionales convergente es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{q_n\}$ una sucesión de números racionales convergente a q. Dado $\epsilon > 0$, existe m de modo que $|q_n - q| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq m$. Entonces,

$$|q_n - q_m| \leq |q_n - q| + |q - q_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $n \geq m$.

□

14. Proposición: *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números racionales de Cauchy. Entonces, las sucesiones $\{a_n + b_n\}$ y $\{a_n \cdot b_n\}$ son de Cauchy.*

Demostración. Se demuestra igual que 2.1.11, sustituyendo en la demostración a y b por a_{n_0} y b_{n_0}. □

Por tanto, el conjunto de todas las sucesiones de números racionales de Cauchy, S, es un anillo. Dado $q \in \mathbb{Q}$ denotemos por $\{q\}$ la sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_n = q$ para todo n. La aplicación $\mathbb{Q} \to S$, $q \mapsto \{q\}$ es un morfismo (inyectivo) de anillos. Entonces, S es una $\mathbb{Q}$-álgebra.

15. Lema: *Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números racionales de Cauchy, entonces existe $K \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_n| < K$ para todo n.*

Demostración. Existe m, tal que $|a_n - a_m| < 1$, para todo $n \geq m$. La cota buscada es $K = \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{m-1}|, |a_m| + 1\}$.

□

16. Proposición: *El conjunto $I \subset S$ de todas las sucesiones convergentes a 0 es un ideal de S.*

Demostración. Nos falta probar que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente a 0 y $\{b_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{a_n \cdot b_n\}$ es una sucesión convergente a 0. En efecto, sea K una cota de $\{b_n\}$. Dado ϵ, existe n_0 tal que $|a_n| < \frac{\epsilon}{K}$, para todo $n \geq n_0$. Entonces,

$$|a_n b_n| \leq |a_n| \cdot K < \epsilon.$$

para todo $n \geq n_0$.

□

2.1.3. Construcción de $\mathbb{R}$

17. Definición: Sea S el conjunto de todas las sucesiones de números racionales de Cauchy y $\sim$ la siguiente relación de equivalencia en S: diremos que $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - b_m| = 0$. Diremos que

$$\mathbb{R} := S/\sim$$

es el cuerpo de los números reales.

Observemos que $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si y solo si $\{a_n - b_n\}$ converge a 0.

Por lo tanto, $\mathbb{R} = S/I$ y $\mathbb{R}$ es una $\mathbb{Q}$-álgebra.

18. Lema: *Si $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy no convergente a 0, entonces existe un número racional $\epsilon > 0$ y m tal que $|a_n| > \epsilon$ para todo $n > m$.*

Demostración. Si para cada $r \in \mathbb{N}$, existe $n_r > n_{r-1}$ tal que $|a_{n_r}| \leq \frac{1}{r}$, entonces la sucesión $\{a_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a 0, equivalente a $\{a_n\}$, luego $\{a_n\}$ es convergente a 0, contradicción. Por tanto, existen r y n_r tal que $|a_m| > \frac{1}{r+1}$, para todo $m > n_r$. □

19. Si $\bar{s} \in \mathbb{R}$ es no nula, entonces $s = \{a_n\} \in S$ es una sucesión de Cauchy no convergente a 0. Existe $\epsilon > 0$ y m tal que $|a_n| > \epsilon$ para todo $n > m$. Sea $b_i = 1$, para $i < m$ y $b_n = a_n$ para $n \geq m$. La sucesión $\{b_n\}$ es una sucesión de Cauchy equivalente a $\{a_n\}$. Veamos que $t = \{\frac{1}{b_n}\}$ es una sucesión de Cauchy: Dado $\epsilon' > 0$, existe n_0 de modo que $|a_n - a_{n_0}| < \epsilon^2\epsilon'$, para todo $n \geq n_0$. Por tanto, para todo $n \geq \max\{n_0, m\}$ se cumple que

$$|b_n - b_{n_0}| = |\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n_0}}| = \frac{|a_n - a_{n_0}|}{|a_n||a_{n_0}|} < \frac{\epsilon^2\epsilon'}{\epsilon^2} = \epsilon'.$$

En conclusión, $\bar{s} \cdot \bar{t} = \overline{s \cdot t} = \bar{1}$ y $\mathbb{R}$ es un cuerpo.

20. Definición: Dados dos números reales $\overline{\{a_n\}}, \overline{\{b_n\}} \in \mathbb{R}$, diremos que $\overline{\{a_n\}} \leq \overline{\{b_n\}}$ si $\overline{\{a_n\}} = \overline{\{b_n\}}$ o $\overline{\{a_n\}} \neq \overline{\{b_n\}}$ y existe n_0 de modo que $a_n \leq b_n$, para todo $n \geq n_0$.

Veamos que la definición no depende del representante de la clase de equivalencia escogido. Supongamos que $\overline{\{a_n\}} \neq \overline{\{b_n\}}$. Por tanto $\{b_n - a_n\}$ no converge a 0 y existen $\epsilon > 0$ y $n'_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $b_n - a_n > \epsilon$, para todo $n \geq n'_0$. Si $\{a'_n\} \sim \{a_n\}$ y $\{b'_n\} \sim \{b_n\}$, entonces $\{a'_n - a_n\} \sim \{0\}$ y $\{b'_n - b_n\} \sim \{0\}$. Luego, existe $n''_0 \in \mathbb{N}$, de modo que $|a'_n - a_n|, |b'_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq n''_0$. Por tanto,

$$a'_n \leq a_n + \frac{\epsilon}{2} \leq b_n - \frac{\epsilon}{2} \leq b'_n,$$

para todo $n \geq \max\{n_0, n'_0, n''_0\}$.

21. Proposición: *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se cumple*

1. $a \leq a$.
2. *O $a \leq b$, o bien $b \leq a$; y si se cumplen ambas desigualdades $a = b$.*
3. *Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.*
4. $a \leq b \iff -a \geq -b$ *(es decir, $-b \leq -a$).*
5. $a \leq b \iff a + c \leq b + c$.
6. *Si $c > 0$, entonces $a \leq b \iff a \cdot c \leq b \cdot c$.*
7. *Si $0 < a \leq b$, entonces $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.*

Demostración. Escribamos $a = \overline{\{a_n\}}$, $b = \overline{\{b_n\}}$ y $c = \overline{\{c_n\}}$.

1. Es evidente.

2. Supongamos $a \neq b$. Entonces, $\{a_n - b_n\}$ es una sucesión de Cauchy no convergente a 0. Luego existen $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que $|a_n - b_n| > \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Existe $m > n_0$, de modo que $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq m$. Si $a_m - b_m > \epsilon$, entonces

$$a_n - b_n \geq a_m - \frac{\epsilon}{2} - b_m + \frac{\epsilon}{2} = a_m - b_m - \epsilon > 0,$$

para todo $n \geq m$. Igualmente, si $b_m - a_m > \epsilon$, entonces $b_n - a_n > 0$, para todo para todo $n \geq m$. En conclusión, $a \leq b$ o $b \leq a$ y no pueden darse las dos desigualdades.

3. 4. y 5. son fáciles de probar.

6. Sean $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$, tales que $c_n > \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Si $a \leq b$, sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq b_n$, para todo $n \geq m_0$. Por tanto, $(a_n - b_n)c_n > (a_n - b_n)\epsilon \geq 0$, para todo $n \geq \text{máx}\{n_0, m_0\}$, luego $ac \leq bc$.

Obviamente, $\frac{1}{c} > 0$. Por tanto, si $ac \leq bc$ entonces multiplicando por $\frac{1}{c}$ se tiene que $a \leq b$.

7. Multiplíquese por $\frac{1}{ab} > 0$ y úsese 6.

□

22. Fijemos $r \in \mathbb{R}$. Sea $z_0 \in \mathbb{Z}$ máximo tal que $z_0 \leq r$. Por tanto, $z_0 \leq r < z_0 + 1$. Sea $z_1 \in \mathbb{Z}$ máximo tal que $z_1 \leq 10 \cdot r < z_1 + 1$, y en general sea $z_n \in \mathbb{Z}$, tal que $z_n \leq 10^n \cdot r < z_n + 1$. Obviamente,

$$10 \cdot z_{n-1} \leq z_n \leq 10^n \cdot r < z_n + 1 \leq 10 z_{n-1} + 10,$$

luego la sucesión $\{\frac{z_n}{10^n}\}$ es creciente y

$$0 \leq \frac{z_n}{10^n} - \frac{z_{n-1}}{10^{n-1}} = \frac{z_n - 10 z_{n-1}}{10^n} \leq \frac{10 z_{n-1} + 10 - 10 z_{n-1}}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}.$$

Además, $0 \leq \frac{z_n}{10^n} - r \leq 10^{-n}$. El lector puede probar que

$$r = \overline{\{\frac{z_n}{10^n}\}}$$

Si es escribimos los enteros z_n en base 10, $\{\frac{z_n}{10^n}\}$ es la escritura de r en base 10.

23. Definición: Dado $r \in \mathbb{R}$ se define $|r| := r$ si $r \geq 0$ y $|r| := -r$ si $r \leq 0$.

Obviamente $|r| = |-r|$.

24. Proposición: *Sean $r, r' \in \mathbb{R}$, entonces*

1. $|r + r'| \leq |r| + |r'|$.
2. $|r \cdot r'| = |r| \cdot |r'|$.

Demostración. 1. Si $r + r' \geq 0$, entonces $|r + r'| = r + r' \leq |r| + |r'|$. Si $r + r' \leq 0$, entonces $|r + r'| = -r - r' \leq |-r| + |-r'| = |r| + |r'|$.

2. Al lector.

□

25. Definiciones: Diremos que una sucesión de números reales $\{r_n\}$ converge a $r \in \mathbb{R}$, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $|r - r_n| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Se dice que $\{r_n\}$ es una sucesión de Cauchy, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe m tal que $|r_n - r_m| < \epsilon$, para todo $n \geq m$.

26. Proposición: *Toda sucesión de números reales convergente es de Cauchy.*

Demostración. Arguméntese como en 2.1.13.

□

27. Teorema: *Toda sucesión de números reales de Cauchy es convergente.*

Demostración. Sea $\{r_n\}$ una sucesión de números reales de Cauchy. Escribamos $r_n = \overline{\{r_{nm}\}_{m\in\mathbb{N}}}$. Sea n_s tal que $|r_n - r_{n_s}| \le \frac{1}{10^s}$, para todo $n \ge n_s$; y sea m_s tal que $|r_{n_s m} - r_{n_s m_s}| \le \frac{1}{10^s}$, para $m \ge m_s$. El lector puede comprobar que la sucesión $\{r_{n_s m_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \overline{\{r_{n_s m_s}\}_{s\in\mathbb{N}}}.$$

□

28. Proposición : *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales convergentes. Entonces,*

1. *La sucesión $\{a_n + b_n\}$ es convergente y* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. *La sucesión $\{a_n \cdot b_n\}$ es convergente y* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demostración. Se demuestra como la proposición 2.1.11.

□

Se llama supremo de un subconjunto de un conjunto ordenado a la menor de las cotas superiores del subconjunto, cuando exista.

29. Teorema: *Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto superiormente acotado. Entonces, existe el supremo de C.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $n \cdot C = \{n \cdot c, \forall c \in C\}$. Sea z_0 el mínimo número entero que sea cota superior de C. Obviamente $z_0 - 1$ no es cota superior de C, luego existe $c_0 \in C$, tal que $z_0 - 1 < c_0 \le z_0$. En general sea z_n el mínimo número entero que sea cota superior de $10^n \cdot C$ (luego $\frac{z_n}{10^n}$ es cota superior de C). Obviamente, $z_n - 1$ no es una cota superior de $10^n \cdot C$ y existe $c_n \in C$, tal que $z_n - 1 < 10^n \cdot c_n \le z_n$. Tenemos que $z_{n+1} \le 10 z_n$, luego

$$\frac{z_n}{10^n} - \frac{1}{10^n} < c_n \le \frac{z_{n+1}}{10^{n+1}} \le \frac{z_n}{10^n}$$

La sucesión de números racionales $\{\frac{z_n}{10^n}\}$ es de Cauchy y $\overline{\{\frac{z_n}{10^n}\}}$ es el supremo de C.

□

30. Ejercicio: Demuestra que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ inferiormente acotado tiene ínfimo.

2.2. Espacios métricos

1. Definición: Sea X un conjunto. Diremos que una aplicación $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ es una distancia en X si para todo $x,y,z\in X$,

1. $d(x,y)\geq 0$ y $d(x,y)=0$ si si solo si $x=y$.
2. $d(x,y)=d(y,x)$.
3. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$,

En este caso diremos que (X,d) (o simplemente X) es un espacio métrico.

2. Ejemplo: $d\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d(x,y):=|x-y|$ es una distancia: 1. $d(x,y)=|x-y|\geq 0$ y $d(x,y)=0$ si y solo si $|x-y|=0$, es decir, $x-y=0$, que equivale a $x=y$. 2. $d(x,y)=|x-y|=|-(x-y)|=|y-x|=d(y,x)$. 3. $d(x,y)+d(y,z)=|x-y|+|y-z|\leq|x-y+y-z|=|x-z|=d(x,z)$.

3. Ejemplo: Si (X,d) y (X',d') son espacios métricos, entonces $(X\times X',d\times d')$ es un espacio métrico, donde $d\times d'((x,x'),(y,y')):=d(x,y)+d'(x',y')$, como puede comprobarse.

4. Definición: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una aplicación $E\to\mathbb{R}^+$, $e\overset{\text{Not.}}{\mapsto}||e||$ diremos que es una norma en E si cumple

1. $||e||=0\iff e=0$.
2. $||\lambda\cdot e||=|\lambda|\cdot||e||$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ y $e\in E$.
3. $||e+e'||\leq||e||+||e'||$, para todo $e,e'\in E$.

5. Ejemplos: Supongamos $E=\mathbb{R}^n$ y consideremos la norma $||\,||_1$ definida por

$$||(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)||_1:=|x_1|+\cdots+|x_n|.$$

Otra norma que podemos definir en $\mathbb{R}^n$ es $||\,||_2$ definida por

$$||(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)||_2:=\sqrt{\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2}.$$

Otra norma que podemos definir en $\mathbb{R}^n$ es $||\,||_\infty$ definida por

$$||(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)||_\infty:=\text{máx}\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}.$$

Sea C el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ acotadas. C es de modo obvio un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y tenemos la norma

$$||f||=\sup\{|f(x)|,\,\forall x\in\mathbb{R}\}.$$

Se dice que $(E, \|\,\|)$ es un espacio normado. La aplicación

$$d\colon E \times E \to \mathbb{R},\; d(e,e') := \|e - e'\|$$

define una distancia en E, pues cumple que $d(e,e') = 0 \iff e = e'$ (por la propiedad 1.), que $d(e,e') = d(e',e)$ (por la propiedad 2.) y que $d(e,e'') \leq d(e,e') + d(e',e'')$ (por la propiedad 3.).

6. Definición: Diremos que una sucesión de puntos $\{x_n\}$ de (X,d) converge a $x \in X$. si para cada $\epsilon > 0$ existe n_0 de modo que $d(x,x_n) < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$; y escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, entonces $x = y$: Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 de modo que $d(x,x_n) < \epsilon$ y $d(y,x_n) < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Por tanto, $d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(y,x_n) < 2\epsilon$, luego $d(x,y) = 0$ y $x = y$.

7. Definición: Diremos que un subconjunto Y de un espacio métrico X es cerrado cuando toda sucesión convergente (en X) de puntos de Y converge a un punto de Y. Diremos que un subconjunto U de X es abierto si su complementario (en X) es cerrado.

8. Definición: Sea (X,d) un espacio métrico. Dado $x \in X$ y $r > 0$, diremos que

$$B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\}$$

es la bola (abierta) de radio r y centro x.

9. Proposición: *Un subconjunto $U \subset X$ de un espacio métrico es un abierto si y solo si U es unión de bolas.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si U no es abierto, existe $x \in U$ de modo que ninguna bola con centro en x está contenida en U. Sea $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ tal que no pertenezca a U. La sucesión $\{x_n \in U^c\}$ es convergente a $x \in U$, lo cual contradice que U^c es un cerrado.

$\Leftarrow$) Sea $\{x_n \in U^c\}$ una sucesión convergente (en X) y $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Si $x \notin U^c$, es decir, $x \in U$ sea $B(x,r) \subset U$ ($r \neq 0$), entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_n \in B(x,r) \subset U$, para todo $n \neq n_0$, lo cual es absurdo. Por tanto, $x \in U^c$, U^c es cerrado y U es abierto.

□

Obviamente, la unión de abiertos es abierto. Por tanto, el intervalo $(a,b) := \{r \in \mathbb{R} \colon a < r < b\}$ es un abierto. El intervalo $[a,b] := \{r \in \mathbb{R} \colon a \leq r \leq b\}$ es cerrado.

10. Proposición: *La intersección de dos abiertos es abierto.*

Demostración. Dados abiertos U y V y $x \in U \cap V$, existen dos bolas $B(x,\epsilon) \subset U$ y $B(x,\epsilon') \subset V$, luego

$$B(x, \min\{\epsilon,\epsilon'\}) = B(x,\epsilon) \cap B(x,\epsilon') \subset U \cap V$$

Luego, $U \cap V$ es abierto.

□

11. Definición: Se dice que un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

12. Ejemplo: $\mathbb{R}$ con la distancia usual ($d(x,y) = |x-y|$) es un espacio métrico completo, por el teorema 2.1.27.

Si $(X,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ son espacios métricos completos entonces el espacio métrico $(X_1\times\cdots\times X_n, d_1\times\cdots\times d_n)$ (donde $d_1\times\cdots\times d_n((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = d_1(x_1,y_1)+\cdots+d_n(x_n,y_n)$) es completo.

13. Compleción de un espacio métrico: Sea (X,d) un espacio métrico y S el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de X. Dadas dos sucesiones de Cauchy $\{x_n\},\{y_n\}\in S$ diremos que $\{x_n\}\sim\{y_n\}$ cuando $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$. La relación $\sim$ es de equivalencia y diremos que el conjunto

$$\hat{X} := X/\sim$$

es la compleción de X. Dados $[\{x_n\}],[\{y_n\}]\in\hat{X}$, definimos

$$\hat{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}] := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$$

El lector puede comprobar que tal límite existe y que no depende de los representantes de las clases de equivalencia escogidos. Puede comprobar también que $\hat{d}$ es una distancia de $\hat{X}$. La aplicación $X\to\hat{X}$, $x\mapsto[\{x\}]$ (donde $\{x\}$ es la sucesión constante de término general x) es inyectivo y la restricción de $\hat{d}$ a X es igual a d.

14. Teorema: *$(\hat{X},\hat{d})$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{r_n\}$ una sucesión de Cauchy de $\hat{X}$. Escribamos $r_n = [\{r_{nm}\}_{m\in\mathbb{N}}]$. Sea n_s tal que $\hat{d}(r_n,r_{n_s})\le\frac{1}{10^s}$, para todo $n\ge n_s$; y sea m_s tal que $d(r_{n_sm},r_{n_sm_s})\le\frac{1}{10^s}$, para $m\ge m_s$. El lector puede comprobar que la sucesión $\{r_{n_sm_s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ de X es de Cauchy y que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = [\{r_{n_sm_s}\}_{s\in\mathbb{N}}].$$

□

2.2.1. Aplicaciones continuas

15. Definición: Una aplicación $f\colon X\to X'$ entre espacios métricos se dice que es continua en $x\in X$, si para toda sucesión $\{x_n\}$ convergente a x se cumple que

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

16. Ejemplo: Las aplicaciones

1. $s: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $s(x,y)=x+y$,

2. $p: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x,y)=xy$,

3. $i: \mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $i(x)=\frac{1}{x}$

son continuas

Veámoslo:

1. Sean $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ convergente a (x,y). . Entonces,

$$s(\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)) = s(x,y) = x+y \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} s(x_n,y_n).$$

donde $\overset{*}{=}$ se debe a que el límite de la suma de dos sucesiones de números reales convergentes es la suma de los límites de cada una de las sucesiones (ver 2.1.28). Por tanto, s es continua.

2. Se prueba de modo similar a 1.

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no nulos convergente a $x\neq 0$. Tenemos que probar que la sucesión $\{\frac{1}{x_n}\}$ converge a $\frac{1}{x}$. Existe $\epsilon>0$ y m tal que $|x_n|>\epsilon$ para todo $n>m$. Dado $\epsilon'>0$, existe n_0 de modo que $|x_n-x|<\epsilon^2\epsilon'$, para todo $n\geq n_0$. Por tanto, para todo $n\geq \max\{n_0,m\}$ se cumple que

$$|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x}| = |\frac{x_n-x}{x_nx}| < \frac{\epsilon^2\epsilon'}{\epsilon^2} = \epsilon'.$$

17. Ejercicio: Sea $f:(X,d)\to(X',d')$ una aplicación contractiva entre espacios métricos, es decir, tal que $d'(f(x),f(y))\leq d(x,y)$, para todo $x,y\in X$. Prueba que f es continua.

18. Proposición: *Sean $f: X\to Y$ y $g: Y\to Z$ aplicaciones entre espacios métricos. Si f es continua en x y g es continua en $f(x)$, entonces $g\circ f$ es continua en x.*

Demostración. Observemos que

$$(g\circ f)(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(f(\lim_{n\to\infty} x_n)) = g(\lim_{n\to\infty} f(x_n)) = \lim_{n\to\infty}(g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n).$$

□

19. Definición: Una aplicación $f: X\to Y$ entre espacios métricos se dice que es continua si es continua en todo $x\in X$.

La composición de aplicaciones continuas es continua.

20. Proposición: *Una aplicación $f: X\to Y$ entre espacios métricos es continua si y solo si la antimagen de todo abierto de Y es un abierto de X.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $V \subset Y$ un abierto. Si $f^{-1}(V)$ no es un abierto, entonces existe un punto $x \in f^{-1}(V)$ tal que ninguna bola centrada en x está incluida en $f^{-1}(V)$. Sea $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ que no pertenezca a $f^{-1}(V)$. La sucesión $\{x_n\}$ converge a x y la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x) \in V$, porque $f(x_n) \notin V$, para todo n y dada una bola $B(f(x),r) \subset V$ se tiene que $f(x_n) \notin B(f(x_n),r)$ y $d(f(x_n),f(x)) \geq r$, para todo n. Por tanto, f no es continua en x y llegamos a contradicción.

$\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a $x \in X$. Si $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$, entonces existe una bola $B(f(x),r)$ de modo que para cada n existe un $m_n > n$ tal que $f(x_{m_n}) \notin B(f(x),r)$. Por tanto, $x_{m_n} \notin f^{-1}(B(f(x),r))$. Dada una bola $B(x,s) \subset f^{-1}(B(f(x),r))$, los $x_{m_n} \notin B(x,s)$, luego la sucesión $\{x_n\}$ no converge a x.

□

2.3. Espacios topológicos

1. Introducción: Introducimos aquí el concepto de topología de modo intuitivo (y riguroso). A partir de 2.3.2 procederemos como en la mayoría de los textos de topología.

En general, sin la ayuda de una distancia, definamos abstractamente el concepto de puntos cercanos a uno dado: Sea X un conjunto y $x \in X$. Se dice que una familia (no vacía) de subconjuntos de X, B_x, es una base de entornos abiertos de x si $x \in U$, para todo $U \in B_x$, y si $U, V \in B_x$ entonces $U \cap V \in B_x$. Se dice que W es un entorno de x si existe $U \in B_x$ tal que $U \subseteq W$.

Si (X,d) es un espacio métrico y $x \in X$, entonces $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de entornos abiertos de x.

Se dice que dos bases de entornos abiertos de x son equivalentes si tienen los mismos entornos de x. El lector puede probar que dos bases de entornos abiertos de x, B_x y B'_x, son equivalentes si y solo si para cada $U \in B_x$ existe $U' \in B'_x$ tal que $U' \subset U$ y para cada $V' \in B'_x$ existe $V \in B_x$ tal que $V \subset V'$.

Se dice que X es un espacio topológico si para cada $x \in X$ tenemos una base B_x de entornos abiertos de X de modo que si $y \in U \in B_x$, entonces U es un entorno de y[1]. Se dice que $U \subset X$ es un abierto de X si es entorno de todos sus puntos, o equivalentemente, para cada $x \in U$ existe $U_x \in B_x$ tal que $U_x \subset U$. Observemos que: $\emptyset$ y X son abiertos, si U y V son abiertos entonces entonces $U \cap V$ es abierto y si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos entonces $\underset{i \in I}{\cup} U_i$ es abierto.

En la bibliografía, en general, se procede de modo inverso. Se dice primero qué subconjuntos de X son abiertos y luego cuándo un subconjunto es un entorno de x. Veámoslo.

2. Definición: Sea $\tau = \{U_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Diremos que τ es una topología de X si cumple

[1] Estamos formalizando la siguiente intuición: si y es cercano a x, entonces los puntos muy cercanos a y son cercanos a x

1. $X, \emptyset \in \tau$.

2. Si $U, U' \in \tau$, entonces $U \cap U' \in \tau$.

3. Si $U_j \in \tau$, para todo $j \in J$, entonces $\cup_{j\in J} U_j \in \tau$.

3. Definiciones : Si τ es una topología de X, entonces se dice que (X,τ) es un espacio topológico. Un subconjunto U de un espacio topológico (X,τ) se dice que es un abierto si $U \in \tau$; se dice que $C \subset X$ es un cerrado si C^c es un abierto.

4. Ejemplos : El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto X es una topología, denominada la topología discreta de X. Por definición, en esta topología todo subconjunto es abierto.

La topología de X cuyos únicos abiertos son X y $\emptyset$, se denomina la topología trivial.

El conjunto de los abiertos de un espacio métrico X es una topología de X, que es la topología que consideraremos en los espacios métricos (salvo que se diga otra cosa). En $\mathbb{R}^n$ consideraremos siempre salvo que se indique lo contrario la topología definida por la distancia d usual,

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

Si Y es un subconjunto de un espacio topológico (X,τ), entonces $\tau' := \{U \cap Y, \forall U \in \tau\}$ es una topología de Y y se dice que Y es un subespacio topológico de X. Dados dos números reales $a \leq b$, diremos que los intervalos de $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} 1.\ (a,b) := \{r \in \mathbb{R} \colon a < r < b\}, & 2.\ (a,b] := \{r \in \mathbb{R} \colon a < r \leq b\}, \\ 3.\ [a,b) := \{r \in \mathbb{R} \colon a \leq r < b\}, & 4.\ [a,b] := \{r \in \mathbb{R} \colon a \leq r \leq b\}, \end{array}$$

son intervalos semiabiertos (en 1. y 2, puede ser $a = -\infty$, en 1. y 3. puede ser $b = \infty$). Son espacios métricos y son subespacios topológicos de $\mathbb{R}$.

5. Ejercicio : Sea (X,d) un espacio métrico y $d'(p,q) := \text{mín}\{1, d(p,q)\}$. Prueba que la topología definida por d coincide con la definida por de d'.

6. Sea X un espacio topológico. Pasando a complementarios en 2.3.2, es obvio:

a. X y $\emptyset$ son cerrados.

b. La unión de dos cerrados es un cerrado.

c. La intersección de cerrados es cerrado.

Evidentemente una topología está determinada por cuál es el conjuntos de los cerrados. Si tenemos una familia de subconjuntos de un conjunto X, que cumplen a.,b. y c. entonces es la familia de cerrados de una topología de X.

7. Definición: X un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto. Se dice que $x \in X$ es un punto de acumulación de Y, si para todo entorno U de x, $Y \cap (U - \{x\}) \neq \emptyset$.

8. Proposición: *Sea X un espacio topológico y $C \subset X$ un subconjunto. C es un cerrado de X si y solo si todo punto de acumulación de C está en C.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si $x \notin C$, entonces $U = X - C$ es un abierto que contiene a x y obviamente $C \cap (U - x) = \emptyset$, luego x no es un punto de acumulación de C.

$\Leftarrow$) Si $x \notin C$, entonces no es un punto de acumulación de C en X y existe un abierto U que contiene a x, tal que $C \cap (U - x) = \emptyset$, luego $C \cap U = \emptyset$. Por tanto, $X - C$ es un abierto, luego C es un cerrado. □

9. Definición: Sea X un espacio topológico e $Y \subset X$ un subespacio. Llamaremos cierre de Y en X, que denotaremos $\bar{Y}$, al menor cerrado de X que contiene a Y (es decir, a la intersección de todos los cerrados que contienen a Y).

10. Ejercicio: Prueba que el cierre de (a, b) en $\mathbb{R}$ es $[a, b]$.

11. Proposición: *Sea X un espacio topológico, $Y \subset X$ un subconjunto e Y' el conjunto de los puntos de acumulación de Y en X. Entonces, $\bar{Y} = Y \cup Y'$.*

Demostración. Por la proposición anterior $Y \cup Y' \subset \bar{Y}$. Dado $x \notin Y \cup Y'$, existe un abierto U que contiene a x, que no corta con Y, porque si no x pertenecería a Y'. $U \cap Y' = \emptyset$, porque si $y \in U \cap Y'$, entonces U es un entorno de y y $(U - y) \cap Y \neq \emptyset$. En conclusión, el complementario de $Y \cup Y'$ es un abierto, $Y \cup Y'$ es un cerrado y $\bar{Y} \subset Y \cup Y'$. □

12. Definición: Sea X un espacio topológico. Diremos que $V \subset X$ es un entorno de $x \in X$, si existe un abierto U de X tal que $x \in U \subset V$.

Los abiertos son entornos de cada uno de sus puntos.

13. Definición: Sea X un espacio topológico e $Y \subseteq X$ un subconjunto. Diremos que $x \in X$ es adherente a Y cuando $x \in \bar{Y}$, es decir, todo entorno de x corta con Y.

14. Proposición: *Sea X un espacio topológico e $Y \subseteq X$ un subconjunto. El cierre de Y en X es el conjunto de los puntos de X adherentes a Y.*

15. Definiciones: Se dice que un espacio topológico es T_1, si todos los puntos son cerrados. Se dice que un espacio topológico X es Hausdorff si para cada pareja de puntos distintos $x, x' \in X$ existe en entornos U_x de x y $U_{x'}$ de x' disjuntos.

Si un espacio topológico es Hausdorff entonces es T_1: Veamos que $x \in X$ es cerrado. Dado $x' \neq x$, sea $U_{x'}$ un abierto que contenga a x' y no a x. Entonces, $X - x = \cup_{x' \neq x} U_{x'}$, que es abierto, luego x es cerrado.

Los espacios métricos son Hausdorff.

16. Definición: Sea X Hausdorff. Se dice que una sucesión de puntos $\{x_n\}$ de X converge a $x \in X$, si para cada entorno V de x, existe n_0 tal que $x_n \in V$, para todo $n \geq n_0$. En este caso, el punto x es único y escribimos $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

17. Ejercicio: Prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \{x\} = \cap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n\}_{n\geq m}}$.

18. Definiciones: Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que un conjunto $\{U_i\}_{i\in I}$ de entornos de x es una base de entornos de x si para cada entorno U de x existe un entorno U_i tal que $U_i \subseteq U$. Se dice que X es primero numerable si para cada punto de X existe una base numerable de entornos del punto.

19. Ejemplo: Los espacios métricos (X,d) son primero numerables: Dado $x \in X$, $\{B_n := \{y \in X : d(y,x) < \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base numerable de entornos de x.

20. Proposición: *Sea X un espacio topológico Hausdorff primero numerable e $Y \subset X$ un subconjunto. Entonces,*

1. *Un punto $x \in X$ es adherente a Y si y solo si existe una sucesión $\{y_n \in Y\}$ que converge a x.*
2. *Y es un cerrado de X si y solo si toda sucesión de puntos de Y convergente (en X) converge a un punto de Y.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos de x, entonces $\{V_n := \underset{i\leq n}{\cap} U_n\}$ es una base de entornos de x y $V_{n+1} \subseteq V_n$, para todo n. Existe una sucesión $\{y_n \in Y \cap V_n$, que resulta que es convergente a x.

$\Leftarrow$) El punto x es adherente a la sucesión $\{y_n\}$, luego es adherente a Y.

2. $\Rightarrow$) Sea $\{y_n \in Y\}$ una sucesión convergente (en X) y $x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Entonces, x es adherente a $\{y_n\}$, luego es adherente a Y, luego $x \in Y$.

$\Leftarrow$) Si x es adherente a Y, por 1., existe una sucesión de puntos de Y que converge a x, luego $x \in Y$ y $Y = \bar{Y}$. □

21. Proposición: *Un subespacio de un espacio métrico completo es un cerrado si y solo si es completo.*

Demostración. Sea (X,d) el espacio métrico completo y $Y \subset X$ el subespacio (cuya distancia es la restricción de d a Y.

$\Rightarrow$) Dada una sucesión de Cauchy en Y, entonces es de Cauchy en X, luego es convergente a un punto, que ha de ser un punto de Y porque Y es un cerrado de X. Por tanto, Y es completo.

$\Leftarrow$) Sea x un punto adherente a Y. Sea $y_n \in Y \cap B(x, \frac{1}{n})$. La sucesión $\{y_n\}$ converge a x y en particular es de Cauchy. Como Y es completo, $x \in Y$. Por tanto, $Y = \bar{Y}$ y es cerrado.

□

2.3.1. Aplicaciones continuas

22. Definiciones: Una aplicación $f: X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es continua en $x \in X$, si la antimagen de todo entorno de $f(x)$ es un entorno de x. Se dice que f es continua si es continua en todo punto. Se dice que f es un homeomorfismo si es biyectiva y la inversa es continua.

23. Ejemplos: Las aplicaciones entre espacios métricos continuas son continuas.

La aplicación identidad $\mathrm{Id}: X \to X$ es continua.

Si $Y \subset X$ es un subespacio topológico entonces el morfismo de inclusión es continuo.

Si $f: X \to Y$ es continua en x y $g: Y \to Z$ es continua en $f(x)$, entonces $g \circ f$ es continua en x. La composición de aplicaciones continuas es continua.

24. Proposición: *Una aplicación $f: X \to Y$ entre espacios topológicos es continua si y solo si la antimagen de todo abierto de Y es un abierto de X.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea V un abierto Y. V es entorno de cada uno de sus puntos, luego $f^{-1}(V)$ es entorno de cada uno de sus puntos, luego abierto.

$\Leftarrow$) Sea V un entorno de $f(x)$. Sea V' un entorno abierto de $f(x)$ incluido en V. Entonces, $f^{-1}(V)$ es un entorno de x porque contiene al abierto $f^{-1}(V')$.

□

25. Ejercicio: Una aplicación $f: X \to Y$ entre espacios topológicos es continua si y solo si la antimagen de todo cerrado de Y es un cerrado de X.

26. Proposición: *Sea $f: X \to X'$ una aplicación entre espacios topológicos.*

1. *La aplicación f es continua en $x \in X$ si y solo si cumple que si x es adherente a $Y \subset X$ entonces $f(x)$ es adherente a $f(Y)$.*

2. *La aplicación f es continua si y solo si para todo subconjunto $Y \subset X$ se cumple que $f(\bar{Y}) \subseteq \overline{f(Y)}$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Sea U' un entorno de $f(x)$, entonces $f^{-1}(U')$ es un entorno de x, luego $f^{-1}(U') \cap Y \neq \emptyset$ y tomando imágenes por f $f(f^{-1}(U')) \cap f(Y) \neq \emptyset$. Por tanto, $U' \cap f(Y) \neq \emptyset$ y $f(x)$ es adherente a $f(Y)$.

$\Leftarrow$) Sea U' un entorno de $f(x)$. Si $f^{-1}(U')$ no es un entorno de x, entonces $x \in C := \overline{f^{-1}(U')^c}$. Por tanto, x es adherente a $f^{-1}(U')^c$, luego $f(x)$ es adherente a $f(f^{-1}(U')^c) \subseteq U'^c$, lo cual es falso.

2. Observemos que $f(\bar{Y}) \subseteq \overline{f(Y)}$ es equivalente a decir que si x es adherente a Y entonces $f(x)$ es adherente a $f(Y)$. Observemos que f es continua si y solo si es continua en todo punto. Por 1. se concluye fácilmente.

□

27. Proposición: *Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos Hausdorff. Entonces,*

1. *Si f es continua en x, entonces $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ a x.*

2. *Si X es primero numerable y $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, para toda sucesión $\{x_n\}$ convergente a x, entonces f es continua en x.*

Demostración. 1. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dado un entorno U de $f(x)$, $f^{-1}(U)$ es un entorno de x, luego existe n_0 de modo que $x_n \in f^{-1}(U)$, para todo $n \geq n_0$, y por tanto $f(x_n) \in U$, para todo $n \geq n_0$. En conclusión, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

2. Sea U un entorno de $f(x)$. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos de x, entonces $\{W_n := \cap_{m\leq n} V_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de x y $W_{n+1} \subset W_n$ para todo n. Si $f^{-1}(U)$ no es un entorno de x, para cada n existe un $x_n \in W_n$ tal que $x_n \notin f^{-1}(U)$. La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, pero la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$, porque $f(x_n) \notin U$, para todo n. Hemos llegado a contradicción, luego la suposición es falsa. □

28. Sean X y Z espacios topológicos Haausdorff, $Y \subset X$ un subespacio, $x \in X$ un punto adherente a Y y $f: Y \to Z$ una aplicación. Se dice que $\lim_{y\to x} f(y) = z$ si para cada entorno U de z existe un entorno V de x tal que $f(V \cap Y) \subset U$. Si X es primero numerable, equivale a decir que $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = z$, para toda sucesión $\{y_n \in Y\}$ convergente a x.

Si $Y = (a,b)$, $X = (a,b]$, $\mathbb{R}$, etc., y $x = b$, denotaremos $\lim_{y\to b} f(y) = \lim_{y\to b^-} f(y)$. Si $Y = (a,b)$, $X = [a,b)$, $\mathbb{R}$, etc., y $x = a$, denotaremos $\lim_{y\to a} f(y) = \lim_{y\to a^+} f(y)$.

$\mathbb{R}$ es un subespacio topológico de $[-\infty,\infty] = \{-\infty\} \coprod \mathbb{R} \coprod \{\infty\}$, donde una base de entornos de ∞ son $\{(a,\infty]\}$ $(a \in \mathbb{R})$ y una base de entornos de $-\infty$ son $\{[-\infty,a)\}$ $(a \in \mathbb{R})$. Si $Y = \mathbb{R}$, hablaremos de $\lim_{y\to\infty} f(y)$ y $\lim_{y\to-\infty} f(y)$. Por último, dada una aplicación $f: Y \to \mathbb{R}$, diremos que $\lim_{y\to x} f(y) = \pm\infty$ si $\lim_{y\to x} f'(y) = \pm\infty$, donde f' es la composición de las aplicaciones $Y \xrightarrow{f} \mathbb{R} \hookrightarrow [-\infty,\infty]$.

29. Ejercicio: Calcula $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$. Prueba que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x = 0$ si y solo si $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ existen y son iguales.

Dado dos espacios topológicos (X,τ) y (X',τ'), la topogía en $X \times X'$ cuyos abiertos son unión (de un número arbitrario) de subconjuntos $U \times U'$, con $U \in \tau$ y $U' \in \tau'$, se dice que es la topología producto de $X \times X'$. Veamos la propiedad universal de esta topología.

Denotemos por $\text{Aplic}_{cont}(X,Y)$ el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X en Y.

30. Proposición: *Las proyecciones* $\pi_1\colon X\times X'\to X$, $\pi_1(x,x'):=x$ *y* $\pi_2\colon X\times X'\to X'$, $\pi_2(x,x'):=x'$ *son aplicaciones continuas. La asignación*

$$\mathrm{Aplic}_{cont}(Y,X\times X')\to \mathrm{Aplic}_{cont}(Y,X)\times \mathrm{Aplic}_{cont}(Y,X'),\, f\mapsto (\pi_1\circ f,\pi_2\circ f)$$

es biyectiva.

Demostración. Dado un abierto $U\subset X$, entonces $\pi_1^{-1}(U)=U\times X'$, que es un abierto de $X\times X'$. Por tanto, π_1 es continua, e igualmente π_2 es continua.

Dadas dos aplicaciones continuas $f_1\colon Y\to X$ y $f_2\colon Y\to X'$, sea $f_1\times f_2\colon Y\to X\times X'$ la aplicación definida por $f_1\times f_2(y)=(f_1(y),f_2(y))$. Dados dos abiertos $U\subset X$ y $U'\subset X'$, tenemos que $(f_1\times f_2)^{-1}(U\times U')=f_1^{-1}(U)\cap f_2^{-1}(U')$ es abierto. Por tanto, $f_1\times f_2$ es continua. Las asignaciones $f\mapsto(\pi_1\circ f,\pi_2\circ f)$ y $(f_1,f_2)\mapsto f_1\times f_2$ son inversas entre sí. □

Dados n espacios topológicos $(X_1,\tau_1),\dots,(X_n,\tau_n)$, la topología en $X_1\times\cdots\times X_n$ cuyos abiertos son unión de subconjuntos $U_1\times\cdots\times U_n$, con $U_i\in\tau_i$, para todo i, se dice que es la topología producto de $X_1\times\cdots\times X_n$. Es fácil, probar que la aplicación

$$(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n\to X_1\times\cdots\times X_n,\, ((x_1,\dots,x_{n-1}),x_n)\mapsto(x_1,\dots,x_n)$$

es un homeomorfismo.

31. Ejercicio: Sean $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ espacios métricos y sean $d=d_1+\cdots+d_n$, $d'=\max(d_1,\dots,d_n)$ y $d''=\sqrt{d_1^2+\cdots+d_n^2}$ las distancias en $X_1\times\cdots\times X_n$ definidas por

$$\begin{aligned}
d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) &= d_1(x_1,y_1)+\cdots+d_n(x_n,y_n)\\
d'((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) &= \text{máx}(d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n))\\
d''((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) &= \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2+\cdots+d_n(x_n,y_n)^2}
\end{aligned}$$

Prueba

1. $\frac{d''}{n}\le d'\le d\le n\cdot d''$.

2. La topología producto es igual a la topología definida por d, por d' y por d''.

32. Proposición: *Sean* $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ *continuas en* x*. Entonces,* $f+g$ *y* $f\cdot g$ *son continuas en* x*. Si* $f(x)\neq 0$*, para todo* $x\in X$*, entonces* $\frac{1}{f}$ *es continua en* x*.*

Demostración. La aplicación $f+g$ es la composición de la aplicación continua en x, $X\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $x\mapsto(f(x),g(x))$ y la aplicación continua $s\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $s(a,b)=a+b$, luego es continua en x. El resto al lector.

□

2.3.2. Espacios topológicos conexos

Si (X,τ) es un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto. Entonces, (Y,τ'), con $\tau' = \{U \cap Y, \forall U \in \tau\}$ es un espacio topológico y diremos que Y es un subespacio topológico de X.

33. Definición : Se dice que un espacio topológico no vacío es conexo si no es unión de dos abiertos no vacíos disjuntos.

34. Ejemplo : Los espacios topológicos con un único punto son conexos.

35. Proposición : *Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual. $Y \subset \mathbb{R}$ es conexo si y solo si es un intervalo semiabierto.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $a := \text{ínf}\{y \in Y\}$ (si Y no está acotado inferiormente $a = -\infty$). Sea $b = \sup\{y \in Y\}$ (si Y no está acotado superiormente $b = \infty$). Si $c \in (a,b)$, entonces $c \in Y$, porque si no $Y = (-\infty, c) \cap Y \coprod (c,\infty) \cap Y$ y no sería conexo. Ahora es fácil probar que Y es una de los intervalos (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ ó $[a,b]$.

$\Leftarrow$) Supongamos que el intervalo semiabierto de "extremos" a y b es unión de dos abiertos no vacíos disjuntos U y V. Dado $c \in U \cap (a,b)$, sea $C := \{d \in U : (c,d) \subseteq U\}$. Sea k el supremo de C en $\mathbb{R}$ (si C no está superiormente acotado definimos $k := \infty = b$). Supongamos $k < b$. Si $k \in U$, entonces un entorno de k está incluido en U y existe $k' > k$ en U, lo cual es imposible. Si $k \notin U$, es decir, pertenece a V, existe un entorno de k en V, luego existe $k' \in V$ tal que $c < k' < k$, lo cual es imposible. Por tanto, $k = b$ y $[c,b) \subset U$. De modo equivalente demostramos que $(a,c] \subset U$ y concluimos que $(a,b) \subset U$, lo cual es imposible.

□

36. Ejemplo : Probemos que $\mathbb{R}^n$ es conexo: Supongamos que $\mathbb{R}^n = V_1 \coprod V_2$, con V_1 y V_2 abiertos no vacíos. Sea $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2$ y consideremos la recta R que pasa por x_1 y x_2. Entonces, R es unión de dos abiertos no vacíos disjuntos, $R \cap V_1$ y $R \cap V_2$. Entonces, R no es conexo, pero R es homeomorfo a $\mathbb{R}$ que es conexo. Contradicción.

37. Proposición : *Si $Y, Y' \subset X$ son dos subespacios topológicos conexos no disjuntos, entonces $Y \cup Y'$ es conexo.*

Demostración. Sean V y V' dos abiertos no vacíos de $Y \cup Y'$ disjuntos que lo recubran, es decir, tales que $Y \cup Y' = V \coprod V'$. Como $Y = (Y \cap V) \coprod (Y \cap V')$ entonces podemos suponer que $Y = Y \cap V$ y $Y \cap V' = \emptyset$. Argumentando igual obtendremos que $Y' = Y' \cap V'$ y $Y' \cap V = \emptyset$. Por tanto, Y y Y' son disjuntos y hemos llegado a contradicción. □

38. Proposición : *Si un subespacio $Y \subseteq X$ es conexo, entonces $\bar{Y}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\bar{Y} = V \coprod V'$ es unión disjunta de dos abiertos no vacíos. Cortando con Y tendremos que uno de los dos abiertos, digamos V, contiene a Y y el orto es disjunto con Y. Por tanto, el cierre de Y en $\bar{Y}$, que es $\bar{Y}$, está incluido en el suplementario de V', lo cual es absurdo. □

39. Proposición : *Si $Y \subset X$ es un subespacio conexo, entonces está inlcuido en un único subespacio conexo maximal.*

Demostración. Sea C el conjunto de los subespacios conexos de X que contienen a Y. Dados $Y_1, Y_2 \in C$ diremos que $Y_1 \leq Y_2$ si $Y_1 \subseteq Y_2$. Todo subconjunto $\{Y_i\}_{i\in I}$ totalmente ordenado de C tiene una cota superior: $Y' = \underset{i\in I}{\cup} Y_i$. Tenemos que probar que Y' es conexo. Si $Y' = V \coprod V'$es unión de dos abiertos disjuntos no vacíos, entonces cada Y_i está incluido en uno de ellos y es disjunto con el otro. Entonces si Y_i está inlcuido en V (por ejemplo) entonces Y_j está incluido en V, para todo $Y_j \geq Y_i$, lo cual implica que Y' está incluido en V y llegamos a contradicción. Por el lema de Zorn, existe en C maximales. Como la unión de dos conexos (no disjuntos) es conexo, solo puede existir un único maximal en C.

□

40. Definición : Se que un subespacio $Y \subseteq X$ es una componente conexa de X si es un subespacio conexo maximal.

Las componentes conexas son cerradas porque han de coincidir con su cierre. Dos componentes conexas o son iguales o son disjuntas, porque si no son disjuntas su unión sería un conexo mayor.

41. Proposición : *Todo espacio topológico es la unión disjunta de sus componentes conexas.*

42. Proposición : *El producto directo de dos espacios topológicos conexos es conexo.*

Demostración. Sean X e Y conexos. Basta ver dos puntos cualesquiera $(x,y),(x',y') \in X \times Y$ pertenecen a un mismo subespacio conexo. El subespacio $x \times Y \subset X \times Y$ es conexo porque es homeomorfo a Y, igualmente $X \times y' \subset X \times Y$ es conexo. Por tanto, la unión $C = x \times Y \cup X \times y'$ es conexo y $(x,y),(x',y') \in C$.

□

2.3.3. Espacios topológicos compactos

43. Definición : Sea X un espacio topológico. Se dice que una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos de X, es un recubrimiento de X si $X = \cup_{i\in I} U_i$. Se dice que X es un espacio topológico compacto, si para todo recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ de modo que $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

44. Proposición: *Los intervalos cerrados* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *son compactos.*

Demostración. Sea $B = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $[a,b]$. Sea $C = \{c \in [a,b]\colon [a,c]$ está incluido en un número finito de abiertos de $B\}$. Sea $m = \sup\{c \in C\}$. Tenemos que probar que $m = b$. En primer lugar observemos que $m \neq a$: sea $U \in B$ que contenga a a, entonces existe $\epsilon > 0$ de modo que $[a, a+\epsilon) \subset U$, luego $m \geq a+\epsilon$. Supongamos que $m \neq b$, Sea $V \in B$ un abierto que contenga a m. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que $(m-\epsilon, m+\epsilon) \subset U$. Como $m-\epsilon \in C$, es claro que $m+\epsilon \in C$ y hemos llegado a contradicción porque $m+\epsilon > m$. □

Pasando a complementarios, una definición equivalente de espacio topológico compacto es la que sigue: "X es compacto si cumple que si una intersección de un número arbitrario de cerrados es vacía, entonces la intersección de un cierto número finito de ellos es vacía".

45. Proposición: *Todo cerrado de un compacto es compacto.*

46. Proposición: *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Si $C \subset X$ es compacto entonces es un cerrado de X.*

Demostración. Sea $x \in X - C$. Para cada $c \in C$, sean U_c y V_c abiertos disjuntos que contengan a c y a x, respectivamente. $C \subset \cup_{c\in C} U_c$, luego existe un número finito de abiertos $U_{c_1}, \dots, U_{c_n}$ tales que $C \subset U_{c_1} \cup \cdots \cup U_{c_n}$. $U_x = \cap_{i=1}^n V_{c_i}$ es un abierto que contiene a x y es disjunto con $U_{c_1} \cup \cdots \cup, U_{c_n}$, luego es disjunto con C. Por tanto, $X - C$ es abierto, luego C es cerrado. □

47. Proposición: *El producto directo de dos espacios topológicos compactos es compacto.*

Demostración. Sean X y X' dos espacios topológicos compactos. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $X \times X'$. Fijemos $x \in X$. Para cada $x' \in X$, existe un $i \in I$, que denotamos xx', tal que $V_{xx'}$ contiene a (x,x') y por tanto existen abiertos $U_{x'} \subset X$, $U'_{x'} \subset X'$, tales que $(x,x') \in U_{x'} \times U'_{x'} \subset V_{xx'}$. Sean $x'_1, \dots, x'_{n_x} \in X'$ tales que $U'_{x'_1}, \dots, U'_{x'_{n_x}}$ recubran X' y sea $U_x = \cap_{i=1}^{n_x} U_{x'_i}$. Entonces,

$$U_x \times X' \subset \cup_{i=1}^{n_x} U_{x'_i} \times U'_{x'_i} \subset \cup_{i=1}^{n_x} V_{xx'_i}$$

Sean $x_1, \dots, x_m$ tales que $X = \cup_{j=1}^m U_{x_j}$. Entonces,

$$X \times X' = \cup_{j=1}^m U_{x_j} \times X' = \cup_{j=1}^m \cup_{i=1}^{n_{x_j}} V_{x_j x'_i}.$$

□

Se dice que un subconjunto de un espacio métrico es acotado si está incluido en alguna bola.

48. Teorema de Heine-Borel: *Un subespacio $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y está acotado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sabemos por la proposición 2.3.46 que K es cerrado. Dado $x \in K$, tenemos que $K \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} B(x,n)$. Por ser K compacto, $K \subset B(x,n)$, para n "grande".

$\Leftarrow$) Existe m tal que $K \subset B(0,m)$. Entonces, $K \subset [-m,m]^n$. El cerrado $[-m,m]^n$ es compacto por las proposiciones 2.3.44 y 2.3.47. Como K es un cerrado de $\mathbb{R}^n$, es un cerrado de $[-m,m]^n$, luego es compacto por la proposición 2.3.45.

□

49. Definición: Se dice que x es un punto de acumulación de una sucesión de puntos $\{x_n\}$ si $x \in \cap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n, \forall n \geq m\}}$.

50. Proposición : *Un subespacio $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si toda sucesión de puntos de K tiene algún punto de acumulación en K.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $K \subset \mathbb{R}^n$. K es cerrado, luego $\overline{\{x_n, \forall n \geq m\}} \subseteq K$. Si $\cap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n, \forall n \geq m\}} = \emptyset$, entonces una intersección de un número finito de ellos es vacía, porque K es compacto, lo cual es imposible. Por tanto, $\cap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n, \forall n \geq m\}} \neq \emptyset$, luego la sucesión tiene puntos de acumulación en K.

$\Leftarrow$) Toda sucesión convergente de puntos de K, converge a un punto de K, luego K es cerrado. Sea $x \in K$. Si K no fuese acotado, existiría una sucesión de puntos de K, $x_n \notin B(x,n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Esta sucesión no tiene puntos de acumulación y hemos llegado a contradicción. Por tanto, K es un cerrado acotado de $\mathbb{R}^n$, luego es compacto. □

2.3.4. Teoremas sobre aplicaciones continuas

51. Proposición : *Si X es conexo y $f: X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Tomando el subespacio $f(X)$ en vez de Y podemos suponer que f es epiyectiva. Si $Y = U \coprod U'$ es unión de dos abiertos no vacíos disjuntos, entonces $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U) \coprod f^{-1}(U')$ es unión de dos abiertos no vacíos disjuntos y llegamos a contradicción. □

52. Corolario: *Sea X un espacio topológico conexo y $f: X \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Si $f(x) = a$ y $f(y) = b$, con $a < b$, entonces para todo $c \in (a,b)$ existe $z \in X$ tal que $f(z) = c$.*

Demostración. Por la proposición anterior, $f(X)$ es conexo. Por la proposición 2.3.35, $f(X)$ es un intervalo semiabierto, luego si $f(X)$ contiene a a y b, contiene a (a,b).

$\square$

53. Teorema de Bolzano: *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una aplicación continua. Si* $\operatorname{sign}(f(a)) = -\operatorname{sign}(f(b))$*, entonces existe $a \leq x \leq b$ tal que $f(x)=0$.*

54. Teorema: *Sea $f: X \to Y$ una aplicación continua.*

1. *Si X es compacto entonces $f(X)$ es compacto.*
2. *Si X es compacto e Y Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada (es decir, la imagen de todo cerrado es cerrado).*

Demostración. 1. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $f(X)$. Entonces, $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X. Luego, existen $i_1,\ldots,i_n \in I$ de modo que $f^{-1}(V_{i_1}),\ldots,f^{-1}(V_{i_n})$ recubren X. Por tanto, $V_{i_1},\ldots,V_{i_n}$ recubren $f(X)$.

2. Todo cerrado de X es compacto, luego su imagen por f es un compacto, que es cerrado porque Y es Hausdorff. $\square$

55. Teorema de Weierstrass: *Sea X un espacio topológico compacto y $f: X \to \mathbb{R}$ una función continua. Existe algún $x \in X$, tal que $f(x)$ es máximo; igualmente, existe algún $x' \in X$ tal que $f(x')$ es mínimo.*

Demostración. Sabemos que $f(X)$ es compacto y cerrado. Entonces, $M = \text{máx}\{r \in f(X)\}$ pertenece a $f(X)$ y $m = \text{mín}\{r \in f(X)\}$ también.

$\square$

56. Definición: Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre espacios métricos. Diremos que f es uniformemente continua si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, siempre que $d(x,y) < \delta$.

57. Teorema de Heine: *Sea X un espacio métrico compacto e Y un espacio métrico. Toda aplicación continua $f: X \to Y$ es uniformemente continua*

Demostración. Consideremos la aplicación continua

$$F: X \times X \to \mathbb{R},\ F(x,x') := d(f(x), f(x'))$$

y el abierto $U = F^{-1}(-\epsilon,\epsilon)$. Buscamos δ, tal que si $d(x,x') < \delta$, entonces $(x,x') \in U$,

Consideremos en $X \times X$ la distancia $d_1 + d_2$, definida por $(d_1+d_2)((x,,x'),(z,z')) = d(x,z) + d(x',z')$. La topología definida por esta distancia es la de $X \times X$ (ver ejercicio 2.3.31). Sea $C = U^c$. La aplicación continua $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (d_1+d_2)((x,x),C)$, alcanza un mínimo para cierto $x_0 \in X$. Sea $\delta = (d_1+d_2)((x_0,x_0),C) > 0$. Entonces, si $d(x,x') < \delta$, entonces $(d_1+d_2)((x,x),(x,x')) = d(x,x') < \delta$ y $(x,x') \notin C$, es decir, $(x,x') \in U$. $\square$

58. Sea X un conjunto y $\text{Aplic}_a(X,\mathbb{R})$ el conjunto de funciones acotadas. Consideremos en $\text{Aplic}_a(X,\mathbb{R})$ la norma del supremo: $||f||_\infty := \sup\{|f(x)|; \forall x \in X\}$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy. Evidentemente, $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy, para cada x y podemos definir $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(x) := \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x))$. Dado $\epsilon > 0$, existe m tal que $||f_{m'} - f_m||_\infty < \epsilon$, para todo $m' \geq m$. Entonces, $|f_{m'}(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para cada $x \in X$, luego $|\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - f_{m'}(x)| \leq \epsilon$, para cada x y para $m' > m$, luego $||\lim\limits_{n\to\infty} f_n - f_{m'}||_\infty \leq \epsilon$, para $m' > m$. Obviamente, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ es acotada. En conclusión, $\text{Aplic}_a(X,\mathbb{R})$ es un espacio métrico completo.

Si X es un espacio topológico, denotemos $\mathscr{C}^0_a(X)$ el anillo de todas las funciones continuas de X acotadas. Observemos que si X es compacto, entonces $\mathscr{C}^0_a(X)$ coincide con el anillo de las funciones continuas de X.

59. Teorema: *$\mathscr{C}^0_a(X)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{f_n \in \mathscr{C}^0_a(X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y sea $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Solo tenemos que probar que f es continua. Sea $x \in X$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $||f_m - f_{m'}||_\infty < \epsilon/3$, para todo $m, m' \geq n$, luego $||f_m - f||_\infty \leq \epsilon/3$. Existe un entorno U de x tal que $|f_m(y) - f_m(x)| < \epsilon/3$ para todo $y \in U$. Por tanto,

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

para todo $y \in U$. Luego f es continua.

□

Sea X un espacio topológico, (Y,d) un espacio métrico completo y $C^0_a(X,Y)$ el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y acotadas (es decir, las aplicaciones $f\colon X \to Y$ tales que $f(X)$ es acotado). $C^0_a(X,Y)$ es un espacio métrico con la distancia $d(f,f') = \sup\{d(f(x), f'(x)), \forall x \in X\}$. Dejamos que el lector pruebe el siguiente teorema.

60. Teorema: *$C^0_a(X,Y)$ es un espacio métrico completo.*

2.3.5. Equivalencia topológica de las normas

61. Proposición: *Sea $(E, ||\,||)$ un espacio vectorial normado. Entonces,*

$$|||e|| - ||e'||| \leq ||e - e'||, \text{ para todo } e, e' \in E.$$

Demostración. Para todo $v, v' \in E$, $||v + v'|| \leq ||v|| + ||v'||$, luego $||v|| \leq ||v + v'|| - ||v'||$. Si tomamos $v = e - e'$ y $v' = e'$, entonces $||e - e'|| \leq ||e|| - ||e'||$. Igualmente, $||e' - e|| \leq ||e'|| - ||e||$. Hemos terminado porque $||e - e'|| = ||e' - e||$. □

Como consecuencia tenemos que la aplicación $E \to \mathbb{R}$, $e \mapsto ||e||$ es continua.

62. Definición: Diremos que dos normas $\|\ \|$, $\|\ \|'$ de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E son equivalentes si existen $\lambda, \lambda' > 0$ tales que $\|e\| \le \lambda \|e\|'$ y $\|e\|' \le \lambda' \|e\|$, para todo $e \in E$.

Evidentemente, si dos normas son equivalentes entonces definen la misma topología.

63. Teorema : *Todas las normas de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes. En particular, todas las normas de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita definen la misma topología.*

Demostración. Podemos suponer que el espacio vectorial es $E = \mathbb{R}^n$ y que $e_1, \dots, e_n$ es la base estándar. Sea $||\,||$ una norma en E y $M = \text{máx}\{||e_1||, \dots, ||e_n||\}$. Entonces, dado $e = \sum_i \lambda_i e_i$ tenemos que $||e|| = ||\sum_i \lambda_i e_i|| \le \sum_i |\lambda_i| ||e_i|| \le \sum_i |\lambda_i| \cdot M = M \cdot ||e||_1$. Por tanto, $||\,|| \le M \cdot ||\,||_1$.

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la topología estándar definida por $||\,||_1$. Observemos que

$$||(x_1, \dots, x_n)||_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \ge \text{máx}\{|x_1, \dots, |x_n|\} \ge \frac{1}{n} ||(x_1, \dots, x_n)||_1$$

Por tanto, $||\,||_1$ y $||\,||_2$ son equivalentes y definen la misma topología. El conjunto $K = \{e \in \mathbb{R}^n : ||e||_1 = 1\}$ es un compacto, porque es cerrado y está acotado para $||\,||_2$.

La aplicación $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $e \mapsto ||e||$ es continua, pues

$$|\,||e|| - ||e'||\,| \le ||e - e'|| \le M \cdot ||e - e'||_1$$

Sea m el mínimo de $||\,||$ sobre el compacto K. Por tanto, $||\,|| \ge m \cdot ||\,||_1$. En conclusión, la topología definida por $||\,||$ es equivalente a $||\,||_1$.

□

64. Ejercicio: Prueba que si un subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^m$ es acotado para una norma, entonces lo es para cualquier otra norma. Prueba que si una sucesión de vectores $\{e_n \in \mathbb{R}^m\}$ converge a $e \in \mathbb{R}^m$ para una norma, entonces converge a e para cualquier otra norma. Dado $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, denotamos $v^i = \lambda_i$. Prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$ si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} e_n^i = e^i$, para todo i.

Sea X un espacio topológico. Prueba que toda sucesión de funciones continuas $\{f_n : X \to \mathbb{R}^m\}$ acotadas converge uniformemente a una función continua f, considerando en $\mathbb{R}^m$ una norma, entonces converge uniformemente a f considerando cualquier otra norma en $\mathbb{R}^m$. Con las notaciones obvias, prueba que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, si y solo si $\{f_{n,i}\}$ converge uniformemente a f_i, para todo $1 \le i \le m$.

65. Sea E, $||\,||$ un espacio vectorial normado de dimensión finita. Definamos en $\text{End}_k E$ la siguiente norma: modo: Dado $T \in \text{End}_k E$, $||T|| := \text{máx}\{||T(e)|| : ||e|| = 1\}$. Por tanto, $||T(e)|| \le ||T|| \cdot ||e||$, para todo $e \in E$. Además, dados $T, S \in \text{End}_k E$, se cumple que

$$||T \circ S|| = \text{máx}\{||T(S(e))|, \forall\, ||e|| = 1\} \le \text{máx}\{||T|| \cdot ||(S(e))||, \forall\, ||e|| = 1\} = ||T|| \cdot ||S||.$$

La aplicación $\text{End}_k E \times \text{End}_k E \to \text{End}_k E$, $(T, S) \mapsto T \circ S$ es continua: Basta verlo con cualquier norma y en coordenadas es fácil demostrar la continuidad.

2.4. Series

1. Definiciones: Sea $(E, ||\,||)$ un espacio vectorial normado completo y $\{e_n \in E\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores de E. Diremos que la sucesión $\{s_n = \sum_{i=0}^n e_i\}$ es una serie. Si la serie $\{s_n = \sum_{i=0}^n e_i\}$ es convergente denotaremos $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=0}^\infty e_n$. Diremos que la serie $\{s_n\}$ es absolutamente convergente si la serie de números reales $\{\sum_{i=0}^n ||e_i||\}$ es convergente.

2. Ejemplos: Sea $\{a_n\}$ un sucesión aritmética de números complejos, es decir, $a_{n+1} = a_n + c$, para todo n. Entonces, $a_n = c\cdot n + a_0$. Observemos que $a_r + a_s = a_{r+s} + a_0$ para todo r, s, luego $\sum_{i=0}^n a_i = \frac{1}{2}\cdot\sum_{r+s=n}(a_r + a_s) = \frac{n+1}{2}\cdot(cn + 2a_0)$ y $|\sum_{i=0}^\infty a_i| = \infty$ (si $c \neq 0$).

Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica de números complejos, es decir, $a_{n+1} = c\cdot a_n$, para cierto $c \in \mathbb{C}$ y todo n. Entonces, $a_n = c^n \cdot a_0$. Observemos que $a_0 + c\cdot\sum_{i=0}^n a_i = (\sum_{i=0}^n a_i) + a_{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i + c^{n+1}\cdot a_0$, luego $\sum_{i=0}^n a_i = a_0 \cdot \frac{1-c^{n+1}}{1-c}$. La serie geométrica es convergente si y solo si $|c| < 1$, en este caso $\sum_{i=0}^\infty a_i = a_0\cdot\frac{1}{1-c}$.

3. Proposición: *Sea $\{\sum_{i=0}^n e_i\}$ una serie absolutamente convergente. Entonces es convergente y si $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es una biyección se cumple que $\sum_{i=0}^\infty e_i = \sum_{i=0}^\infty e_{\sigma(i)}$.*

Demostración. Es un buen ejercicio para el lector. □

4. Proposición: *Si una serie de vectores $\{\sum_{i=0}^n e_i\}$ cumple que la serie $\{\sum_{i=0}^n ||e_i||\}$ es acotada, entonces la serie es absolutamente convergente.*

Demostración. Toda sucesión creciente de números reales acotada es convergente.
□

5. Proposición: *Sea $\{\sum_{i=0}^n e_i\}$ una serie de vectores. Si existen $r < 1$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{||e_{n+1}||}{||e_n||} < r$, para todo $n \geq m$, entonces la serie $\{\sum_{i=0}^n e_i\}$ es absolutamente convergente.*

Demostración. Observemos que $||e_{n+m}|| < r\cdot||e_{n+m-1}|| < \cdots < r^n\cdot||e_m||$. Entonces,

$$\sum_{i=0}^n ||e_i|| = \sum_{i=0}^m ||e_i|| + \sum_{i=m}^n ||e_i|| \leq \sum_{i=0}^m ||e_i|| + ||e_m||\cdot\sum_{i=0}^\infty r^i = \sum_{i=0}^m ||e_i|| + ||e_m||\cdot\frac{1}{1-r}.$$

Luego, $\{\sum_{i=0}^n ||e_i||\}$ es acotada y $\{\sum_{i=0}^n e_i\}$ es absolutamente convergente.
□

6. Lema: *Si la sucesión $\{e_n\}$ es convergente entonces la sucesión $\{||e_n||\}$ es acotada.*

Demostración. La sucesión $\{||e_n||\}$ es acotada porque es convergente. □

7. Proposición: *Supongamos además que E es una $\mathbb{R}$-álgebra y que $||e \cdot e'|| \leq ||e|| \cdot ||e'||$. Si $\{\sum_{i=0}^n e_n\}$ es absolutamente convergente y $\{\sum_{i=0}^n e'_n\}$ es convergente, entonces la serie $\{\sum_{i+j\leq n} e_i \cdot e'_j\}$ es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i+j\leq n} e_i \cdot e'_j = (\sum_{i=0}^{\infty} e_i) \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} e'_i).$$

Demostración. El morfismo de multiplicación $E \times E \to E$, $(e, e') \mapsto e \cdot e'$ es continuo. Entonces, $(\sum_{i=0}^{\infty} e_i) \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} e'_i) = \lim_{n\to\infty} [(\sum_{i=0}^n e_i) \cdot (\sum_{i=0}^n e'_i)]$[2]

Denotemos $s_n = (\sum_{i=0}^{n} e_i) \cdot (\sum_{i=0}^{n} e'_i)$ y $t_n = \sum_{i+j\leq n} e_i \cdot e'_j$. Sea K una cota de las sucesiones $\{\sum_{i=0}^{n} ||e_i||\}$ y $||\sum_{i=0}^{n} e'_i||$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $||\sum_{i=n+1}^{m} e'_i||, \sum_{i=n}^{m} ||e_i|| \leq \frac{\epsilon}{2K}$, para todo $m > n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
||t_{2n} - s_n|| &= ||(e_0 \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} e'_i + \cdots + e_{n-1} \cdot \sum_{i=n+1}^{n+1} e'_i) + (e_{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} e'_i + \cdots + e_{2n} \cdot \sum_{i=0}^{0} e'_i)|| \\
&\leq (||e_0|| \cdot \frac{\epsilon}{2K} + \cdot + ||e_{n-1}|| \cdot \frac{\epsilon}{2K}) + (||e_{n+1}|| \cdot K + \cdots + ||e_{2n}|| \cdot K) \\
&\leq (K \cdot \frac{\epsilon}{2K}) + (\frac{\epsilon}{2K} \cdot K) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
||t_{2n} - t_{2n-1}|| &= ||\sum_{i+j=2n} e_i \cdot e'_j|| \leq \sum_{i+j=2n} ||e_i|| \cdot ||e'_j|| \\
&\leq (||e_0|| \cdot \frac{\epsilon}{2K} + \cdots + ||e_{n-1}|| \cdot \frac{\epsilon}{2K}) + (||e_n|| \cdot K + \cdots + ||e_{2n}|| \cdot K) \\
&\leq (K \cdot \frac{\epsilon}{2K}) + (\frac{\epsilon}{2K} \cdot K) = \epsilon
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} t_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} t_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i+j\leq n} e_i \cdot e'_j = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = (\sum_{i=0}^{\infty} e_i) \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} e'_i).$$

□

[2] Si la serie $\{\sum_{i=0}^n e'_i\}$ también es absolutamente convergente, entonces $\{(\sum_{i=0}^n ||e_i||) \cdot (\sum_{i=0}^n ||e'_i||)\}$ es convergente. y podemos reordenar los sumandos a discreción y tendremos que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i+j\leq n} e_i \cdot e'_j = (\sum_{i=0}^{\infty} e_i) \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} e'_i)$.

2.4.1. Función exponencial y funciones trigonométricas

Consideremos el compacto $U_m := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq m\}$ y el anillo de funciones continuas de U_m en $\mathbb{C}$, que es un espacio métrico completo con la norma del supremo de las funciones en U_m.

La serie de funciones $\{\sum_{i=0}^n \frac{z^i}{i!}\}$ es absolutamente convergente en U_m, porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||z||_{U_m}^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{||z||_{U_m}^{n}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1.$$

8. Definición: Sea $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

En particular, definimos $e := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$.

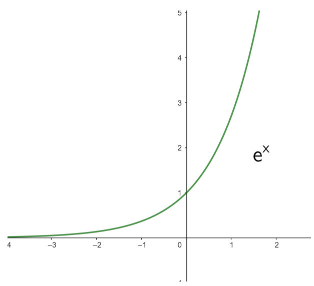
La serie de funciones $\{\sum_{i=0}^n \frac{z^n}{n!}\}$ converge uniformemente a la función continua $\exp(z)$ en todo compacto de $\mathbb{C}$.

9. Proposición: *Se cumple que* $\exp(z+z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$.

Demostración. En efecto,

$$(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}) \overset{2.4.7}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n+m=r} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{z'^m}{m!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z+z')^r}{r!}.$$

□

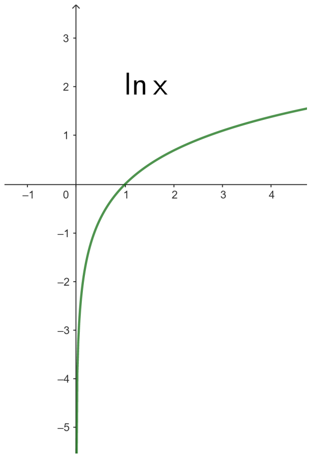
10. 

Consideremos la función $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$. Si $x > x' < 0$ obviamente $\exp(x) > \exp(x') > 0$. Si $x < 0$ entonces $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 1$, luego si $x' < x < 0$ tendremos que $\exp(x') < \exp(x) < 1$. Por tanto, $\exp(x)$ es una función estrictamente creciente y establece un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ con $(0,\infty)$. Además exp es un isomorfismo de grupos de $(\mathbb{R},+)$ en $((0,\infty),\cdot)$. Dado $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, tenemos que $e^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{e \cdot \overset{n}{\cdots} \cdot e} = \exp(\frac{n}{m})$ y si x es el límite de una sucesión de números racionales $\{q_n\}$, entonces

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \exp(q_n) = \lim_{n\to\infty} e^{q_n} =: e^x.$$

Obviamente, $(e^x)^{\frac{n}{m}} = \exp(x)^{\frac{n}{m}} = \exp(x \cdot \frac{n}{m}) = e^{x \cdot \frac{n}{m}}$. Si y es el límite de una sucesión de números racionales $\{q_n\}$, entonces

$$(e^x)^y := \lim_{n\to\infty} (e^x)^{q_n} = \lim_{n\to\infty} e^{x \cdot q_n} = e^{xy}.$$

11. 

Sea $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la aplicación inversa de e^x. Entonces,

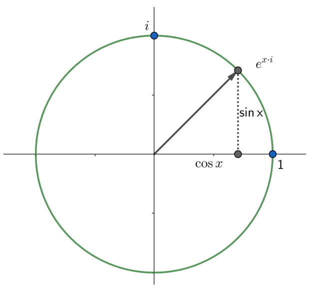
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \text{ y } \ln(x^y) = y\ln(x).$$

12. Definición: Consideremos la función $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(xi)$. También denotaremos $\exp(xi) = e^{xi}$. Definimos $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ como las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $\exp(xi) = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$. Es decir,

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ \operatorname{sen} x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned}$$

Como $1 = e^{0\cdot i}$, tenemos que $\cos(0) = 1$ y $\operatorname{sen}(0) = 0$. Obviamente, $\cos(x) = \cos(-x)$ y $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$.

El morfismo de conjugación $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + y\cdot i \mapsto \overline{x + y \cdot i} = x - y \cdot i$ es continuo. Por tanto, $\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z})$. Las series de funciones $\{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}\}$ y $\{\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\}$ convergen uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$ a $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, porque la serie $\{\sum_{m=0}^{n} \frac{(ix)^m}{(m)!}\}$ converge uniformemente en compactos a e^{xi}.



13. Proposición: *Se cumple que*

1. $e^{(x+y)\cdot i} = e^{xi} \cdot e^{yi}$.
2. $|e^{xi}| = 1$.

Demostración. 2. $|e^{xi}| = \sqrt{e^{xi} \cdot \overline{e^{xi}}} = \sqrt{e^{xi} \cdot e^{-xi}} = \sqrt{1} = 1$. □

14. Corolario: *Se cumple que*

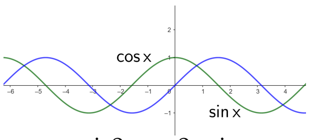
1. $\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)$.
2. $\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x)\cos(y)$.
3. $\cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)^2 = 1$.

15. Supongamos que la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{xi}$ es inyectiva. Entonces, $\cos\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es inyectiva: si $\cos x = \cos x'$, entonces $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \pm\sqrt{1-\cos^2 x'} = \operatorname{sen}(\pm x')$, luego $e^{xi} = e^{\pm x' i}$, $x = \pm x'$ y $x = x'$. Por ser $\cos x$ inyectiva en $\mathbb{R}^+$ y alcanzar el máximo en $x = 0$, es fácil probar que $\cos x$ es decreciente,. Como $\cos(\mathbb{R}^+)$ es un intervalo semiabierto (incluido en $[-1,1]$), tendremos que $\cos(\mathbb{R}^+) = (a,1]$, con $a = \lim_{r\to\infty} \cos(r)$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}^+$, si $\operatorname{sen}\lambda = 0$, entonces $\cos\lambda = \pm 1$ y $1 = (e^{\lambda i})^2 = e^{2\lambda i}$ y llegamos a contradicción. Luego, $\operatorname{sen}(x)$ no cambia de signo y $|\operatorname{sen} x|$ es creciente. Sea $b = \lim_{r\to\infty} \operatorname{sen}(r)$. Entonces,

$$a + bi = \lim_{r\to\infty} e^{ri} = \lim_{r\to\infty} e^{2ri} = \lim_{r\to\infty} (e^{ri})^2 = (\lim_{r\to\infty} e^{ri})^2 = (a+bi)^2$$

Luego $a = 1$, $b = 0$ (ya que $a + bi$ es de módulo 1), luego $\cos x = 1$, lo cual es imposible porque $\cos(1) = 1 - (\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}) - (\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!}) - \cdots < 1$. En conclusión, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{xi}$ no es inyectiva.

Existen $x \neq x'$ tal que $e^{xi} = e^{x'i}$, luego $e^{(x-x')i} = 1$. Sea $c = x - x'$, entonces $e^{(a+nc)\cdot i} = e^{a\cdot i}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Luego, $\operatorname{Im}(e^{x\cdot i}) = e^{[0,c]\cdot i}$. Sea $2\cdot\pi := \inf\{x > 0 \colon e^{xi} = 1\}$. Si $\pi = 0$, entonces existe una sucesión decreciente de puntos $c_n > 0$, tal que $e^{c_n\cdot i} = 1$ y $\operatorname{Im}(e^{x\cdot i}) = \cap_n e^{[0,c_n]\cdot i} = \{1\}$, lo cual es imposible. Evidentemente, $e^{2\pi\cdot i} = 1$ y dados $x, x' \in [0,2\pi)$ distintos se cumple que $e^{x\cdot i} \neq e^{x'\cdot i}$.



Obviamente, $e^{(x+2\pi)i} = e^{xi}$, luego

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \text{ y } \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x).$$

Como $(e^{\pi\cdot i})^2 = e^{2\cdot\pi\cdot i} = 1$, tenemos que $e^{\pi\cdot i} = -1$, $\cos\pi = -1$ y $\operatorname{sen}\pi = 0$ (y π es el mínimo número real positivo cumpliendo cualquiera de estas tres igualdades). Como $\operatorname{sen} x = (1 - \frac{x^3}{3!}) + (\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}) + \cdots$ es claro que $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$, para todo $\alpha \in (0,1)$. Luego, $\operatorname{sen} x$ es positivo en $(0,\pi)$. Sea $\alpha > 0$ mínimo tal que $\cos(\alpha) = 0$, luego $\alpha \in (0,\pi)$ y $\operatorname{sen}\alpha = 1$. Como $e^{4\alpha\cdot i} = (e^{\alpha i})^4 = i^4 = 1$, entonces $4\cdot\alpha = 2\cdot\pi$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Es decir, $e^{\frac{\pi}{2}\cdot i} = i$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ (y $\frac{\pi}{2}$ es el mínimo número real positivo cumpliendo cualquiera de estas tres igualdades). Observemos, que

$$e^{(\frac{\pi}{2}+x)\cdot i} = e^{\frac{\pi}{2}\cdot i} \cdot e^{x\cdot i} = i \cdot e^{x\cdot i}$$

Luego, $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$. Por último dejamos que el lector pruebe que las siguientes aplicaciones son biyectivas

$$[0,\pi] \overset{\cos}{\to} [1,-1], \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \overset{\operatorname{sen}}{\to} [-1,1], \quad [0,2\pi) \overset{e^{xi}}{\to} S^1.$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ no nulo, entonces $z\cdot|z|^{-1}$ es de módulo 1, es decir, pertenece a S^1 y existe un único $\theta \in [0,2\pi)$, tal que

$$z = |z| \cdot e^{\theta\cdot i}.$$

Se dice θ es el argumento de z y que la forma exponencial de z es $|z| \cdot e^{\theta\cdot i}$.

2.5. Problemas

1. Prueba que $\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$.

   Solución: Nos piden que probemos que no existe $r\in\mathbb{R}$ tal que $r^2=-1$. Probemos que $r^2\geq 0$, para todo $r\in\mathbb{R}$. Sea r la clase de equivalencia de una sucesión de Cauchy de números racionales $\{a_n\}$. Entonces, $r^2=[\{a_n^2\}]\geq 0$.

2. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales.

   a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $b_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+\cdots+b_n)=\infty$, entonces
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}=a.$$

   b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$.

   c) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=a$, $b_n>0$, para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+\cdots+b_n)=\infty$, entonces
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{c_1+\cdots+c_n}{b_1+\cdots+b_n}=a.$$

   d) **Criterio de Stolz:** Si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=a$, $\{b_n\}$ es creciente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=a$.

   e) Si $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$.

   Solución: *a*) Sea $\epsilon>0$. Existe $k\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>k$, entonces $|a_n-a|<\epsilon/2$. Entonces,

   $$\left|\tfrac{a_1b_1+\cdots a_nb_n}{b_1+\cdots+b_n}-a\right|=\left|\tfrac{(a_1-a)b_1+\cdots(a_n-a)b_n}{b_1+\cdots+b_n}\right|$$
   $$\leq\tfrac{|(a_1-a)b_1+\cdots(a_k-a)b_k|}{b_1+\cdots+b_n}+\tfrac{|(a_{k+1}-a)b_{k+1}+\cdots(a_n-a)b_n|}{b_1+\cdots+b_n}\leq\tfrac{|(a_1-a)b_1+\cdots(a_k-a)b_k|}{b_1+\cdots+b_n}+\tfrac{\epsilon}{2}\tfrac{b_{k+1}+\cdots b_n}{b_1+\cdots+b_n}<\epsilon$$

   para todo $n>>0$.

   b) Es un caso particular de *a*) cuando $b_n=1$, para todo n.

   c) Tómese en *a*), $a_n=\frac{c_n}{b_n}$.

   d) Sea $a_n'=a_n-a_{n-1}$ y $b_n'=b_n-b_{n-1}$ ($a_0=b_0=0$). Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n'}{b_n'}=a$, $b_n'>0$, para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1'+\cdots+b_n')=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, y por *c*)
   $$a=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1'+\cdots+a_n'}{b_1'+\cdots+b_n'}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$

   e) Es consecuencia del criterio de Stolz, tomando $b_n=n$.

3. Prueba que un espacio topológico X es Hausdorff si y solo si $\Delta := \{(x,x) \in X \times X, \forall x \in X\}$ es un subespacio cerrado de $X \times X$.

4. Sea $Y \subset X$ un subespacio denso (es decir, $\bar{Y} = X$), Z un espacio Hausdorff y $f,g\colon X \to Z$ dos aplicaciones continuas. Prueba que $f = g \iff f_{|Y} = g_{|Y}$.

5. Sea $r > 0$ un número real y $n \in \mathbb{N}$. Prueba que existe un único número real $s > 0$ tal que $s^n = r$ (se denota $s = \sqrt[n]{r}$).

   Solución: La función $x^n\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \alpha^n$ es una función estrictamente creciente y $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ y $0^n = 0$, luego x^n toma todos los valores reales positivos, una única vez.

6. Prueba que S^2 (superficie esférica de $\mathbb{R}^3$) es compacto.

   Solución: S^2 es un cerrado de $\mathbb{R}^3$, pues si consideramos la función continua $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ entonces $S^2 = \pi^{-1}(1)$. Es además un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$, luego es un compacto.

7. Prueba que existe un punto en la superficie terrestre tal que éste y su antípoda están a la misma temperatura.

   Solución: Sea $t\colon S^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación continua que asigna a cada punto de la superficie terrestre su temperatura. Consideremos la aplicación $T\colon S^2 \to \mathbb{R}$, $T(p) = t(p) - t(-p)$, que es continua. Observemos que $T(p) = -T(-p)$. S^2 es conexo: Sea $p = (p_1, p_2, p_3)$ el polo norte y $\pi\colon \mathbb{R}^3 - \{x_3 - p = 0\} \to \mathbb{R}^2$ la aplicación que asigna a cada punto q al punto de corte de la recta que pasa por p y con q con el plano $x_3 = 0$. Resulta que $S^2 - p$ es vía π homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, luego es conexo. De modo equivalente si q es el polo su $S^2 - q$ es conexo. Por último, S^2 es conexo porque es la unión de estos dos conexos (que no son disjuntos). Por tanto, $T(S^2)$ es un conexo de $\mathbb{R}$ (en el que si está un punto, entonces está su opuesto). Luego, $T(S^2)$ es un intervalo semiabierto, en el que si a es un extremo entonces $-a$ es el otro extremo. Por tanto, $0 \in T(S^2)$, es decir, existe $x \in S^2$ tal que $T(x) = 0$, x es el punto buscado.

8. Se dice que un espacio topológico X es arcoconexo si para cada pareja de puntos $p,q \in X$ existe una aplicación continua $\sigma\colon [0,1] \to X$ de modo que $\sigma(0) = p$ y $\sigma(1) = q$. Prueba que los espacios topológicos arcoconexos son conexos.

9. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación continua inyectiva. Prueba que f establece un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ con un intervalo abierto $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (donde puede ser $a = -\infty$ o $b = \infty$).

   Solución: Sean $c < d$ números reales. Si $f(c) < f(d)$ entonces $(f(c), f(d)) \subset f((c,d))$ porque f es continua. Si existe $x \in (c,d)$ tal que $f(x) \geq f(d)$, entonces existe $x' \in (c,x]$ tal que $f(x') = f(d)$, pero esto es imposible porque f es inyectiva y

$x' \neq d$. Del modo equivalente probamos que no existe $x \in (c,d)$ de modo que $f(x) \leq f(c)$. Por tanto, $f((c,d)) = (f(c), f(d))$. Igualmente, si $f(c) > f(d)$ entonces $f((c,d)) = (f(d), f(c))$.

En conclusión f es una aplicación abierta (la imagen de todo abierto es un abierto). Como $\mathbb{R}$ es conexo, $f(\mathbb{R})$ es un conexo, luego es igual a un intervalo abierto (a,b). Es más, $\mathbb{R}$ es homemorfo vía f a (a,b).

10. Sea X un espacio topológico y $f: X \to Y$ una aplicación. Consideremos en Y la topología final de f, es decir, $U \subset Y$ es un abierto si y solo si $f^{-1}(U)$ es un abierto de X.

    Sea $g: Y \to Z$ una aplicación entre espacios topológicos. 1. Prueba que g es continua si y solo si $g \circ f$ es continua.

    Consideremos en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y \iff$ existe $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $y = \lambda \cdot x$. Sea $\mathbb{P}^{n-1} := \mathbb{R}^n - \{0\}/\sim := \{[x],\, x \in \mathbb{R}^n - \{0\}\}$ y consideremos en $\mathbb{P}^{n-1}$ la topología final de la aplicación $\pi: \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$, $\pi(x) = [x]$. 2. Prueba que $U_i := \{[(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^{n-1} : x_i \neq 0\}$ es un abierto homeomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$ y que $\mathbb{P}^{n-1} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. 3. Prueba que $\mathbb{P} * n - 1$ es compacto.

    Solución: 1. Sea U un abierto de Z. Observemos que $g^{-1}(U)$ es un abierto de Y si y solo si $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ es un abierto de X.

    2. U_i es un abierto de $\mathbb{P}^{n-1}$ porque $\pi^{-1}(U_i) = \mathbb{R}^n - \{x_i = 0\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. La aplicación $\phi_i: U_i \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\phi([(x_1, x_2 \dots, x_n)]) = (x_1/x_i, \dots, x_n/x_i)$ es continua porque $\phi_i \circ \pi$ es continua. Sea $\varphi_i: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_i((x_1, x_2 \dots, x_n)) := (x_1, x_2, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x_n)$. Es fácil comprobar que $\pi \circ \varphi_i$ es la inversa de ϕ_i.

    Obviamente, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i^c = \emptyset$, luego $\mathbb{P}^{n-1} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

    3. La superficie esférica $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ es un cerrado acotado de $\mathbb{R}^n$, luego es un compacto. La composición de aplicaciones continuas $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^{n-1}$ es epiyectiva, luego $\mathbb{P}^{n-1}$ es compacto.

11. Consideremos el morfismo de grupos de paso al cociente $\pi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\pi(r) = [r]$ y consideremos en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología final de π. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Prueba que la aplicación $\phi: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1$, $\phi([x]) = e^{ix}$ es un homeomorfismo.

    Solución: Sabemos que ϕ es biyectiva, y es continua porque lo es la composición $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$. Observemos que $\pi([0, 2\pi]) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, luego $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es compacto. Por tanto, la imagen por ϕ de un cerrado (compacto) es un compacto, que es cerrado porque S^1 es compacto y Hausdorff. Por lo tanto, ϕ^{-1} es continua, luego ϕ es un homeomorfismo.

12. Consideremos la biyección $I\colon (0,2\pi] \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $I(r) = [r]$ y consideremos en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología dada en el problema anterior. Vía I tenemos la correspondiente topología en $(0,2\pi]$. Da una base de entornos de cada punto de $(0,2\pi]$.

13. **Serie binomial:** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ y $\binom{\alpha}{0} := 1$. Prueba que
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n, \text{ (para } |x|<1).$$

Solución: Dados $0<\epsilon<1$ y $k>0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$|\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} / \binom{\alpha}{n} x^n| = |(\alpha-n)/(n+1)| \cdot |x| < 1, \text{ para todo } n \geq m,\ |x| \leq \epsilon \text{ y } |\alpha| \leq k.$$

La serie de funciones continuas en $[-\epsilon,\epsilon]\times[-k,k]$, $\sum\limits_{n=0}^{m} \binom{\alpha}{n}\cdot x^n$, es absolutamente convergente por la proposición 2.4.5, luego convergente. Observemos que
$$(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\beta}{n}\cdot x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{r+s=n}\binom{\alpha}{r}\cdot\binom{\beta}{s})\cdot x^n \underset{3}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{n}\cdot x^n$$
Además, $1+x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{1}{n}\cdot x^n$ (para $|x|<1$). Por tanto, $(1+x)^{r/s} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{r/s}{n}\cdot x^n$, para $r,s \in \mathbb{Z}$ (y $|x|<1$). Por continuidad en α, $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (y $|x|<1$).

14. Prueba que el número e es irracional.

Solución: Sabemos que $e = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$, luego
$$2 \leq e = 2'5 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < 2 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{3^2 3!} + \cdots = 2 + \frac{1/6}{1-1/3} = 2'5 + \frac{1}{6-2} = 2'75,$$
luego e no es un número natural. Supongamos que $e = \frac{p}{q}$, con $p,q \in \mathbb{N}$ y $q>1$. Entonces,
$$q!\cdot\frac{p}{q} = q!\cdot e = q!\cdot\sum_{i=0}^{q}\frac{1}{i!} + q!\cdot\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i!}$$
Por lo tanto, $q!\cdot\sum\limits_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i!} = q!\cdot\frac{p}{q} - q!\cdot\sum\limits_{i=0}^{q}\frac{1}{i!} \in \mathbb{N}$. Ahora bien, $q!\cdot\sum\limits_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i!} < \sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q^i} = \frac{1/q}{1-1/q} = \frac{1}{q-1} \leq 1$, luego $q!\cdot\sum\limits_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i!} \notin \mathbb{N}$, contradicción.

[3] Se cumple la igualdad de polinomios $\sum\limits_{r+s=n}\binom{x}{r}\cdot\binom{y}{s} = \binom{x+y}{n}$, porque para todo $x,y \in \mathbb{N}$ coinciden.

15. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe y es distinto de ∞, y la serie $\{\sum\limits_{i=0}^{n} b_i\}$ es convergente, prueba que $\{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\}$ es convergente.

Capítulo 3

Derivada e integral de funciones de variable real

3.1. Introducción

¿Qué número real es sen(20/21)? Para calcular $2^{20/21}$ ¿no tengo otra opción que calcular 2^{20} y después calcular por la cuenta de la vieja, con la aproximación que me pidan, $\sqrt[21]{2^{20}}$? Si $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Q}[x]$ sabemos calcular con exactitud $p(20/21)$. Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ sabemos calcular con la aproximación que nos pidan $p(20/21)$.

Uno de los resultados fundamentales del Análisis nos dice que ciertas funciones f (las "derivables" n veces) son aproximables por polinomios, es decir,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p) + \cdots + a_{n-1}(x-p)^{n-1} + h(x)\cdot(x-p)^n$$

con $h(x)$ continua. Este desarrollo en potencias de $x-p$ se denomina desarrollo de Taylor de orden n en $p \in \mathbb{R}$ de $f(x)$. Para el cálculo de los coeficientes a_i necesitaremos introducir el concepto de derivada y probar sus propiedades.

En muchos problemas de Economía, Física, Química, Biología aparecen funciones de las que únicamente se conoce cierta relación lineal de la función y sus sucesivas derivadas, es decir, se conoce que la función cumple cierta ecuación diferencial lineal. Resolveremos este tipo de ecuaciones diferenciales y daremos múltiples ejemplos.

El proceso contrario al de derivación es el de integración y la regla de Barrow probará que la integral de una función está estrechamente relacionado con el cálculo del área delimitada por la gráfica de la función y el eje $0X$. Por una parte, probaremos que si conocemos el desarrollo de Taylor de la derivada de una función (y es una buena aproximación a la derivada de función), integrando obtendremos el desarrollo de Taylor de la función (y será una buena aproximación). Por otra parte, el cálculo de áreas podrá reducirse en última instancia a un problema de derivadas.

3.2. Derivada de una función

1. Definición: Sea U un entorno abierto de $p \in \mathbb{R}$. Diremos que una función $f : U \to \mathbb{R}$ es derivable en p cuando exista una función $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ continua en p tal que

$$f(x) = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x - p).$$

"La función $f(x)$ es derivable en p cuando es desarrollable por Taylor en p hasta orden 1."

2. Proposición: *La función f es derivable en p si y sólo si existe*

$$f'(p) := \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

(y si existe, entonces $\tilde{f}(p) = f'(p)$).

Demostración. $\Rightarrow$) $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ (para $x \neq p$) y $\tilde{f}(p) = \lim_{x \to p} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$.

$\Leftarrow$) Definamos $\tilde{f} := \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, para $x \neq p$, y $\tilde{f}(p) := f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. □

Si $V \subset U$ es un entorno abierto de p, entonces $f : U \to \mathbb{R}$ es derivable en p si y solo si $f_{|V}$ es derivable en p, y $(f_{|V})'(p) = f'(p)$.

3. Si f es derivable en p entonces es continua en p, ya que $f = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x - p)$ y $f(p)$, $\tilde{f}(x)$ y $x - p$ son continuas en p.

4. Definición: Si f es derivable en todos los puntos de un abierto U de $\mathbb{R}$, denotaremos por $f'(x)$ la función que sobre cada punto p vale $f'(p)$ y diremos que f' es la derivada de $f(x)$.

5. Ejemplos: Sea λ la función real constante de valor $\lambda \in \mathbb{R}$. Obviamente $\lambda' = 0$.
La derivada de la función x es $x' = 1$.

6. Ejemplo: Sea f derivable en p y supongamos que $f(p) \neq 0$. Veamos que $1/f$ es derivable en p y que $(1/f)'(p) = \frac{-f'(p)}{f(p)^2}$. En efecto,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f(p)} + (\frac{1}{f} - \frac{1}{f(p)}) = \frac{1}{f(p)} + \frac{-(f - f(p))}{f(p)f} = \frac{1}{f(p)} + \frac{-\tilde{f} \cdot (x-p)}{f(p)f} = \frac{1}{f(p)} + \frac{-\tilde{f}}{f(p)f} \cdot (x - p).$$

Luego, $\frac{1}{f}$ es derivable en p y $(1/f)'(p) = \frac{-\tilde{f}(p)}{f(p)^2} = \frac{-f'(p)}{f(p)^2}$.

7. Ejemplo: Sea $f: U \to V$ un homeomorfismo entre dos abiertos de $\mathbb{R}$. Si f es derivable en $p \in U$ y $f'(p) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(p)$ y

$$(f^{-1})'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}.$$

En efecto, $f(x) = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x-p)$. Tomando $x = f^{-1}(y)$ en la igualdad anterior, obtenemos $y = f(p) + \tilde{f}(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y) - f^{-1}(f(p)))$ y despejando $f^{-1}(y)$ obtenemos

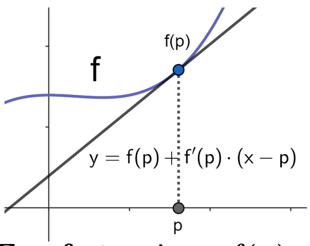
$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(p)) + \frac{1}{\tilde{f}(f^{-1}(y))} \cdot (y - f(p)).$$

Por tanto, $f^{-1}(y)$ es derivable en $f(p)$ y $(f^{-1})'(f(p)) = \frac{1}{\tilde{f}(f^{-1}(f(p)))} = \frac{1}{f'(p)}$.

8. Si escribimos $o(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(p) = \tilde{f}(x) - f'(p)$, entonces $\lim\limits_{x\to p} o(x) = 0$ y

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + o(x) \cdot (x-p).$$

Observemos que $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p))}{x-p} = 0$.



La recta $y = f(p) + f'(p)(x-p)$ es la recta que mejor se aproxima a la gráfica de f en el punto $(p, f(p))$, es decir, cualquier otra recta $y = a + b(x-p)$, para valores de x cercanos a p, cumple que

$$h(x) := |f(x) - a - b(x-p)| > |f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)| =: g(x)$$

En efecto, si $a \neq f(p)$ entonces $h(p) > 0 = g(p)$ y en un entorno de p, $h(x) > g(x)$. Supongamos pues que $a = f(p)$. Si $b \neq f'(p)$, entonces

$$\lim_{x\to p} \frac{h(x)}{|x-p|} = |f'(p) - b| > 0 = \lim_{x\to p} \frac{g(x)}{|x-p|}$$

y en un entorno de p, $h(x) > g(x)$.

Diremos que $y = f(p) + f'(p)(x-p)$ es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(p, f(p))$.

3.2.1. Propiedades de la derivada

9. Proposición: *Sean f y g derivables en p. Entonces $f+g$ es derivable en p y*

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p).$$

Demostración. Escribamos $f = f(p) + \tilde{f}(x)\cdot(x-p)$ y $g(x) = g(p) + \tilde{g}(x)(x-p)$ con $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ continuas en p. Entonces,

$$f + g = f(p) + \tilde{f}(x)\cdot(x-p) + g(p) + \tilde{g}(x)(x-p) = (f+g)(p) + (\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x))(x-p)$$

Luego, $f+g$ es derivable en p y

$$(f+g)'(p) = \tilde{f}(p) + \tilde{g}(p) = f'(p) + g'(p).$$

□

10. Regla de Leibniz : *Sean f y g derivables en p. Entonces $f\cdot g$ es derivable en p y*

$$(f\cdot g)'(p) = f'(p)\cdot g(p) + f(p)\cdot g'(p).$$

Demostración. Escribamos $f = f(p) + \tilde{f}(x)\cdot(x-p)$ y $g(x) = g(p) + \tilde{g}(x)(x-p)$ con $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ continuas en p. Entonces,

$$\begin{aligned} f\cdot g &= (f(p) + \tilde{f}(x)\cdot(x-p))\cdot(g(p) + \tilde{g}(x)(x-p)) \\ &= f(p)g(p) + (\tilde{f}(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\tilde{g}(x) + \tilde{f}(x)\cdot\tilde{g}(x)\cdot(x-p))\cdot(x-p). \end{aligned}$$

Luego, $f\cdot g$ es derivable en p y

$$\begin{aligned} (f\cdot g)'(p) &= [\tilde{f}(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\tilde{g}(x) + \tilde{f}(x)\cdot\tilde{g}(x)\cdot(x-p)](p) = \tilde{f}(p)\cdot g(p) + f(p)\cdot\tilde{g}(p) \\ &= f'(p)\cdot g(p) + f(p)\cdot g'(p). \end{aligned}$$

□

11. Ejemplos : Observemos que $(\frac{f}{g})' = (f\cdot\frac{1}{g})' = f'\cdot\frac{1}{g} - f\cdot\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Sea $n>0$, probemos por inducción sobre n, que $(x^n)' = nx^{n-1}$: En efecto, $(x^n)' = (x\cdot x^{n-1})' = x'\cdot x^{n-1} + x\cdot(x^{n-1})' = x^{n-1} + x\cdot(n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}$.

Si $n<0$, entonces $(x^n)' = (\frac{1}{x^{-n}})' = \frac{-(x^{-n})'}{x^{-2n}} = \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}$.

12. Ejercicio : Sean f y g n-veces derivables. Prueba que $(f\cdot g)^{n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f^{i)}\cdot g^{n-i)}$.

13. Regla de la cadena: *Sea U un entorno de p, $f\colon U\to\mathbb{R}$ una función derivable en p, V un entorno de $f(p)$ tal que $f(U)\subset V$ y $g\colon V\to\mathbb{R}$ una función derivable en $f(p)$. Entonces, $g\circ f\colon U\to\mathbb{R}$ es derivable en p y*

$$(g\circ f)'(p) = g'(f(p))\cdot f'(p).$$

Demostración. Tenemos $f(x) = f(p) + \tilde{f}(x)\cdot(x-p)$ y $g(y) = g(f(p)) + \tilde{g}(y)\cdot(y - f(p))$. Luego,

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x) = g(f(x)) &= g(f(p)) + \tilde{g}(f(x))\cdot(f(x) - f(p)) \\ &= g(f(p)) + \tilde{g}(f(x))\cdot\tilde{f}(x)\cdot(x-p). \end{aligned}$$

Luego, $g\circ f$ es derivable en p, porque $f(x)$ es continua en p, $\tilde{g}(x)$ en $f(p)$ y $\tilde{f}$ en p. Además,

$$(g\circ f)'(p) = \tilde{g}(f(p))\cdot\tilde{f}(p) = g'(f(p))\cdot f'(p).$$

□

14. Ejercicio: Prueba el ejemplo 3.2.7, usando la regla de la cadena.

3.2.2. Derivada de funciones vectoriales de variable real

15. Definición: Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto y $p \in U$. Diremos que $f: U \to \mathbb{R}^n$ es derivable en p cuando exista una función $\tilde{f}: U \to \mathbb{R}^n$ continua en p tal que

$$f(x) = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x - p).$$[1]

Si f es derivable en p entonces es continua en p, ya que $f = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x-p)$ y $f(p)$, $\tilde{f}(x)$ y $x - p$ son continuas en p.

La función $\tilde{f}: U \to \mathbb{R}^n$ continua en p que cumple que $f = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x-p)$ es la función $\tilde{f}(x) := \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, para $x \neq p$, y $\tilde{f}(p) := \lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. En caso de existir la función $\tilde{f}$, ésta es única. Seguiremos la notación $f'(p) := \lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \tilde{f}(p)$ y diremos que $f'(p)$ es la derivada de f en p. Obviamente, $f: U \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ es derivable en p, si y solo si $f_i(x)$ es derivable en p para todo i. Además, $f'(p) = (f_1'(p), \dots, f_n'(p))$.

Si f es derivable en todos los puntos de un abierto U de $\mathbb{R}$, denotaremos por $f'(x)$ la función que sobre cada punto p vale $f'(p)$ y diremos que f' es la derivada de $f(x)$. Obviamente, $f'(x) = (f_1'(x), \dots, f_n'(x))$.

16. Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto y E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y consideremos en E la topología definida por cualquiera de sus normas. Se dice que una función $f: U \to E$, es derivable en $p \in U$ cuando exista una función $\tilde{f}: U \to E$ continua en p tal que

$$f(x) = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x - p).$$

Si f es derivable en p entonces es continua en p, ya que $f = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x-p)$ y $f(p)$, $\tilde{f}(x)$ y $x - p$ son continuas en p.

La función $\tilde{f}: U \to E$ continua en p que cumple que $f = f(p) + \tilde{f}(x) \cdot (x-p)$ es la función $\tilde{f}(x) := \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, para $x \neq p$, y $\tilde{f}(p) := \lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. En caso de existir la función $\tilde{f}$, ésta es única. Seguiremos la notación $f'(p) := \lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \tilde{f}(p)$ y diremos que $f'(p)$ es la derivada de f en p. Si f es derivable en todos los puntos de un abierto U de $\mathbb{R}$, denotaremos por $f'(x)$ la función que sobre cada punto p vale $f'(p)$ y diremos que f' es la derivada de $f(x)$.

Si $T: E \to E'$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, entonces $(T \circ f)'(p) = T(f'(p))$.

17. Ejemplo: La función $f: U \to \mathbb{C}$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \cdot i$ es derivable en U si y solo si f_1 y f_2 son derivables en U. Además, $f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) \cdot i$.

---

[1] Con mayor rigor debiéramos escribir $f(x) = f(p) + (x - p) \cdot \tilde{f}(x)$.

3.2.3. Derivada de funciones elementales

18. Ejemplo: Calculemos la derivada de e^x:

$$(e^x)' = \lim_{t\to 0} \frac{e^{x+t} - e^x}{t} = e^x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^x,$$

porque $\frac{e^t-1}{t} = 1 + t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}$.

La aplicación inversa de e^x es $\ln x$ y si denotamos $x = e^y$, tenemos

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

19. Ejercicio: Prueba que $(e^{5x})' = 5 \cdot e^{5x}$.

20. Ejercicio: Dado $a > 0$, prueba que $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$.

21. Ejemplo: Calculemos la derivada de la función $f(x)^{g(x)}$ (con $f(x) > 0$, para todo x): $\ln(f(x)^{g(x)})' = \frac{(f(x)^{g(x)})'}{f(x)^{g(x)}}$ y por otra parte $\ln(f(x)^{g(x)})' = (g(x) \cdot \ln(f(x)))' = g' \cdot \ln f + \frac{gf'}{f}$. Por lo tanto,

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (\ln(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (g' \cdot \ln f + \frac{gf'}{f}).$$

22. Ejercicio: Sea $a \in \mathbb{R}$. Prueba que $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ $(x > 0)$.

23. Proposición: *1.* $(\exp(xi))' = i \cdot \exp(xi)$.

2. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

3. $(\operatorname{sen} x)' = \cos(x)$.

Demostración. 1. $(e^{xi})' = \lim_{t\to 0} \frac{e^{(x+t)i} - e^{xi}}{t} = e^{xi} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{e^{ti}-1}{t} = i \cdot e^{xi}$, porque tenemos que $\frac{e^{ti}-1}{t} = i + ti \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ti)^n}{(n+2)!}$.

2. y 3. $(\cos x)' + i(\operatorname{sen} x)' = (\cos x + i \operatorname{sen} x)' = (e^{xi})' = i \cdot e^{xi} = -\operatorname{sen} x + i \cos x$.

□

24. La función $\cos x$ establece un homeomorfismo de $(0, \pi)$ con $(-1,1)$. Denotaremos por $\arccos x$ la función inversa de $\cos x$ que establece un homeomorfismo de $(-1,1)$ con $(0,\pi)$. Tenemos que

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

La función $\operatorname{sen} x$ establece un homeomorfismo de $(-\pi/2, \pi/2)$ con $(-1,1)$. Denotaremos por $\operatorname{arcsen} x$ la función inversa de $\operatorname{sen} x$ que establece un homeomorfismo de $(-1,1)$ con $(-\pi/2, \pi/2)$. Tenemos que

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La función $\tan x := \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ establece un homeomorfismo de $(-\pi/2, \pi/2)$ con $(-\infty.\infty)$. Se cumple que $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$. Denotaremos por $\arctan x$ la función inversa de $\tan x$ que establece un homeomorfismo de $(-\infty, \infty)$ con $(-\pi/2, \pi/2)$. Tenemos que

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

La función $\cot x := \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ establece un homeomorfismo de $(0, \pi)$ con $(-\infty.\infty)$. Se cumple que $(\cot x)' = -1 - (\cot x)^2$. Denotaremos por $\operatorname{arccot} x$ la función inversa de $\cot x$ que establece un homeomorfismo de $(-\infty, \infty)$ con $(0, \pi)$. Tenemos que

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{-1 - (\cot(\operatorname{arccot} x))^2} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

La función $\cosh x := \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ se denomina coseno hiperbólico de x. La función $\operatorname{senh} x := -i \cdot \operatorname{sen}(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ se denomina seno hiperbólico de x. Obsérvese que $(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1$ y que

$$(\cosh x)' = -i \operatorname{sen}(ix) = \operatorname{senh} x, \ \ (\operatorname{senh} x)' = -i^2 \cos(ix) = \cosh x$$

El coseno hipérbolico es una función par, $\cosh x = \cosh -x$, es creciente en $(0, \infty)$ y establece un homeomorfismo de $(0, \infty$ con $(1, \infty)$. La función inversa del $\cosh x$ en $(1, \infty)$ se denomina arcocoseno hiperbólico, se denota $\operatorname{arccosh} x$ y

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\operatorname{senh}(\operatorname{arccosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Tenemos que $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$. El seno hipérbolico es una función impar, $\operatorname{senh} x = \operatorname{senh} -x$, es creciente en $\mathbb{R}$ y establece un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$. La función inversa del $\operatorname{senh} x$ en $\mathbb{R}$ se denomina arcoseno hiperbólico, se denota $\operatorname{arcsenh} x$ y

$$(\operatorname{arcsenh} x)' = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsenh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Tenemos que $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$.

3.3. Teoremas de Rolle y valor medio

1. Proposición: *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$ tal que $f(c)$ es un máximo local o un mínimo local y supongamos que $f'(p)$ existe, entonces $f'(p) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $f(c)$ es un máximo local, Entonces, $\lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ y $\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Luego, $f'(c) = 0$.

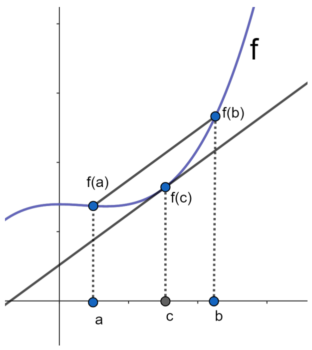
Idem, si $f(c)$ es un mínimo local. □

2. Teorema de Rolle : *Si f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$*

Demostración. Por ser $f(x)$ continua en un intervalo cerrado, existen máximos y mínimos globales de $f(x)$ en $[a,b]$. Si ambos están en $\{a,b\}$, entonces la función es constante y su derivada es nula. Si alguno está en (a,b) entonces la derivada de f se anula en él, por la proposición anterior.

□

Podemos generalizar el teorema de Rolle.



3. Proposición : *Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y sea $t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (la pendiente de la recta $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = t$. Es decir,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Demostración. Sea $g(x) = f(x) - (f(a) + t \cdot (x-a))$. Se cumple que $g(a) = 0 = g(b)$. Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que $0 = g'(c) = f'(c) - t$, luego $f'(c) = t$. □

4. Corolario: *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto. Si $f' > 0$ entonces f es estrictamente creciente en (a,b). Si $f' < 0$. entonces f es estrictamente decreciente en (a,b).*

Demostración. Supongamos $f' > 0$. Dados dos puntos $c < d$ cualesquiera de (a,b) tenemos que probar que $f(c) < f(d)$. Si $f(c) \geq f(d)$, la pendiente t de la recta que pasa por $(c, f(c))$ y $(d, f(d))$ sería menor igual que cero y existiría un punto $c' \in (c,d)$ tal que $f'(c') = t \leq 0$, contradicción.

□

5. Corolario: *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto. Entonces, $f' = 0$ si y solo si f es constante.*

Demostración. $\Rightarrow$) Dados $c < d \in (a,b)$, si $f(c) \neq f(d)$ entonces existe $e \in (c,d)$ tal que $f'(c) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \neq 0$ y llegamos a contradicción.

□

6. Teorema del valor medio: *Sean $f(x), g(x) \in \mathscr{C}^0([a,b])$ derivables en (a,b). Entonces, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

Si además, $g'(\xi) \neq 0$ y $g(b)-g(a) \neq 0$, entonces

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Demostración. Sea $H(x) = (f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$, como $H(a) = H(b)$, entonces existe un $\xi \in (a,b)$ tal que $H'(\xi) = 0$. □

7. Regla de L'Hôpital : *Sean f y g reales diferenciables en $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Supongamos que g' no se anula en ningún punto de (a,b). Si $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to b^-} g(x)$ y $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Podemos suponer que f y g son continuas en $(a,b]$ y que $f(b) = g(b) = 0$. Observemos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, porque $g'(x) \neq 0$ en (a,b) y $g(b) = 0$. Tenemos

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} \underset{3.3.6}{=} \lim_{x\to b^-} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

8. Observaciones: 1. Tenemos la correspondiente regla de L'Hôpital para $x \to a^+$.

2. Puede suponerse en el lema que $b = \infty$: Considérese el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ y observemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)\cdot \frac{-1}{t^2}}{g'(1/t)\cdot \frac{-1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

9. Regla de L'Hôpital 2.: *Sean f y g funciones reales diferenciables en el intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to b^-} g(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Sea $\{y_n \in (a,b)\}$ una sucesión convergente a b y $L := \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Tenemos que probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} = L$.

Caso $|L| \neq \infty$. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $|L - \frac{f'(x)}{g'(x)}| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $x \in (b-\delta, b)$. Sean $b-\delta < x_n < y_{n'} < b$, entonces $\frac{f(y_{n'})-f(x_n)}{g(y_{n'})-g(x_n)} = \frac{f'(\epsilon_{n'n})}{g'(\epsilon_{n'n})}$, para cierto $\epsilon_{n'n} \in (x_n, y_{n'})$. Luego,

$$\frac{f'(\epsilon_{n'n})}{g'(\epsilon_{n'n})}\cdot(g(y_{n'})-g(x_n)) = f(y_{n'})-f(x_n) \Rightarrow \frac{f'(\epsilon_{n'n})}{g'(\epsilon_{n'n})}\cdot(1-\frac{g(x_n)}{g(y_{n'})}) = \frac{f(y_{n'})}{g(y_{n'})} - \frac{f(x_n)}{g(y_{n'})}$$

Sea m tal que para todo $n' > m$, $y_{n'} > x_n$, y $\frac{g(x_n)}{g(y_{n'})}$ y $\frac{f(x_n)}{g(y_{n'})}$ sean muy pequeños. Entonces

$$|L - \frac{f(y_{n'})}{g(y_{n'})}| < \epsilon$$

para todo $n' > m$ y hemos concluido.

Caso $L = \infty$. Sea $M \in \mathbb{N}$. Existe $\delta > 0$ tal que $\frac{f'(x)}{g'(x)} > 2M$, para todo $x \in (b-\delta, b)$. Sean $b - \delta < x_n < y_{n'} < b$, entonces $\frac{f(y_{n'})-f(x_n)}{g(y_{n'})-g(x_n)} = \frac{f'(\epsilon_{n'n})}{g'(\epsilon_{n'n})}$, para cierto $\epsilon_{n'n} \in (x_n, y_{n'})$. Luego,

$$\frac{f'(\epsilon_{n'n})}{g'(\epsilon_{n'n})} \cdot (g(y_{n'}) - g(x_n)) = f(y_{n'}) - f(x_n) \Rightarrow \frac{f'(\epsilon_{n'n})}{g'(\epsilon_{n'n})} \cdot (1 - \frac{g(x_n)}{g(y_{n'})}) = \frac{f(y_{n'})}{g(y_{n'})} - \frac{f(x_n)}{g(y_{n'})}$$

Sea m tal que para todo $n' > m$, $y_{n'} > x_n$, y $\frac{g(x_n)}{g(y_{n'})}$ y $\frac{f(x_n)}{g(y_{n'})}$ sean muy pequeños. Entonces

$$\frac{f(y_{n'})}{g(y_{n'})} > M$$

para todo $n' > m$ y hemos concluido.

De modo similar resolvemos el caso $L = -\infty$.

□

10. Observación: Tenemos la correspondiente regla de L'Hôpital para $x \to a^+$.

2. Puede suponerse en el lema que $b = \infty$.

11. Ejemplo: Probemos que $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Tomando logaritmos neperianos basta probar que $\lim\limits_{x\to\infty} [x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})] = 1$. Tenemos,

$$\lim_{x\to\infty} [x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})] = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1+t} = 1.$$

3.4. Desarrollos de Taylor

Diremos que una función $f : U \to \mathbb{R}$ es n veces derivable en U si f' es $n-1$ veces derivable en U.

1. Proposición: *Si $f : U \to \mathbb{R}$ es n veces derivable en U, entonces para cada $\alpha \in U$ existe una función continua $z(x)$ en U de modo que*

$$f = a_0 + a_1(x-\alpha) + \cdots + a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + z(x)(x-\alpha)^n$$

con $a_i \in \mathbb{R}$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Caso $n = 1$ es obvio. Suponemos $n > 1$. Por hipótesis de inducción $f = \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i + y(x)(x-\alpha)^{n-1}$, con $y(x)$ continua. Basta ver que $y(x)$ es derivable en α. Observemos que $y(x)$ es derivable n veces en $U - \alpha$, luego si derivamos i veces f (con $i < n$) y tomamos $\lim_{x\to\alpha}$, obtenemos que $a_i = \frac{f^{i)}}{i!}(\alpha)$ y $y(\alpha) = \frac{f^{n-1)}}{(n-1)!}(\alpha) =: a_{n-1}$. Por tanto,

$$y'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{y(x)-y(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f - \sum_{i=o}^{n-1} a_i (x-\alpha)^i}{(x-\alpha)^n} \underset{3.3.7}{=} \lim_{x\to\alpha} \frac{f^{n-1)}(x) - f^{n-1)}(\alpha)}{n!(x-\alpha)} = \frac{f^{n)}(\alpha)}{n!}$$

e $y(x)$ es derivable en α.

□

2. Ejercicio: Prueba que $x^3 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no es derivable dos veces en $\mathbb{R}$.

3. Resto de Lagrange : *Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto, $a \in U$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en U. Si $(a,x) \subset U$, entonces existe $c \in (a,x)$ (que depende de a y x) tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \cdots + \frac{f^{n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot(x-a)^{n-1} + \frac{f^{n)}(c)}{n!}\cdot(x-a)^n.$$

Lo mismo decimos si $(x,a) \subset U$.

Demostración. Sea $R(x) := f(x) - f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \cdots + \frac{f^{n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot(x-a)^{n-1}$. Tenemos que probar que $R(x) = \frac{f^{n)}(c)}{n!}\cdot(x-a)^n$ para cierto $c \in (a,x)$. En efecto,

$$\frac{R(x)}{(x-a)^n} \underset{3.3.6}{=} \frac{R'(\xi_1)}{n\cdot(\xi_1 - a)^{n-1}} \underset{3.3.6}{=} \frac{R''(\xi_2)}{n\cdot(n-1)\cdot(\xi_2 - a)^{n-2}} \underset{3.3.6}{=} \cdots \underset{3.3.6}{=} \frac{R^{n)}(\xi_n)}{n!} = \frac{f^{n)}(\xi_n)}{n!}.$$

para ciertos $x > \xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_n > a$. Por tanto, $R(x) = \frac{f^{n)}(\xi_n)}{n!}\cdot(x-a)^n$.

□

Para acotar el resto de Lagrange y calcular $f(a)$, observemos que si $|f^{n)}(x)| \leq M$ en U y $|x-a| < \delta$, entonces $|\frac{f^{n)}(c)}{n!}\cdot(x-a)^n| < \frac{M\delta^n}{n!}$.

4. Corolario: *Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto, $p \in U$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ una aplicación n veces derivable tal que $f'(p) = \cdots = f^{n-1)}(p) = 0$ y $f^{n)}(p) \neq 0$. Entonces, si*

1. *Si n es par, p es un máximo local en p si $f^{n)}(p) < 0$ y p es un mínimo local si $f^{n)}(p) > 0$.*

2. *Si n es impar, p no es máximo ni mínimo local.*

5. Definición: Una función $f\colon U \to \mathbb{R}$ derivable en $p \in U$ se dice que es convexa en p si $f(x) \geq f(p) + f'(p)\cdot(x-p)$, para todo x de un entorno abierto de p. Se dice que es cóncava en p si $f(x) \leq f(p) + f'(p)\cdot(x-p)$, para todo x de un entorno abierto de p.

6. Corolario: *Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto, $p \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación n veces derivable tal que $f''(p) = \cdots = f^{n-1)}(p) = 0$ y $f^{n)}(p) \neq 0$. Entonces, si*

1. *Si n es par, f es convexa en p si $f^{n)}(p) > 0$ y f cóncava en p si $f^{n)}(p) < 0$.*
2. *Si n es impar, f tiene un punto de inflexión en p.*

3.5. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Sea F el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciables. Sea

$$D : F \to F,\ D(f(x)) = f'(x)$$

el "operador derivada". Es claro que D es un endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal de F. Dado $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces $P(D) \colon F \to F$ es el endomorfismo definido por

$$P(D)(f) = a_n D^n(f) + a_{n-1}D^{n-1}(f) + \cdots + a_0 \cdot f, \text{ donde } D^r(f) \text{ es la derivada } r\text{-ésima de } f.$$

1. Ejercicio: Calcula $(D^2 + D)(\cos x)$.

Queremos resolver ecuaciones diferenciales del tipo

$$a_n \cdot f^{n)} + \cdots + a_2 f'' + a_1 f' + a_o \cdot f = 0, \qquad \text{(donde los } a_i \text{ son constantes).}$$

Es decir, buscamos aquellas funciones $f \in F$. que cumplen que $P(D)(f) = 0$, donde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Tenemos que calcular $\operatorname{Ker} P(D)$.

Veamos que

$$\operatorname{Ker} D^r = \{\text{Polinomios de grado estrictamente menor que } r\}.$$

En efecto,

$$\begin{array}{l} D(f) = 0 \iff f = cte \\ D^2(f) = 0 \iff D(D(f)) = 0 \iff D(f) = cte \iff f = cte \cdot x + cte' \\ D^3(f) = 0 \iff D^2(Df) = 0 \iff Df = cte \cdot x + cte' \iff f = \frac{cte}{2} \cdot x^2 + cte' \cdot x + cte'' \end{array}$$

Etcétera.

2. Movimiento uniformemente acelerado: Supogamos que un objeto se mueve a lo largo de la recta (real) con una aceleración constante a. Digamos que $f(t)$ es la posición del móvil en el instante t. La velocidad del móvil es $f'(t)$ en cada instante t y la aceleración es $f''(t) = a$ en cada instante t. Por tanto, $f''' = 0$, es decir, $f(t) \in \operatorname{Ker} D^3$. Luego, $f(t) = \lambda + \mu t + \gamma t^2$. Observemos que $f(0) = \lambda$, $f'(0) = \mu$ y $f''(0) = 2 \cdot \gamma = a$. Por tanto,

$$f(t) = f(0) + f'(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \text{y} \quad f'(t) = f'(0) + a \cdot t.$$

3. Fórmula de conmutación: *Sea $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Para toda $f \in F$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple que*

$$P(D)(e^{\alpha x} \cdot f) = e^{\alpha x} \cdot P(D + \alpha \cdot \mathrm{Id})(f)$$

Demostración. $D(e^{\alpha x} \cdot f) = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot f + e^{\alpha x} \cdot D(f) = e^{\alpha x} \cdot (D + \alpha \cdot \mathrm{Id})(f)$.

$D^2(e^{\alpha x} \cdot f) = D(D(e^{\alpha x} \cdot f)) = D(e^{\alpha x} \cdot (D + \alpha \cdot \mathrm{Id})(f)) = e^{\alpha x} \cdot (D + \alpha \cdot \mathrm{Id})((D + \alpha \cdot \mathrm{Id})(f)) = e^{\alpha x} \cdot (D + \alpha \cdot \mathrm{Id})^2(f)$.

Así sucesivamente, $D^n(e^{\alpha x} \cdot f) = e^{\alpha x} \cdot (D + \alpha \cdot \mathrm{Id})^n(f)$. Para $P(D) = \sum_i a_i D^i$ tendremos que

$$P(D)(e^{\alpha x} \cdot f) = \sum_i a_i D^i(e^{\alpha x} \cdot f) = \sum_i a_i \cdot e^{\alpha x} \cdot (D + \alpha \cdot \mathrm{Id})^i(f) = e^{\alpha x} \cdot P(D + \alpha \cdot \mathrm{Id})(f)$$

□

4. Teorema: *Se cumple que*

1. $\mathrm{Ker}(D - \alpha \cdot \mathrm{Id})^r = e^{\alpha x} \cdot \{$*Polinomios de grado estrictamente menor que r*$\}$.

2. *Si* $P(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}$ *, entonces*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, P(D) &= \mathrm{Ker}(D - \alpha_1 \cdot \mathrm{Id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(D - \alpha_r \cdot \mathrm{Id})^{n_r} \\ &= e^{\alpha_1 x} \cdot \{\textit{Pol. de grado } < n_1\} \oplus \cdots \oplus e^{\alpha_r x} \cdot \{\textit{Pol. de grado } < n_r\} \end{aligned}$$

Demostración. 1. $(D - \alpha \cdot \mathrm{Id})^r f(x) = 0 \iff 0 = (D - \alpha \cdot \mathrm{Id})^r (e^{\alpha x} \cdot e^{-\alpha x} \cdot f(x)) = e^{\alpha x} \cdot D^r(e^{-\alpha x} \cdot f(x)) \iff 0 = D^r(e^{-\alpha x} \cdot f(x)) \iff e^{-\alpha x} \cdot f(x)$ es un polinomio de grado menor que $r \iff f(x)$ es $e^{\alpha x}$ multiplicado por un polinomio de grado menor que r.

2. Es consecuencia de 1.

□

5. Nota: Supongamos $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha = a + bi$ es una raíz compleja de $P(x)$, con $b \neq 0$. Entonces $\bar{\alpha} = a - bi$ también es una raíz compleja de $P(x)$. Más aún, la multiplicidad con la que aparece α es la misma con la aparece $\bar{\alpha}$, es decir, $P(x) = (x - \alpha)^n \cdot (x - \bar{\alpha})^n \cdot Q(x)$, con $Q(\alpha), Q(\bar{\alpha}) \neq 0$. Probemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathrm{Ker}(D - \alpha\, \mathrm{Id})^n \oplus \mathrm{Ker}(D - \bar{\alpha}\, \mathrm{Id})^n \\ \text{tales que } f(x) \in \mathbb{R} \text{ para todo } x \end{array} \right\} = e^{ax} \cdot \{q(x) \cdot \cos bx + r(x) \cdot \mathrm{sen}\, bx\}_{q(x), r(x) \in P_n}$$

donde P_n son todos los polinomios con coeficientes reales de grado $< n$: Por 3.5.4, tenemos que una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $E = \mathrm{Ker}(D - \alpha\, \mathrm{Id})^n \oplus \mathrm{Ker}(D - \bar{\alpha}\, \mathrm{Id})^n$, es

$$\{e^{ax} \cdot e^{bix} \cdot x^r, i e^{ax} \cdot e^{bix} \cdot x^r, e^{ax} \cdot e^{-bix} \cdot x^r, i e^{ax} \cdot e^{-bix} \cdot x^r\}_{0 \leq r < n}.$$

Las funciones con valores en $\mathbb{R}$ de E, se obtienen sumando a cada función $f \in E$ su conjugada. Por tanto, una base de $\{f \in E : \ f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\}$ es

$$\{e^{ax} \cdot \cos bx \cdot x^r, e^{ax} \cdot \mathrm{sen}\, bx \cdot x^r, \}_{0 \leq r < n}.$$

6. Ley de desintegración radiactiva: Consideremos que tenemos una cierta cantidad $U(t)$ de gramos de uranio que permanece (sin desintegrar) en el tiempo t. Suponemos que la cantidad de uranio que se desintegra en un intervalo de tiempo (muy pequeño) t_1, $U(t)-U(t+t_1)$, es proporcional al tiempo t_1 transcurrrido y a la cantidad $U(t)$ de gramos que había en el instante t. Es decir, tenemos

$$U(t+t_1)-U(t) = -cte \cdot t_1 \cdot U(t) \qquad (cte > 0)$$

Por tanto,

$$\frac{U(t+t_1)-U(t)}{t_1} = -cte \cdot U(t)$$

Tomando límite $t_1 \to 0$, obtenemos

$$U'(t) = -cte \cdot U(t)$$

Es decir, $U(t)$ verifica la ecuación diferencial $U' + cte \cdot U = 0$. Tenemos $(D + cte \cdot \mathrm{Id})(U) = 0$, luego $U(t) = a \cdot e^{-cte \cdot t}$, para cierta constante a. Observemos que $U(0) = a \cdot e^0 = a$. Luego,

$$\boxed{U(t) = U(0) \cdot e^{-cte \cdot t}}$$

Veamos cuál es la semivida del uranio, es decir, cuánto tiempo s ha de transcurrir para que se desintegre la mitad del uranio:

$$U(0) \cdot e^{-cte \cdot s} = U(s) = \frac{U(0)}{2}$$

Luego, $e^{-cte \cdot s} = \frac{-1}{2}$. Tomando logaritmo neperiano $-cte \cdot s = \ln 2^{-1} = -\ln 2$, luego

$$s = \frac{\ln 2}{cte} \quad \text{y} \quad U(t) = U(0) \cdot e^{-\frac{\ln 2}{s} \cdot t} = U(0) \cdot 2^{-\frac{t}{s}}.$$

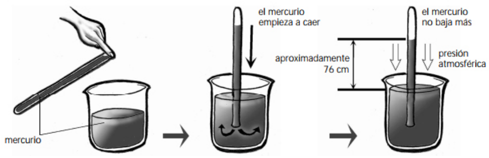
El carbono 14 que hay en la atmósfera aunque se desintegra en carbono no radiactivo (carbono 12 y 13), también se crea continuamente debido a las colisiones de los neutrones generados por los rayos cósmicos con el nitrógeno de la atmósfera superior y, resulta que la proporción de carbono 14 y carbono no radiactivo permanece en un nivel casi constante en la atmósfera a lo largo del tiempo. Las plantas adquieren el carbono atmosférico mediante la fotosíntesis, y los animales, mediante el consumo de plantas y de otros animales. Cuando un organismo muere el carbono 14 existente va desintegrándose. La proporción de carbono 14 y carbono no radiactivo cuando se examinan los restos del organismo proporciona una indicación del tiempo transcurrido desde su muerte.

7. Presión atmosférica: Sea $P(h)$ la presión atmosférica a una altura h del suelo. La diferencia de presión $P(h+t)-P(h)$ es proporcional a t y a la densidad del aire en h (que es proporcional a $P(h)$). Entonces,

$$\frac{P(h+t)-P(h)}{t} = -K \cdot P(h), \text{ luego } P'(h) = -K \cdot P(h)$$

Es decir, $(D+K\cdot \mathrm{Id})(P)=0$ y $P(h)=a\cdot e^{-K\cdot h}$, donde $a=P(0)$. Puede medirse la altura en términos de la presión: $h=\frac{\ln P(0)-\ln P(h)}{K}$.

Problema: En 1643, Torricelli al realizar su experimento, al nivel del mar, obtuvo que la columna de mercurio medía 760 mm. (por encima del nivel de mercurio de la cubeta). Si a una altura de 100 metros sobre el nivel del mar la columna de mercurio mide 751 mm. ¿a qué altura sobre el nivel del mar estaríamos si la columna de mercurio mide 600 mm.?



Experimento de Torricelli

8. Interés compuesto continuo: Supongamos que tenemos un capital de 10^6 euros invertidos en un banco. El banco nos por la inversión un interés del 2 por ciento anual y nos permite retirar el dinero en cualquier momento sin penalización y con el pago de los intereses del capital por el tiempo exacto transcurrido. Si retiramos el capital, con los intereses generados, al año y medio ¿cuánto dinero nos llevaremos?: Sea $f(t)$ el capital más los intereses generados que tenemos en el banco en el momento t. Observemos que $f(t+h)-f(t)$ es proporcional a $f(t)$ y al tiempo h transcurrido ("cuando h es muy pequeño"), es decir,

$$f(t+h)-f(t)=K\cdot h\cdot f(t), \quad \text{y} \quad \frac{f(t+h)-f(t)}{h}=K\cdot f(t)$$

Luego,

$$f'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=K\cdot f(t)$$

Es decir, $(D-K\cdot \mathrm{Id})(f)=0$, luego $f(t)=a\cdot e^{Kt}$. Sabemos que $f(0)=10^6$, luego $a=10^6$; y $10^6\cdot e^K=f(1)=10^6\cdot(1+0'02)$, luego $e^K=1'02$. Por tanto,

$$f(t)=10^6\cdot(1'02)^t$$

y $f(1'5)=10^6\cdot(1'02)^{1'5}$.

9. Ejemplo: Resolvamos la ecuación diferencial: $f''''-2f'''+2f''=0$. Tenemos que resolver $(D^4-2D^3+2D^2)(f)=0$, es decir, calcular $\mathrm{Ker}(D^4-2D^3+2D^2)$. Observemos que $x^4-2x^3+2x^2=x^2(x^2-2x+2)=x^2(x-(1+i))(x-(1-i))$. Luego,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(D^4-2D^3+2D^2)&=\mathrm{Ker}\,D^2\oplus\mathrm{Ker}(D-(1+i)\cdot\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(D-(1-i)\cdot\mathrm{Id})\\&=\{a+bx+c\cdot e^{(1+i)\cdot x}+d\cdot e^{(1-i)\cdot x}\}\end{aligned}$$

Luego,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Las funciones con valores en } \mathbb{R} \text{ solución de}\\ \text{la ecuación diferencial } f''''-2f'''+2f''=0\end{array}\right\}=\{a+bx+\exp(x)\cdot(\lambda\cos x+\mu\,\mathrm{sen}\,x)\}$$

10. Movimiento armónico simple: Consideremos un muelle cuyo extremo esté en el origen de la recta real. Denotemos por $f(t)$ la posición del extremo del muelle en el instante t. Si el extremo del muelle está en la posición $f(t)$ en el instante t, entonces el muelle ejerce una fuerza (luego aceleración) proporcional a $f(t)$ con sentido hacia el origen. Entonces,

$$f''(t) = -cte \cdot f(t), \qquad (cte > 0).$$

Es decir, $f(t)$ cumple la ecuación diferencial

$$(D^2 + cte)(f) = 0.$$

Como $x^2 + cte = (x - \sqrt{cte} \cdot i)(x + \sqrt{cte} \cdot i)$, tenemos que $f(t) = a\cos(cte \cdot t) + b\,\mathrm{sen}(cte \cdot t)$. Como $f(0) = 0$, entonces $a = 0$ y

$$f(t) = b \cdot \mathrm{sen}(cte \cdot t)$$

Observemos que b es la máxima elongación del muelle y $\frac{2\pi}{cte}$ el periodo del movimiento armónico.

11. Ejercicio: Resuelve la ecuación diferencial: $f'' + f = 0$.

Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

Hasta ahora hemos resuelto ecuaciones diferenciales del tipo $P(D)(f) = 0$. Consideremos ahora una ecuación diferencial del tipo $P(D)(f) = g$, con $g \in F$. Sea f_0 una solución particular. Entonces, $f \in F$ cumple que $P(D)(f) = g$ si y solo si

$$f = f_0 + f_1, \text{ con } f_1 \in \mathrm{Ker}\, P(D)$$

Dicho con palabras

$$\left[\begin{array}{l}\text{Todas las soluciones} \\ \text{de } P(D)(f) = g\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Una solución parti-} \\ \text{cular de } P(D)(f) = g\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{Todas las soluciones de la} \\ \text{“homogénea” } P(D)(f) = 0\end{array}\right]$$

12. Ejemplo: Consideremos un objeto en caída libre. Supongamos que no hay más fuerza de rozamiento que la producida por el aire por causa de la velocidad del objeto. Supongamos que el rozamiento es proporcional a la velocidad. Planteemos la ecuación: Sea $V(t)$ la velocidad del objeto. La aceleración del objeto será igual a la gravedad g menos una constante por la velocidad (debido a la fuerza de rozamiento). Luego,

$$V'(t) = g - R \cdot V(t) \quad (R > 0)$$

Es decir, $(D+R\cdot \mathrm{Id})V=g$. Una solución particular de esta ecuación es $V_0=\frac{g}{R}$. Luego, todas las soluciones son $V=\frac{g}{R}+K'\cdot e^{-Rt}$. Si $V(0)=0$, entonces $K'=\frac{-g}{R}$ y

$$V(t)=\frac{g}{R}(1-e^{-Rt})$$

Denotemos $S(t)$ los metros recorridos en el tiempo t, entonces $V(t)=S'(t)$ e integrando $S(t)=\int\frac{g}{R}(1-e^{-Rt})=a+\frac{g}{R}(t+\frac{e^{-Rt}}{R})$. Como $S(0)=0$, entonces $a=\frac{-g}{R^2}$ y

$$S(t)=\frac{g}{R}t+\frac{g}{R^2}(-1+e^{-Rt})$$

13. Sea $P(D)f=g$, con $g\in F$, una ecuación diferencial de la que sabemos que existe un polinomio $Q(x)$ tal que $Q(D)g=0$. La aplicación lineal $P(D)\colon \mathrm{Ker}\,Q(D)P(D)\to \mathrm{Ker}\,Q(D)$ es epiyectiva (obsérvese que $\dim \mathrm{Ker}\,H(D)=\mathrm{gr}(H(x))$ y que el núcleo de esta aplicación lineal es $\mathrm{Ker}\,P(D)$). Sabemos calcular por Álgebra Lineal $f\in \mathrm{Ker}\,Q(D)P(D)$ tal que $P(D)(f)=g$.

Supongamos ahora además que $P(x)$ es primo $Q(x)$. Sean $\lambda(x)$ y $\mu(x)$ polinomios tales que $\lambda(x)\cdot P(x)+\mu(x)\cdot Q(x)=1$. Por lo tanto, tenemos que $\lambda(D)\cdot P(D)+\mu(D)\cdot Q(D)=\mathrm{Id}$. Si aplicamos esta igualdad a g, obtenemos

$$g=\mathrm{Id}(g)=(\lambda(D)\cdot P(D)+\mu(D)\cdot Q(D))(g)=(\lambda(D)\cdot P(D))(g)=P(D)(\lambda(D)(g))$$

Por tanto, una solución particular es $f=\lambda(D)(g)$.

De otro modo: Sea $E=\langle g,g',g'',\ldots,g^{n)},\ldots\rangle\subseteq \mathrm{Ker}\,Q(D)$ que es un espacio vectorial de dimensión finita y $g\in E$. $P(D)\colon E\to E$, $f\mapsto P(D)(f)$ es un isomorfismo (pues su inverso es $\lambda(D)$). Solo tenemos que calcular $f\in E$ tal que $P(D)(f)=g$.

14. Ejemplo: Resolvamos la ecuación diferencial $f'''-f=x^3$: Tenemos que resolver la ecuación $(D^3-\mathrm{Id})(f)=x^3$. Observemos que $D^4(x^3)=0$. Los polinomios x^3-1 y x^4 son primos entre sí. Tenemos

$$\begin{aligned}\underline{x^4}&=\underline{(x^3-1)}\cdot x+\underline{x}\\ \underline{x^3-1}&=\underline{x}\cdot x^2-1\end{aligned}$$

Luego, $1=\underline{x}\cdot x^2-\underline{(x^3-1)}=(\underline{x^4}-\underline{(x^3-1)}\cdot x)\cdot x^2-\underline{(x^3-1)}=x^2\cdot\underline{x^4}+(-x^3-1)\cdot\underline{(x^3-1)}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}x^3&=(D^2\cdot D^4+(-D^3-\mathrm{Id})\cdot(D^3-\mathrm{Id}))(x^3)=((-D^3-\mathrm{Id})\cdot(D^3-\mathrm{Id}))(x^3)\\ &=(D^3-\mathrm{Id})((-D^3-\mathrm{Id})(x^3))=(D^3-\mathrm{Id})(-6-x^3).\end{aligned}$$

Luego una solución particular de la ecuación diferencial es $f_0=-6-x^3$. De otro modo: Sea $\mathrm{Ker}\,D^4=\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$. El endomorfismo lineal $D^3-\mathrm{Id}\colon \mathrm{Ker}\,D^4\to\mathrm{Ker}\,D^4$, $p(x)\mapsto(D^3-\mathrm{Id})(p(x))$ es un isomorfismo lineal y es fácil calcular el polinomio ax^3+bx^2+cx+d que cumple que $(D^3-\mathrm{Id})(ax^3+bx^2+cx+d)=x^3$.

Todas las soluciones son

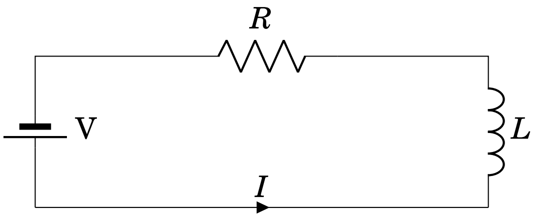
$$\begin{aligned}
f_0 + \operatorname{Ker}(D^3 - \operatorname{Id}) &= f_0 + \operatorname{Ker}(D - \operatorname{Id}) + \operatorname{Ker}(D - \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot \operatorname{Id}) + \operatorname{Ker}(D - \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot \operatorname{Id})\\
&= -6 - x^3 + a\cdot e^x + b\cdot e^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot x} + c\cdot e^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot x}.
\end{aligned}$$

Todas las soluciones que son funciones con valores reales son

$$-6 - x^3 + a\cdot e^x + e^{\frac{-1}{2}x}\cdot (c\cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + d\cdot \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

15. Ejercicio : Resuelve la ecuación diferencial $f'' - f = senx$.

16. Circuito eléctrico Consideremos el circuito eléctrico de la siguiente imagen.



La segunda ley de Kirchhoff afirma que la suma de las diferencias de potencial eléctrico en un circuito cerrado es igual a cero. La caída de potencial en una bobina es proporcional a la tasa de variación de la intensidad de corriente: $V_L = L\cdot \frac{dI}{dt}$, la caída de tensión en una resistencia es proporcional a la intensidad: $V_R = R\cdot I$ (ley de Ohm). Por tanto,

$$V = L\cdot \frac{dI}{dt} + R\cdot I.$$

Resolvamos la ecuación diferencial $LI' + RI = (LD + R\operatorname{Id})(I) = V$, cuando V es constante. Una solución particular es $I = V/R$ y la general es

$$I(t) = V/R + \operatorname{Ker}(LD + R\operatorname{Id}) = V/R + \operatorname{Ker}(D + \frac{R}{L}\operatorname{Id}) = V/R + \{\lambda\cdot e^{-\frac{Rt}{L}}\}.$$

Si suponemos que $I(0) = 0$, entonces $\lambda = -V/R$ y $I(t) = V/R\cdot(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$.

Supongamos ahora que $V = A\cos(wt)$. Tenemos que resolver la ecuación diferencial

$$(LD + R\operatorname{Id})(I) = A\cdot\cos(wt).$$

Sea $E = \langle\cos(wt), \operatorname{sen}(wt)\rangle$. Buscamos una solución $\lambda\cdot\cos(wt) + \mu\cdot\operatorname{sen}(wt) \in E$:

$$\begin{aligned}
A\cdot\cos(wt) &= (LD + R\operatorname{Id})(\lambda\cdot\cos(wt) + \mu\cdot\operatorname{sen}(wt))\\
&= (R\mu - Lw\lambda)\operatorname{sen}(wt) + (R\lambda + Lw\mu)\cos(wt).
\end{aligned}$$

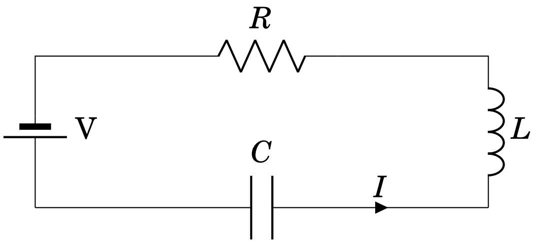
Obtenemos $\lambda = \frac{AR}{L^2w^2+R^2}$ y $\mu = \frac{ALw}{L^2w^2+R^2}$. Por tanto, $I(t) = \frac{AR\cos(wt)}{L^2w^2+R^2} + \frac{ALw\operatorname{sen}(wt)}{L^2w^2+R^2} + \gamma\cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$. Si suponemos que $I(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{A}{L^2w^2+R^2}\cdot(R\cdot(\cos(wt) - e^{-\frac{Rt}{L}}) + Lw\cdot\operatorname{sen}(wt))\\
&\overset{t\gg 0}{\simeq} \frac{A}{L^2w^2+R^2}\cdot(R\cdot\cos(wt) + Lw\cdot\operatorname{sen}(wt)).
\end{aligned}$$

Luego, $I(t) = \frac{A}{B} \cdot (\cos(\phi) \cdot \cos(wt) + \operatorname{sen}(\phi) \cdot \operatorname{sen}(wt))$, donde $B = \sqrt{(Lw)^2 + R^2}$, $\cos(\phi) = \frac{R}{B}$ y $\operatorname{sen}(\phi) = \frac{Lw}{B}$. Por lo tanto,

$$\boxed{I(t) = \frac{A}{B} \cdot \cos(wt - \phi)}$$

Se dice que ϕ es el desfase, $\tan(\phi) = \frac{Lw}{R}$ la reactancia y $B = R \cdot \sqrt{\tan^2(\phi) + 1}$.



Añadamos un condensador. La diferencia de potencial causada por un condensador es proporcional a la carga, $V_C = \frac{Q}{C}$, luego derivando respecto del tiempo $V_C' = \frac{I}{C}$. Por tanto, $V = L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I + V_C$ y derivando

$$V' = LI'' + RI' + \frac{I}{C}.$$

Supongamos $V(t) = V_0 \cdot \cos(wt)$. Si $\tilde{V} := V_0 \cdot e^{iwt}$, entonces I es la parte real de las soluciones de la ecuación diferencial

$$\tilde{V}' = L\tilde{I}'' + R\tilde{I}' + \frac{\tilde{I}}{C}.$$

Busquemos una solución particular en $\langle e^{iwt} \rangle$, es decir, $\tilde{I} = Y \cdot e^{iwt}$, con $Y \in \mathbb{C}$. Tenemos que $iwV_0 = (-Lw^2 + Rwi + \frac{1}{C}) \cdot Y$, luego $\tilde{I} = \frac{iwV_0}{(-Lw^2 + \frac{1}{C}) + Rwi} \cdot e^{iwt}$. Por lo tanto,

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z},$$

donde $Z = Z_0 \cdot e^{i\phi}$ (denominada impedancia) $\phi = \arctan \frac{Lw - \frac{1}{wc}}{R}$ (denominada desfase) y $Z_0 = \sqrt{(Lw - \frac{1}{wC})^2 + R^2}$. En conclusión,,

$$\boxed{I(t) = \frac{V_0}{Z_0} \cdot \cos(wt - \phi)}$$ [2]

Observemos que la amplitud del voltaje es V_0 y el de la intensidad $I_0 := \frac{V_0}{Z_0}$, luego

$$\boxed{V_0 = Z_0 \cdot I_0}$$

---

[2] Podemos decir que es la solución, porque si $R^2 \neq \frac{4L}{C}$ entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(LD^2 + RD + \frac{\mathrm{Id}}{C}) &= \operatorname{Ker}(D - \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}) \oplus \operatorname{Ker}(D - \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}) \\ &= \{a \cdot e^{\frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} t} + b e^{\frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} t} \overset{t \gg 0}{\simeq} 0\},\end{aligned}$$

y si $R^2 = 4L/C$, $\operatorname{Ker}(D - \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}) = \{e^{\frac{-R}{2L} t} \cdot (a + bt) \overset{t \gg 0}{\simeq} 0\}$.

17. Resolvamos la ecuación diferencial $f''' - 2f'' + f = xe^x$ siguiendo otro método: Tenemos $(D^3 - 2D^2 + \mathrm{Id})(f) = xe^x$. Denotamos $\frac{1}{D^3-2D^2+\mathrm{Id}} g$ como una función h, tal que $(D^3 - 2D^2 + \mathrm{Id})h = g$. En particular, $\int g := \frac{1}{D} g$, es una función cuya derivada es g.

Una solución particular es

$$f = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + \mathrm{Id}} xe^x = \frac{1}{(D^2 - D - \mathrm{Id})(D - \mathrm{Id})} xe^x \overset{1}{=} e^x \frac{1}{(D^2 + D - \mathrm{Id})D} x$$
$$\overset{2}{=} e^x(-\mathrm{Id} - D - 2D^2)\frac{1}{D} x = e^x(\frac{-x^2}{2} + cte - x - 2) = e^x(\frac{-x^2}{2} - x + a)$$

18. Denotemos $\int \overset{n}{\cdots} \int f = \frac{1}{D^n} f$.

Sea $P(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}$. Existen polinomios $Q_1(x), \dots, Q_r(x)$ tales que

$$\frac{1}{(x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}} = \frac{Q_1(x)}{(x - \alpha_1)^{n_1}} + \overset{r}{\cdots} + \frac{Q_r(x)}{(x - \alpha_r)^{n_r}}.$$

Resolvamos la ecuación diferencial $P(D)f = g$.

$$f = \frac{1}{P(D)} g = (\frac{Q_1(D)}{(D - \alpha_1 \mathrm{Id})^{n_1}} + \overset{r}{\cdots} + \frac{Q_r(D)}{(D - \alpha_r \mathrm{Id})^{n_r}})g = \sum_i \frac{Q_i(D)}{(D - \alpha_i \mathrm{Id})^{n_i}} g$$
$$\overset{3.5.3}{=} \sum_i e^{\alpha_i x} \cdot \frac{Q_i(D + \alpha_i \mathrm{Id})}{D^{n_i}} e^{-\alpha_i x} \cdot g = \sum_i e^{\alpha_i x} \cdot Q_i(D + \alpha_i \mathrm{Id}) \int \overset{n_i}{\cdots} \int e^{-\alpha_i x} \cdot g.$$

3.6. Cálculo sublime

3.6.1. Integral de una función de variable real

1. Definición: Una partición de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto finito ordenado de puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$. Diremos que una partición P es más fina que otra partición P' si $P' \subset P$, y escribiremos $P' \leq P$.

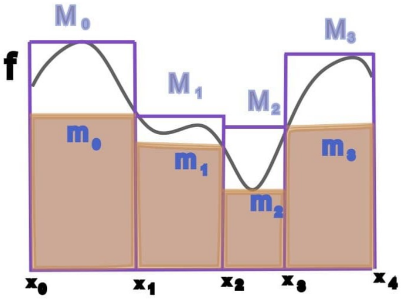
---

[1]Es consecuencia de la fórmula de conmutación.

[2]Existe un único polinomio de grado dos $\mu(x)$ tal que $\mu(x) \cdot (x^2 - x - 1) + \lambda(x) \cdot x^3 = 1$. Por tanto, $\frac{1}{D^2-D-\mathrm{Id}}(\frac{1}{D}x) = \mu(D)(\frac{1}{D}x)$. Existe una serie en x, $s(x)$, tal que formalmente $s(x) \cdot \frac{1}{x^2+x-1} = 1$. Además, $s(x)$ coincide con el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{x^2+x-1}$ en $x = 0$. Por tanto, $\mu(x)$ coincide con el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{x^2+x-1}$ en $x = 0$, hasta orden 3, que es $-1 - x - 2x^2$.

2. Notación: Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y una partición $P=\{x_0,\dots,x_n\}$, denotaremos

$$M_k(f,P):=\sup\{f(x)\colon x\in[x_k,x_{k+1}]\}$$
$$m_k(f,P):=\inf\{f(x)\colon x\in[x_k,x_{k+1}]\}.$$



3. Definición: Llamaremos suma superior y suma inferior de Riemann de f relativas a la partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ a

$$S(f,P) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k(f,P)\cdot(x_{k+1} - x_k) \text{ y } s(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(f,P)\cdot(x_{k+1} - x_k)$$

respectivamente.

4. Observación: Obviamente, $s(f,P) \leq S(f,P)$. Si P es una partición de $[a,b]$ y P' es una partición de $[b,c]$ entonces $P \cup P'$ es una partición de $[a,c]$ y $S(f,P\cup P') = S(f,P) + S(f,P')$ y $s(f,P\cup P') = s(f,P) + s(f,P')$.

5. Proposición: *Si $P' \leq P$, entonces*

$$s(f,P') \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P').$$

Demostración. Si $P = P'$, el enunciado es evidente. Por inducción basta demostrar el enunciado cuando P tiene exactamente un punto más que P'. Por la observación anterior podemos suponer que $P' = \{a,b\}$ y $P = \{a,c,b\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} s(f,P') &= \text{ínf}\{f(x)\colon x \in [a,b]\}\cdot(b-a) \\ &= \text{ínf}\{f(x)\colon x \in [a,b]\}\cdot(c-a) + \text{ínf}\{f(x)\colon x \in [a,b]\}\cdot(b-c) \\ &\leq \text{ínf}\{f(x)\colon x \in [a,c]\}\cdot(c-a) + \text{ínf}\{f(x)\colon x \in [c,b]\}\cdot(b-c) = s(f,P). \end{aligned}$$

De modo análogo se prueba que $S(f,P) \leq S(f,P')$.

□

6. Corolario: *Si P y P' son dos particiones de* $[a,b]$*, entonces* $s(f,P) \leq S(f,P')$.

Demostración. En efecto,

$$s(f,P) \leq s(f,P\cup P') \leq S(f,P\cup P') \leq S(f,P').$$

□

7. Definición: Llamaremos integral superior e integral inferior de f en $[a,b]$ a

$$\overline{\int_a^b} f := \text{ínf}\{S(f,P), \forall P\} \quad y \quad \underline{\int_a^b} f := \sup\{s(f,P), \forall P\}.$$

respectivamente.

Por el corolario anterior, $s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(f,P')$.

8. Definición: Diremos que una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada es (Riemann) integrable si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Este valor común se dice que es la integral de Riemann de f en $[a,b]$ y se denota $\int_a^b f \cdot dx$.

Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es no negativa e integrable, diremos que $\int_a^b f(x)\cdot dx$ es el área de la región de $\mathbb{R}^2$, delimitada por la gráfica de la función f, $\{a\}\times[0,f(a)]$, $\{b\}\times[0,f(b)]$ y $[a,b]\times\{0\}$.

9. Propiedades: *Sean f y g integrables en $[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,*

1. $\int_a^b \lambda \cdot dx = \lambda\cdot(b-a)$.
2. *$\lambda\cdot f$ es integrable y $\int_a^b \lambda\cdot f\cdot dx = \lambda\cdot\int_a^b f\cdot dx$.*
3. *$f+g$ es integrable y $\int_a^b f+g\,dx = \int_a^b f\cdot dx + \int_a^b g\cdot dx$: Obsérvese que*

   $$\begin{aligned}&\text{ínf}\{f(x),\,\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\} + \text{ínf}\{g(x),\,\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\} \le \text{ínf}\{f(x)+g(x),\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\}\\ &\le \sup\{f(x)+g(x),\,\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\} \le \sup\{f(x),\,\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\} + \sup\{g(x),\,\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\}.\end{aligned}$$

4. *Si $f\le g$, entonces $\int_a^b f\cdot dx \le \int_a^b g\cdot dx$.*
5. $\sup\{f,g\}$ *es integrable: Escribamos $h=\sup\{f,g\}$. Obviamente, $f,g\le h$, luego el ínfimo de los valores de f (y el de g) en un intervalo es menor que el de h; el supremo de f o el de g, en un intervalo, coincide el de h. Ahora es fácil probar que para toda partición P,*

   $$S(h,P)-s(h,P) \le (S(f,P)-s(f,P)) + (S(g,P)-s(g,P)),$$

   luego h es integrable.
6. *$|f|$ es integrable (porque $|f| = \sup\{f,0\}+\sup\{-f,0\}$) y $|\int_a^b f\cdot dx| \le \int_a^b |f|\cdot dx$.*
7. *$f\cdot g$ es integrable: Dada una función h, sea $h^+ := \sup\{h,0\}$ y $h^- = -\sup\{-h,0\}$. Entonces, $fg = (f^+ + f^-)\cdot(g^+ + g^-) = f^+g^+ + f^+g^- + f^-g^+ + f^-g^-$. Es fácil reducirse al caso $f\ge 0$ y $g\ge 0$. Sea $k>0$ tal que $f,g<k$. Dado $\epsilon>0$, sea P una partición de $[a,b]$ tal que $S(f,P)-s(f,P), S(g,P)-s(g,P) \le \frac{\epsilon}{2k}$. Entonces,*

   $$\begin{aligned}&S(fg,P)-s(fg,P) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k(fg,P)-m_k(fg,P))\cdot(x_{k+1}-x_k)\\ &\le \sum_{k=0}^{n-1}(M_k(f,P)M_k(g,P)-m_k(f,P)m_k(g,P))\cdot(x_{k+1}-x_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}((M_k(f,P)-m_k(f,P))M_k(g,P)+m_k(f,P)(M_k(g,P)-m_k(g,P)))\cdot(x_{k+1}-x_k)\\ &\le k\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(M_k(f,P)-m_k(f,P)+M_k(g)-m_k(g,P))\cdot(x_{k+1}-x_k)\le\epsilon\end{aligned}$$

8. *Si $a<c<b$, entonces $\int_a^b f\cdot dx = \int_a^c f\cdot dx + \int_c^b f\cdot dx$.*

10. Teorema: *Si $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable.*

Demostración. Por el teorema de Heine, sabemos que f es uniformemente continua. Entonces, dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ siempre que $|x-y|<\delta$. Sea $n\in\mathbb{N}$, de modo que $\frac{b-a}{n}<\delta$ y consideremos la partición $P=\{x_i\}$ de $[a,b]$ en n segmentos de longitud $\frac{b-a}{n}$. Tenemos que $|f(x)-f(y)|<\epsilon$, siempre que $|x-y|<\frac{b-a}{n}$, lueg $|M_i-m_i|<\epsilon$ y

$$S(f,P)-s(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)\le\sum_{i=0}^{n-1}\epsilon\cdot(x_{i+1}-x_i)=\epsilon\cdot(b-a).$$

Por tanto, $\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f\le S(f,P)-s(f,P)\le\epsilon\cdot(b-a)$, para todo ϵ, luego $\overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$ y f es integrable.

□

11. Observaciones: Si $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ son iguales salvo en un número finito de puntos, entonces f es integrable si y solo si g es integrable, y cuando lo sean $\int_a^b f\cdot dx=\int_a^b g\cdot dx$.

Dada $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$, diremos que es integrable si $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable, donde $g_{|(a,b)}:=f_{|(a,b)}$ y $g(a),g(b)$ son cualesquiera valores de $\mathbb{R}$; en el caso de que sea integrable se define $\int_a^b f\cdot dx:=\int_a^b g\cdot dx$.

Si existe $\lim\limits_{y\to\infty}\int_a^y f(x)\cdot dx$, lo denotaremos $\int_a^\infty f(x)\cdot dx$.

12. Integral vectorial: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base. Diremos que una aplicación $f\colon[a,b]\to E$, $f(x)=\sum_i f_i(x)\cdot e_i$ es integrable si $f_1,\dots,f_n$ son integrables y definimos $\int_a^b f\cdot dx:=\sum_i\int_a^b f_i\cdot dx\cdot e_i$. Si $\{v_1,\dots,v_n\}$ es otra base y $e_i=\sum_j a_{ij}\cdot v_j$, entonces $f(x)=\sum_i f_i(x)\cdot e_i=\sum_{ij}f_i(x)\cdot a_{ij}\cdot v_j=\sum_j g_j(x)\cdot v_j$, donde $g_j(x):=\sum_i f_i(x)\cdot a_{ij}$ y

$$\int_a^b f\cdot dx:=\sum_i\int_a^b f_i(x)\cdot dx\cdot e_i=\sum_{ij}\int_a^b f_i(x)\cdot dx\cdot a_{ij}\cdot v_j=\sum_j\int_a^b g_j(x)\cdot dx\cdot v_j.$$

Sea E' un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de base $\{e'_1,\dots,e'_m\}$ y $T\colon E\to E'$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal con $T(e_i)=\sum_j b_{ij}\cdot e'_j$. Entonces,

$$(T\circ f)(x)=T(\sum_i f_i(x)\cdot e_i)=\sum_{ij}f_i(x)\cdot b_{ij}\cdot e'_j=\sum_j(\sum_i f_i\cdot b_{ij})\cdot e'_j,\quad\text{y}$$

$$\begin{aligned}T(\int_a^b f\cdot dx)&=T(\sum_i\int_a^b f_i\cdot dx\cdot e_i)=\sum_i\int_a^b f_i\cdot dx\cdot T(e_i)=\sum_{ij}\int_a^b f_i\cdot dx\cdot b_{ij}\cdot e'_j\\&=\sum_j\int_a^b\sum_i f_i\cdot b_{ij}\cdot dx\cdot e'_j=\int_a^b T\circ f\cdot dx.\end{aligned}$$

13. Ejercicio: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $e, v \in E$ dos vectores. y $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, Prueba que

$$\int_a^b (f\cdot e + g\cdot v)\cdot dx = \int_a^b f\cdot dx\cdot e + \int_a^b g\cdot dx\cdot v.$$

14. Ejemplo: Calculemos $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\cdot dx$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\cdot dx = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3(\cdot dx = \frac{1}{8}\cdot \int_0^{\pi/2} e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\cdot dx$$
$$= \frac{1}{8}\cdot (\frac{e^{3ix}}{3i} + \frac{3e^{ix}}{i} + \frac{3e^{-ix}}{-i} + \frac{e^{-3ix}}{-3i})]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\cdot (\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + 3\operatorname{sen}(x))]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

3.6.2. Regla de Barrow. Cambio de variable

15. Regla de Barrow: *Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ continua y $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f\cdot dx$. Entonces, $F'(c) = f(c)$, para todo $c\in(a,b)$.*

Demostración. Sea M_x el máximo de los valores de f en $[c,x]$ y m_x el mínimo. Entonces, $m_x\cdot(x-c) \le F(x)-F(c) = \int_c^x f\cdot dx \le M_x\cdot(x-c)$ y

$$m_x \le \frac{F(x)-F(c)}{x-c} \le M_x.$$

Luego, $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(x)$. Igualmente, $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(x)$. Luego, $F'(c) = f(c)$. □

16. Observación: Si $G' = f$ se dice que G es una primitiva de f. La regla de Barrow dice que $F(x) = \int_a^x f\cdot dx$ es una primitiva de f. Si G es otra primitiva de f, entonces $(F-G)' = 0$ y $G = F + cte$. Además, $\int_a^b f\cdot dx = F(b) = F(b)-F(a) = G(b)-G(a)$.

Si $a > b$, seguiremos la convención $\int_a^b f\cdot dx := -\int_b^a f\cdot dy$. Si G es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f\cdot dx = -\int_b^a f\cdot dy = -(G(a)-G(b)) = G(b)-G(a)$.

17. Ejercicio: Calcula $\int_0^1 x^3 + 3x + \cos(x)dx$.

18. Notación: Dado un abierto $U\subset\mathbb{R}$, denotaremos $C_a^1(U)$ a las funciones de derivadas continuas y acotadas en U.

19. Fórmula de cambio de variable: *Sea $g\in\mathscr{C}_a^1((a,b))$ y sea $f\in\mathscr{C}_a^0(g((a,b)))$. Entonces,*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\cdot dy = \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\cdot dx.$$

Demostración. Sea F tal que $F'(y) = f(y)$. Por la regla de la cadena, sabemos que $F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$. Por la regla de Barrow,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \cdot dy = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx.$$

□

3.6.3. Conmutación de derivadas, integrales y límites

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación. Denotaremos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t}.$$

Si escribimos $f = (f_1, \dots, f_m)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x))$.

20. Diferenciación bajo el signo de la integral: *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : [a,b] \times U \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Entonces,*

$$F(x) := \int_a^b f(t,x) \cdot dt$$

es una función continua en U. Si además existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)$ y es continua en $[a,b] \times U$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b f(t,x) \cdot dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x) \cdot dt.$$

Demostración. Podemos suponer que $m = 1$. Dado $x_0 \in U$, sea $C \subset U$ un cubo cerrado centrado en x_0. Como f es continua es $[a,b] \times U$, entonces es uniformemente continua en $[a,b] \times C$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z')| < \epsilon$, para todo $z, z' \in [a,b] \times C$, siempre que $\|z - z'\| < \delta$. Por tanto,

$$|F(x) - F(x_0)| = |\int_a^b f(t,x) - f(t,x_0) \cdot dt| \leq \int_a^b |f(t,x) - f(t,x_0)| \cdot dt \leq \epsilon \cdot (b-a)$$

si $\|x - x_0\| < \delta$. Luego, $F(x)$ es continua en x_0, luego continua en U.

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(z')| < \epsilon$, para todo $z, z' \in [a,b] \times C$, siempre que $\|z - z'\| < \delta$. Dado un número real h, denotaré $x + h_i = x + (0, \overset{i}{\dots}, h, \dots, 0)$. Por el teorema del valor medio $\frac{f(t,x+h_i) - f(t,x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x + \delta'_i)$, con $|\delta'| < |h|$. Por tanto,

$$\left| \frac{\int_a^b f(t,x_0+h_i) \cdot dt - \int_a^b f(t,x_0) \cdot dt}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0) dt \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \delta'_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0) dt \right|$$
$$\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \delta'_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0) \right| dt < \epsilon \cdot (b-a)$$

para todo $|h| < \delta$. Luego, $\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b f(t,x) \cdot dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x) \cdot dt$.

□

21. Teorema: *Sea* $\{f_n \in \mathrm{Aplic}_a([a,b]\times U,\mathbb{R}^m)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones de Cauchy integrables. Entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *es una función integrable y*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t,x)\cdot dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t,x)dt.$$

Demostración. Podemos suponer que $m=1$. Dado $\epsilon>0$, sabemos que existe r tal que $||\lim\limits_{n\to\infty} f_n - f_m||_\infty < \epsilon$, para todo $m>r$. Las desigualdades

$$\begin{aligned}\int_a^b f_m dt - \epsilon\cdot(b-a) &= \underline{\int_a^b} f_m - \epsilon\, dt \le \underline{\int_a^b} \lim_{n\to\infty} f_n dt \le \overline{\int_a^b} \lim_{n\to\infty} f_n dt \le \overline{\int_a^b} f_m + \epsilon\, dt \\ &= \int_a^b f_m dt + \epsilon\cdot(b-a)\end{aligned}$$

prueban el teorema. □

22. Teorema : *Sea* $\{f_n \in \mathrm{Aplic}((a,b)\times U,\mathbb{R}^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tales* $\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t}$ *existen y son continuas. Si existe un punto* $c\in(a,b)$ *tal que* $\{f_n(c,x)\}$ *es convergente para cada* x*, y la sucesión* $\{\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t}\}$ *es uniformemente convergente, entonces* $\{f_n\}$ *es uniformemente convergente y*

$$\frac{\partial(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t,x))}{\partial t} = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t}.$$

Demostración. Podemos suponer $m=1$. Tenemos que $f_n(s,x) = f_n(c,x) + \int_c^s \frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t}dt$. Dado $\epsilon>0$, existe $m\in\mathbb{N}$, tal que $||\frac{\partial f_m(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t}||_\infty < \epsilon$, para todo $n>m$. Por tanto,

$$||f_n - f_m||_\infty = ||\int_c^s \frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial f_m(t,x)}{\partial t}\, dt||_\infty \le \int_c^s ||\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial f_m(t,x)}{\partial t}||_\infty\, dt \le (b-a)\cdot\epsilon$$

Por tanto, la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy, luego convergente. Además, si tomamos $\lim\limits_{n\to\infty}$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s,x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c,x) + \lim_{n\to\infty}\int_c^s \frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t}\cdot dt \underset{3.6.21}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(c,x) + \int_c^s \lim_{n\to\infty}\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t}\cdot dt$$

y derivando $\frac{\partial(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t,x)}{\partial t}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial t}$.

□

3.7. Funciones analíticas

1. Teorema de Abel: *Si la serie de números complejos $\sum_n a_n b^n$ es convergente, entonces la serie de funciones $\sum_n a_n z^n$ converge (absoluta y) uniformemente en los compactos de $B(a,|b|)\subseteq\mathbb{C}$.*

Demostración. Tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n b^n| = 0$, luego existe $K > 0$ tal que $|a_n b^n| < K$ para todo n. Entonces, $\sum\limits_{n=0}^{m} |a_n z^n| = \sum\limits_{n=0}^{m} |a_n b^n|\cdot|z/b|^n \leq K\cdot \sum\limits_{n=0}^{m} |z/b|^n$ que es una serie geométrica convergente cuando $|z/b| < 1$. □

2. Definición: Se dice que $r \in [0,\infty]$ es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es absolutamente convergente cuando $|z-a| < r$ y no lo es cuando $|z-a| > r$.

El teorema de Abel asegura la existencia y unicidad del radio de convergencia. En efecto, $r = \sup\{s \geq 0 : \sum\limits_{n}^{\infty} |a_n| s^n$ es convergente$\}$.

3. Proposición: *Si $r > 0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, entonces para cada $b \in B(a,r)$ existe una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ de radio de convergencia mayor o igual que $r-|b-a|$, tal que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ en $B(b,r-|b-a|)$.*

Demostración. Por cambio de coordenada $z' = z-a$ podemos suponer que $a = 0$. Tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b+b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k}(z-b)^k\Big) \underset{*}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n b^{n-k}\Big)(z-b)^k$$

donde $\underset{*}{=}$ se debe a que podemos cambiar el orden de los sumandos, ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |b|^{n-k}|z-b|^k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|b|+|z-b_0|)^n$$

que es convergente porque $|b|+|z-b| < r$, para todo $z \in B(|b|,r-|b|)$. □

4. Proposición: *Sea r el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Entonces,*

$$r = \sup\{s \geq 0 : s < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ para todo } n \text{ salvo un número finito}\}.$$

Con otras palabras: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}\}_{m\geq n}$.

Demostración. Si $\sqrt[n]{|a_n|}\cdot s \geq 1$ para un número infinito de números naturales n, entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n s^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sqrt[n]{|a_n|}\cdot s)^n = \infty$, luego $r < s$.

Si $\sqrt[n]{|a_n|}\cdot s < 1$ para todo n salvo para un número finito de n, tomemos $s' = \frac{s}{1+\epsilon}$, entonces $\sqrt[n]{|a_n|}\cdot s' < \frac{1}{1+\epsilon}$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n s'^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sqrt[n]{|a_n|}\cdot s')^n \leq cte. + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{1+\epsilon})^n < \infty$, luego $r \geq s' = \frac{s}{1+\epsilon}$, para todo $\epsilon > 0$, luego $r \geq s$.

□

5. Observación: Si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existe, entonces $r = \lim\limits_{n\to\infty}\inf\{\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}\}_{m\geq n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

6. Lema: *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = a$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a$.*

Demostración. Supongamos $a \neq \pm\infty$. Dado $\epsilon > 0$, existe k tal que $a-\epsilon \leq (a_{n+1}-a_n) \leq a+\epsilon$ para todo $n \geq k$, luego $(n-k)\cdot(a-\epsilon) \leq (a_n - a_k) \leq (n-k)\cdot(a+\epsilon)$ para todo $n \geq k$[3]. Por tanto,

$$\frac{a_k + (n-k)\cdot(a-\epsilon)}{n} \leq \frac{a_n - a_k}{n} \leq \frac{a_k + (n-k)\cdot(a-\epsilon)}{n}$$

Entonces, dado $\epsilon' > 0$ existe $k' > k$ de modo que para todo $n > k'$,

$$-\epsilon' + (a-\epsilon) \leq \frac{a_n}{n} \leq \epsilon' + (a-\epsilon),$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a$.

□

7. Proposición: *Sea $\{\sum\limits_{n=0}^{m} a_n z^n\}$ una serie de números complejos de radio de convergnecia r. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ existe, entonces $r = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.*

Demostración. Tomando ln, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|)$ existe, y por el lema coincide con $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln|a_n|}{n}$. Tomando exponenciales

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln|a_n|}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = r.$$

□

[3]Si $a = \infty$, diríamos que para cada $K > 0$, existe un k, tal que $K \leq (a_{n+1} - a_n)$, para todo $n > k$, luego $(n-k)\cdot K \leq (a_n - a_k)$, etc.

8. Proposición : *Dos series de potencias* $\sum_n^\infty a_n(z-a)^n$ *y* $\sum_n^\infty b_n(z-a)^n$ *tienen el mismo radio de convergencia si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{|b_n|}} = 1$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe m tal que $\frac{1}{\sqrt[n]{|b_n|}} < (1+\epsilon)\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, para todo $n \geq m$. Luego si r es el radio de convergencia de $\sum_n^\infty a_n(z-a)^n$ es y r' el de $\sum_n^\infty b_n(z-a)^n$ entonces $r' < (1+\epsilon)\cdot r$. Igualmente, obtenemos que $r < (1+\epsilon)\cdot r'$.

□

9. Lema: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Demostración. Tomando logaritmos, tenemos que probar que $\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = 0$. Por la regla de L'Hopital, $\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0$. □

10. Proposición: *Las series* $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$ *y* $\sum_{n=0}^\infty na_n(z-a)^{n-1}$ *tienen el mismo radio de convergencia.*

Demostración. Evidentemente, el radio de convergencia de las series $\sum_{n=0}^\infty na_n(z-a)^{n-1}$ y $(z-a)\cdot \sum_{n=0}^\infty na_n(z-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty na_n(z-a)^n$ es el mismo. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{|a_n\cdot n|}} = 1$, concluimos por la proposición anterior.

□

11. Corolario: *Sea $r > 0$ el radio de convergencia de las serie con coeficientes números reales* $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$*. Entonces, la función real* $(a-r, a+r) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ *es de clase* $\mathscr{C}^\infty$ *y* $(\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n)' = \sum_{n=0}^\infty na_n(x-a)^{n-1}$ *(que es una serie de radio de convergencia r).*

Demostración. El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^\infty na_n(x-a)^{n-1}$ es r por 3.7.10. La serie $\sum_{n=0}^\infty na_n(x-a)^{n-1}$ es uniforme convergente en compactos de $(a-r, a+r)$ por el teorema de Abel. Por el teorema 3.6.22, $(\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n)' = \sum_{n=0}^\infty na_n(x-a)^{n-1}$. Luego, $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ es de clase $\mathscr{C}^1$. Repitiendo los argumentos con la derivada tenemos que es de clase $\mathscr{C}^2$, etc.

□

12. Definición: Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Se dice que $f\colon U \to \mathbb{R}$ es una función analítica si para cada punto $a \in U$ existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, de radio de convergencia positivo, que coincide con f en un entorno de a[4].

La suma y el producto (ver 2.4.7) de funciones analíticas es analítica. La exponencial, el coseno y seno son funciones analíticas en $\mathbb{R}$.

13. Desarrollo de Taylor del logaritmo: El desarrollo de Taylor de $\ln(1+x)$, en $x=0$, hasta orden m es $\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. Queremos probar que la serie $\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ de funciones de $C^0_a((-1,1))$ converge uniformemente a $\ln(1+x)$ en compactos de $(-1,1)$. La serie de sus derivadas $\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}x^{n-1}$ converge uniformemente a $\frac{1}{1+x}$ en $(-1+\epsilon, 1-\epsilon)$, por la proposición 2.4.5. Entonces, $(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n})' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x} = \ln(1+x)'$ en $(-1,1)$. Además, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{0^n}{n} = 0 = \ln(1+0)$, luego la serie $\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ de funciones de $C^1_a((-1,1))$ converge uniformemente a $\ln(1+x)$ en compactos de $(-1,1)$.

14. Desarrollo de Taylor de la arcotangente: La derivada de $\arctan x$ es igual a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \cdot x^{2i}$ (para $|x|<1$). Integrando tenemos que

$$(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\cdot x^{2i+1})' = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot x^{2i} = \frac{1}{1+x^2} = (\arctan x)'.$$

Luego, $\arctan x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\cdot x^{2i+1}$.

15. Desarrollo de Taylor del arcoseno: La derivada del arcoseno es igual a

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-1/2}{i}(-x^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1/2\cdot(1/2+1)\cdots(1/2+(i-1))}{i!}x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{2\cdot 4\cdots 2i}\cdot x^{2i},$$

para $|x|<1$. Integrando y derivando,

$$(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{2\cdot 4\cdots 2i}\cdot\frac{x^{2i+1}}{2i+1})' = (1-x^2)^{-1/2} = (\operatorname{arc\,sen} x)'.$$

Luego, $\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{2\cdot 4\cdots 2i}\cdot\frac{x^{2i+1}}{2i+1}$.

[4] Obsérvese que $f^{n)}(a) = n!\cdot a_n$.

3.8. Problemas

1. Sigamos las notaciones del apartado 3.5.16. Calcula $\lim_{R\to 0} V/R\cdot(1-e^{-\frac{Rt}{L}})$ (suponemos que V, t y L no dependen de R).

2. Calcula $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$.

   Solución: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$

3. Calcula $\lim_{x\to 0^+}(\ln x - \frac{1}{x})$.

   Solución: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0 < 1$. Luego,

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - 1) = -\infty.$$

4. Calcula $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x})$.

   Solución: $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = 0.$

5. Calcula $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$.

   Solución: $\ln(\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}) = \lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\cos x/\operatorname{sen}^2 x} = 0$, porque $\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1} = 0$. Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

6. De todos los polígonos regulares de perímetro 1 ¿cuál es de área máxima?

   Solución: Sea l la longitud de cada cada lado del polígono regular de n lados. Entonces, $n\cdot l = 1$ y $l = \frac{1}{n}$. Sea a la longitud de la apotema, es decir la distancia del punto medio de un lado al centro del polígono y r la distancia de cada vértice del polígono al centro. Entonces, $a^2 + (\frac{l}{2})^2 = r^2$ y $\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{2n}) = \frac{l/2}{r} = \frac{1}{2nr}$. El área A del polígono es

$$A = n\cdot\frac{al}{2} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{r^2 - (\frac{l}{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2n\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})})^2 - (\frac{1}{2n})^2}}{2} = \frac{\cot(\frac{\pi}{n})}{4n}.$$

   Luego, $A = \frac{x\cot(x)}{4\pi}$ (donde $x = \frac{\pi}{n}$). Veamos que A es creciente para $n \geq 2$. Basta ver que A es decreciente para $x \in (0,\pi/2)$. $A' = \frac{\operatorname{sen}(2x)-2x}{8\pi\operatorname{sen}^2 x}$ y el numerador es negativo porque en cero es cero y es decreciente (porque es de derivada negativa).

   Por tanto, cuanto mayor es n, mayor es A. Es decir, “el polígono de infinitos lados, la circunferencia, es el de mayor área". Observemos que $\lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty}\frac{\cot(\frac{\pi}{n})}{4n} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cot(x)}{4\pi} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{4\pi\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4\pi\cos x} = \frac{1}{4\pi}$, que es el área de la circunferencia de longitud 1.

7. Sean $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Prueba que $\cosh(x)^2 - \operatorname{senh}(x)^2 = 1$, que $(\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x)$ y que $\operatorname{senh}(x)' = \cosh(x)$. Prueba que $\operatorname{senh}(x)$ establece un difeomorfismo de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$. Sea $\operatorname{arcsenh}(x)$ la función inversa de $\operatorname{senh}(x)$, prueba que
$$\operatorname{arcsenh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Prueba que $\cosh(x)$ establece un difeomorfismo de $(0,\infty)$ con $(1,\infty)$. Sea $\operatorname{arccosh}(x)$ la función inversa de $\cosh(x)$, prueba que
$$\operatorname{arccosh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

8. **Catenaria:** Calcula la curva que describe una cuerda (sin rigidez flexional y no extensible) suspendida entre dos puntos fijos (bajo el efecto de la gravedad, que es cosntante).

   Solución Sea $s\colon [0,a] \to \mathbb{R}^2$, $s(x) = (x, y(x))$ el arco de curva descrito por la curva, que podemos suponer que está en un plano (el eje vertical es $x = 0$). Sea $x = a$ el punto más bajo de la catenaria ($y(a)$ es mínimo). Consideremos el tramo de arco que comienza en $s(a)$ y termina en $s(x)$. Sea T_a la fuerza (horizontal) que ejerce el tramo izquierdo de la catenaria sobre $s(a)$, T_x la fuerza (tangente a s en $s(x)$) que ejerce el tramo derecho de la catenaria sobre $s(x)$ y P el peso del tramo de arco. Tenemos que $T_a + T_x + (0,P) = (0,0)$. Tenemos que $T_a = (\lambda, 0)$, $T_x = -\lambda \cdot (1, y'(x))$ y $P = \lambda \cdot y'$. Por otra parte, P es proporcional (según la densidad del cable) a la longitud del tramo considerado. $P = \mu \cdot \int_a^x \sqrt{1+y'^2}dt$. Por tanto,
$$y' = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \int_a^x \sqrt{1+y'^2} \cdot dt$$
Derivando obtenemos que $y'' = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \sqrt{1+y'^2}$. Sea $z = y'$, entonces $z' = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \sqrt{1+z^2}$, luego
$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot dx$$
Integrando, $\operatorname{arcsenh}(z) = \frac{\mu}{\lambda} \cdot x + \gamma$ y tomando senh obtenemos $z = \operatorname{senh}(\frac{\mu}{\lambda} \cdot x + \gamma)$. Recordemos que $z = y'$ y que $y'(a) = 0$, luego $\gamma = -\frac{\mu}{\lambda} \cdot a$. Integrando obtenemos $y = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \cosh(\frac{\mu}{\lambda} \cdot x + \gamma) + \eta$.

9. **Velocidad de escape:** Calcula la velocidad con la que debe ser lanzado verticalmente un proyectil para que escape del campo gravitatorio terrestre (suponemos que no hay rozamiento y que el proyectil no tiene propulsores). Calcula la altura del proyectil en el instante t.

   Solución: 1. La fuerza de la gravedad en la superficie terrestre es 9,8. La fuerza de la gravedad g depende de la altura h, $g = \frac{-K}{h^2}$. Luego, $9{,}8 = \frac{K}{R^2}$ y $K = 9'8 \cdot R^2$

(con $R = 6371000$ m.). Sea $h(t)$ la altura del proyectil en el instante t, luego $h(0) = R$. Entonces, $h'(t)$ es la velocidad en el instante t, $h(\infty) = \infty$ y $h'(\infty) = 0$. La aceleración es $h''(t) = \frac{-K}{h(t)^2}$. Entonces, $h'h'' = \frac{-Kh'}{h^2}$. Integrando, $\frac{1}{2}\cdot h'^2 = \frac{K}{h} + cte$ y tomando valor en $t = \infty$ obtenemos que $cte = 0$. Así pues, $h' = \sqrt{\frac{2K}{h}}$ y $h'(0) = \sqrt{\frac{2K}{R}} = \sqrt{2\cdot 9'8\cdot R} = 11171\ m/s$.

Tenemos que $h^{1/2}h' = \sqrt{2K}$. Integrando, $\frac{2}{3}\cdot h^{3/2} = \sqrt{2K}\cdot t + b$. Tomando $t = 0$, tenemos que $b = \frac{2}{3}\cdot R^{3/2}$ y

$$h(t) = R\cdot(\sqrt{\frac{44'1}{R}}\cdot t + 1)^{2/3}.$$

2. Otro modo: La energía cinética del proyectil en la superficie terrestre es igual al trabajo realizado por el proyectil desde la superficie de la tierra al infinito. En efecto,

$$\int_R^\infty m\cdot h''\cdot dh = \int_0^\infty m\cdot h''h'dt = \frac{m\cdot(h')^2}{2}]_0^\infty = \frac{m\cdot h'(0)^2}{2}.$$

Por tanto, $\frac{1}{2}m\cdot h'(0)^2 = \int_R^\infty \frac{-K\cdot m}{h^2}\cdot dh = \frac{K\cdot m}{h}]_R^\infty = \frac{mK}{R}$. Luego, $h'(R) = \sqrt{\frac{2K}{R}} = 11171$.

10. **Caracterización óptica de la parábola:** Consideremos un punto p y una recta r en el plano. Calcula una curva tal que todo rayo de luz que salga del punto p después de rebotar en la curva sale con dirección paralela a r.

    Solución: Podemos suponer que el punto es $(0,0)$ y la recta $y = 0$. Sea U un entorno abierto de $0 \in \mathbb{R}$ y $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ la curva pedida (y supongamos que $(x(0), y(0)) = (b, 0)$). Consideremos el rayo de luz $(x(t), y(t))$ que va desde $(0,0)$ al punto $(x(t), y(t))$ y el rebotado $(-1,0)$ que va desde $(x(t), y(t))$ a $(x(t)-1, y(t))$. Ha de cumplirse que

$$\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(x',y') = (-1,0)\cdot(x',y')$$

    Luego, $\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = -x'$, luego $(\sqrt{x^2+y^2})' = -x'$ y $\sqrt{x^2+y^2} = -x + 2b$. Por tanto,

$$y^2 = -4bx + 4b^2,$$

    que es la ecuación de una parábola.

11. **Caracterización óptica de la elipse:** Consideremos dos puntos del plano. Calcula una curva tal que todo rayo de luz que salga de un punto pase por el otro después de rebotar en la curva.

Solución: Podemos suponer que los dos puntos son $(-a,0)$ y $(0,a)$. Sea U un entorno abierto de $0 \in \mathbb{R}$ y $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ la curva pedida (y supongamos que $(x(0), y(0)) = (b,0))$. Consideremos el rayo de luz $(x(t)+a, y(t))$ que va desde $(-a,0)$ al punto $(x(t), y(t))$ y el rebotado $(a - x(t), -y(t))$ que va desde $(x(t), y(t))$ a $(a,0)$. Ha de cumplirse que

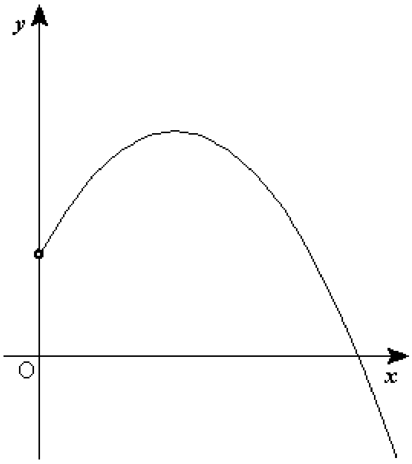
$$\frac{(x+a,y)}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\cdot(x',y') = \frac{(a-x,-y)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\cdot(x',y')$$

Luego, $\frac{(x+a)x'+yy'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = \frac{(a-x)x'-yy'}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$. Entonces, $(\sqrt{(x+a)^2+y^2})' = (-\sqrt{(x-a)^2+y^2})'$ y por lo tanto $\sqrt{(x+a)^2+y^2} = -\sqrt{(x-a)^2+y^2}+2b$. Elevando al cuadrado y operando obtenemos $ax - b^2 = -b\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ y de nuevo elevando al cuadrado y operando obtenemos

$$(b^2-a^2)\cdot x^2 + b^2\cdot y^2 = (b^2-a^2)\cdot b^2.$$

Para $b > a$ obtenemos la ecuación de la elipse. Para $b < a$, es la ecuación de una hipérbola (en este caso el rayo de luz "rebota" en sentido contrario al natural).

12. **Tiro parabólico:**



Desde una altura h se dispara un proyectil con velocidad (a,b) (solo consideramos largo y altura). Suponemos que la gravedad g es constante. Calcula las ecuaciones del movimiento del proyectil.

Solución: Suponemos que no hay roce por el aire. Tenemos

$$(x'(t), y'(t)) = v(t) = (a,b) + t\cdot(0,-g).$$

Integrando, obtenemos

$$(x(t), y(t)) = (0,h) + t(a,b) - \frac{t^2}{2}\cdot(0,g)$$

Luego, $y = h + \frac{b}{a}\cdot x - \frac{g}{2a^2}\cdot x^2$. Tengamos ahora en cuenta el roce, que para velocidades bajas es proporcional a la velocidad. Entonces, la aceleración es $v'(t) = (0,-g) - k\cdot v(t)$, es decir, $(D + k\cdot \mathrm{Id})(v) = (0,-g)$ y

$$v = \frac{1}{D+k\cdot\mathrm{Id}}(0.-g) = (0,\frac{-g}{k}) + e^{-kt}(c,d), \text{ con } (c,d) = (a,\frac{g}{k}+b).$$

Integrando obtenemos

$$(x(t), y(t)) = (\frac{a}{k}, \frac{g}{k^2}+\frac{b}{k}+h) + (0,\frac{-gt}{k}) - \frac{e^{-kt}}{k}(a,\frac{g}{k}+b)$$

Eliminando t, obtenemos $y = h + \frac{g}{k^2}\ln(1-\frac{k}{a}x) + (\frac{g}{ka}+\frac{b}{a})x$.

13. La ley del enfriamiento de Newton establece que la tasa de pérdida de calor de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y sus alrededores. Un sólido a 20º centígrados es introducido en un lago de agua a temperatura de 5º. Si tarda dos minutos en enfriarse diez grados ¿Cuántos minutos tardará en enfriarse 14 grados?

    Solución: Sea $T(t)$ la temperatura del sólido en el instante t. Por la ley de enfriamento de Newton $\frac{dT}{dt} = K\cdot(5-T)$, es decir, $T' + KT = 5K$, que escribimos

    $$(D + K\,\mathrm{Id})(T) = 5K$$

    Una solución particular T_0 de esta escuación diferencial es $T_0 = 5$. Todas las soluciones son $5 + \mathrm{Ker}(D + K\,\mathrm{Id}) = 5 + e^{-Kt}\cdot\mu$. Tenemos que $T(t) = 5 + e^{-Kt}\cdot\mu$, $T(0) = 20$ y $T(2) = 10$. Luego $\mu = 15$ y $K = \ln\sqrt{3}$.

14. Calcula el radio de la órbita de los satélites geoestacionarios.

    Solución: Podemos suponer que estamos en el plano. Sea $s\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto s(t) = (r\cos\lambda t, r\,\mathrm{sen}\,\lambda t)$, con $\lambda = \frac{2\pi}{24\cdot 60^2}$ la trayectoria que describe el satélite geoestacionario. La gravedad sobre la superficie terrestre es $9'8 = \frac{K}{(6'378\cdot 10^6)^2}$, luego $K = 9'8\cdot 40'67\cdot 10^{12}$. Tenemos que calcular la aceleración y comprobar el valor de r en el que ésta contrarresta a la gravedad que ejerce la Tierra sobre el satélite, que es $\frac{K}{r^2}$ La velocidad es $s'(t) = \lambda\cdot(-r\,\mathrm{sen}\,\lambda t, r\cos\lambda t)$ y la aceleración es $s''(t) = \lambda^2\cdot(-r\cos\lambda t, -r\,\mathrm{sen}\,\lambda t)$, que está dirigida hacia el centro de la Tierra. Entonces, $|s''(t)| = \lambda^2\cdot r = \frac{K}{r^2}$ y $r = \sqrt[3]{\frac{K}{\lambda^2}} \simeq 42{,}250\cdot 10^3\,m$.

15. Un depósito contiene 10000 litros de agua salada con una concentración de sal del 5% (50-gramos de sal por litro). Un grifo va vertiendo 50-litros de agua pura por minuto. Por otro lado se desagua 50 litros del depósito por minutos ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la concentración salina del agua salada del depósito baje al 1%.

    Solución: Sea $s(t)$ los gramos de sal que hay en el depósito en el minuto t, luego $c(t) = \frac{s(t)}{1000}$ es la concentración salina del agua salada del depósito en el minuto t. Tenemos que $\Delta s = s(t+h) - s(t)$ es igual a los gramos de sal que hay en 50 litros de agua salada en el instante t por el incremento de tiempo Δt transcurrido (h) cuando el incremento es pequeño, multiplicado por -1, es decir, $\Delta s = -50\cdot\frac{s(t)}{10000}\cdot\Delta t$. Luego, $s'(t) = -\frac{50}{10000}\cdot s(t)$. Dividiendo por 1000, tenemos $c'(t) = \frac{-50}{10000}\cdot c(t)$. Es decir,

    $$(D + \frac{50}{10000})(c(t)) = 0$$

    Luego $c(t) = a\cdot e^{\frac{-50}{10000}t}$. Como $c(0) = 5\%$, entonces $a = 5$. Por tanto, $t = -20\cdot\ln(\frac{c(t)}{5})$. Después de $-20\cdot\ln(\frac{1}{5}) = 32'2$ minutos la concentración baja al 1%.

16. Sea F el espacio vectorial formado por las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ infinitamente derivables y $D\colon F \to F$ el operador derivada. Prueba que

    a) $D(e^f \cdot g) = e^f \cdot (D + f' \cdot \mathrm{Id})(g)$.

    b) Calcula las soluciones de la ecuación diferencial lineal $y' + fy = g$.

    Solución: El apartado a) es una comprobación inmediata. Resolvamos b). Tenemos
    $$g = y' + fy = (D + f\,\mathrm{Id})(y) = (D + f\,\mathrm{Id})(e^{-\int f} e^{\int f} y) = e^{-\int f} D(e^{\int f} y).$$
    Luego, $D(e^{\int f} y) = e^{\int f} g$. Entonces, $e^{\int f} y = cte + \int e^{\int f} g$ e $y = e^{-\int f}(cte + \int e^{\int f} g)$.

17. Sea F el espacio vectorial formado por las funciones de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{C}$ infinitamente derivables y $\Theta\colon F \to F$ el operador $\mathbb{C}$-lineal definido por $\Theta(f) := xf'$.

    a) Prueba que $\mathrm{Ker}(\Theta - \alpha)^r = x^\alpha \cdot \{\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i (\ln x)^i : \ \forall \lambda_i \in \mathbb{C}\}$.

    b) Resuelve la ecuación de Euler-Cauchy
    $$x^2 y'' + bxy' + cy = 0,$$
    para $b, c \in \mathbb{C}$ y $x > 0$.

    Solución: a) Consideremos el cambio de variable $x = e^t$ (o $t = \ln x$). Tenemos que $\frac{\partial}{\partial t} = \Theta$, por la regla de la cadena:
    $$\frac{\partial f(x)}{\partial t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot x = \Theta(f(x))$$
    Por tanto,
    $$\mathrm{Ker}(\Theta - \alpha\,\mathrm{Id})^r = \mathrm{Ker}(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\,\mathrm{Id})^r = e^{\alpha t} \cdot \{\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i t^i\} = x^\alpha \cdot \{\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i (\ln x)^i\}.$$

    b) $\Theta^2 = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x}$. Por tanto,
    $$0 = x^2 y'' + bxy' + cy = (\Theta^2 + (b-1)\Theta + c\,\mathrm{Id})(y).$$
    Entonces, $y \in \mathrm{Ker}(\Theta^2 + (b-1)\Theta + c\,\mathrm{Id})$. Sean $\alpha, \beta = \frac{-b+1 \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4c}}{2}$. Entonces,
    $$y = \begin{cases} \lambda x^\alpha + \mu x^\beta, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ x^\alpha(\lambda + \mu \ln x), & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

18. Resuelve la ecuación diferencial del movimiento armónico amortiguado

$$f'' + af' + bf = 0, \ \ (\text{con } a^2 - 4b < 0 \text{ y } a > 0).$$

Solución: Tenemos $(D^2 + aD + b\,\mathrm{Id})(f) = 0$. Las raíces de $x^2 + ax + b$ son $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Luego,

$$f \in \mathrm{Ker}(D^2 + aD + b\,\mathrm{Id}) = e^{\frac{-ax}{2}} \cdot (\lambda \cos(\frac{\sqrt{-a^2+4b}}{2}x) + \mu\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{-a^2+4b}}{2}x))$$

19. Resuelve la ecuación diferencial del movimiento armónico forzado

$$f'' + af' + bf = c\cos(wx), \ \ (\text{con } a^2 - 4b < 0 \text{ y } a > 0).$$

Solución: Calculemos una solución particular. Sea $E = \langle \cos wt, \mathrm{sen}\, wt\rangle$. Busquemos en E una solución particular. Resolvamos $(D^2+aD+b\,\mathrm{Id})(\lambda\cos wt+\mu\,\mathrm{sen}\,wt) = c\cos wt$, es decir,

$$\begin{aligned}(b-w^2)\cdot\lambda + aw\cdot\mu = c\\ -aw\cdot\lambda + (b-w^2)\cdot\mu = 0\end{aligned}$$

Luego, $\lambda = \frac{c(b-w^2)}{(b-w^2)^2+a^2w^2}$ y $\mu = \frac{acw}{(b-w^2)^2+a^2w^2}$. Para $w = \sqrt{b}$ (y a pequeño)

$$|\lambda\cos wt + \mu\,\mathrm{sen}\,wt| = \sqrt{\lambda^2+\mu^2} = \frac{|c|}{(b-w^2)^2+a^2w^2} >> 0;$$

fenómeno de resonancia, que en ingeniería es importante conocer.

20. Calcula $\int x^2\cos^2 x\, dx$.

Solución: $\int x^2\cos^2 x\,dx = \frac{1}{D}(x^2(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2})^2) = \frac{1}{D}(x^2\frac{e^{2xi}+e^{-2xi}+2}{4})$

$$\begin{aligned}&= \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{e^{2xi}}{4}\tfrac{1}{D+2i\,\mathrm{Id}}(x^2) + \tfrac{e^{-2xi}}{4}\tfrac{1}{D-2i\,\mathrm{Id}}(x^2)\\ &= cte + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{e^{2xi}}{4}(\tfrac{-i}{2} + \tfrac{1}{4}D + \tfrac{i}{8}D^2)(x^2) + \tfrac{e^{-2xi}}{4}(\tfrac{i}{2} + \tfrac{1}{4}D + \tfrac{-i}{8}D^2)(x^2)\\ &= cte + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{(2x^2+1)\,\mathrm{sen}(2x)}{8} + \tfrac{x\cos(2x)}{4}.\end{aligned}$$

21. **Integración por partes:** Prueba que $\int fg' = fg - \int f'g$.

Solución Derivando, tenemos que probar que $(fg - \int f'g)' = (fg)' - f'g = fg'$, que es consecuencia de la regla de Leibnitz.

22. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado n. Sean $s_1(x),\dots,s_n(x)$ soluciones, linealmente independientes, de la ecuación diferencial $p(D)y = 0$. Pruébese que si las funciones $c_1(x),\dots,c_n(x)$ cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1(x)'s_1(x) + \ldots + c_n(x)'s_n(x) &= 0\\ \ldots &= 0\\ c_1(x)'s_1(x)^{n-2)} + \ldots + c_n(x)'s_n(x)^{n-2)} &= 0\\ c_1(x)'s_1(x)^{n-1)} + \ldots + c_n(x)'s_n(x)^{n-1)} &= f(x)\end{aligned}$$

entonces $c_1(x)s_1(x)+\ldots+c_n(x)s_n(x)$ es una solución particular de $p(D)y = f(x)$.

Solución: Observemos que $D^i(\sum_i c_i(x)s_i(x)) = \sum_i c_i(x)D^i s_i(x)$, para $i < n$. Entonces,

$$D^n(\sum_i c_i(x)s_i(x)) = D(\sum_i c_i(x)D^{n-1}s_i(x)) = \sum_i c_i(x)D^n s_i(x) + \sum_i c_i(x)'D^{n-1}s_i(x).$$

Luego, $p(D)(\sum_i c_i(x)s_i(x)) = \sum_i c_i(x)p(D)(s_i(x)) + \sum_i c_i(x)'s_i(x)^{n-1)} = 0 + f(x)$.

23. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que f establece un difeomorfismo de $\mathbb{R}$ con un intervalo abierto (a,b) (donde puede ser $a = -\infty$ o $b = \infty$.

    Solución: Por el problema 9 del capítulo 1, f es un homeomorfismo con (a,b) y la inversa f^{-1} es diferenciable, pues $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

24. Sea (X,d) un espacio métrico y $F\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función estrictamente creciente y de crecimiento cada vez más pequeño ($F' > 0$ y $F'' \leq 0$) y $F(0) = 0$. Prueba que $d' := F \circ d$ es una distancia y que la topología definida por d coincide con la definida por d'.

    Solución: F es inyectiva, luego un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ con un intervalo abierto $[0,,a)$ (a puede ser ∞) y $F([0,b)) = [0,F(b))$. Observemos que $F(c+d) \leq F(c)+F(d)$ porque $F(c+d)-F(c) \leq F(d)-F(0) = F(d)$. Por tanto,

    $$d'(x,y)+d'(y,z) = F(d(x,y))+F(d(y,z)) \leq F(d(x,y)+d(y,z)) \leq F(d(x,z)) = d'(x,z)$$

    Ahora ya es fácil probar que d' es una distancia. Dado $r > 0$

    $$\begin{aligned} B_{d'}(x,F(r)) &= \{y \in X : d'(y,x) < F(r)\} = \{y \in X : F(d(y,x)) < F(r)\} = \{y \in X : d(y,x) < r\} \\ &= B_d(x,r). \end{aligned}$$

    Ahora es fácil concluir que d y d' definen la misma topología en X.

25. Sea $d'(p,q) := \frac{d(p,q)}{1+d(p,q)}$. Prueba que la topología definida por d coincide con la definida por de d'.

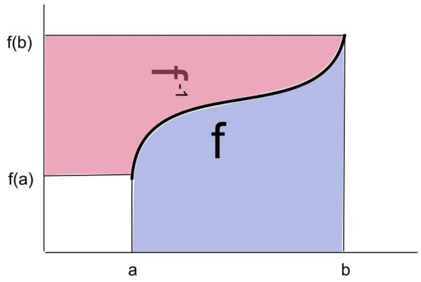
26. Sea $f\colon [a,b] \to [f(a),f(b)]$ un homeomorfismo y f^{-1} la aplicación inversa. Prueba que $\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\cdot dy + f(b)b - f(a)a$.

    Solución: Sigamos la notación $dh = h'\cdot dx$. Entonces, $\int_a^b d(fg) = \int_a^b f'dg + \int_a^b g'df$. Escribamos $y = f(x)$, luego $x = f^{-1}(y)$. Entonces, por la fórmula de cambio de variable (y escribamos $x = a$ y $x = b$, en vez de a y b, para no cometer errores)

    $$\int_{x=a}^{x=b} f\cdot dx = \int_{x=a}^{x=b} d(fx) - \int_{x=a}^{x=b} x\cdot df = xf]_{x=a}^{x=b} - \int_{y=f(a)}^{y=f(b)} f^{-1}(y)\cdot dy.$$

Geométricamente: Del dibujo se deduce que

$$\int_a^b f\cdot dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\cdot dy = f(b)b - f(a)a.$$



27. Calcula $\int_1^5 \ln x\cdot dx$.

 Solución: $\int_1^5 \ln x\cdot dx = x\ln x]_{x=1}^{x=5} - \int_{x=1}^{x=5} x\cdot d\ln x = 5\ln 5 - 0 - \int_{x=1}^{x=5} dx = 5\ln 5 - 4.$

28. Calcula $\int_0^\pi x\cos x\cdot dx$.

 Solución: $\int_0^\pi x\cos x\cdot dx = \int_{x=0}^{x=\pi} x\cdot d\,\mathrm{sen}\,x = x\,\mathrm{sen}\,x]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{sen}\,x\cdot dx = 0 + \cos x]_0^\pi = -2.$

29. Prueba que $\int_a^b \mathrm{sen}^n x\cdot dx = \frac{-\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x}{n}]_a^b + \frac{n}{n-1}\int_a^b \mathrm{sen}^{n-1} x\cdot dx.$

 Solución: Se puede comprobar derivando (respecto de b). Pero probemoslo por integración por partes:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{sen}^n x\cdot dx &= -\int \mathrm{sen}^{n-1} x\cdot d\cos x = -\mathrm{sen}^{n-1} x\cos x + \int \cos x\cdot d\,\mathrm{sen}^{n-1} x\\ &= -\mathrm{sen}^{n-1} x\cos x + \int (n-1)\cos x\,\mathrm{sen}^{n-2} x\cos x\cdot dx\\ &= -\mathrm{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \mathrm{sen}^{n-2} x\cdot dx - (n-1)\int \mathrm{sen}^n x\cdot dx\end{aligned}$$

 y se concluye fácilmente.

30. Prueba que $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}.$

 Solución: Se puede comprobar derivando, pero probemoslo por integración por partes:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\cdot dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\cdot dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\cdot dx \quad \text{y}$$

$$2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\cdot dx = -\int \frac{x}{(x^2+1)^{n-2}}\cdot d\frac{1}{x^2+1} = -\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{1}{x^2+1}\cdot d\frac{x}{(x^2+1)^{n-2}}$$

$$= -\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{(n-2)2x^2}{(x^2+1)^n}\cdot dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\cdot dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\cdot dx = \frac{1}{2n-2}\cdot\left(\frac{-x}{(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\cdot dx\right).$$

 y es fácil concluir.

Este problema es importante para calcular primitivas de funciones racionales: Toda fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ es igual a un polinomio más suma de fracciones $\frac{p_i(x)}{q_i(x)}$ donde $q_i(x)$ es una potencia de un polinomio irreducible (que son de grado 2 o 1). Por cambio de variable, $q(x) = \lambda x^n$ o $q_i(x) = \lambda(x^2+1)^n$. Por último observemos que $\frac{r(x)}{x^n} = s(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x^i}$ y $\frac{r(x)}{(x^2+1)^n} = s(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i x + b_i}{(x^2+1)^i} = q(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i x}{(x^2+1)^i} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(x^2+1)^i}$.

31. Expresa $\int x^2 e^{-x^2}$ en términos de $\int e^{-x^2}$.

    Solución: $\int x^2 e^{-x^2} \cdot dx = \frac{-1}{2} \int x \cdot de^{-x^2} = \frac{-xe^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} \cdot dx$.

32. **Aguja de Buffon:** Calcula la probabilidad de que una aguja de l centímetros de longitud, lanzada sobre una hoja de papel donde se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí l centímetros, corte a una de las rectas.

    Solución: Podemos suponer que $l = 2$. Podemos suponer que las rectas son las rectas del plano $\{y = 2n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Podemos suponer que el centro de la aguja cae en el eje $x = 0$, es más, podemos suponer cae que entre $y = 0$ y $y = 1$. Si cae en el punto $(0, y)$ (con $0 \le y \le 1$) calculemos la probabilidad con la que corta a $y = 0$: Tracemos la circunferencia de longitud 1 y centro c el centro de la aguja y consideremos el punto de corte p de esta circunferencia con la recta $y = 0$ y sea $0 \le \theta(y) \le \pi/2$ el ángulo de la recta que pasa por c y p con la recta $x = 0$. La probabilidad de corte es $\frac{2\theta(y)}{\pi}$ y $\cos(\theta(y)) = \frac{y}{1}$, es decir, $\theta(y) = \arccos(y)$. Por tanto, la probabilidad de corte de la aguja con alguna recta es igual a

$$\int_0^1 \frac{2\theta(y)}{\pi} \cdot dy = \int_0^1 \frac{2\arccos(y)}{\pi} \cdot dy = \frac{2}{\pi} \int_{\cos(t)=0}^{\cos(t)=1} \arccos(\cos(t)) \cdot d\cos(t)$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{0} -t\,\mathrm{sen}(t) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\,\mathrm{sen}(t) dt = \frac{2}{\pi}(-\cos(t)t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot dt)$$
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{sen}(t)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

33. Calcula $\int \sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}} \cdot dx$.

    Resolución: $\int \sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}} \cdot dx = \int \sqrt{z} \cdot d\frac{b'z-b}{-a'z+a} = \int \sqrt{z} \cdot d\frac{-b+\frac{b'a}{a'}}{-a'z+a} = \frac{a'b-b'a}{a'^2} \int \sqrt{z} \cdot d\frac{1}{z-\frac{a}{a'}} = \frac{a'b-b'a}{a'^2} \cdot \int t \cdot d\frac{1}{t^2-\frac{a}{a'}}) = \frac{a'b-b'a}{2a'^2\sqrt{\frac{a}{a'}}} \cdot \int t \cdot d(\frac{1}{t-\sqrt{\frac{a}{a'}}} - \frac{1}{t+\sqrt{\frac{a}{a'}}})$.

    Por otra parte, $\int t \cdot d\frac{1}{t-\alpha} = \int \frac{-t}{(t-\alpha)^2} \cdot dt = \int \frac{-(t-\alpha)}{(t-\alpha)^2} - \frac{\alpha}{(t-\alpha)^2} \cdot dt = -\ln(t-\alpha) + \frac{\alpha}{t-\alpha}$.

    Luego, $\int \sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}} \cdot dx = \frac{a'b-b'a}{2a'^2\sqrt{\frac{a}{a'}}} \cdot (\ln \frac{t+\sqrt{\frac{a}{a'}}}{t-\sqrt{\frac{a}{a'}}} + \frac{2\sqrt{\frac{a}{a'}}t}{t^2-\frac{a}{a'}})$, que es igual a

$$\frac{a'b-b'a}{2a'^2\sqrt{\frac{a}{a'}}} \cdot (\ln \frac{\sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}} + \sqrt{\frac{a}{a'}}}{\sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}} - \sqrt{\frac{a}{a'}}} + \frac{2\sqrt{\frac{a}{a'}} \cdot \sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}}}{\frac{ax+b}{a'x+b'} - \frac{a}{a'}}).$$

34. Se sabe que la velocidad de reproducción x' de las bacterias sigue la ecuación $x' = k_1 x - k_2 x^2$, con k_1, k_2 constantes. Calcula x si $x(0) = 10^3$.

    Solución: Tenemos que $\frac{x'}{k_1 x - k_2 x^2} = 1$. Luego,

$$t = \int_0^t 1 \cdot ds = \int_0^t \frac{x'(s)}{k_1 x(s) - k_2 x(s)^2} \cdot ds = \int_{10^3}^{x(t)} \frac{dx}{k_1 x - k_2 x^2} = \int_{10^3}^{x(t)} \frac{1/k_1}{x} + \frac{k_2/k_1}{k_1 - k_2 x}\, dx$$
$$= \frac{1}{k_1} \ln x - \frac{1}{k_1} \ln(k_1 - k_2 x)]_{10^3}^{x(t)} = \frac{1}{k_1} \ln(\frac{x}{k_1 - k_2 x})]_{10^3}^{x(t)} =$$

    Luego, $\frac{10^3}{k_1 - k_2 \cdot 10^3} \cdot e^{k_1 t} = \frac{x}{k_1 - k_2 x}$ y por tanto $x = \frac{k_1}{\frac{k_1 - k_2 \cdot 10^3}{10^3} \cdot e^{-k_1 t} + k_2}$.

35. Prueba que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

    Solución: $\frac{1}{x}$ es decreciente en $(0, \infty)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x]_1^{\infty} = \ln \infty - \ln 1 = \infty$.

36. Prueba que la serie $\{\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}\}$ es convergente.

    Solución: La serie $\{\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}\}$ es creciente. Solo tenemos que probar que está acotada. La función $\frac{1}{x^2}$ es decreciente en $(0, \infty)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot dx = 1 + \frac{-1}{x}]_1^{\infty} = 1 + 1 = 2$.

37. Prueba la fórmula de Leibnitz: $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}$.

    Solución: Tenemos que probar que la serie $\{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2i+1}\}$ converge a $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 (1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

    y $|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx| \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3}$.

38. Calcula el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

    Solución: El área es igual $4 \cdot \int_0^a b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx = 4b \cdot \int_0^a \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t}{a^2}} \cdot d(a \operatorname{sen} t) = 4ab \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt = 4ab \cdot \int_0^{\pi/2} (\frac{e^{it} + e^{-it}}{2})^2 \cdot dt = ab \cdot \int_0^{\pi/2} e^{2it} + e^{-2it} + 2\, dt = \cdots = ab\pi$.

Capítulo 4

Derivación e integración en varias variables

4.1. Derivadas de funciones en varias variables

1. Definición: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f: U \to \mathbb{R}$ una aplicación. Diremos que f es derivable en $\alpha \in U$ si existe una matriz $1 \times n$ de funciones en U continuas en α, $\tilde{f} = (\tilde{f}_i)$, tales que

$$f(x) = f(\alpha) + \tilde{f}(x) \cdot (x - \alpha) = f(\alpha) + \sum_i \tilde{f}_i(x) \cdot (x_i - \alpha_i).$$

Se dice que f es derivable en U cuando es derivable en todo punto de U.

Es obvio que si f es derivable en α entonces es continua en α.

2. Observación: $\tilde{f}_1(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{f(x_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha_1}$ (para $x_1 \neq \alpha_1$), luego

$$\tilde{f}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lim_{x_1 \to \alpha_1} \tilde{f}_1(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lim_{x_1 \to \alpha_1} \frac{f(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha_1} =: \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha).$$

En conclusión, $\tilde{f}(\alpha) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha)) =: f'(\alpha)$ y diremos que es la derivada de f en α (en las coordenadas $x_1, \dots, x_n$).

3. Proposición: *f es diferenciable en α si y solo si existen $A = (a_1, \dots, a_n)$ y una función real $o(x)$ tal que $\lim_{x \to \alpha} o(x) = 0$, de modo que*

$$f(x) = f(\alpha) + A \cdot (x - \alpha) + o(x) \cdot ||x - \alpha||.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Efectivamente,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha) + \tilde{f}(x) \cdot (x - \alpha) = f(\alpha) + \tilde{f}(\alpha) \cdot (x - \alpha) + (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(\alpha)) \cdot (x - \alpha) \\ &= f(\alpha) + \tilde{f}(\alpha) \cdot (x - \alpha) + \frac{(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(\alpha)) \cdot (x - \alpha)}{||x - \alpha||} \cdot ||x - \alpha||. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) $f(x) = f(\alpha) + A\cdot(x-\alpha) + o(x)\cdot ||x-\alpha|| = f(\alpha) + (A + \frac{o(x)\cdot(x-\alpha)}{||x-\alpha||})\cdot(x-\alpha)$. $\square$

4. Observación: $o(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)-A\cdot(x-\alpha)}{||x-\alpha||}$, para $x \neq \alpha$, luego f es derivable en α si y solo si existe A tal que $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)-A\cdot(x-\alpha)}{||x-\alpha||} = 0$, lo cual es una condición local en α (no depende de lo grande o pequeño que es U).

5. Proposición: *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f: U \to \mathbb{R}$ una función. Si $\alpha \in U$ es un máximo o un mínimo local de f, entonces $f'(\alpha) = 0$.*

Demostración. Tenemos que $f(x) = f(\alpha) + \tilde{f}(x)\cdot(x-\alpha)$, con $\tilde{f}(x)$ continua en α. Supongamos que $f'(\alpha) \neq 0$. Podemos suponer que $0 \neq \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha) = \lim\limits_{x_1\to\alpha_1} f(x_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$. Por tanto, la función

$$g(x_1) := f(x_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = f(\alpha) + \tilde{f}(x_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\cdot(x_1-\alpha_1)$$

no tiene un máximo local ni un mínimo local en α_1, luego f no tiene un máximo local ni un mínimo local en α.

$\square$

6. Definición: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f: U \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es de clase $\mathcal{C}^n$ (o que $f \in \mathcal{C}^n(U)$) si existen $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$ y son continuas en U, para todo α tal que $|\alpha| \leq n$.

7. Teorema de Hadamard: *Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, $\alpha \in U$ y $f(x) \in \mathcal{C}^{n+1}(U)$. Entonces, existen $g_i(x) \in \mathcal{C}^n(U)$, tales que $f(x) = f(\alpha) + \sum_i g_i(x)\cdot(x_i - \alpha_i)$.*

Demostración. Podemos suponer que $\alpha = 0$. Procedemos por inducción sobre m. Escribamos $f(x) = f(0,x_2,\dots,x_m) + g(x)$. Por inducción sobre m, $f(0,x_2,\dots,x_n) = f(0) + \sum_{i>1} g_i\cdot x_i$, con $g_i \in \mathcal{C}^n(U)$. Basta que probemos que $g = g_1\cdot x_1$, con $g_1 \in \mathcal{C}^n(U)$. Observemos que $g \in \mathcal{C}^{n+1}(U)$ y que $g(0,x_2,\dots,x_n) = 0$. En $x_1 \neq 0$, $g_1 = \frac{g}{x_1}$ y es de clase $\mathcal{C}^{n+1}$. Basta probar que existe g_1 de clase $\mathcal{C}^n$ localmente en una bola B centrada en cada punto $(0,x_2,\dots,x_n)$. Para todo $x \in B$,

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} g(tx_1,x_2,\dots,x_n)\cdot dt = \int_0^1 g_{x_1}(tx_1,\dots,x_n)\cdot x_1\cdot dt = \int_0^1 g_{x_1}(tx_1,x_2,\dots,x_n)dt\cdot x_1$$

y $g_1 = \int_0^1 g_{x_1}(tx_1,x_2\dots,x_n)dt \in \mathcal{C}^n(B)$, por 3.6.20.

$\square$

8. Corolario: *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Si $f \in \mathcal{C}^1(U)$ entonces f es derivable en U.*

9. Corolario: *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\alpha \in U$. El ideal $\mathfrak{m}_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^\infty(U) : f(\alpha) = 0\}$ está generado por $x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n$.*

10. Corolario: *Sea $U\subset\mathbb{R}^m$ un abierto y $f(x)\in\mathcal{C}^{n+1}(U)$. Si $f(0,\dots,0,x_{r+1},\dots,x_m)=0$, entonces existen $g_i(x)\in\mathcal{C}^n(U)$, tal que $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{r} g_i(x)\cdot x_i$.*

Demostración. Si $r=0$, es consecuencia del teorema de Hadamard. En la demostración del teorema de Hadamard probamos que $f(x)-f(0,x_2,\dots,x_m)=g_1\cdot x_1$, con $g_1\in\mathcal{C}^n(U)$. Supongamos $r>0$. Por inducción sobre r, $f(0,x_2,\dots,x_m)=\sum_{i=2}^r g_i(x_2,\dots,x_m)\cdot x_i$, con $g_i\in\mathcal{C}^n(U\cap 0\times\mathbb{R}^{m-1})$ y hemos concluido.

□

11. Proposición: *Si $f\in\mathcal{C}^2(U)$ entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$.*

Demostración. Existen $g_i\in\mathcal{C}^1(U)$ tales que $f=f(\alpha)+\sum_i g_i\cdot(x_i-\alpha_i)$. Sabemos que si $h(x)=t(x)\cdot(x_i-\alpha_i)$ es derivable en α y $t(x)$ es continua, entonces $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\alpha)=0$ para todo $j\neq i$ y $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha)=t(\alpha)$. Entonces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\alpha)=\frac{\partial(g_j+\sum_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_i-\alpha))}{\partial x_i}(\alpha)=\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\alpha)+\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha).$$

Igualmente, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\alpha)=\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha)+\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\alpha)$, luego $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$.

□

12. Corolario: *Dada $f(x_1,\dots,x_m)\in\mathcal{C}^n(U)$ y $b\in U$ entonces existe una descomposición*

$$f=\sum_{|\alpha|\le r} a_\alpha\cdot(x-b)^\alpha+\sum_{|\beta|=r} h_\beta\cdot(x-b)^\beta,$$

con $h_\beta\in\mathcal{C}^{n-r}(U)$, $h_\beta(b)=0$ y $a_\alpha\in\mathbb{R}$. Además, necesariamente $a_\alpha=\frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n}(b)$.

Demostración. Podemos suponer que $b=0$. Por el corolario 4.1.10,

$$f(x)=f(0,x_2,\dots,x_m)+g_1(x)\cdot x_1,$$

con $g_1(x)\in\mathcal{C}^{n-1}(U)$. Por inducción sobre m,

$$f(0,x_2,\dots,x_m)=\sum_{|(\alpha_2,\dots,\alpha_m)|\le r} a_\alpha\cdot x^\alpha+\sum_{|(\beta_2,\dots,\beta_m)|=r} h_\beta(x_2,\dots,x_m)\cdot x^\beta,$$

donde $a_\alpha=\frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}f(0,x_2,\dots,x_m)}{\partial^{\alpha_2}x_2\cdots\partial^{\alpha_m}x_m}(0)=\frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial^{\alpha_2}x_2\cdots\partial^{\alpha_m}x_m}(0)$, $h_\beta\in\mathcal{C}^{n-r}(U)$ y $h_\beta(0)=0$; y por inducción sobre n,

$$g_1(x)=\sum_{|\alpha|\le r-1} b_\alpha\cdot x^\alpha+\sum_{|\beta|=r-1}\bar h_\beta\cdot x^\beta,$$

con $b_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}g_1}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_m}x_m}(0)$, $\bar{h}_\beta\in\mathscr{C}^{n-r}(U)$ y $\bar{h}_\beta(0)=0$. Si $\alpha'=(1,0,\dots,0)+\alpha$, es fácil comprobar que $\frac{1}{\alpha'!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha'|}f}{\partial^{\alpha_1+1}x_1\cdots\partial^{\alpha_m}x_m}(0)=\frac{1}{\alpha'!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha'|}x_1g_1}{\partial^{\alpha_1+1}x_1\cdots\partial^{\alpha_m}x_m}(0)=\frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}g_1}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_m}x_m}(0)=b_\alpha$. Con todo obtendremos la descomposición enunciada con los coeficientes dichos.

Si tuviésemos otra descomposición, $f=\sum_{|\alpha|\le r}a'_\alpha\cdot x^\alpha+\sum_{|\beta|=r}h'_\beta\cdot x^\beta$ (con $h'_\beta(0)=0$), tomando la diferencia de ambas descomposiones, obtendríamos, con las notaciones obvias, la igualdad $0=\sum_{|\alpha|\le r}a''_\alpha\cdot x^\alpha+\sum_{|\beta|=r}h''_\beta\cdot x^\beta$. Si nos restringimos a la recta $x=\{tc,t\in\mathbb{R}\}$, con $c\in\mathbb{R}^m$ conveniente, es fácil ver que $a''_\alpha=0$, es decir, $a'_\alpha=a_\alpha$.

□

13. Proposición : *Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ un abierto y $f(x)\in\mathscr{C}^2(U)$ y tal que $f'_\alpha=0$. Tenemos que $f(x)=f(a)+(x-a)\cdot H(x)\cdot(x-a)^t$, siendo $H(x)$ una matriz simétrica (de funciones continuas) y $H(a)=(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a))$. Si $H(a)$ es una matriz no singular, entonces*

1. *$f(x)$ alcanza un máximo relativo en a si y solo si $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a))$ es definida negativa.*

2. *$f(x)$ alcanza un mínimo relativo en a si y solo si $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a))$ es definida positiva.*

Demostración. $H(a)$ es una matriz definida positiva si y solo si para todo $v\in S^n$ se cumple que $v\cdot H(a)\cdot v^t>0$. Si $H(a)$ es definida positiva entonces $H(x)$ es definida positiva en un entorno de a, y por tanto en ese entorno $f(x)>f(a)$, para $x\neq a$, y a es un mínimo relativo. Del mismo modo se razona si $H(a)$ es definida negativa.

Nos falta ver que si $H(a)$ no es definida positiva ni negativa entonces a no es mínimo ni máximo relativo. Existen $v,v'\in S^n$ de modo que $v\cdot H(a)\cdot v^t<0$ y $v'\cdot H(a)\cdot v'^t>0$. Existe un entorno abierto V de a, de modo que $v\cdot H(x)\cdot v^t<0$ y $v'\cdot H(x)\cdot v'^t>0$, para todo $x\in V$. Por tanto, para $x=a+\frac{v}{n}$ y todo $n>>0$, se tiene que $f(x)<f(a)$ y para $x=a+\frac{v'}{n}$ y todo $n>>0$, se tiene que $f(x)>f(a)$. □

14. Proposición: *Una aplicación $f\colon U\to\mathbb{R}$ es de clase $\mathscr{C}^n$ si y solo si existen $H_i(x,\bar{x})\in\mathscr{C}^{n-1}(U\times U)$ tales que $f(x)-f(\bar{x})=\sum_i H_i(x,\bar{x})\cdot(x_i-\bar{x}_i)$.*

Demostración. Si $f\in\mathscr{C}^n(U)$ entonces $f(x)-f(\bar{x})\in\mathscr{C}^n(U\times U)$ y por el corolario 4.1.10

$$f(x)-f(\bar{x})=\sum_i H_i(x,\bar{x})\cdot(x_i-\bar{x}_i),\ \text{con } H_i\in\mathscr{C}^{n-1}(U\times U).$$

Recíprocamente, supongamos $f(x)-f(\bar{x})=\sum_i H_i(x,\bar{x})\cdot(x_i-\bar{x}_i)$, con $H_i\in\mathscr{C}^{n-1}(U\times U)$. Haciendo $x_i=\bar{x}_i=\alpha_i$, para todo $i>1$ y $\bar{x}_1=\alpha_1$ tenemos

$$\frac{f(x_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)-f(\alpha)}{x_1-\alpha_1}=H_1(x_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\alpha)$$

y tomando $\lim_{x_1\to\alpha_1}$ obtenemos que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha)=H_1(\alpha,\alpha)$, luego $\frac{\partial f}{\partial x_1}=H_1(x,x)\in\mathscr{C}^{n-1}(U)$. Ahora es claro que $f\in\mathscr{C}^n(U)$. □

15. Definición: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f: U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación. Diremos que la aplicación f es derivable en $\alpha \in U$ si existe una aplicación $\tilde{f}: U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ continua en α de modo que

$$f(x) = f(\alpha) + \tilde{f}(x)(x-\alpha).$$

Si escribimos $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y $\tilde{f} = (\tilde{f}_{ij})$, entonces

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_m(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & \cdots & \tilde{f}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_{m1} & \cdots & \tilde{f}_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n - \alpha_n \end{pmatrix}$$

Luego las f_j son funciones diferenciables en $x = \alpha$. Recíprocamente, si las funciones f_j son diferenciables en $x = \alpha$ entonces f es diferenciables en $x = \alpha$. Recordemos que $\tilde{f}_{ji}(\alpha) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\alpha)$, luego

$$\tilde{f}(\alpha) = (\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\alpha)) =: f'(\alpha).$$

16. Regla de la cadena : *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $f: U \to V$ diferenciable en α, $g: V \to \mathbb{R}^r$ diferenciable $f(\alpha)$. Entonces, $g \circ f$ es diferenciable en α y*

$$(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha)) \circ f'(\alpha)$$

Demostración. Tenemos $f(x) = f(\alpha) + \tilde{f}(x)(x-\alpha)$ y $g(y) = g(f(\alpha)) + \tilde{g}(y)(y - f(\alpha))$. Entonces,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(\alpha)) + \tilde{g}(f(x))(f(x) - f(\alpha)) = g(f(\alpha)) + \tilde{g}(f(x))(\tilde{f}(x)(x-\alpha)).$$

Luego, $g \circ f$ es diferenciable en α, porque $\tilde{g}(f(x)) \circ \tilde{f}(x)$ es continua en $x = \alpha$. Además,

$$(g \circ f)'(\alpha) = [\tilde{g}(f(x)) \circ \tilde{f}(x)](\alpha) = \tilde{g}(f(\alpha)) \circ \tilde{f}(\alpha) = g'(f(\alpha)) \circ f'(\alpha).$$

□

17. Ejemplo: Calculemos $(f(x)^{g(x)})'$ (con $f(x) > 0$). La composición de las aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) & & \\ & & (y,z) & \longmapsto & y^z \end{array}$$

es la función $f(x)^{g(x)}$. Por tanto,

$$(f(x)^{g(x)})' = (zy^{z-1}, \ln(y)y^z)_{\substack{y=f(x)\\ z=g(x)}} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = (gf^{g-1}, \ln(f)f^g) \cdot \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = f^g(\frac{gf'}{f} + g'\ln(f)).$$

18. Definición: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, se dice que $f = (f_1, \dots, f_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathscr{C}^k$ si $f_1, \dots, f_m$ son de clase $\mathscr{C}^k$.

Por la regla de la cadena e inducción, la composición de dos aplicaciones diferenciales de clase $\mathscr{C}^k$ es de clase $\mathscr{C}^k$.

19. Teorema: *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Una aplicación $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathscr{C}^k$ si y solo si existen $H_{ij}(x, \bar{x}) \in \mathscr{C}^{k-1}(U \times U)$ tales que $f(x) - f(\bar{x}) = (x - \bar{x}) \cdot (H_{ij}(x, \bar{x}))$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición 4.1.14. □

4.1.1. Funciones de variable compleja

20. Definición: Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f\colon U \to \mathbb{C}$ una aplicación. Diremos que f es complejo derivable en $z_0 \in U$, si existe una función $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{C}$ continua en z_0 de modo que

$$f(z) = f(z_0) + \tilde{f}(z) \cdot (z - z_0).$$

Diremos que $f'(z_0) := \tilde{f}(z_0)$ es la derivada compleja de f en z_0.

De existir $\tilde{f}$, ha de ser $\tilde{f}(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, si $z \neq z_0$ y $f'(z_0) = \tilde{f}(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Recíprocamente, si este límite existe entonces f es derivable en z_0.

21. Proposición : *$f\colon U \to \mathbb{C}$ es complejo derivable en $z_0 \in U$ si y solo si existe un número complejo $c \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - c \cdot (z - z_0)}{||z - z_0||} = 0$$

(y en caso de existir $c = f'(z_0)$).

22. Notación: Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$, lo seguiremos denotando U si lo pensamos como un abierto de $\mathbb{R}^2$.

23. Ecuaciones de Cauchy-Riemann: Sea

$$f\colon U \to \mathbb{C},\ f(x_1 + x_2 \cdot i) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) \cdot i$$

una función compleja. Entonces, $f(z)$ es complejo derivable en $z_0 = a_0 + b_0 \cdot i$ si y solo si $(f_1, f_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$ es derivable en (a_0, b_0) y

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_0, b_0) &= \tfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a_0, b_0) \\ \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a_0, b_0) &= -\tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a_0, b_0) \end{aligned}$$

Demostración. Un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la multiplicación por un número complejo $a+bi$ si y solo si su matriz,en la base $\{1,i\}$, es igual a $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

La función $f(z)$ es complejo derivable en z_0 si y solo si existe un número complejo $a+bi$ tal que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-(a+bi)\cdot(z-z_0)}{||z-z_0||} = 0$$

que equivale a decir que

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_0,b_0)} \frac{\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(a_0,b_0) \\ f_2(a_0,b_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1-a_0 \\ x_2-b_0 \end{pmatrix}}{||(x_1-a_0,x_2-b_0)||}$$

que equivale a decir que $(f_1,f_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$ es derivable en (a_0,b_0) y que cumple que $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_0,b_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a_0,b_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a_0,b_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a_0,b_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

□

24. Proposición: 1. *Si $f,g\colon U \to \mathbb{C}$ son funciones complejo derivables en z_0,*

a) *$f+g$ es complejo derivable en z_0 y $(f+g)'(z_0) = f'(z_0)+g'(z_0)$.*

b) *$f\cdot g$ es complejo derivable en z_0 y $(f\cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)\cdot g'(z_0)$.*

2. *Si $f : U \simeq V$ es una biyección entre abiertos de $\mathbb{C}$, f es complejo derivable en $z_0 \in U$ y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es complejo derivable en $f(z_0)$ y $(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$.*

3. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ es complejo derivable en $z_0 \in U$, V es un abierto de $\mathbb{C}$, $g\colon V \to \mathbb{C}$ es complejo derivable en $f(z_0)$ y $f(U) \subseteq V$, entonces $(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$.*

25. Definición: Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Diremos que una aplicación $f : U \subset \mathbb{C}$ es holomorfa si es complejo derivable en todo punto de U y $f'(z)$ es continua.

Sea $(f_1,f_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$ de clase $\mathscr{C}^1$. Entonces, $f = f_1+f_2\cdot i$ es complejo derivable si y solo si

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2})(f) := \frac{1}{2}\cdot(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2})\cdot i) = 0$$

y si lo es

$$\frac{\partial f}{\partial z} := f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot i = \frac{1}{2}\cdot(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2})\cdot i) \underset{Not}{=} \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2})(f).$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es una serie de potencias con coeficientes complejos de radio de convergencia r, entonces es una función holomorfa en $B(a,r)$ y su derivada compleja es igual a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(z-a)^{n-1}$, que tiene el mismo radio de convergencia, por **??**. Recíprocamente, toda función holomorfa es localmente una serie de potencias (ya se probará).

26. Definición: Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto. Diremos que una aplicación $f: U \to \mathbb{C}^m$ es complejo derivable en $z_0 \in U$, si existe una aplicación ,$\tilde{f}: U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ continua en z_0, de modo que

$$f(z) = f(z_0) + \tilde{f}(z)(z - z_0).$$

Si escribimos $f = (f_1, \dots, f_m)$ y $\tilde{f} = (\tilde{f}_{ij})$, entonces

Funciones holomorfas en varias variables... Más adelante teorema de la función inversa e implícita...

4.2. Teorema de la función inversa e implícita

1. Definición: Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos. Se dice que una aplicación

$$F: U \to V,\ F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

de clase $\mathscr{C}^n$ es un difeomorfismo si es un homeomorfismo y F^{-1} es de clase $\mathscr{C}^n$.

Dado $F = (f_1, \dots, f_n)$ denotemos por $F' = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$.

2. Teorema de la función inversa: *Sean U, V sendos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $F: U \to V$ un morfismo de clase $\mathscr{C}^n$. Dado $\alpha \in U$, si $\det(F'(\alpha)) \neq 0$, entonces F es un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^n$ en un entorno de α.*

Demostración. Tenemos que $F(x) - F(y) = H(x, y) \cdot (x - y)$, donde $H(x, y)$ es una matriz $(H_{ij}(x, y))$ de funciones de $\mathscr{C}^{n-1}(U \times U)$, $x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$, $F = (f_1, \dots, f_n)$ y $H(x, x) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = F'(x)$. Reduciendo U, podemos suponer que $H(x, y)$ es una matriz invertible para todo $x, y \in U$.

1. La aplicación $F: U \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva: Si $0 = F(x) - F(y) = H(x, y) \cdot (x - y)$, para algún $(x, y) \in V \times V$, entonces $x - y = 0$ y $x = y$.

2. Dado un abierto $V \subseteq U$ y $\beta \in V$, $F(V)$ es un entorno de $F(\beta)$: Sea B una bola centrada en β, tal que su cierre esté incluido en V, y sea S la frontera de la bola. Por ser F inyectiva $F(S)$ no contiene a $F(\beta)$. Sea $m =$ ínfimo $\{d(F(\beta), F(s)) \mid s \in S^n\}$, que es mayor estricto que cero porque $\{d(F(\beta), F(s)), \forall s \in S\}$ es un compacto (imagen de compacto) de $\mathbb{R}^+$ que no contiene a 0. Sea B' una bola centrada en $F(\beta)$ de radio $m/2$. Basta que probemos que $B' \subseteq F(B)$.

Sea $y \in B'$ y $g: \bar{B} \to \mathbb{R}$, $g(x) := d(F(x), y)$. Sea $c \in \bar{B}$ tal que $g(c)$ es mínimo. Se cumple que $c \notin S$, puesto que para todo $s \in S$

$$d(F(s), y) + m/2 \geq d(F(s), y) + d(F(\beta), y) \geq d(F(\beta), F(s)) \geq m,$$

luego $d(F(s), y) \geq m/2 \geq d(F(\beta), y)$. Así pues, $g^2(c)$, es el valor mínimo de la función $g^2(x) = (F(x) - y) \cdot (F(x) - y)$, para todo $x \in B$. Entonces $0 = (g^2)'(c) = 2(F(c) - y) \cdot F'(c)$. Por tanto, $F(c) = y$ y $B' \subseteq F(B)$.

3. Por tanto, F es una aplicación abierta y $F: U \to F(U)$ es un homeomorfismo.

4. Observemos que $x-y = H(x,y)^{-1}\cdot(F(x)-F(y))$. Dados $z,z'\in F(U)$, tenemos que

$$F^{-1}(z)-F^{-1}(z') = H(F^{-1}(z),F^{-1}(z'))^{-1}\cdot(z-z').$$

Como H es de clase $\mathcal{C}^{n-1}$, F^{-1} es de clase $\mathcal{C}^1$, luego de clase $\mathcal{C}^2$, ..., luego de clase $\mathcal{C}^n$. □

3. Teorema de la función implícita : *Sea* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ *un entorno abierto de* (α,β) *y* $f_1(x,y),\dots,f_m(x,y)\in\mathcal{C}^r(U)$ *tales que* $f_1(\alpha,\beta)=\cdots f_m(\alpha,\beta)=0$ *y* $\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\alpha,\beta))\neq 0$. *Entonces, reduciendo U si es necesario, existen un entorno abierto V de* α *y funciones* $g_1,\dots,g_m\in\mathcal{C}^r(V)$ *de modo que*

$$\{(x,y)\in U:\ f_1(x,y)=\cdots=f_m(x,y)=0\}=\{(x,y)\in U:\ y_i=g_i(x),\ \forall i\}.$$

Demostración. Por el teorema de la función inversa, reduciendo U si es necesario, la aplicación $G\colon U\to\mathbb{R}^{n+m}$, $G(x,y):=(x,f(x,y))$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^r$ de U con $G(U)$, ya que

$$\det(G'(\alpha,\beta))=\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\alpha,\beta))\neq 0.$$

Sean $g_i(x):=y_i(G^{-1}(x,0))$, para $i=1,\dots,m$. Entonces,

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in U:\ f_1(x,y)=\cdots=f_m(x,y)=0\}&=\{(x,y)\in U:\ G(x,y)=(x,0)\}\\ =\{(x,y)\in U:\ (x,y)=G^{-1}(x,0)\}&=\{(x,y)\in U:\ y_1=g_1(x),\dots,y_m=g_m(x)\}.\end{aligned}$$

□

4. Observación: La función y_i restringida a $Y=\{f_1(x,y)=\cdots=f_m(x,y)=0\}$ es igual a la función $g_i(x)=y_i(G^{-1}(x,0))$. La aplicación $x\to g(x)=(g_1(x),\dots,g_m(x))$ es la composición de las aplicaciones

$$V=V\times 0\hookrightarrow G(U)\xrightarrow{G^{-1}}U\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$$

Si denotamos Id la matriz identidad de orden n, $A=(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$, $B=(\frac{\partial f_i}{\partial y_j})$, entonces

$$G'=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{Id}&0\\\hline A&B\end{array}\right)\text{ luego }(G^{-1})'=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{Id}&0\\\hline -B^{-1}A&B^{-1}\end{array}\right)\text{ y } g'=-B^{-1}A.$$

Por tanto, $\frac{\partial y_{i|Y}}{\partial x_j}:=\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=[-B^{-1}A]_{ij}=-[(\frac{\partial f_r}{\partial y_s})^{-1}\cdot(\frac{\partial f_u}{\partial x_v})]_{ij}$.

5. Definición: Sean $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{C}^n(U)$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto. Se dice que $f_1,\dots,f_n$ es un sistema de coordenadas en U, si la aplicación

$$F\colon U\to\mathbb{R}^n,\quad F(x):=(f_1(x),\dots,f_n(x))$$

cumple que $F(U)$ es un abierto y $F\colon U\to F(U)$ es un difeomorfismo de clase n.

En tal caso, el morfismo de anillos $F^*\colon \mathcal{C}^n(V) \to \mathcal{C}^n(U)$, $F^*(g) = g \circ F$ es un isomorfismo, luego para cada función diferenciable g en U existe una (única) función diferenciable $h(y_1,\dots,y_n) \in \mathcal{C}^n(V)$ de modo que $g(x) = h(f_1(x),\dots,f_n(x))$ ("las funciones diferenciables en U son las funciones diferenciables en las coordenadas $f_1,\dots,f_n$").

6. Definición: Se dice que $f_1,\dots,f_n$ son un sistema de coordenadas en un punto x, si existe un entorno de x en el que $f_1,\dots,f_n$ son un sistema de coordenadas.

4.3. Conjuntos Riemann medibles

Decimos que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$ si es igual a (a,b) (con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$) o es un punto $[a,a]$ o es el vacío; y definimos $\mu(I) := b-a$ (y $\mu(\emptyset) := 0$). Los subconjuntos $R = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ (con I_i intervalos de $\mathbb{R}$) los llamaremos rectángulos y diremos que su medida es el número $\mu_n(R) := \mu(I_1)\cdots\mu(I_n)$.[1]

1. Ejemplo: $[0,1]\times[0,1]$ es unión de los rectángulos disjuntos $(0,1)\times(0,1)$, $\{0\}\times(0,1)$, $\{1\}\times(0,1)$, $(0,1)\times\{0\}$, $(0,1)\times\{1\}$, $\{(0,0)\}$, $\{(0,1)\}$, $\{(1,0)\}$ y $\{(1,1)\}$.

2. Ejercicio: Prueba que si $R \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es un rectángulo y $x \in \mathbb{R}$, entonces $\mu_n(\{x\}\times R) = 0$.

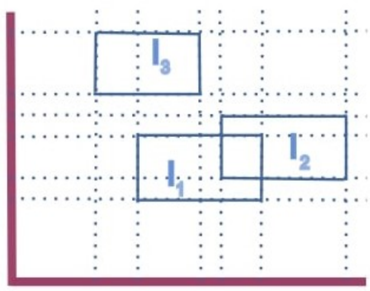
Si I,J son intervalos de $\mathbb{R}$ entonces $I \cap J$ es un intervalo y $I^c \cap J$ es unión de un número finito de intervalos disjuntos. Entonces, dados dos rectángulos $R,R' \subset \mathbb{R}^n$, $R \cap R'$ es un rectángulo y $R^c \cap R'$ es unión de un número finito de rectángulos disjuntos. En efecto, escribamos $R = I \times S$ y $R' = I' \times S'$, donde I,I' son intervalos de $\mathbb{R}$ y S,S' rectángulos de $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces

$$R^c \cap R' = (I^c \cap I') \times S' \coprod (I \cap I') \times (S^c \cap S')$$

que es unión unión de un número finito de rectángulos disjuntos por inducción sobre n. Entonces, $R \cup R' = (R \cap R'^c)\coprod(R^c \cap R')\coprod R \cap R'$ es unión de un número finito de rectángulos disjuntos.

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son unión de un número finito de rectángulos. Si $P,P' \in \mathcal{P}$, entonces $P \cap P', P \cup P', P - P' \in \mathcal{P}$.

Dado un número finito de rectangulos $I_1,\dots,I_m \subseteq \mathbb{R}^n$, podemos cuadricular $\mathbb{R}^n$ de modo que $\cup_i I_i$ es unión disjunta de ciertos rectángulos de la cuadrícula de $\mathbb{R}^n$, como muestra el dibujo adjunto.



[1]Cuando no cause confusión denotaremos $\mu = \mu_n$.

3. Lema: *Sean* $I_1,\dots,I_m$ *rectángulos disjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *y* $I'_1,\dots,I'_{m'}$ *otros rectángulos de* $\mathbb{R}^m$. *Si* $\coprod_{i=1}^m I_i \subseteq \cup_{i=1}^{m'} I'_i$, *entonces* $\sum_{i=1}^m \mu(I_i) \leq \sum_{i=1}^{m'} \mu(I'_i)$.

Demostración. Si cuadriculamos un rectángulo I, es claro que $\mu(I)$ es la suma de la medida μ de cada uno de los rectángulos de la cuadrícula. Consideremos una cuadrícula de $\mathbb{R}^n$, de modo que los rectángulos $I_1,\dots,I_m$ y $I'_1,\dots,I'_{m'}$ sean unión de rectángulos de la cuadrícula. Ahora es fácil probar el lema. □

Observemos que si $\coprod_{i=1}^m I_i = \coprod_{i=1}^{m'} I'_i$ entonces $\sum_{i=1}^m \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{m'} \mu(I'_i)$. Por tanto, dado $P \in \mathcal{P}$, podemos definir

$$\mu(P) = \sum_i \mu(I_i),$$

donde los I_i son rectángulos cualesquiera, con la condición de que sean disjuntos y que $P = \cup I_i$. Dados $P, P \in' \mathcal{P}$, es fácil ver que

$$\mu(P \cup P') = \mu(P) + \mu(P') - \mu(P \cap P').$$

4. Definición: Dado un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos

$$\mu_e(A) = \text{ínf}\{\mu(P);\ P \in \mathcal{P} \text{ y } A \subset P\}, \quad \mu_i(A) = \sup\{\mu(P);\ P \in \mathcal{P} \text{ y } P \subset A\}.$$

Por el lema, $\mu_i(A) \leq \mu_e(A)$ y si $A \subset B$, entonces $\mu_e(A) \leq \mu_e(B)$ y $\mu_i(A) \leq \mu_i(B)$. Además,

$$\mu_i(P) = \mu(P) = \mu_e(P)$$

para todo $P \in \mathcal{P}$.

5. Ejercicio: Prueba que $\mu_2([0,1] \times [0,1]) = 1$.

6. Definición: Diremos que un conjunto acotado A es Riemann medible si $\mu_i(A) = \mu_e(A)$ y denotaremos este número por $\mu(A)$.

Si $P \in \mathcal{P}$, entonces P es medible. La medida μ es invariante por traslaciones porque la medida de los rectángulos es invariante por traslaciones, es decir, dado un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^n$ y $e \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mu(A) = \mu(e + A)$.

7. Proposición: *Sean* A, A' *dos conjuntos (acotados) medibles disjuntos. Entonces,* $A \coprod A'$ *es medible y*

$$\mu(A \coprod A') = \mu(A) + \mu(A').$$

Demostración. Observemos que

$$\mu_i(A \coprod A') \geq \mu_i(A) + \mu_i(A') = \mu_e(A) + \mu_e(A') \geq \mu_e(A \coprod A').$$

Luego, $\mu_i(A \coprod A') = \mu_e(A \coprod A')$ y $A \coprod A'$ es medible. Además, $\mu(A \coprod A') = \mu(A) + \mu(A')$. □

8. Definición: Diremos que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ es de medida nula si es medible y $\mu(A) = 0$, es decir, si $\mu_e(A) = 0$.

Todo subconjunto de un conjunto de medida nula es de medida nula. Si A y B son de medida nula entonces $A \cup B$ es de medida nula: $\mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B) = 0$.

9. Teorema: *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado y $F = \bar{A} - \mathring{A}$ la frontera de A en $\mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$\mu_e(A) = \mu_i(A) + \mu_e(F).$$

Por tanto, A es medible si y solo si su frontera es de medida nula.

Demostración. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ una cuadrícula lo suficientemente fina de modo que si P_1 es la unión de los rectángulos de la cuadrícula incluidos en A y P_2 la unión de los rectángulos de la cuadrícula que cortan a F, entonces

$$\mu_i(A) - \mu(P_1) < \epsilon \text{ y } \mu(P_2) - \mu_e(F) < \epsilon.$$

Refinando más la cuadrícula y desechando los rectángulos de $P_1 \coprod P_2$ que no cortan a $\bar{A}$, podemos suponer que $\mu(P_1 \coprod P_2) - \mu_e(A) < \epsilon$. Por tanto, salvo un error de 3ϵ,

$$\mu_e(A) = \mu(P_1 \coprod P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2) = \mu_i(A) + \mu_e(F)$$

□

10. Corolario: *Si A y B son medibles, entonces $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ son medibles y*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Demostración. Las fronteras de $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ están incluidas en la unión de la frontera de A y la frontera de B. Por tanto, las fronteras son de medida nula y $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$ son medibles. Por último, $A \cup B = A \coprod (B - A \cap B)$ y $B = (B - A \cap B) \coprod A \cap B$, luego

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B - A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

□

11. Proposición: *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ medibles. Entonces, $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es medible y*

$$\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Demostración. Sean $P \in \mathscr{P}_n$[2] y $Q \in \mathscr{P}_m$. Entonces, $P = \coprod_i I_i$ y $Q = \coprod_j I'_j$, con I_i rectángulos de $\mathbb{R}^n$ e I'_j rectángulos de $\mathbb{R}^m$. Entonces, $P \times Q = \coprod_{ij} I_i \times I'_j \in \mathscr{P}_{n+m}$ y con las notaciones obvias

$$\mu_{n+m}(P \times Q) = \sum_{ij} \mu_{n+m}(I_i \times I'_j) = \sum_{ij} \mu_n(I_i) \cdot \mu_m(I'_j) = \mu_n(P) \cdot \mu_m(Q).$$

[2] $\mathscr{P}_n$ es el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son unión de un número finito de rectángulos de $\mathbb{R}^n$.

Sean $P_r, P'_r \in \mathscr{P}_n$ y $Q_r, Q'_r \in \mathscr{P}_m$ tales que $P_r \subset P_{r+1} \subset A \subset P'_{r+1} \subset P'_r$ y $Q_r \subset Q_{r+1} \subset B \subset Q'_{r+1} \subset Q'_r$ y tales que $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_n(P_r) = \lim\limits_{r\to\infty} \mu_n(P'_r) = \mu_n(A)$ y $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_m(Q_r) = \lim\limits_{r\to\infty} \mu_m(Q'_r) = \mu_m(B)$ Entonces,

$$\begin{aligned}\mu(P_r)\cdot\mu(Q_r) &= \mu(P_r\times Q_r) = \mu_i(P_r\times Q_r) \le \mu_i(A\times B) \le \mu_e(A\times B) \le \mu_e(P'_r\times Q'_r)\\ &= \mu(P'_r\times Q'_r) = \mu(P'_r)\cdot\mu(Q'_r)\end{aligned}$$

Tomando $\lim\limits_{r\to\infty}$, obtenemos $\mu(A)\cdot\mu(B) \le \mu_i(A\times B) \le \mu_e(A\times B) \le \mu(A)\cdot\mu(B)$ y se concluye. □

12. Proposición: *Entonces:*

1. *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto de medida nula. $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible si y solo si $A \cup F$ es medible; y en el caso de que sean medibles $\mu(A) = \mu(A\cup F)$.*

2. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible entonces $\bar{A}$ y $\mathring{A}$ son medibles y $\mu(A) = \mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A})$.*

Demostración. 1. Por el corolario anterior, si A es medible entonces $A\cup F$ y $A\cap F$ son medibles y $\mu(A\cup F) = \mu(A)+\mu(F)-\mu(A\cap F) = \mu(A)$. Supongamos que $A\cup F$ es medible. Sea $F' = (A\cup F)-A$, entonces $F'\subset F$ luego es medible de medida nula y $A = (A\cup F)-F'$ es medible por el corolario anterior.

2. Sea F la frontera de A, que es de medida nula. $\bar{A} = A\cup F$, luego es medible de medida igual a la de A. $\mathring{A} = \bar{A}-F$, luego es medible de medida igual a la de $\bar{A}$. □

4.4. Integral de Riemann

1. Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, $f\colon A \to \mathbb{R}^+$ una función acotada y $V(A,f) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1};\ x\in A,\ 0\le y\le f(x)\}$. Diremos que f es Riemann integrable en A si $V(A,f)$ es medible y denotaremos

$$\int_A f\cdot dx_1\cdots dx_n = \mu(V(A,f)).$$

Observemos que $\int_A 1\cdot dx_1\cdots dx_n = \mu(V(A,1)) = \mu(A\times[0,1]) = \mu(A)$. Dado un conjunto medible B, sea $1_B\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $1_B(x)=1$ si $x\in B$ y $1_B(x)=0$ si $x\notin B$. Entonces,

$$\int_A 1_B\cdot dx_1\cdots dx_n = \mu(A\cap B\times[0,1]\cup A\times 0) = \mu(A\cap B\times[0,1]) = \mu(A\cap B).$$

Si $0\le f\le g$ son integrables, entonces

$$\int_A f\cdot dx_1\cdots dx_n = \mu(V(A,f)) \le \mu(V(A,g)) = \int_A g\cdot dx_1\cdots dx_n.$$

Si A es de medida nula entonces f es integrable en A y $\int_A f\cdot dx_1\cdots dx_n = 0$, ya que si K es una cota superior de f entonces $V(A,f)\subset A\times[0,K]$ y como $\mu_{n+1}(A\times[0,K]) = \mu_n(A)\cdot\mu_1([0,K])) = 0\cdot K = 0$, entonces $V(A,f)$ es medible de medida nula.

2. Ejemplo : La función $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=1$ si $x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$ y $f(x):=2$ si $x\notin\mathbb{Q}\cap[0,1]$ no es integrable: $\overline{V(A,f)} = [0,1]\times[0,2]$ y $\overset{\circ}{V(A,f)} = (0,1)\times(0,1)$, luego $[0,1]\times[1,2]$ está incluido en la frontera de $V(A,f)$, luego ésta no es de medida nula y f no es integrable.

3. Proposición : *Sean $A_1,A_2\subset\mathbb{R}^n$ conjuntos medibles y $f\colon A_1\cup A_2\to\mathbb{R}^+$ acotada. Entonces, f es integrable en $A_1\cup A_2$ si y solo si es integrable en A_1 y A_2. Además, si es integrable (en $A_1\cup A_2$) entonces*

$$\int_{A_1\cup A_2} f\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_{A_1-A_2} f\cdot dx_1\cdots dx_n + \int_{A_2-A_1} f\cdot dx_1\cdots dx_n + \int_{A_1\cap A_2} f\cdot dx_1\cdots dx_n.$$

Demostración. Si f es integrable en A_1 y A_2, entonces $V(A_1,f)$ y $V(A_2,f)$ son medibles, luego $V(A,f) = V(A_1,f)\cup V(A_2,f)$ es medible y f es integrable en A. Si f es integrable en A, entonces f es integrable en A_1: Dado un subconjunto $X\subset\mathbb{R}^{n+1}$, sea F_X la frontera de X en $\mathbb{R}^{n+1}$. Escribamos $A = A_1\cup A_2$. Sea K la cota superior de f en A. Como $F_{V(A_1,f)}\subset F_{A_1}\times[0,K]\cup F_{V(A,f)}$ entonces es de medida nula y f es integrable en A_1. Además,

$$\begin{aligned}\mu(V(A,f)) &= \mu(V(A_1-A_2,f)\coprod V(A_2-A_2,f)\coprod V(A_1\cap A_2,f))\\ &= \mu(V(A_1-A_2,f)) + \mu(V(A_2-A_2,f)) + \mu(V(A_1\cap A_2,f)).\end{aligned}$$

□

Si $A_1\subset A_2\subset\mathbb{R}^n$ son conjuntos medibles tales que A_2-A_1 es de medida nula entonces $f\colon A_2\to\mathbb{R}^+$ es integrable si y solo si lo es en A_1 y si f es integrable en A_2 entonces $\int_{A_1} f\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_{A_2} f\cdot dx_1\cdots dx_n$.

4. Lema : *Sea $B\subset\mathbb{R}^n$ un subconjunto. Si para cada $\epsilon>0$, existen B_ϵ y B'_ϵ tales que $B = B_\epsilon\cup B'_\epsilon$, $\mu_e(B_\epsilon)<\epsilon$ y B'_ϵ es medible, entonces B es medible.*

Demostración. Por una parte, $\mu_e(B)\le\mu_\epsilon(B_\epsilon)+\mu_\epsilon(B'_\epsilon)\le\epsilon+\mu(B'_\epsilon)$. Por otra, $\mu(B'_\epsilon) = \mu_i(B'_\epsilon)\le\mu_i(B)$. Luego, $\mu_e(B)-\mu_i(B)<\epsilon$, para todo ϵ, luego $\mu_e(B)=\mu_i(B)$ y B es medible.

□

5. Teorema : *Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ medible y $f\colon A\to\mathbb{R}^+$ acotada. Si f es continua entonces es integrable en A.*

Demostración. Supongamos que A es cerrado, luego compacto. Entonces, f es uniformemente continua en A. Dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ de modo que $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ siempre que $||x-y||_\infty<\delta$. Sea $P\in\mathscr{P}$ unión disjunta de rectángulos C_i que cotan a A de diagonal de longitud menor que δ y tal que $A \subset P$. Para cada i, escojamos un punto $x_i \in C_i \cap A$, sea $\tilde{C}_i = (C_i \cap A) \times (f(x_i) - \epsilon, f(x_i) + \epsilon)$, $\tilde{P} = \coprod_i \tilde{C}_i$ y $\tilde{P}' = \coprod_i (C_i \cap A) \times [0, f(x_i) - \epsilon]$. Tenemos que $V(A,f) = (V(A,f) \cap \tilde{P}) \coprod \tilde{P}'$, $\tilde{P}'$ es medible y $\mu_e(V(A,f) \cap \tilde{P}) \leq \mu_e(\tilde{P}) = \mu(A) \cdot 2\epsilon$. Por el lema, $V(A,f)$ es medible, es decir, f es integrable.

Procedemaos ahora con toda generalidad. Sea K una cota superior de f. Dado $\epsilon > 0$, sea $P \in \mathscr{P}$ abierto (de $\mathbb{R}^n$), tal que $\mu(P) < \frac{\epsilon}{K}$ y P contenga a la frontera de A. Tenemos que $V(A,f) = (V(A,f) \cap (P \times [0,K])) \cup V(A-P,f)$, $\mu_e(V(A,f) \cap (P \times [0,K])) \leq \mu_e(P \times [0,K]) \leq \epsilon$ y $V(A-P,f)$ es medible por el párrafo anterior. Por el lema, $V(A,f)$ es medible, es decir, f es integrable.

□

6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f: A \to \mathbb{R}^+$ acotada.

Sea $P \subseteq V(A,f)$, con $P \in \mathscr{P}$. Existen rectángulos I_i de modo que $P = \coprod_i I_i$ (luego, $\mu(P) = \sum_i \mu(I_i)$). Cuadriculemos $\mathbb{R}^n$ de modo que si $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ es un vértice de I_i, entonces x es un vértice de alguno de los rectángulos de la cuadrícula de $\mathbb{R}^n$. Sean $C_j \in \mathbb{R}^n$ los rectángulos de la cuadrícula de $\mathbb{R}^n$ incluidos en A. Tenemos que $P \subseteq \coprod_j C_j \times [0, \text{ínf}\{f(C_j)\}] \subseteq V(A,f)$. Llamemos partición de A, a las familias finitas $P = \{C_j\}$ de rectángulos disjuntos incluidos en A y denotemos $s(f,P) = \sum_j \mu(C_j) \cdot \text{ínf}\{f(C_j)\}$, entonces

$$\mu_i(V(A,f)) = \sup\{s(f,P);\ P \text{ partición de } A\} =: \underline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n$$

Denotemos $S(f,P) = \sum_j \mu(C_j) \cdot \sup\{f(C_j)\}$. Igualmente (dado que la frontera de A es de medida nula),

$$\mu_e(V(A,f)) = \text{ínf}\{S(f,P);\ P \text{ partición de } A\} =: \overline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n$$

Luego, f es integrable en A si y solo si $\underline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n = \overline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n$, en tal caso estos números coinciden con $\int_A f \cdot dx_1 \cdots dx_n$..

7. Notación: Dada una función $f: X \to \mathbb{R}$ acotada y un abierto $U \in X$, denotemos $o(f,U) := \sup\{f(x) : x \in U\} - \text{ínf}\{f(x) : x \in U\}$ y denotemos

$$o(f,x) = \text{ínf}\{o(f,U) : x \in U\}.$$

Refinemos el teorema 4.4.5.

8. Proposición: $f: X \to \mathbb{R}$ *es continua en* x *si y solo si* $o(f,x) = 0$.

Demostración. $\Rightarrow$) Dado $\delta = \epsilon/2$, existe un entorno U de x, de modo que $|f(y) - f(x)| < \epsilon/2$, para todo $y \in U$, luego $|f(y) - f(y')| < \epsilon$ para todo $y, y' \in U$, luego $o(f,x) \leq \epsilon$. Por tanto, $o(f,x) = 0$.

$\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$, existe un abierto U que contiene a x, tal que $o(f,U) < \epsilon$, luego para todo $y \in U$, $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Es decir, f es continua en x.

□

9. Número de Lebesgue: *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $\{U_1,\dots,U_n\}$ un recubrimiento de K por abiertos de $\mathbb{R}^n$. Existe $\delta > 0$, de modo que cada bola $B(x,\delta)$, con $x \in K$ está incluida en algún U_i.*

Demostración. Supongamos que no existe tal δ. Entonces para $\frac{1}{n}$ existe $x_n \in K$ de modo que la bola $B(x_n, \frac{1}{n})$ no está incluida en ningún U_i. Sea $x \in K$ un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ y sea U_i tal que $x \in U_i$. Sea n tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subset U_i$, Sea $m > 2n$ tal que $d(x_m, x) < \frac{1}{2n}$. Entonces, para todo $y \in B(x_m, \frac{1}{m})$ se cumple que $d(y,x) \le d(y,x_m) + d(x_m,x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$, luego $y \in B(x, \frac{1}{n}) \subset U_i$. Es decir, $B(x_m, \frac{1}{m}) \subset U_i$ y hemos llegado a contradicción. □

10. Teorema: *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f\colon A \to \mathbb{R}^+$ acotada y $A_n := \{x \in A : o(f,x) \ge \frac{1}{n}\}$. Entonces, f es integrable si y solo si A_n es de medida nula para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que A_n no es de medida nula. Entonces $\mu_e(A_n) = r > 0$. Sea $P = \{C_i\}_{i\in I}$ una partición de A, tal que $\mu(A - Q) < \epsilon$, donde $Q = \coprod_i P_i$. Sea $A'_n = A_n \cap (A - Q)$, entonces $\mu_e(A'_n) \le \mu_e(A - Q) < \epsilon$. Por tanto, $r = \mu_e(A_n) \le \mu_e(A_n - A'_n) + \mu_e(A'_n)$, luego $\mu_e(A_n - A'_n) \ge r - \epsilon$. Sea $J = \{i \in I : C_i \cap A_n \neq \emptyset\}$ y $P' = \{C_j\}_{j\in J}$. Entonces, $\mu(A') \ge \mu_e(A_n - A'_n) \ge r - \epsilon$ y $S(f,P) - s(f,P) \ge S(f,P') - s(f,P') \ge \frac{1}{n} \cdot (r - \epsilon)$ y f no es integrable.

$\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0$. Sea K una cota superior de f Sea n, tal que $1/n < \frac{\epsilon}{2\mu(A)}$. Cuadriculemos $\mathbb{R}^n$ de modo que la unión P de los rectángulos de la cuadrícula que cortan con $A_{1/n}$ y a la frontera de A, sea un abierto y $\mu(P) < \frac{\epsilon}{2K}$. Para cada $x \in A - P$ existe un entorno abierto U_x de modo que $o(f; U_x \cap A) < \frac{1}{n}$ y existen un número finito de puntos $x_1, \cdots, x_n \in A - P$ de modo que $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ recubren $A - P$, porque es compacto. Dividamos los rectángulos de la cuadrícula que cortan a $A' = A - P$ en rectángulos C_i de diagonal de longitud menor que δ, de modo que esto nos asegure que cada C_i está incluido en alguno de los U_{x_j}. Sea $B = \coprod_i (C_i \cap A') \times [0, \text{ínf}\{f(C_i \cap A')\}]$, $B' = \coprod_i (C_i \cap A') \times [\text{ínf}\{f(C_i)\}, \sup\{f(C_i \cap A')\}]$. Entonces, $V(A,f) = V(A,f) \cap (P \times [0,K] \cup B') \cup B'$ y $\mu_e(V(A,f) \cap (P \times [0,K] \cup B')) \le \mu_e(P \times [0,K] \cup B') \le +\mu_e(B') \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n} \cdot \mu(A) \le \epsilon$ y B es medible. Luego $V(A,f)$ es medible y f es integrable. □

11. Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f\colon A \to \mathbb{R}$ acotada (superior e inferiormente). Para cada partición de A, $P = \{C_j\}$, sean $s(f,P) := \sum_j \mu(C_j) \cdot \text{ínf}\{f(C_j)\}$ y $S(f,P) := \sum_j \mu(C_j) \cdot \sup\{f(C_j)\}$. Definimos

$$\underline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n := \sup\{s(f,P);\ \text{partición } P \text{ de } A\}$$
$$\overline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n := \text{ínf}\{S(f,P);\ \text{partición } P \text{ de } A\}$$

Diremos que f es integrable cuando $\underline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n = \overline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n$ y denotaremos este número $\int_A f \cdot dx_1 \cdots dx_n$.

Es fácil probar que si f y g son integrables, entonces $f+g$ es integrable (ver el argumento de3.6.9.3) y

$$\int_A (f+g)\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_A f\cdot dx_1\cdots dx_n + \int_A g\cdot dx_1\cdots dx_n.$$

Si f es integrable, entonces $\lambda\cdot f$ es integrable y

$$\int_A \lambda\cdot f\cdot dx_1\cdots dx_n = \lambda\cdot\int_A f\cdot dx_1\cdots dx_n$$

12. Proposición: *Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ medible y $f\colon A\to\mathbb{R}$ acotada (superior e inferiormente), $f^+ := \sup\{f,0\}$ y $f^- := \inf\{f,0\}$ (luego, $f = f^+ + f^-$). Entonces, f es integrable si y solo si f^+ y $-f^-$ son integrables en A; y si son integrables*

$$\int_A f\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_A f^+\cdot dx_1\cdots dx_n - \int_A -f^-\cdot dx_1\cdots dx_n.$$

Demostración. Observemos que

$$\text{máx}\{\overline{\int_A} f^+ - \underline{\int_A} f^+, \overline{\int_A} f^- - \underline{\int_A} f^-\} \le \overline{\int_A} f - \underline{\int_A} f = (\overline{\int_A} f^+ - \underline{\int_A} f^+) + (\overline{\int_A} f^- - \underline{\int_A} f^-)$$

□

4.5. Teorema de Fubini

1. Definición: Dada una aplicación continua $f\colon X\to\mathbb{R}$ llamaremos soporte de f, que lo denotaremos $\operatorname{sop}(f)$, a

$$\operatorname{sop}(f) := \overline{\{x\in X : f(x)\neq 0\}}.$$

2. Teorema de Fubini: *Sea $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función continua de soporte compacto. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot dx_2\cdots dx_n\Big)\cdot dx_1.$$

Demostración. Estamos definiendo implícitamente $\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_A f$, donde A es un rectángulo de $\mathbb{R}^n$ lo suficientemente grande para que contenga al soporte de f (y solo vamos a usar que f es integrable y que $F(x_2,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)$ es integrable para todo x_1). Escribiendo $f = f^+ + f^-$, basta ver el teorema para f^+ y $-f^-$. Es decir, podemos suponer que f es no negativa.

Dado un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, sea $1_X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $1_X(x) = 1$ si $x \in X$ y $1_X(x) = 0$ si $x \notin X$. Consideremos un rectángulo de $R = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} 1_R \cdot dx_1 \cdots dx_n = \mu_{n+1}(R \times [0,1]) = \mu_n(R).\\
&\textstyle\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_R \cdot dx_2 \cdots dx_n) \cdot dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(I_2 \times \cdots \times I_n) \cdot 1_{I_1} \cdot dx_1 = \mu_1(I_1) \cdot \mu_{n-1}(I_2 \times \cdots \times I_n).
\end{aligned}$$

Luego, $\int_{\mathbb{R}^n} 1_R \cdot dx_1 \cdots dx_n = \mu(R) = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_R \cdot dx_2 \cdots dx_n) \cdot dx_1$. Dada una partición $P = \{C_j\}$ de A con $A = \coprod C_j$, sean $s_P = \sum_j \text{ínf}\{f(C_j)\} \cdot 1_{C_j}$ y $t_P = \sum_j \sup\{f(C_j)\} \cdot 1_{C_j}$. Obviamente, $s_P \le f \le t_P$ y

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} s_P \cdot dx_1 \cdots dx_n \le \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot dx_1 \cdots dx_n \le \int_{\mathbb{R}^n} t_P \cdot dx_1 \cdots dx_n\\
&\int_{\mathbb{R}^n} s_P \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} s_P \cdot dx_2 \cdots dx_n) \cdot dx_1 \le \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \cdot dx_2 \cdots dx_n) \cdot dx_1\\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} t_P \cdot dx_2 \cdots dx_n) \cdot dx_1 = \int_{\mathbb{R}^n} t_P \cdot dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sup\{\int_{\mathbb{R}^n} s_P \cdot dx_1 \cdots dx_n; P\} = \sup\{\text{ínf}\{f(C_j)\} \cdot \mu(C_j); P\} = \underline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n\\
&\textstyle\text{ínf}\{\int_{\mathbb{R}^n} s_P \cdot dx_1 \cdots dx_n; P\} = \text{ínf}\{\sup\{f(C_j)\} \cdot \mu(C_j); P\} = \overline{\int_A} f \cdot dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

obtenemos que $\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot dx_2 \cdots dx_n) \cdot dx_1$.

□

4.6. Fórmula de cambio de variable en integración

1. Proposición: *Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y $T\colon U \to V$ un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado de cierre incluido en U. Entonces, si A es medible entonces $T(A)$ es medible; y si $\mu(A) = 0$ entonces $\mu(T(A)) = 0$.*

Demostración. Por el teorema 4.3.9, solo tenemos que demostrar la segunda afirmación.

Podemos suponer que $A = \bar{A}$, luego que A es compacto.

Queremos probar que si recubrimos A por rectángulos pequeños entonces la imagen de todos estos rectángulos están incluidos en rectángulo pequeños, y que entonces $\mu(T(A)) = 0$.

Existe una matriz de funciones continuas $H(x,y)$ tal que $T(x) - T(y) = H(x,y) \cdot (x - y)$. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la norma $|| \, ||_\infty$ y en $M_n(\mathbb{R})$ la norma $|| \, ||$ inducida. La aplicación $F\colon U \times U \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = ||H(x,y)||$ es continua. Sea $\delta = \text{ínf}\{||x - y||_\infty;\, x \in A, y \in \bar{U} - U\}$. Sea $c = \sup\{||H(x,y)||;\, x \in A, ||x - y||_\infty \le \delta/2\}$. Por tanto,

$$||T(x) - T(y)||_\infty = ||H(x,y) \cdot (x - y)||_\infty \le ||H(x,y)|| \cdot ||x - y||_\infty \le c \cdot ||x - y||_\infty$$

siempre que $x \in A$ y $||x-y||_\infty \leq \delta/2$.

Dado $\epsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}$, que es unión disjunta de cuadrados C_i de lados de longitud $l_i \leq \frac{\delta}{4}$ (que cortan a A), tal que $A \subset P$ y $\mu(P) < \epsilon$. Cada C_i está incluido en un cuadrado C'_i centrado en un punto de A, de lados de longitud $2l_i \leq \delta/2$. Entonces, $T(C'_i)$ está incluido en un cuadrado D_i de lados de longitud menor que $c \cdot 2l_i$ y

$$\mu_e(T(A)) \leq \mu_e(T(P)) \leq \sum_i \mu(D_i) \leq (2c)^n \cdot \sum_i \mu(C_i) = (2c)^n \cdot \epsilon$$

Luego, $\mu_e(T(A)) = 0$ y $T(A)$ es de medida nula.

□

2. Proposición: *Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Entonces si $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible, entonces $T(A)$ es medible y*

$$\mu(T(A)) = \det(T) \cdot \mu(A).$$

Demostración. Diremos que un rectángulo de lados de la misma longitud es un cuadrado. Denotemos por I_m los cuadrados de lados de longitud m. Sea $\mu(T) := \mu(T(I_1))$. Obviamente,

$$\begin{aligned}\mu(T(I_m)) &= \mu(T(m \cdot I_1) = \mu(m \cdot T(I_1))) = m^n \cdot \mu(T(I_1)) = m^n \cdot \mu(T) \cdot \mu(I_1) = \mu(T) \cdot \mu(m \cdot I_1) \\ &= \mu(T) \cdot \mu(I_m).\end{aligned}$$

Si P es unión disjunta de cuadrados C_i, entonces

$$\mu(P) = \mu(T(\sum_i C_i)) = \mu(\sum_i T(C_i)) = \sum_i \mu(T(C_i)) = \sum_i \mu(T) \cdot \mu(C_i) = \mu(T) \cdot \mu(P)$$

Si A es medible, dado $\epsilon > 0$, existen $P, P' \in \mathcal{P}$ tal que son unión de cuadrados disjuntos, $P \subset A \subset P'$ y $\mu(P') - \mu(P) < \epsilon$. Entonces,

$$\mu(T) \cdot \mu(P) = \mu(T(P)) \leq \mu(T(A)) \leq \mu(T(P')) = \mu(T) \cdot \mu(P')$$

Como $\mu(T) \cdot \mu(P) \leq \mu(T) \cdot \mu(A) \leq \mu(T) \cdot \mu(P')$, tenemos que $|\mu(T) \cdot \mu(A) - \mu(T(A))| \leq \mu(T) \cdot \epsilon$, luego $\mu(T(A)) = \mu(T) \cdot \mu(A)$.

Dada otra aplicación $\mathbb{R}$-lineal S, tendremos que

$$\mu(S \circ T) \cdot \mu(A) = \mu(S(T(A)) = \mu(S) \cdot \mu(T(A)) = \mu(S) \cdot \mu(T) \cdot \mu(A),$$

es decir, $\mu(S \circ T) = \mu(S) \cdot \mu(T)$.

Toda aplicación $\mathbb{R}$-lineal es composición de simetrías S_i respecto de un hiperplano y una aplicación $h_\lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$. Observemos que $S_i^2 = \mathrm{Id}$, luego $1 = \mu(\mathrm{Id}) = \mu(S_i^2) = \mu(S_i)^2$, luego $1 = \mu(S_i) = |\det(S_i)|$. Además, $\mu(h_\lambda) = \mu(h_\lambda(I_1)) = |\det(h_\lambda)|$. Por lo tanto, $\mu(T) = |\det(T)|$.

□

3. Ejemplo: Sean $e_1,\dots,e_n \in \mathbb{R}^n$ y escribamos $e_i = (a_{i1},\dots,a_{in})$, para cada i. Sea $P = \{\sum_i \lambda_i e_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \forall i\}$. Probemos que $\mu(P) = |\det(a_{ij})|$. En efecto, consideremos el isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que aplica la base estándar de $\mathbb{R}^n$ en los vectores $e_1,\dots,e_n$. Sea $C = [0,1]^n$, entonces $T(C) = P$ y

$$\mu(P) = \mu(T(C)) = |\det(T)| \cdot \mu(C) = |\det(T)| = |\det(a_{ij})|.$$

4. Teorema: *Sean U y U' abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $T\colon U' \to U$, $T(y) = (T_1(y),\dots,T_n(y))$ un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^1$. Sea $f(x) \in \mathscr{C}^0(U)$ de soporte compacto. Entonces,*

$$\int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_{U'} f(T(y))\cdot |\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})| \cdot dy_1\cdots dy_n$$

Demostración. Podemos suponer que $f \geq 0$.

1. Probemos que $\int_{U'} f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|\cdot dy_1\cdots dy_n \geq \int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n$.

Sea $V' \subset U'$ un abierto de cierre (compacto) $\bar{V}'$ incluido en U', que contenga a $T^{-1}(\operatorname{sop} f)$.

Dado $r > 0$, denotemos $C_r = [-r,r]^n$. $T(y') - T(y) = H(y',y)\cdot(y'-y)$ para cierta matriz de funciones continuas $H = (H_{ij}(y',y))$ (y $H(y,y) = T'(y)$, que es invertible). Dado $\epsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ de modo que $||H(z)^{-1}\cdot H(z')|| \leq 1+\epsilon$, para todo $z,z' \in \bar{V}' \times \bar{V}'$ tales que $||z'-z||_\infty < 1/m$. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ de modo que $H(y',y)\cdot C_1 \subset (1+\epsilon)\cdot H(y,y)\cdot C_1$, para todo $y,y' \in \bar{V}'$ tales que $||y'-y||_\infty \leq 1/m$. Por tanto,

$$T(y + C_{\frac{1}{m}}) \subseteq T(y) + (1+\epsilon)\cdot H(y,y)\cdot C_{\frac{1}{m}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu(T(y + C_{\frac{1}{m}})) &\leq \mu(H(y,y)\cdot C_{\frac{1}{m}\cdot(1+\epsilon)}) = \det(H(y,y))\cdot\mu(C_{\frac{1}{m}\cdot(1+\epsilon)}) \\ &= \det(H(y,y))\cdot\mu(C_{\frac{1}{m}})\cdot(1+\epsilon)^n \end{aligned}$$

Dado m, sea $\{y_{mk}\}_k := V' \cap \frac{2}{m}\cdot\mathbb{Z}^n$. Denotemos, $f_{mk} = \max\{f(T(y))\colon y \in y_{mk} + C_{\frac{1}{m}}\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{U'} f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|\cdot dy_1\cdots dy_n = \lim\limits_{m\to\infty} \sum_k f_{mk}\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j}(y_{mk}))|\cdot\mu(C_{\frac{1}{m}}) \\ &\geq \lim\limits_{m\to\infty} \textstyle\sum_k f_{mk}\cdot\mu(T(y_{mk} + C_{\frac{1}{m}}))\cdot(1+\epsilon)^{-n} \geq \int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n\cdot(1+\epsilon)^{-n} \end{aligned}$$

Por tanto, $\int_{U'} f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|\cdot dy_1\cdots dy_n \geq \int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n$.

2. Si consideramos el morfismo inverso $T^{-1}\colon U' \to U$ y como función continua $g(y) = f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|$, entonces, $f(x) = g(T^{-1}(x))\cdot|\det(\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial x_j})|$ y

$$\int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_U g(T^{-1}(x))\cdot|\det(\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial x_j})|\cdot dx_1\cdots dx_n \geq \int_{U'} g(y)\cdot dy_1\cdots dy_n$$

y concluimos que $\int_U f(x)\cdot dx_1\cdots dx_n = \int_{U'} f(T(y))\cdot|\det(\frac{\partial T_i}{\partial y_j})|\cdot dy_1\cdots dy_n$.

□

4.7. Problemas

1. Calcula el volumen de la esfera de radio r.

   Solución: Tenemos que calcular la medida de $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x||_2 \le r\}$. Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2 \le r\}$. Por la fórmula de cambio de variable, con $x = \rho \cos t$, $y = \rho \operatorname{sen} t$ (y el teorema de Fubini)

$$\mu(B) = 2 \cdot \int_C \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \cdot dxdy = 2\int_{[0,r]\times[0,2\pi]} \sqrt{r^2-\rho^2} \cdot \begin{vmatrix} \cos t & -\rho \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \rho \cos t \end{vmatrix} \cdot d\rho dt$$
$$= 2\int_{[0,r]\times[0,2\pi]} \rho\sqrt{r^2-\rho^2} \cdot d\rho dt = 4\pi \int_{[0,r]} \rho\sqrt{r^2-\rho^2} \cdot d\rho = \frac{-4\pi(r^2-\rho^2)^{3/2}}{3}]_0^r$$
$$= \frac{4\pi r^3}{3}.$$

2. Calcula el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

   Solución: Sea E el elipsoide, entonces $E \cap \{x = \alpha\}$ (con $|\alpha| \le a$) es igual a la elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2}$, cuya área es $\pi bc(1 - \frac{\alpha^2}{a^2})$. Entonces,

$$\mu(E) = \int_E 1 \cdot dxdydz = \int_{\mathbb{R}^3} 1_E \cdot dxdydz = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}^2} 1_E \cdot dydz) \cdot dx$$
$$= \int_{-a}^{a} \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}) \cdot dx = \frac{4abc\pi}{3}.$$

3. Calcula el volumen del cono $C \subset \mathbb{R}^3$ de base un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^2$ y altura h.

   Solución: Trasladando horizontalmente el cono, podemos suponer que el vértice es el punto $(0,0,h)$. Consideremos el cambio de coordenadas $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(t_1, t_2, \lambda) \mapsto (t_1, t_2, 0) + \lambda \cdot ((0,0,h) - (t_1, t_2, 0)) = (t_1(1-\lambda), t_2(1-\lambda), h\lambda)$. Es decir, $x_1 = t_1(1-\lambda)$, $x_2 = t_2(1-\lambda)$ y $x_3 = h\lambda$.

   Entonces,

$$\mu(C) = \int_C dx_1dx_2dx_3 = \int_{A\times[0,1]} | \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -t_1 \\ 0 & 1-\lambda & -t_2 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} | \cdot dt_1dt_2d\lambda$$
$$= \int_{A\times[0,1]} h(1-\lambda)^2 \cdot dt_1dt_2d\lambda = \int_A \frac{-h(1-\lambda)^3}{3}]_0^1 \cdot dt_1dt_2 = \int_A \frac{h}{3} \cdot dt_1dt_2 = \frac{\mu(A)\cdot h}{3}.$$

4. Calcula $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cdot dx$.

Solución: Denotemos $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cdot dx$. Por una parte,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx) \cdot dy = \int_{\mathbb{R}} I \cdot e^{-y^2} \cdot dy = I^2.$$

Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \wedge dy = \int_{(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi)} e^{-((r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta)^2)} \cdot dr\cos\theta \wedge dr\operatorname{sen}\theta$$
$$= \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi)} e^{-r^2} \cdot rdr \wedge d\theta = \int_{\mathbb{R}^+} 2\pi \cdot e^{-r^2} \cdot rdr = -\pi \cdot e^{-r^2}]_0^\infty = \pi.$$

Luego, $I^2 = \pi$ e $I = \sqrt{\pi}$.

5. Dados n cuerpos (puntuales) de masas $m_1, \dots, m_n$ situados en los puntos $p_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}), \dots, p_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3})$, se dice que el centro de masas de los n cuerpos es el punto $\frac{\sum_i m_i \cdot p_i}{\sum_i m_i}$. Dado un cuerpo homogéneo que ocupa un espacio medible $A \subset \mathbb{R}^3$, se dice que su centro de masas (o centro geométrico) es el punto $\frac{\int_A (x_1,x_2,x_3)\cdot dx_1 dx_2 dx_3}{\mu(A)}$. Calcula el centro de gravedad del cono C de base el círculo de radio r del plano $x_3 = 0$ y centrado en $(0,0,0)$ y vértice el punto $(0,0,h)$.

   Solución: $\mu(C) = \frac{\pi r^2 h}{3}$ y $\int_C x_1 \cdot dx_1 dx_2 dx_3 = \int_C x_2 \cdot dx_1 dx_2 dx_3 = 0$ por simetría. Calculemos $\int_C x_3 \cdot dx_1 dx_2 dx_3$. El corte C_t de C con $x_3 = t$ es un círculo de radio $\frac{(h-t)r}{h}$, cuya área es $\pi \frac{(h-t)^2 r^2}{h^2}$. Luego,

$$\int_C x_3 \cdot dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^h (\int_{C_t} t \cdot dx_1 dx_2) \cdot dt = \int_0^h t \cdot \pi \frac{(h-t)^2 r^2}{h^2} \cdot dt = \frac{\pi r^2 h^2}{12}$$

   Luego el centro de gravedad es el punto $(0,0,\frac{h}{4})$.

6. Calcula el centro geométrico de una semiesfera de radio r.

   Solución: Sea $S = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, z \geq 0\}$. Tenemos que calcular

$$\frac{1}{\mu(S)} (\int_S x \cdot dxdydz, \int_S y \cdot dxdydz, \int_S z \cdot dxdydz), \text{ donde } \mu(S) = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

   Por simetría $\int_S x \cdot dxdydz = \int_S y \cdot dxdydz = 0$. Calculemos $\int_S z \cdot dxdydz$. El plano $z = t$ corta a S en un círculo S_t de radio $\sqrt{r^2 - t^2}$ $(0 \leq t \leq r)$, cuya área es $\pi(r^2 - t^2)$. Entonces,

$$\int_S z \cdot dxdydz = \int_0^r (\int_{S_t} tdxdy) \cdot dt = \int_0^r t\pi(r^2 - t^2) \cdot dt = \frac{\pi r^2 t^2}{2} - \frac{\pi t^4}{4}]_0^r = \frac{\pi r^4}{4}$$

   Luego el centro de gravedad es el punto $(0,0,\frac{3r}{8})$.

Capítulo 5

Campos de vectores diferenciables

5.1. Diferencial de una función

1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\alpha \in U$. Denotaremos $\mathscr{C}'_\alpha(U)$ el anillo de todas las aplicaciones de U en $\mathbb{R}$ derivables en α, sea $\mathfrak{m}_\alpha := \{f \in \mathscr{C}'_\alpha(U) \colon f(\alpha) = 0\}$, que es un ideal de $\mathscr{C}'_\alpha(U)$ y $\mathscr{C}'_\alpha(U)/\mathfrak{m}_\alpha = \mathbb{R}$, $\bar{f} \mapsto f(\alpha)$, y sea $\mathfrak{m}_{\alpha,2} := \{f \in \mathscr{C}'_\alpha(U) \colon f(\alpha) = 0 \text{ y } f'(\alpha) = 0\}$, que es un ideal incluido en $\mathfrak{m}_\alpha$.

Sabemos que $f = f(\alpha) + f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) + h(x)\cdot(x-\alpha)$ con $h(x)$ continua en α y $h(\alpha) = 0$. Además, $h(x)\cdot(x-\alpha) \in \mathscr{C}'_\alpha(U)$, es más $h(x)\cdot(x-\alpha) \in \mathfrak{m}_{\alpha,2}$. Denotaremos $d_\alpha f := \overline{f - f(\alpha)} \in \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_{\alpha,2}$ y diremos que $d_\alpha f$ es la diferencial de f en α. Por tanto,

$$d_\alpha f = f'(\alpha)\cdot\overline{(x-\alpha)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)\cdot d_\alpha x_i.$$

Las diferenciales en α, $\{d_\alpha x_1, \dots, d_\alpha x_n\}$, son $\mathbb{R}$-linealmente independientes, porque $\sum_i \lambda_i (x_i - \alpha_i) \in \mathfrak{m}_{\alpha,2}$ si y solo si $\lambda_i = 0$, para todo i- Luego $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_{\alpha,2}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, de base $\{d_\alpha x_1, \dots, d_\alpha x_n\}$.

Es de inmediata comprobación que

$$\boxed{\begin{aligned} &d_\alpha(\lambda\cdot f + g) = \lambda\cdot d_\alpha f + d_\alpha g \\ &d_\alpha(fg) = f(\alpha)\cdot d_\alpha g + g(\alpha)\cdot d_\alpha f \end{aligned}}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathscr{C}'_\alpha(U)$.

Sean $V \subset \mathbb{R}^m$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, $g \colon V \to U$ una aplicación derivable en $\beta \in V$ y sea $\alpha = g(\beta)$. Consideremos la aplicación $g^*_\beta \colon \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_{\alpha,2} \to \mathfrak{m}_\beta/\mathfrak{m}_{\beta,2}$, $g^*_\beta(d_\alpha f) := d_\beta(f \circ g)$. Escribamos $g(y) = (g_1(y), \dots, g_n(y)$. Entonces,

$$g^*_\beta(d_\alpha x_j) = d_\beta(g_j) = \sum_i \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(\beta) d_\beta y_i$$

Luego la matriz de g^*_β en las bases $\{d_\alpha x_1, \dots, d_\alpha x_n\}$ y $\{d_\beta y_1, \dots, d_\beta y_m\}$ es $(a_{ij}) = (\frac{\partial g_j}{\partial y_i}(\beta))$.

$$\boxed{d_\beta(f\circ g)=g_\beta^*(d_\alpha f)\equiv(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha))\cdot(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(\beta))}$$

2. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Se dice que $D_\alpha\colon \mathscr{C}'_\alpha(U)\to E$ es una derivación en α de $\mathscr{C}'_\alpha(U)$ en E, si es $\mathbb{R}$-lineal y $D_\alpha(f\cdot g)=g(\alpha)\cdot D_\alpha f+f(\alpha)\cdot D_\alpha(g)$, para todo $f,g\in\mathscr{C}'_\alpha(U)$. La aplicación, $\delta_\alpha\colon\mathscr{C}'_\alpha(U)\to\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, $\delta_\alpha(f)=\overline{f-f(\alpha)}$ es una derivación en α:

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(fg)&=\overline{fg-f(\alpha)g(\alpha)}=\overline{f(\alpha)(g-g(\alpha))+(f-f(\alpha))g(\alpha)+(f-f(\alpha))(g-g(\alpha))}\\&=f(\alpha)\cdot\delta_\alpha(g)+g(\alpha)\cdot\delta_\alpha(f).\end{aligned}$$

Sea $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}'_\alpha(U),\mathbb{R})$ el conjunto de todas las derivaciones en α de $\mathscr{C}'_\alpha(U)$ en $\mathbb{R}$.

3. Proposición: *La aplicación* $(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^*\to\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}'_\alpha(U),\mathbb{R})$*,* $w\mapsto w\circ\delta_\alpha$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Obviamente, $w\circ\delta_\alpha$ es una derivación.

Dado $D_\alpha\in\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}'_\alpha(U),\mathbb{R})$, observemos que $D_\alpha(1)=D_\alpha(1^2)=2{\cdot}D_\alpha(1)$, luego $D_\alpha(1)=0$. Por tanto, $D_\alpha(\mathbb{R})=0$. Además, $D_\alpha(\mathfrak{m}_\alpha^2)=0$. Por tanto, D_α factoriza de modo único a través de los morfismos $\mathscr{C}'(U)\to\mathfrak{m}_\alpha$, $f\mapsto f-f(\alpha)$ y $\mathfrak{m}_\alpha\to\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, $g\mapsto\bar g$, es decir, a través de δ_α. □

Observemos que

$$(f-f(\alpha))\cdot\delta_\alpha g=\overline{(f-f(\alpha)\cdot(g-g(\alpha))}=0,$$

luego $f\cdot\delta_\alpha g=f(\alpha)\cdot\delta_\alpha g$.

Observemos que $\mathfrak{m}_\alpha^2\subseteq\mathfrak{m}_{\alpha,2}$, luego tenemos un epimorfismo

$$\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2\to\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_{\alpha,2},\ \bar f\mapsto\bar f\qquad(*)$$

La composición $\mathscr{C}'_\alpha(U)\xrightarrow{\delta_\alpha}\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2\to\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_{\alpha,2}$ es el morfismo d_α.

Tomando duales en $(*)$, tenemos una inyección $(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_{\alpha,2})^*\hookrightarrow(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^*$ de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Sea $\mathrm{Der}'_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}'_\alpha(U),\mathbb{R})=\{D\in\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}'_\alpha(U),\mathbb{R})\colon D(\mathfrak{m}_{\alpha,2})=0\}$.

4. Proposición: *Se cumple que* $(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_{\alpha,2})^*=\mathrm{Der}'_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}'_\alpha(U),\mathbb{R})$ *y es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de base* $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_\alpha,\dots,(\frac{\partial}{\partial x_n})_\alpha\}$.

5. Ejercicio: Prueba que $|x_1-\alpha_1|\cdot(x_1-\alpha_1)\in\mathfrak{m}_{\alpha,2}\backslash\mathfrak{m}_\alpha^2$.

Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ un abierto y $k\geq 1$. Denotaremos

$$\begin{aligned}\Delta_U&:=\{h\in\mathscr{C}^k(U\times U)\colon h(x,x)=0,\ \forall x\in U\},\\\Delta_{U,2}&:=\{h\in\mathscr{C}^k(U\times U)\colon h(x,x)=h'(x,x)=0,\ \forall x\in U\}\end{aligned}$$

que son ideales de $\mathscr{C}^k(U\times U)$. Diremos que

$$\Omega_U^k := \Delta_U/\Delta_{U,2}$$

es el módulo de las diferenciales de U.

Por el corolario 4.1.10, dada $h(x,y)\in\Delta_U$ existe una matriz $1\times n$, $H(x,y)$, de funciones de clase $\mathscr{C}^{k-1}$ tal que $h(x,y)=H(x,y)\cdot(x-y)$. Además, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x,x)=H_i(x,x)$ y

$$\overline{h(x,y)}=H(x,x)\cdot\overline{x-y}=\sum_i\frac{\partial h}{\partial x_i}(x,x)\cdot\overline{x_i-y_i}\in\Omega_U^k. \tag{5.1.1}$$

La aplicación

$$\Omega_U^k\to\mathscr{C}^{k-1}(U)^n,\ \overline{h(x,y)}\mapsto(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x,x),\dots,\frac{\partial h}{\partial x_n}(x,x))$$

es inyectiva. Por el teorema de extensión de Whitney (...) este morfismo es epiyectivo.

En el caso particular de que consideremos $f(x)\in\mathscr{C}^k(U)$, tenemos que

$$f(x)-f(y)=H(x,y)\cdot(x-y)$$

y $H(x,x)=f'(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$. Definamos $df:=\overline{f(x)-f(y)}\in\Omega_U^k$. Entonces,

$$df=\overline{f(x)-f(y)}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\overline{x_i-y_i}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot dx_i$$

y diremos que es la diferencial de f.

6. Proposición: *Ω_U^k es un $\mathscr{C}^{k-1}(U)$-módulo libre de base $dx_1,\dots,dx_n$.*

7. Proposición: *La aplicación $\mathscr{C}^k(U)\to\Omega_U^k$, $f\mapsto df$ cumple que*

$$d(f+g)=df+dg\ \ y\ \ d(fg)=fdg+gdf.$$

Dado $\alpha\in U$, consideremos la inyección $U\hookrightarrow U\times U$, $x\mapsto(x,\alpha)$ induce el morfismo $\mathscr{C}^k(U\times U)\to\mathscr{C}^k(U)$, $h(x,y)\mapsto h(x,\alpha)$, que aplica Δ_U en $\mathfrak{m}_\alpha$ y $\Delta_{U,2}$ en $\mathfrak{m}_{\alpha,2}$. Luego tenemos el morfismo

$$\Omega_U^k\to\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_{\alpha,2},\ g\cdot df\mapsto g(\alpha)\cdot d_\alpha f.$$

5.2. Derivaciones

1. Definición: Sea A una k-álgebra y M un A-módulo. Diremos que una aplicación $D\colon A\to M$ es una k-derivación si verifica las siguientes condiciones:

1. D es un morfismo de k-módulos.

2. $D(ab) = bD(a) + aD(b)$ para todo $a, b \in A$.

Observemos que $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1D(1) + 1D(1) = 2D(1)$, luego $D(1) = 0$. Además, dado $\lambda \in k$, $D(\lambda) = \lambda D(1) = 0$.

El conjunto de todas las k-derivaciones de A en M se denota por $\mathrm{Der}_k(A, M)$. Dados $D, D' \in \mathrm{Der}_k(A, M)$ y $a \in A$, se define

$$(D + D')(a) := D(a) + D'(a) \qquad (aD)(b) := aDb$$

Con estas operaciones $\mathrm{Der}_k(A, M)$ es un A-módulo.

Sea $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios y M un A-módulo. Si una k-derivación

$$D \colon k[x_1, \ldots, x_n] \to M$$

se anula sobre los x_i entonces $D = 0$: Por linealidad basta probar que es nula sobre los monomios x^α y para ello procedamos por inducción sobre $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Supongamos $\alpha_1 \neq 0$, sea β, tal que $\beta_1 = \alpha_1 - 1$ y $\beta_i = \alpha_i$, para $i > 1$ (luego $|\beta| < |\alpha|$), entonces $D(x^\alpha) = D(x_1 \cdot x^\beta) = x^\beta \cdot Dx_1 + x_1 \cdot Dx^\beta = 0 + 0 = 0$.

Dado $m \in M$, sea $m\frac{\partial}{\partial x_i}$ la derivación definida por $m\frac{\partial}{\partial x_i}(p(x)) := \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \cdot m$. Dada una derivación D entonces $D = \sum_i (Dx_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, pues la diferencia entre los dos términos de la igualdad es una derivación que se anula en todos los x_i. Hemos probado el siguiente teorema.

2. Teorema: $\mathrm{Der}_k(k[x_1, \ldots, x_n], M) = M\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus M\frac{\partial}{\partial x_n}$.

3. Definición: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto, $\alpha \in U$, $\mathfrak{m}_\alpha \subset \mathscr{C}^\infty(U)$ el ideal de todas las funciones que se anulan en α y M un $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulo. Definimos

$$\mathrm{Nul}(M) := \bigcap_{\alpha \in U, n > 0} \mathfrak{m}_\alpha^n \cdot M \ \text{ y } \ \tilde{M} := M/\mathrm{Nul}(M).$$

Se cumple que $\mathrm{Nul}\,\tilde{M} = 0$. También es claro que $\mathrm{Nul}(\mathscr{C}^\infty(U)) = 0$.

4. Teorema : *Sea M tal que* $\mathrm{Nul}(M) = 0$ *(por ejemplo si M es un módulo libre). La aplicación $\mathscr{C}^\infty(U)$-lineal*

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U), M) \to M \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \overset{m}{\cdots} \oplus M \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}, \ D = \sum_i Dx_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

es un isomorfismo de $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulos.

Demostración. Veamos que esta asignación es inyectiva: Tenemos que ver que si $Dx_i = 0$, para todo i, entonces $D = 0$. Sobre los polinomios $p(x_1, \ldots, x_m)$ es fácil ver que $D(p(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_i \frac{\partial p(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_i} D(x_i)$ (argumentando por inducción sobre el grado del polinomio). Es claro que $D(\mathfrak{m}_\alpha^n) \subseteq \mathfrak{m}_\alpha^{n-1} \cdot M$. Toda $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ es igual a un polinomio p de grado n módulo $\mathfrak{m}_\alpha^n$, $f = p+g$, $g \in \mathfrak{m}_\alpha^n$. Por tanto, $D(f) = D(p)+D(g) = 0+D(g) \in \mathfrak{m}_\alpha^{n-1}\cdot M$, para todo n y α, luego $D(f) = 0$ y $D = 0$.

La asignación es obviamente epiyectiva, porque $\sum_i m_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ es la imagen de la derivación D definida por $D(f) := \sum\limits_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot m_i$. □

Observemos que $\mathscr{C}^\infty(U)/\mathfrak{m}_\alpha = \mathbb{R}$, $\bar{f} \mapsto f(\alpha)$ y por tanto podemos considerar $\mathbb{R}$ como $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulo ($f \cdot \lambda := f(\alpha)\cdot\lambda$).

5. Corolario: *Se cumple que*

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R}) = \mathbb{R}\cdot(\frac{\partial}{\partial x_1})_\alpha \oplus \overset{m}{\cdots} \oplus \mathbb{R}\cdot(\frac{\partial}{\partial x_m})_\alpha,\ D_\alpha \mapsto \sum_i D_\alpha(x_i)\cdot(\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha.$$

6. Derivada direccional: Dados un vector $e \in \mathbb{R}^n$, un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ y $\alpha \in U$, definimos

$$D_\alpha^e f := \lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha+te)-f(\alpha)}{t}.$$

Si $e = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ entonces

$$D_\alpha^e f = (\frac{\partial}{\partial t})_0 f(\alpha+te) = \sum_i \lambda_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha).$$

Luego, $D_\alpha^e = \sum_i \lambda_i \cdot (\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha$ y la aplicación

$$\mathbb{R}^n \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R}),\ \ e = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mapsto D_\alpha^e = \lambda_1\cdot(\frac{\partial}{\partial x_1})_\alpha \oplus \cdots \oplus \lambda_n \cdot (\frac{\partial}{\partial x_n})_{\alpha)}$$

es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal.

7. Corolario: *Se cumple que*

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathscr{C}^\infty(U)) = \mathscr{C}^\infty(U)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \overset{m}{\cdots} \oplus \mathscr{C}^\infty(U)\cdot\frac{\partial}{\partial x_m},\ D \mapsto \sum_i D(x_i)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Para cada $\alpha \in U$, tenemos el morfismo $\mathscr{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(\alpha)$, que induce el morfismo $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathscr{C}^\infty(U)) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R})$, $D \mapsto D_\alpha$ (donde $D_\alpha(f) := (Df)(\alpha)$). Se dice que $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathscr{C}^\infty(U))$ es un campo de vectores en U. Dar el campo de vectores diferenciable $D = \sum_i f_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ es equivalente a dar la aplicación diferenciable $U \to \mathbb{R}^n$, $\alpha \mapsto (f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha))$.

5.3. Diferencial en un punto

Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ un abierto y $\alpha\in U$. Por el teorema 4.1.7, sabemos que el ideal $\mathfrak{m}_\alpha\subset\mathscr{C}^\infty(U)$ de todas las funciones que se anulan en α está generado por $x_1-\alpha_1,\ldots,x_m-\alpha_m$, es decir,

$$\mathfrak{m}_\alpha=(x_1-\alpha_1,\ldots,x_m-\alpha_m).$$

Dada $f\in\mathscr{C}^\infty(U)$, tenemos que $f=f(\alpha)+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)(x_i-\alpha_i)+\sum_{ij}f_{ij}(x)(x_i-\alpha_i)\cdot(x_j-\alpha)$. Observemos que $f(x)-f(\alpha)=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)\cdot(x_i-\alpha_i)\mod\mathfrak{m}_\alpha^2$.

1. Definición: Llamaremos diferencial de f en α, que denotaremos $d_\alpha f$, a la clase de $f-f(\alpha)$ en $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$.

Observemos que

$$d_\alpha f=\overline{\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)\cdot(x_i-\alpha_i)}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)\cdot\overline{x_i}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)\cdot d_\alpha x_i.$$

2. Proposición: *Una base de $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ es $d_\alpha x_1=\overline{x_1-\alpha_1},\ldots,d_\alpha x_m=\overline{x_m-\alpha_m}$.*

Demostración. Solo nos falta probar que $d_\alpha x_1,\ldots,d_\alpha x_n$ son linealmente independientes. Si $\sum_i\lambda_i d_\alpha x_i=0$, entonces $\sum_i\lambda_i(x_i-\alpha_i)\in\mathfrak{m}_\alpha^2$. Como $\mathfrak{m}_\alpha^2=((x_i-\alpha_i)(x_j-\alpha_j))_{i,j}$, tendremos que $\sum_i\lambda_i\cdot(x_i-\alpha_i)=\sum_{ij}f_{ij}\cdot(x_i-\alpha_i)\cdot(x_j-\alpha_j)$. Derivando por $(\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha$ obtenemos que $\lambda_i=0$. □

Dado $f\in\mathscr{C}^\infty(U)$ y $w_\alpha\in\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, se tiene que $f\cdot w_\alpha=(f-f(\alpha))\cdot w_\alpha+f(\alpha)\cdot w_\alpha=f(\alpha)\cdot w_\alpha$.

La aplicación $d_\alpha\colon\mathscr{C}^\infty(U)\to\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, $f\mapsto d_\alpha(f)$ es una derivación:

$$\begin{aligned}d_\alpha(fg)=\overline{fg-f(\alpha)g(\alpha)}&=\overline{(f-f(\alpha))g(\alpha)+f(\alpha)(g-g(\alpha)+(f-f(\alpha))\cdot(g-g(\alpha))}\\&=\overline{(f-f(\alpha))g(\alpha)+f(\alpha)(g-g(\alpha)}=g(\alpha)\cdot d_\alpha f+f(\alpha)\cdot d_\alpha g.\end{aligned}$$

3. Proposición: *La aplicación*

$$(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^*:=\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2,\mathbb{R})\to\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R}),\ w\mapsto w\circ d_\alpha$$

es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal.

Demostración. Sea $\{w_i\}$ la base dual de $\{d_\alpha x_i\}$. Es fácil comprobar que $w_i\circ d_\alpha=(\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha$. Luego, la aplicación del enunciado aplica la base $\{w_i\}$ en la base $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha\}$. □

Vía la identificación $(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^*=\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R})$, $D_\alpha\in\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R})$ se identifica con la aplicación lineal $D_\alpha\colon\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2\to\mathbb{R}$, $D_\alpha(\lambda d_\alpha f)=\lambda\cdot D_\alpha f$. La base dual de $d_\alpha x_1,\ldots,d_\alpha x_m$ es $(\frac{\partial}{\partial x_1})_\alpha,\ldots,(\frac{\partial}{\partial x_m})_\alpha$. Por el teorema de reflexividad 1.6.3, tenemos que $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R})^*=\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, de modo que $d_\alpha f(D_\alpha):=D_\alpha(d_\alpha f)=D_\alpha f$.

En 5.2.6, dimos la identificación $\mathbb{R}^n = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R})$, $e \mapsto D^e_\alpha$, en coordenadas, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mapsto \sum_i \lambda_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha$. Tenemos el diagrama conmutativo

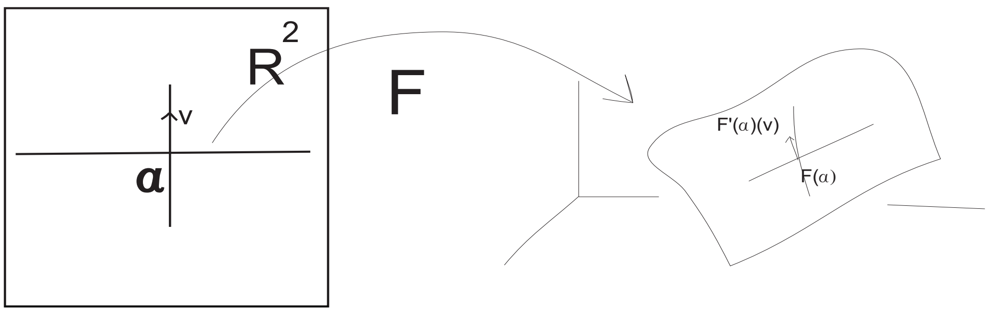
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "a_1x_1+\cdots+a_nx_n"'] & & \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R}) \arrow[dl, "a_1d_\alpha x_1+\cdots+a_nd_\alpha x_n"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Podemos interpretar geométricamente $a_1d_\alpha x_1+\cdots+a_nd_\alpha x_n$ como el hiperplano de $\mathbb{R}^n$, $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$.

Dada $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ entonces $f = f(\alpha)+\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)(x_i-\alpha_i)+\sum_{ij} f_{ij}(x)(x_i-\alpha_i)\cdot(x_j-\alpha)$. El plano tangente a la hipersuperficie $f(x)=0$ en α es claramente $f(\alpha)+\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha)(x_i-\alpha_i) = 0$. Podemos de nuevo interpretar geométricamente $\sum_i \lambda_i \cdot d_\alpha x_i \in \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ como el plano de $\mathbb{R}^n$ de ecuaciones $\sum_i \lambda_i\cdot(x_i-\alpha_i)=0$.

Se dice que $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R}) = (\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^*$ es el espacio tangente (intrínseco) a $U \subseteq \mathbb{R}^m$ en α. Se dice que $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ es el espacio cotangente (intrínseco) a $U \subset \mathbb{R}^m$ en α.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sendos abiertos y $F\colon U \to V$ un aplicación $\mathscr{C}^2$. Desarrollando por Taylor, tenemos que $F(x) = F(\alpha)+F'(\alpha)\cdot(x-\alpha)^t + \sum_{ij} G_{ij}(x)(x_i-\alpha_i)\cdot(x_j-\alpha_j)$. Consideremos la recta $\{\alpha+tv, t\in\mathbb{R}\}$ que pasa por α y de vector director v, entonces $F(\alpha+tv) = F(\alpha)+F'(\alpha)(tv)+t^2\cdot H(t,v)$. Para t pequeño $F(\alpha+tv)$ es aproximadamente $F(\alpha)+F'(\alpha)(tv)$. Es decir, F aplica el vector infinitesimal tv, de origen α, en el vector infinitesimal $F'(\alpha)(tv)$ de origen $F(\alpha)$.



Por otra parte, el morfismo F induce en los anillos el morfismo de anillos

$$F^*\colon \mathscr{C}^\infty(V) \to \mathscr{C}^\infty(U),\ F^*(g) := g\circ F$$

y por tanto el morfismo $\mathfrak{m}_{F(\alpha)} \to \mathfrak{m}_\alpha$, $g \mapsto g\circ F$. En conclusión, tenemos el morfismo (intrínseco)

$$F^*_\alpha\colon \mathfrak{m}_{F(\alpha)}/\mathfrak{m}^2_{F(\alpha)} \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2,\ d_{F(\alpha)}g \mapsto d_\alpha(g\circ F)$$

$F^*(d_{F(\alpha)}x_i) = d_\alpha(x_i\circ F) = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha)\cdot d_\alpha x_j$. Por tanto, la matriz de F^*_α es $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\alpha))$. Tomando duales tenemos "la aplicación lineal tangente en α asociada a F" (intrínseca)

$$F_{*,\alpha}\colon (\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha)^* = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R}) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(V),\mathbb{R}) = (\mathfrak{m}_{F(\alpha)}/\mathfrak{m}^2_{F(\alpha)})^*$$

que aplica cada derivación D_α en la derivación $F_{*,\alpha}(D_\alpha)$ definida por $F_*(D_\alpha)(g) = D_\alpha(F^*(g)) = D_\alpha(g \circ F)$ (como puede comprobarse). Directamente, o por dualidad, tenemos que la matriz de $F_{*,\alpha}$ es $F'(\alpha) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha))$. Geométricamente, $F_{*,\alpha}$ aplica en el vector tangente $v = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ en α el vector tangente en $F(\alpha)$, $F'(\alpha)(v)$.

5.4. Existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,\dots,x_n)\\ \dots\\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,\dots,x_n)\end{gathered}$$

Dar una solución de este sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales $a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda)$ en t_0, es dar funciones $\phi_i(t,\lambda)$ tales que $\frac{d\phi_i}{dt} = f_i(\phi_1,\dots,\phi_n)$ y $\phi_i(t_0,\lambda) = a_i(\lambda)$.

Si escribimos $x = (x_1,\dots,x_n)$ y $F = (f_1,\dots,f_n)$ podemos escribir de modo reducido el sistema anterior como

$$\frac{dx}{dt} = F(x).$$

Dada la condición inicial $a(\lambda) = (a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda))$ en t_0, buscamos funciones $\phi(t,\lambda) = (\phi_1(t,\lambda),\dots,\phi_n(t,\lambda))$ tal que

$$\frac{d\phi}{dt} = F(\phi)$$

y tal que $\phi(t_0,\lambda) = a(\lambda)$.

El sistema de ecuaciones diferenciales (con condición inicial $a(\lambda)$) es equivalente a la ecuación

$$x = a(\lambda) + \int_{t_0}^t F(x)\cdot dt$$

Dada φ si denotamos $\varphi^* = a(\lambda) + \int_0^t F(\varphi)\cdot dt$, buscamos ϕ tal que $\phi = \phi^*$.

Vamos a ver que bajo ciertas condiciones, si consideramos una φ cualquiera y tomamos $*$ infinitas veces obtenemos una ϕ tal que al tomar $*$ una vez más obtenemos ϕ, es decir, $\phi^* = \phi$. Así demostraremos que el sistema de ecuaciones diferenciales anterior tiene solución.

1. Lema: *Sea X, d un espacio métrico completo y $T\colon X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, tal que exista una constante $0 \le c < 1$ tal que $d(T(x),T(y)) \le c\cdot d(x,y)$, para todo $x,y \in X$. Entonces existe un único punto $p \in X$ tal que $T(p) = p$.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto cualquiera. La sucesión $\{x_n := T^n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy: Sea $a = d(x,T(x))$ entonces $d(T^n(x),T^{n+1}(x)) \le c\cdot d(T^{n-1}(x),T^n(x)) \le \dots \le c^n\cdot d(x,T(x)) = c^n\cdot a$. Entonces, dado $n \ge m$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(T^m(x),T^n(x)) &\le d(T^m(x),T^{m+1}(x))+d(T^{m+1}(x),T^{m+2}(x))+\cdots+d(T^{n-1}(x),T^n(x)) \\ &\le c^m\cdot a+c^{m+1}\cdot a+\ldots+c^{n-1}\cdot a=a\cdot\frac{c^m-c^n}{1-c}\le c^m\cdot\frac{a}{1-c} \end{aligned}$$

que es todo lo pequeño que se quiera para n,m grandes.

Por tanto, la sucesión converge a un punto p. Por ser T contractiva es continua, luego $T(p)=T(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}T(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=p$.

Si $T(p')=p'$ entonces $d(p,p')=d(T(p),T(p'))\le c\cdot d(p,p')$, luego $d(p,p')=0$ y $p'=p$.

□

2. Teorema: *Sea $F\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto, $a(t_1,\ldots,t_m)\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ y $t_0\in\mathbb{R}$. Entonces existe una única solución $\phi(t,t_1,\ldots,t_m)\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ (derivable en t) del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt}=F(x)$$

con condiciones iniciales $\phi(t_0,t_1,\ldots,t_m)=a(t_1,\ldots,t_m)$.

Demostración. Sabemos que $F(x)-F(y)=H(x,y)\cdot(x-y)$, siendo $H(x,y)$ una matriz de funciones continuas acotadas[1]. Sea $K=\text{máx}\{||H(x,y)||_\infty;\ \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n\}$. Por tanto, tenemos que $||F(x)-F(y)||_\infty\le K\cdot||x-y||_\infty$, para cada $x,y\in\mathbb{R}^n$. Tomemos $\epsilon=\frac{1}{2K}$ (que depende solo de F, y no de quien sea t_0 ni $a(t_1,\ldots,t_m)$).

Sea V un abierto de $\mathbb{R}^r$. Dada $g\in\mathscr{C}^0(V,\mathbb{R}^n)$ definimos $||g||=\sup\{||g(x)||_\infty,\ \forall\, x\in V\}$ y denotamos $\mathscr{C}^0_a(V,\mathbb{R}^n):=\{g\colon\mathscr{C}^0(V,\mathbb{R}^n)\colon ||g||<\infty\}$, que sabemos que es un espacio métrico completo por 2.3.60.

Sea U un cubo abierto de $\mathbb{R}^m$. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0_a((t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)\times U,\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{T} & \mathscr{C}^0_a((t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)\times U,\mathbb{R}^n) \\ \varphi & \mapsto & T(\varphi):=a(t_1,\ldots,t_m)+\int_{t_0}^t F(\varphi(s,t_1,\ldots,t_m))\cdot ds \end{array}$$

es contractiva, pues

$$\begin{aligned} ||T(\varphi)-T(\varphi')|| &= ||\int_{t_0}^t F(\varphi)-F(\varphi)\,ds||\le|\int_{t_0}^t ||F(\varphi)-F(\varphi')||ds| \\ &\le|\int_{t_0}^t K\cdot||\varphi-\varphi'||ds|\le\epsilon\cdot K\cdot||\varphi-\varphi'||=\frac{1}{2}||\varphi-\varphi'|| \end{aligned}$$

[1]Recordemos que $f_i(x)-f_i(y)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}f_i(y+t(x-y))\cdot dt=\int_0^1\sum_j f_{i,x_j}(y+t(x-y))\cdot(x_j-y_j)\cdot dt=\sum_j\int_0^1 f_{i,x_j}(y+t(x-y))\cdot dt\cdot(x_j-y_j)$. Sean $H_{ij}(x,y):=\int_0^1 f_{i,x_j}(y+t(x-y))\cdot dt$.

Así pues, por el lema existe una única $\phi \in \mathscr{C}_a^0((t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)\times U,\mathbb{R}^n)$, tal que $T(\phi)=\phi$, es decir, una única aplicación continua acotada $\phi \in \mathscr{C}^0((t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)\times U,\mathbb{R}^n)$ solución del sistema de ecuaciones diferenciable con condición inicial $\phi(t_0,t_1,\dots,t_m)=a(t_1,\dots,t_m)$.

Si existiese otra $\phi' \in \mathscr{C}^0((t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)\times U,\mathbb{R}^n)$ solución del sistema, entonces reduciendo (todo lo poco que se quiera) los cubos $(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ y U, se cumplirá que ϕ' es acotada, luego habrá de coincidir con ϕ. En conclusión $\phi'=\phi$.

Como U es una cubo abierto, todo lo grande que se quiera, existe una única $\phi \in \mathscr{C}^0((t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)\times \mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ solución del sistema con condiciones iniciales $\phi(t_0,t)=a(t)$.

Sea ahora $t_0'=t_0+\epsilon/2$. Del mismo modo dado el sistema $\frac{dx}{dt}=F(x)$ con condición inicial $x(t_0')=\phi(t_0')$, existe un única solución $\phi' \in \mathscr{C}^0((t_0'-\epsilon,t_0'+\epsilon)\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$. Ahora bien las restricciones de ϕ y ϕ' a $(t_0'-\epsilon/2,t_0'+\epsilon/2)\times\mathbb{R}^m$ son soluciones del sistema en este abierto, luego coinciden. Luego tenemos una solución $\phi'' \in \mathscr{C}^0((t_0-\epsilon,t_0+1{,}5\cdot\epsilon)\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ del sistema de ecuaciones, con condición inicial $x(t_0)=a(t)$, que es única porque cualquier otra sobre $(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)\times\mathbb{R}^m$ coincide con ϕ y por tanto sobre $(t_0'-\epsilon/2,t_0'+\epsilon/2)\times\mathbb{R}^m$ con ϕ'. Argumentando así sucesivamente, podemos ampliar sucesivamente el intervalo a $(t_0-(1'5)^n\cdot\epsilon,t_0+(1'5)^n\cdot\epsilon)$ y demostramos que existe una única $\phi\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ solución del sistema con condiciones iniciales $x(t_0)=a(t)$.

□

3. Observaciones: 1. Si uno revisa la demostración, podrá observar que se pueden debilitar la hipótesis: en vez de suponer que F es de soporte compacto, supóngase que las funciones f_{i,x_j} son acotadas.

2. La existencia y unicidad de la solución es un problema esencialmente local.

4. Teorema: *Sea $F\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ y $a(t_1,\dots,t_m)\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$. Dado $b=(b_0,b_1,\dots,b_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$, existe un entorno abierto conexo V de b y una única solución $\phi(t,t_1,\dots,t_m)\in\mathscr{C}^0(V,\mathbb{R}^n)$ (derivable en t) del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt}=F(x)$$

con condiciones iniciales, $\phi(b_0,t_1,\dots,t_m)=a(t_1,\dots,t_m)$.

Demostración. Sea $H\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto que en un entorno pequeño U de $a(b_1,\dots,b_m)$ es $H_{|U}=1$.

Sea $\tilde F=H\cdot F$ y $\tilde\phi$ la única solución de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt}=\tilde F(x)$, con condición inicial $\tilde\phi(b_0,t_1,\dots,t_m)=a(t_1,\dots,t_m)$. Sea $V\subset\tilde\phi^{-1}(U)$ un entorno abierto conexo de b. Es claro que $\phi:=\tilde\phi_{|V}$ es una solución del sistema $\frac{dx}{dt}=F(x)$, con condición inicial $\phi(b_0,t_1,\dots,t_m)=a(t_1,\dots,t_m)$. Además si ϕ' es otra solución sobre V, entonces es también solución sobre $V\cap{\phi'}^{-1}(U)$, del sistema $\frac{dx}{dt}=\tilde F(x)$ luego ha de coincidir (como vimos en la demostración del teorema anterior) con $\tilde\phi_{|V}$, sobre la componente conexa C de $V\cap{\phi'}^{-1}(U)$ que contenga a b. Los puntos donde coinciden ϕ' y $\tilde\phi_{|V}$ (que están incluidos en $V\cap{\phi'}^{-1}(U)$) es un cerrado de V, que contiene a C. Entonces, C es un cerrado y abierto de V, luego $C=V$ y $\phi'=\tilde\phi_{|V}$.

□

5.4.1. Dependencia diferenciable de las condiciones iniciales

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^r$ abiertos. Sea

$$\mathscr{C}_a^{(0,k)}(V \times U,\mathbb{R}^n) := \{G = (g_1,\dots,g_n) \in \mathscr{C}^0(V \times U,\mathbb{R}^n) \colon g_{j,\alpha}(t,\lambda) := \frac{\partial^{|\alpha|} g_j(t,\lambda_1,\dots,\lambda_m)}{\partial^{\alpha_1}\lambda_1 \cdots \partial^{\alpha_r}\lambda_m}$$
$$\text{existen } \forall j,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ con } |\alpha| \le k, \text{ y}$$
$$||G|| := \sup\{||g_{j,\alpha}||_\infty;\ \forall j,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ con } |\alpha| \le k\} < \infty\}$$

5. Lema: *$\mathscr{C}_a^{(0,k)}(V \times U,\mathbb{R}^n)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Podemos suponer que $n = 1$. Sea $\{f_r(t,\lambda)\}_{r\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Los anillos de funciones continuas acotadas con la norma del supremo son completos. Las sucesiones $\{f_{r,\alpha}\}_{r\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy. Sea $f^\alpha = \lim\limits_{r\to\infty} f_{r,\alpha}$, que es una función continua acotada. Solo tenemos que probar que $(f^0)_\alpha = f^\alpha$. Si $\alpha = (\beta_1,\dots,\beta_j+1,\dots,\beta_m)$, basta probar que $\frac{\partial f^\beta}{\partial \lambda_j} = f^\alpha$, lo cual es conocido por 3.6.22.

□

6. Teorema: *Sea $F \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto y $a(\lambda) \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una única solución $\phi(t,\lambda) \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

con condiciones iniciales $\phi(t_0,\lambda) = a(\lambda)$, para $t = t_0$.

Demostración. Es un problema local. Veamos que podemos proceder como en el teorema 5.4.2.

Sea U un cubo abierto de $\mathbb{R}^m$ y $V = (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \subset \mathbb{R}$. Dada $\alpha \in \mathbb{N}^m$, con $|\alpha| \le k$, y $\varphi \in \mathscr{C}^{(0,k)}(V \times U,\mathbb{R}^n)$, tenemos

$$f_i(\varphi(t,\lambda))_\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|} f_i(\varphi_1(t,\lambda_1,\dots,\lambda_m),\dots,\varphi_n(t,\lambda_1,\dots,\lambda_m))}{\partial^{\alpha_1}\lambda_1 \cdots \partial^{\alpha_m}\lambda_m} = G^{i,\alpha}(\varphi_{j,\beta}(t,\lambda))_{j,|\beta|\le k},$$

para cierta aplicación $G^{i,\alpha} \in \operatorname{Aplic}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, con $N = n\cdot\#\{\beta\colon |\beta| \le k\}$. Es más, $G^{i,\alpha}((x^{j,\beta})_{j,\beta}) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ es suma de las funciones $f_{i,\beta}((x^{j,0})_j)$ por polinomios (que no dependen de quien sea φ), luego es de soporte compacto. Sea $G := (G^{i,\alpha}) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$. Existe una constante K, tal que

$$||G(x^{j,\beta}) - G(y^{j,\beta})||_\infty \le K \cdot ||(x^{j,\beta}) - (y^{j,\beta})||_\infty, \text{ para cada } (x^{j,\beta}),\ (y^{j,\beta}) \in \mathbb{R}^N.$$

En tal caso, $||F(\varphi)-F(\varphi')|| < K\cdot||\varphi-\varphi'||$. Sea $\epsilon=\frac{1}{2K}$. La aplicación

$$T\colon \mathscr{C}_a^{(0,k)}(V\times U,\mathbb{R}^n)\to \mathscr{C}_a^{(0,k)}(V\times U,\mathbb{R}^n),\ T(\varphi)=a(\lambda)+\int_{t_0}^t F(\varphi(s,\lambda))\cdot ds$$

es contractiva:

$$\begin{aligned}||(T(\varphi)-T(\varphi'))|| &= ||\int_{t_0}^t (F(\varphi)-F(\varphi'))ds|| \le |\int_{t_0}^t ||(F(\varphi)-F(\varphi'))||\cdot ds|\\ &\le |\int_{t_0}^t K\cdot||\varphi-\varphi'||\cdot ds| \le \epsilon\cdot K\cdot||\varphi-\varphi'|| = \frac{1}{2}||\varphi-\varphi'||\end{aligned}$$

Por tanto, existe $\phi\in\mathscr{C}_a^{(0,k)}(V\times U,\mathbb{R}^n)$ tal que $T(\phi)=\phi$, que es la solución local del sistema de ecuaciones diferenciales (en $V\times U$).

Veamos que $\phi\in\mathscr{C}^k(V\times U,\mathbb{R}^n)$. Si $\phi\in\mathscr{C}^r(V\times U,\mathbb{R}^n)$, con $r<k$, dada $(s,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^m$, con $r+1=|(s,\alpha)|=s+|\alpha|$, como $\phi=a(\lambda_1,\dots,\lambda_m)+\int_{t_0}^t F(\phi(s,\lambda_1,\dots,\lambda_m))\cdot ds$ tenemos que

$$\phi_{(s,\alpha)}(t,\lambda)=\begin{cases} F(\phi(t,\lambda_1,\dots,\lambda_m))_{(s-1,\alpha)}, & \text{si } s\neq 0.\\ \phi_{(0,\alpha)}, & \text{si } s=0.\end{cases}$$

son continuas, luego $\phi\in\mathscr{C}^r(V\times U,\mathbb{R}^n)$.

□

5.4.2. Curvas integrales de un campo de vectores diferenciable. Grupo uniparamétrico

Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ un abierto conexo y $D=\sum_i f_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R})$. Nos planteamos la existencia (local) de una aplicación diferenciable

$$\tau\colon \mathbb{R}\times U\to U,\ (t,x)\mapsto \tau(t,x)$$

tal que $\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,x)})=D_{\tau(t,x)}$ y $\tau(0,x)=x$, para todo $x\in U$.

Si escribimos $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$, sabemos que $\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,x)})=(\sum_i\frac{\partial\tau_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i})_{\tau(t,x)}$. Por tanto, $\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,x)})=D_{\tau(t,x)}$ si y solo si $\frac{\partial\tau_i}{\partial t}=f_i(\tau)$. Si escribimos $F=(f_1,\dots,f_n)$ entonces τ es justamente la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\tau}{dt}=F(\tau)$$

con condiciones iniciales $\tau(0,x)=x$, para todo $x\in U$. Si D es un campo de vectores con soporte compacto sabemos que existe la $\tau\colon\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R}$ buscada (y es única).

7. Definición: Fijado $x\in U$, existe un abierto conexo maximal $U^x\subset\mathbb{R}$ que contiene a 0, tal que existe una (única) aplicación diferenciable $\sigma_x\colon U^x\to U$ de modo que $\sigma_{x*}((\frac{\partial}{\partial t})_t)=D_{\sigma_x(t)}$ y $\sigma_x(0)=x$. Se dice que σ_x es la curva integral de D en x.

Sea $W=\cup_{x\in U}U^x\times x\subset\mathbb{R}\times U$. Veamos que es un abierto (que contiene a $0\times U$).

Sea $[t_1,t_2]\subset U^x$ (con $t_1<0<t_2$). Existe un abierto acotado $U'\subset U$ que contiene a $\sigma_x([t_1,t_2])$ y una función $H\in\mathscr{C}^\infty(U)$ con soporte compacto tal que $H_{|U'}=1$. Existe una aplicación diferenciable $\tilde\tau\colon\mathbb{R}\times U\to U$, tal que $\tilde\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,y)})=H(\tilde\tau(t,y))\cdot D_{\tilde\tau(t,y)}$ y $\tilde\tau(0,y)=y$, para todo $y\in U$. Sea $V=\tilde\tau^{-1}(U')$ y $\tau=\tilde\tau_{|V}$. Entonces, $\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,y)})=D_{\tau(t,y)}$ y $\tau(0,y)=y$, para todo $(0,y)\in V$. Además, $[t_1,t_2]\times x\subset V$ y $\sigma_x(t)=\tau(t,x)$ para todo $t\in[t_1,t_2]$. Sea U_x un entorno de x, tal que $[t_1,t_2]\times U_x\subset V$. Entonces, $[t_1,t_2]\times U_x\subset W$, luego W es un abierto y tenemos definida (localmente lo hemos hecho) $\tau\colon W\to U$, tal que $\tau_*((\frac{\partial}{\partial t})_{(t,y)})=D_{\tau(t,y)}$ y $\tau(0,y)=y$, para todo $(0,y)\in W$. Se dice que $\tau\colon W\to\mathbb{R}^n$ es el grupo uniparamétrico local asociado a D.

8. Proposición: *Sea $\tau\colon W\to U$ el grupo uniparamétrico local asociado a D y denotemos $\tau_t(x):=\tau(t,x)$. Si $s,t+s\in W\cap(\mathbb{R}\times x)$, entonces*

$$(\tau_t\circ\tau_s)(x)=\tau_{t+s}(x).$$

Demostración. Observemos que ambas cumple la misma ecuación diferencial

$$\frac{d\tau_t\circ\tau_s}{dt}=\frac{d\tau(t,\tau(s,x))}{dt}=D_{\tau(t,\tau(s,x))}\ \text{ y }\ \frac{d\tau_{t+s}}{dt}=\frac{d\tau(t+s,x))}{dt}=D_{\tau(t+s,x))}$$

con la misma condición inicial para $t=0$: $\tau_0\circ\tau_s(x)=\tau_s(x)=\tau_{0+s}(x)$.

□

Si $W\cap(\mathbb{R}\times x)=(a,b)$, entonces $W\times(R\times\tau_s(x))=(a-s,b-s)$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} W\cap(\mathbb{R}\times\tau_s(x)) \arrow[r, "+s"] \arrow[dr, "\tau(-,\tau_s(x))"'] & W\times(R\times x) \arrow[d, "\tau(-,x)"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Sea $\sigma\colon(a,b)\to U$, $t\mapsto\sigma(t)=\tau_t(x)$ la curva integral del campo de vectores D que pasa por x. Supongamos que no existe $s\neq0$ tal que $\sigma(s)=x$. Entonces, σ es una aplicación inyectiva: si existen $s<t$ tales que $\sigma(s)=\sigma(t)$, entonces

$$x=\tau_{-s}(\tau_s(x))=\tau_{-s}(\sigma(s))=\tau_{-s}(\sigma(t))=\tau_{-s}(\tau_t(x))=\tau_{t-s}(x)=\sigma(t-s)$$

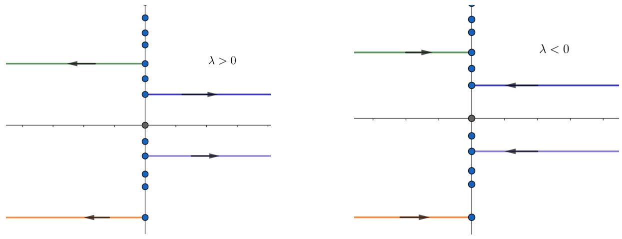
y llegamos a contradicción. Supongamos que existe $s\neq0$ tal que $\sigma(s)=x$. Entonces $\sigma((a,b))=\sigma([0,s])$ (si $s<0$, entendemos que $[0,s]$ es $[s,0]$), porque dado $t\in(a,b)$, existen $n\in\mathbb{Z}$ y $c\in[0,s)$ tal que $t=n\cdot s+c$ y entonces $\sigma(t)=\tau_{c+ns}(x)=\tau_c(x)=\sigma(c)$. Si existe una sucesión $\{s_n\neq0\}$ convergente a 0, entonces $\sigma((a,b))=\cap_n\sigma([0,s_n])=x$, es decir, σ es constante. Sea $s=\text{ínf}\{t\in(0,b)\colon\sigma(t)=x\}$, entonces existe una única aplicación diferenciable $\sigma'\colon S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^n$ tal que la composición

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}/\mathbb{Z}=S^1 & \hookrightarrow & U \\ r & \mapsto & \bar{\frac{r}{s}} & \mapsto & \sigma'(\bar{\frac{r}{s}}) \end{array}$$

9. Ejemplo: Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ y consideremos la ecuación diferencial. $x' = A \cdot x$. Por la observación 5.4.3, existe el grupo uniparamétrico global $\tau\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ solución de la ecuación diferencial. Explícitamente, $\tau(t,x) = e^{A\cdot t}\cdot x$. Estudiemos las curvas integrales.
1.a Si $A = 0$ entonces $\tau_t(x) = x$.

1.b Si $A \neq 0$ y $\operatorname{Ker} A \neq 0$, entonces por cambio lineal de coordenadas podemos suponer que

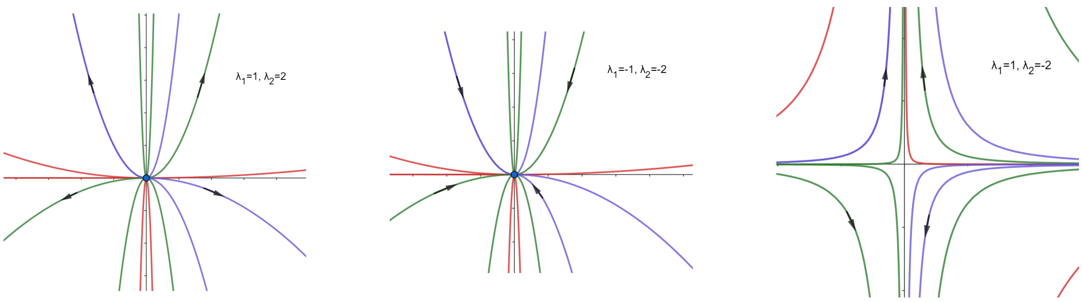
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \tau_t(x_1,x_2) = (e^{\lambda\cdot t}x_1, x_2)$$



2. Supongamos que $\det(A) \neq 0$.

2.a Si los autovalores λ_1, λ_2 de A son reales y distintos, entonces por cambio lineal de coordenadas podemos suponer que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tau_t(x_1,x_2) = (e^{\lambda_1\cdot t}x_1, e^{\lambda_2\cdot t}x_2).$$

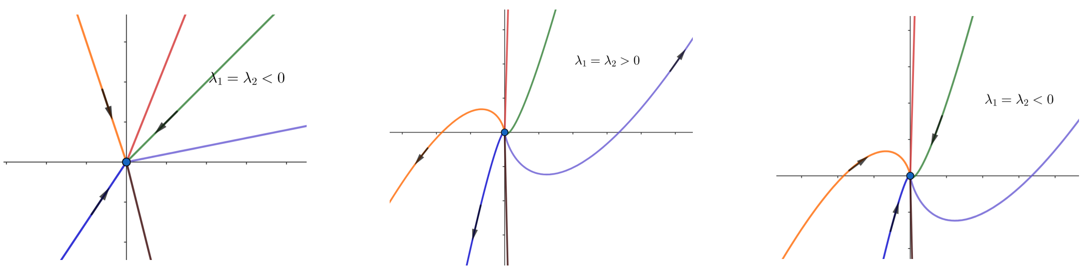


2.b Si los autovalores $\lambda_1 = \lambda_2$ de A son reales e iguales, entonces por cambio lineal de coordenadas podemos suponer que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tau_t(x_1,x_2) = e^{\lambda\cdot t}\cdot(x_1,x_2).$$

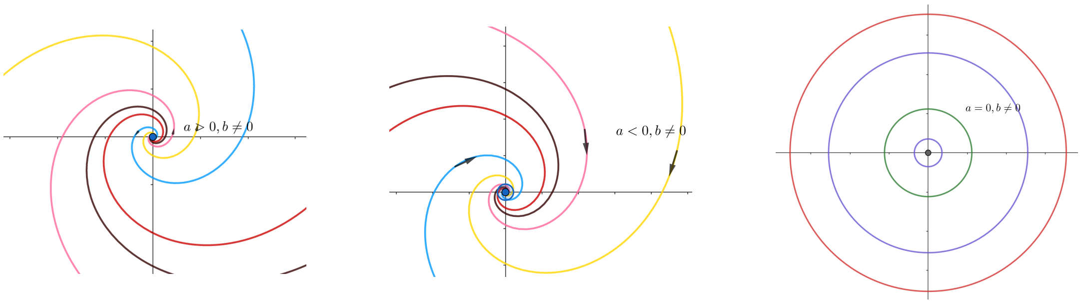
o bien

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tau_t(x_1,x_2) = e^{\lambda\cdot t}\cdot(x_1, tx_1 + x_2).$$



2.c Si los autovalores son complejos $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$ ($b \neq 0$), entonces e^{At} es de valores propios e^{at+bti} y e^{at-bti}, luego por cambio lineal de coordenadas es igual a $e^{at}\cdot\begin{pmatrix}\cos bt & -\operatorname{sen} bt\\ \operatorname{sen} bt & \cos bt\end{pmatrix}$ y

$$\tau_t(x_1,x_2) = e^{at}\cdot\begin{pmatrix}\cos bt & -\operatorname{sen} bt\\ \operatorname{sen} bt & \cos bt\end{pmatrix}\cdot x$$



5.4.3. Reducción local de un campo de vectores a forma canónica

Si $F\colon U \to V$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, "entonces todo lo que digamos en U podemos traducirlo a V". Dada una función en g en U, tenemos la correspondiente función en V: $g\circ F^{-1}$. Dada una derivación D en U, tenemos la derivación $F(D)$ en V, determinada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty(U) \arrow[r, equal, "F^{*-1}"] \arrow[d, "D"] & \mathcal{C}^\infty(V) \arrow[d, "F(D)"] \\
\mathcal{C}^\infty(U) \arrow[r, equal, "F^{*-1}"] & \mathcal{C}^\infty(V)
\end{tikzcd}$$

Es decir, $F(D)g := D(g\circ F)\circ F^{-1}$. Puede comprobarse que $F(D)_{F(\alpha)} = F_* D_\alpha$. $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$ en un sistema de coordenadas $x_1,\dots,x_n$ de U si y solo si $F(D) = \frac{\partial}{\partial y_1}$ en el sistema de coordenadas $y_1 = x_1\circ F^{-1},\dots,y_n = x_n\circ^{-1} F$ de V.

Sigamos las notaciones del apartado anterior. Supongamos que $D_p \neq 0$, por tanto $f_i(p) \neq 0$ para algún i. No hay pérdida de generalidad si suponemos que $f_1(p) \neq 0$. Sea $V = \{(y_1,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $(y_1,x_1(p),y_2,\dots,y_n) \in U_\epsilon \times U\}$ y consideremos la composición de morfismos

$$\begin{array}{ccccc}
V & \overset{i}{\hookrightarrow} & U_\epsilon \times U & \overset{\tau}{\to} & \mathbb{R}^n\\
(y_1,y_2,\dots,y_n) & \mapsto & (y_1,x_1(p),y_2,\dots,y_n) & &
\end{array}$$

A nivel tangente tenemos

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{\partial}{\partial y_1} & \overset{i_*}{\mapsto} & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial t} & \overset{\tau_*}{\mapsto} & D\\
\frac{\partial}{\partial y_i} & \overset{i_*}{\mapsto} & \frac{\partial}{\partial x_i},\ i > 1 & (\frac{\partial}{\partial x_i})_{(0,q)} & \overset{\tau_*}{\mapsto} & (\sum_j \frac{\partial \tau_j(0,x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j})_q = (\frac{\partial}{\partial x_i})_q
\end{array}$$

En conclusión, la matriz de $(\tau \circ i)_*$ en el punto $(0, p_2, \ldots, p_n)$ es

$$\begin{pmatrix} f_1(p) & 0 & \ldots & 0 \\ f_2(p) & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(p) & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\tau \circ i$ es un difeomorfismo de un entorno abierto V' de $(0, p_2, \ldots, p_n)$ con un entorno abierto U de p y tenemos

$$\begin{array}{ccc} V' & \simeq & U \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \leftrightarrow & D \end{array}$$

y en las coordenadas $z_1 = y_1 \circ (\tau \circ i)^{-1}, \ldots, z_n = y_n \circ (\tau \circ i)^{-1}$, $D = \frac{\partial}{\partial z_1}$.

5.5. Problemas

1. Prueba la **primera ley de Kepler**.

   Solución: Tenemos que probar que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas. Situemos la Sol en $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$. Por la ley de gravitación universal de Newton, la trayectoria $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ del planeta cumple la ecuación diferencial $x'' = \frac{-K}{||x||^3} \cdot x$, trayectoria que queda determinada por $x(0)$ y $x'(0)$. Si A es una isometría lineal, entonces $A(x)'' = \frac{-K}{||A(x)||} A(x)$. Podemos suponer que $x(0) = (a,0,0)$ y $x'(0) = (b,c,0)$ y por tanto $x_3(t) = 0$ para todo t, es decir, podemos suponer que estamos en el plano $(x_3 = 0)$ y resolvamos la ecuación diferencial. En coordenadas polares $(x_1(t), x_2(t)) = \rho(t) \cdot (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$. Si derivamos dos veces, la ley de gravitación universal se traducen en las ecuaciones[2]

   1. $\rho'' - \rho\theta'^2 = \frac{-K}{\rho^2}$
   2. $2\rho'\theta' + \rho\theta'' = 0.$

   De la segunda ecuación obtenemos $\frac{-2\rho'}{\rho} = \frac{\theta''}{\theta'}$, luego integrando $-2\ln\rho + cte = \ln\theta'$ y por tanto, $\boxed{\theta' = \dfrac{ca}{\rho^2}}$[3]. Sustituyendo θ' por $\frac{ca}{\rho^2}$ en la primera igualdad obtenemos que $\rho'' = \frac{a^2c^2}{\rho^3} - \frac{-K}{\rho^2}$. Multiplicando por ρ' e integrando obtenemos la ecuación $\boxed{\rho' = \sqrt{\dfrac{-a^2c^2}{\rho^2} + \dfrac{K}{2\rho} + cte}}$ con $cte = \frac{b^2}{a^2} + c^2 - \frac{K}{2a}$. Las curvas integrales de un campo

[2] Con condiciones iniciales $(\rho(0), \theta(0)) = (a, 0)$ y $(\rho'(0), \theta'(0)) = (\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$.

[3] La velocidad angular del planeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del planeta al Sol.

de vectores D son las mismas que las de $f \cdot D$ (pero con distinta parametrización). Luego, multiplicando $\frac{\rho^2}{ca}$, basta que resolvamos el sistema[4]

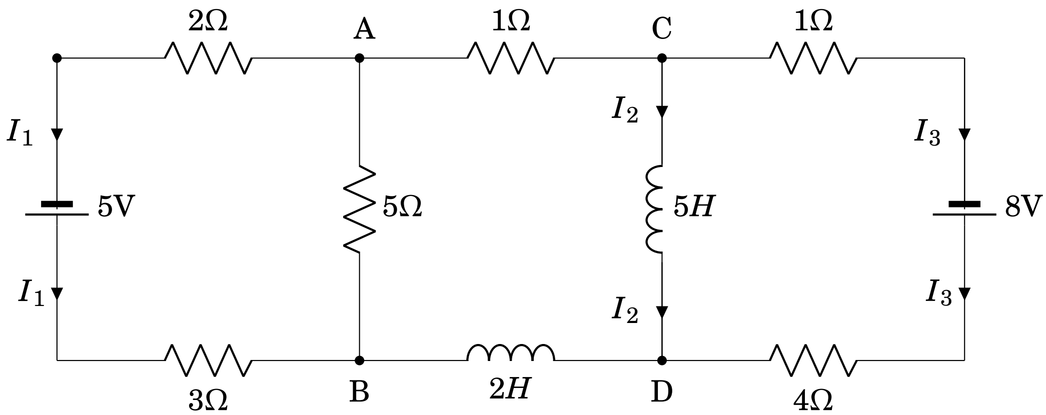
$$\begin{aligned}
&\theta' = 1 \;\Rightarrow\; \theta(s) = s \\
&\rho' = \rho^2 \cdot \sqrt{\tfrac{-1}{\rho^2} + \tfrac{K}{2a^2c^2\rho} + \tfrac{cte}{a^2c^2}} \;\Rightarrow\; (\tfrac{1}{\rho})' = -\sqrt{\tfrac{-1}{\rho^2} + \tfrac{K}{2a^2c^2\rho} + \tfrac{cte}{a^2c^2}}
\end{aligned}$$

Sea $q(s) := \frac{1}{\rho(s)}$, entonces $q' = \sqrt{-q^2 + Bq + C}$, luego $\int \frac{1}{\sqrt{-q^2+Bq+C}} \cdot dq = s + D = \theta + D$. Integrando, obtenemos que $\operatorname{arcsen}(\lambda q + \mu) = \theta + D$, luego $\lambda q + \mu = \operatorname{sen}(\theta + D)$, luego

$$\rho = \frac{a_1}{a_2 + a_3 \operatorname{sen}(\theta + a_4)}$$

que son las ecuaciones de las hipérbolas, parábolas y elipses de foco el origen (el Sol), escritas en coordenadas polares.

2. **Circuito eléctrico:** Calcula las intensidades de corriente en los diferentes tramos del siguiente circuito



Solución: De D a B la corriente es de intensidad $I_2 + I_3$. De B a A la corriente es de intensidad $I_1 + I_2 + I_3$. De A a C la corriente es de intensidad $I_2 + I_3$. La suma de diferencia de potenciales en todo circuito cerrado es nula. Luego,

$$\begin{aligned}
3I_1 + 5(I_1 + I_2 + I_3) + 2I_1 &= 5 \\
2(I_2' + I_3') + 5(I_1 + I_2 + I_3) + 1(I_2 + I_3) + 5I_2' &= 0 \\
4I_3 - 5I_2' + I_3 &= 8
\end{aligned}$$

$I_1 = \frac{1 - I_2 - I_3}{2}$. Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
7I_2' + 2I_3' &= -\tfrac{7}{2}I_2 - \tfrac{7}{2}I_3 - \tfrac{5}{2} \\
-5I_2' &= -5I_3 + 8
\end{aligned}$$

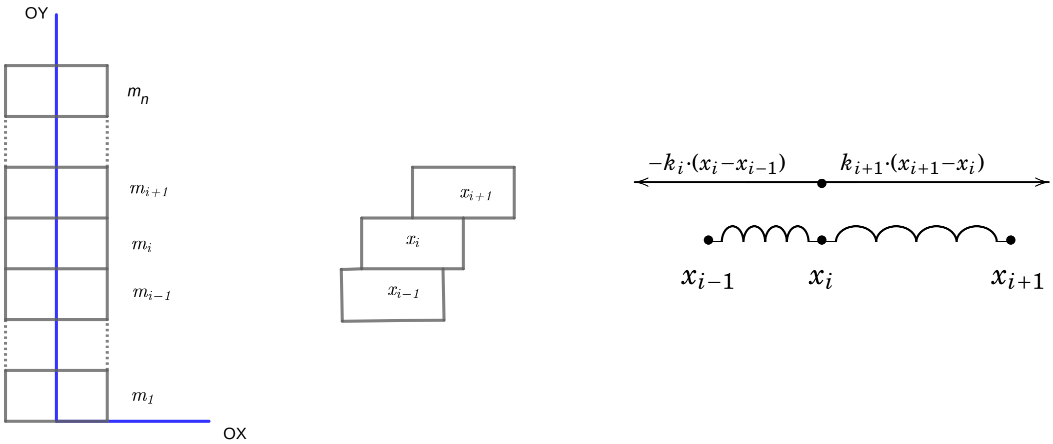
[4]Con condiciones iniciales $(\rho(0), \theta(0)) = (a, 0)$ y $(\rho'(0), \theta'(0)) = (b/c, 1)$.

que es equivalente al sistema

$$\begin{array}{rcl} I_2' & = & I_3 - \frac{8}{5} \\ I_3' & = & \frac{-7}{4} I_2 - \frac{21}{4} I_3 + \frac{87}{20} \end{array}$$

Una solución particular es $\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7/4 & -21/4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8/5 \\ 87/20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81/35 \\ 8/5 \end{pmatrix}$. Dejamos que el lector calcule la solución general e imponga $I_2(0) = 0$, $I_3(0) = 0$.

3. **Modelo de desplazamiento de las plantas de un edificio por un terremoto:** [5] Consideremos un edificio de n plantas. Suponemos que la i-ésima planta tiene masa m_i y que las plantas sucesivas están conectadas por un conector elástico cuyo efecto se asemeja al de un muelle (los elementos estructurales de los grandes edificios son de acero, que es un material muy elástico). Supongamos que sucede un terremoto, que mueve el suelo según la función $f(t)$. Sigamos el siguiente dibujo esquemático:



Denotemos por x_i la coordenada sobre el eje de las abscisas del centro de la planta i-ésima. Por tanto, $x_0(t) = f(t)$. El desplazamiento horizontal de la planta i-ésima respecto de la $i+1$-ésima es $x_{i+1} - x_i$, por tanto la planta $i+1$-ésima "tira" horizontalmente de la planta i-ésima con una fuerza $k_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i)$. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{rcl} m_1 x_1'' & = & -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + k_1 f(t) \\ m_2 x_2'' & = & -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) \\ \cdots & = & \cdots \\ m_n x_n'' & = & -k_n \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{array}$$

Podemos escribirlo abreviadamente como $MX'' = KX + F(t)$, donde M y K son

[5] Tomado de [**?**].

las matrices

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -k_1-k_2 & k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_2 & -k_2-k_3 & k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3-k_4 & k_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_n & -k_n \end{pmatrix}$$

y $F(t)^t = (k_1 f(t), 0, \dots, 0)$. Escribamos $A = M^{-1}K$ (que es una matriz simétrica tridiagonal) y $G(t) = (\frac{k_1}{m_1} f(t), 0, \dots, 0)^t$, entonces

$$X'' = AX + G.$$

$A = P\Delta P^{-1}$, donde P es la matriz cuyas columnas son los autovectores de A y Δ es la matriz diagonal cuyos coeficientes de la diagonal son los autovalores de A. Entonces, $X'' = P\Delta P^{-1}X + G$, luego $(P^{-1}X)'' = \Delta(P^{-1}X) + P^{-1}G$. Si escribimos $Y = P^{-1}X$, entonces $Y'' = \Delta Y + P^{-1}G$ que es más fácil de resolver y $X = PY$.

Resolvamos un caso sencillo $n = 2$, $m_i = 5000\ kg$, $k_i = 10000\ kg/s^2$ para todo i y $f(t) = c \cdot \mathrm{sen}(wt)$.

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1'' &= -4x_1 + 2x_2 + 2c\,\mathrm{sen}(wt) \\ x_2'' &= 2x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, entonces $c_A(x) = (x+3+\sqrt{5})(x+3-\sqrt{5})$ y los autovectores son $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1)$, $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1)$. Sea $P = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = P^{-1}X$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{c\,\mathrm{sen}(wt)}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Una solución particular es $y_1 = \frac{2c}{\sqrt{5}(w^2-3-\sqrt{5})}\mathrm{sen}(wt)$ e $y_2 = \frac{c(1-\sqrt{5})}{\sqrt{5}(-w^2+3-\sqrt{5})}\mathrm{sen}(wt)$. Luego,

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1 \cdot \cos(\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot t) + \mu_1 \cdot \mathrm{sen}(\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot t) + \frac{2c}{\sqrt{5}(w^2-3-\sqrt{5})}\mathrm{sen}(wt) \\ y_2 &= \lambda_2 \cdot \cos(\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot t) + \mu_2 \cdot \mathrm{sen}(\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot t) + \frac{c(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}(w^2-3+\sqrt{5})}\mathrm{sen}(wt) \end{aligned}$$

Podemos suponer que $X = 0$ para $t = 0$, entonces $Y = 0$, para $t = 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Podemos suponer también que $X' = 0$ para $t = 0$, entonces $Y' = 0$, para $t = 0$, y obtenemos que $\mu_1 = \frac{-2cw}{\sqrt{5}(w^2-3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}}$ y $\mu_2 = \frac{-cw(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}(w^2-3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}$. Por último, $X = PY$.

Observemos que $w^2 = 3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}$ son valores críticos. Cuando el opuesto de algún valor propio de A esté muy próximo a w^2 el edificio corre grave riesgo de derrumbamiento en un terremoto.

4. Calcula la curva que describe un perro que persigue a un conejo que se mueve en línea recta, yendo ambos a velocidad constante.

Solución: Suponemos la trayectoria del conejo es $t \mapsto (0, at)$ y la del perro $t \mapsto (x(t), y(t))$, con $(x(0), y(0)) = (c, d)$ y $\sqrt{x'^2 + y'^2} = b$. Entonces,

$$(x', y') = (\frac{-xb}{\sqrt{x^2+(ta-y)^2}}, \frac{(ta-y)b}{\sqrt{x^2+(ta-y)^2}}).$$

Añadamos la ecuación, $z' = 1$, con $z(0) = 0$ (es decir, $z = t$). Tenemos que calcular las curvas integrales del campo de vectores

$$D = \frac{-xb}{\sqrt{x^2+(za-y)^2}} \cdot \partial_x + \frac{(za-y)b}{\sqrt{x^2+(za-y)^2}} \cdot \partial_y + \partial_t$$

y proyectarlas al plano xy. Consideremos el cambio coordenadas lineal $x = x, y = y, u = za - y$, entonces

$$D = \frac{-xb}{\sqrt{x^2+u^2}} \cdot \partial_x + \frac{ub}{\sqrt{x^2+u^2}} \cdot \partial_y + (a - \frac{ub}{\sqrt{x^2+u^2}})\partial_u.$$

Cuyas curvas integrales (no parametrizadas) coinciden con las de

$$E = \frac{-x}{u} \cdot \partial_x + \partial_y + (\frac{a\sqrt{x^2+u^2}}{ub} - 1) \cdot \partial_u$$

Consideremos el campo de vectores $F = \frac{-x}{u} \cdot \partial_x + (\frac{a\sqrt{x^2+u^2}}{ub} - 1) \cdot \partial_u$. Observemos que uF es invariante por el grupo uniparamétrico de las homotecias $(x, u) \mapsto (e^t x, e^t u)$, que en coordenadas $w = \ln x$, $v = \frac{u}{x}$, es igual ∂_w. Como $\partial_w^L uF = 0$, entonces $uF = f_1(v) \cdot \partial_v + f_2(v) \cdot \partial_w = g_1(v) \cdot (\partial_v + g_2(v) \cdot \partial_w)$. En estas coordenadas, $F = \frac{-1}{u}(\partial_w - \frac{a}{b}\sqrt{1+v^2}\partial_v)$. Un campo de vectores incidente es $dw + \frac{b}{a\sqrt{1+v^2}} dv$ que es nulo sobre las trayectorias de F, es decir,

$$w = cte - \int \frac{b}{a\sqrt{1+v^2}} dv = cte - \frac{b}{a} \ln(v + \sqrt{v^2+1}).$$

Como $w = \ln x$ y despejando v, obtenemos que

$$v = \frac{A}{2} x^{-\frac{a}{b}} - \frac{1}{2A} x^{\frac{a}{b}} \Rightarrow u = \frac{A}{2} x^{1-\frac{a}{b}} - \frac{1}{2A} x^{1+\frac{a}{b}}.$$

Por tanto, la curva (en las coordenadas x, u),

$$t \overset{\sigma}{\mapsto} (\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = (t + c, \frac{A}{2}(t+c)^{1-a/b} - \frac{1}{2A}(t+c)^{1+a/b})$$

es la curva integral parametrizada de $\frac{-u}{x}\cdot F = \partial_x + \frac{-a\sqrt{1+v^2}}{xb}\partial_u$ (que para $t=0$ pasa por $(c,-d)$). Luego, si $t \mapsto \tau(t)$ es la curvas integral parametrizada del campo de vectores F, entonces $\sigma(t) = \tau(f(t))$, donde $f'(t) = \frac{-\sigma_2(t)}{\sigma_1(t)} = \frac{A}{2}(t+c)^{-a/b} - \frac{1}{2A}(t+c)^{a/b}$ y

$$f(t) = \int_0^t \frac{A}{2}(s+c)^{-a/b} - \frac{1}{2A}(s+c)^{a/b}\, ds.$$

La curva integral de E en las coordenadas x, y, u es

$$s \mapsto (\tau_1(s), s+d, \tau_2(s)) = (\sigma_1(f^{-1}(s)), s+d, \sigma_2(f^{-1}(s))) = (f^{-1}(s)+c, s+d, \tau_2(s))$$

A lo largo de esta curva $y = s+d = f(x-c)+d = \int_0^{x-c} \frac{A}{2}(s+c)^{-a/b} - \frac{1}{2A}(s+c)^{a/b}\, ds = \int_c^x \frac{A}{2}(t)^{-a/b} - \frac{1}{2A}(t)^{a/b}\, dt.$

Capítulo 6

Variedades diferenciables

6.1. Variedades diferenciables

1. Definición: Un espacio topológico X se dice que es una variedad diferenciable de dimensión m si existe un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de X y homeomorfismos[1] $\phi_i\colon U_i \to V_i$ (V_i abierto de $\mathbb{R}^m$) de modo que los homeomorfismos

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}\colon \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

son aplicaciones diferenciables (entre abiertos de $\mathbb{R}^m$).

Si escribimos $\phi_i(p) = (p_1,\dots,p_m)$ se dice que las coordenadas de $p \in U_i$ (obtenidas por ϕ_i) son $(p_1,\dots,p_m)$ y con abuso de notación se escribe $p = (p_1,\dots,p_m)$. Si $p \in U_i \cap U_j$ y las coordenadas de p (por ϕ_j) son $(q_1,\dots,q_m)$, tenemos que $(q_1,\dots,q_m) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})(p_1,\dots,p_m)$. El lector, al pensar en la variedad X, debe identificar U_i con V_i. Debe pensar que un espacio topológico X es una variedad diferenciable si y solo si localmente es "igual" a abiertos de $\mathbb{R}^m$.

2. Ejemplo: Los abiertos de $\mathbb{R}^n$ son variedades diferenciables.

3. Ejemplo: Veamos que la esfera unidad $S^2 \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ es una variedad diferenciable de dimensión 2. Sea $U_i^+ = \{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in S^2\colon \alpha_i > 0\}$. Consideremos el homeomorfismo $\phi_1^+\colon U_1^+ \to V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 < 1\}$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \mapsto (\alpha_2,\alpha_3)$ y el homeomorfismo $\phi_2^+\colon U_2^+ \to V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 < 1\}$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \mapsto (\alpha_1,\alpha_3)$. No aburrimos al lector definiendo ϕ_3^+, U_i^- y ϕ_i^-. El homeomorfismo

$$\phi_2^+ \circ (\phi_1^+)^{-1}\colon \phi_1^+(U_1^+ \cap U_2^+) \to U_1^+ \cap U_2^+ \to \phi_2^+(U_1^+ \cap U_2^+)$$

es diferenciable, ya que $(\phi_2^+ \circ (\phi_1^+)^{-1})(x,y) = \phi_2^+(\sqrt{1-x^2-y^2},x,y) = (\sqrt{1-x^2-y^2},y)$. El lector, puede comprobar que $\{U_i^+,U_i^-,\phi_i^+,\phi_i^-\}_i$ es un atlas de S^2.

[1] Supondremos que I es un conjunto numerable. Diremos que $\{U_i,\phi_i\}_{i\in I}$ es un atlas de X.

Un abierto de una variedad diferenciable es variedad diferenciable: si $\{U_i,\phi_i\}$ es un atlas de X, entonces $\{U\cap U_i,\phi_{i|U\cap U_i}\}$ es un atlas de U.

4. Definición: Sea X una variedad diferenciable. Una aplicación continua $f\colon X\to\mathbb{R}$ entre variedades diferenciales, se dice que es diferenciable si localmente lo es. Con rigor y precisión, f se dice que es diferenciable si las composiciones

$$\begin{array}{ccc} V_i \overset{\phi_i^{-1}}{\simeq} U_i \overset{f_{|U_i}}{\to} & \mathbb{R} \\ (p_1,\dots,p_n) \quad \longmapsto & (f_{|U_i}\circ\phi_i^{-1})(p_1,\dots,p_n) \end{array}$$

son diferenciables.

Si $f\colon X\to\mathbb{R}$ es diferenciable y $U\subset X$ es un abierto, entonces $f_{|U}$ es diferenciable. Recíprocamente, dado un recubrimiento por abiertos $\{W_j\}$ de X, si $f_{|W_j}$ son diferenciables entonces f es diferenciable. Que una función sea diferenciable es un problema local (en todo punto).

Las funciones diferenciables son continuas, porque lo son localmente. La suma y producto de funciones diferenciables es diferenciable (como sabemos localmente) y denotaremos $\mathscr{C}^\infty(X)$ al anillo de todas las funciones diferenciables de X.

5. Ejemplo: Sea $U=\{(x,y,z)\in S^2\colon z\neq 0\}$. La función $f\colon U\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\frac{x+y}{z}$ es diferenciable.

6. Definición: Una aplicación continua entre variedades diferenciables $f\colon X\to X'$ se dice que es diferenciable si localmente lo es, es decir, si $\{U_i,\phi_i\}$ es un atlas de X y $\{U'_j,\phi'_j\}$ es un atlas de X', entonces las composiciones

$$\begin{tikzcd} \phi_i(U_i\cap f^{-1}(U'_j)) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\phi_i^{-1}"] & \phi'_j(U'_j) \\ U_i\cap f^{-1}(U'_j) \arrow[r, "f"'] & U'_j \arrow[u, "\phi'_j"'] \end{tikzcd}$$

son diferenciables. Diremos que f es un difeomorfismo si es biyectiva y la inversa es diferenciable.

Resulta que f es diferenciable si y solo si para toda función diferenciable $g\colon X'\to\mathbb{R}$, entonces $g\circ f\colon X\to\mathbb{R}$ es diferenciable, porque así sucede localmente. La composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable, porque basta verlo localmente.

Si $\{U_i,\phi_i\}$ es un atlas de X, entonces $\phi_i\colon U_i\to\phi_i(U_i)$ es un difeomorfismo.

La aplicación diferenciable $f\colon X\to X'$ induce el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$f^*\colon\mathscr{C}^\infty(X')\to\mathscr{C}^\infty(X),\;\; f^*(g)=g\circ f.$$

Si f es un difeomorfismo entonces f^* es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

6.1.1. Función machacona

La función $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x\leq 0. \\ e^{-x^{-2}}, & \text{si } x>0 \end{cases}$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y $f\geq 0$. La función, $g(x):=f(x)\cdot f(-x+1)$, que es una función positiva no nula pues $g(1/2)\neq 0$, cumple que $g(x)=0$ para todo $x\notin(0,1)$. Sea $M=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot dx$. Entonces, la función de clase $\mathcal{C}^\infty$,

$$h(x):=\frac{\int_{-\infty}^{x} g(t)\cdot dt}{M}$$

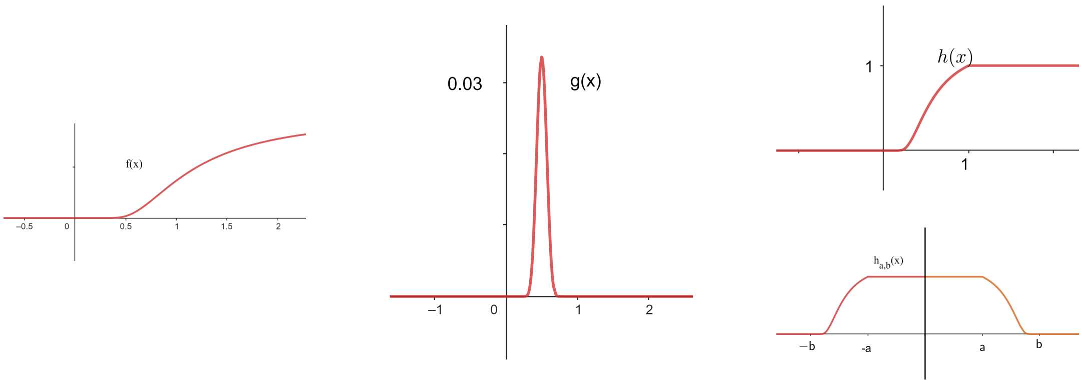
cumple que $h(x)=0$ si $x\leq 0$, $h(x)=1$ si $x\geq 1$ y $0\leq h(x)\leq 1$. Sea $0<a<b$, es fácil construir una función $h_{a,b}(x)$, tal que $h_{a,b}(x)=0$ si $x\notin(-b,b)$, $h_{a,b}(x)=1$ si $x\in(-a,a)$ y $0\leq h_{a,b}(x)\leq 1$. En efecto,

$$h_{a,b}(x)=\begin{cases} h(\frac{x+b}{b-a}), & \text{si } x\leq 0 \\ h(\frac{-x+b}{b-a}), & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Dado $y\in\mathbb{R}^n$, la función

$$H_{y,\epsilon}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ H_{y,\epsilon}(x):=h_{\epsilon/2,\epsilon}(||x-y||^2),$$

cumple que $H_{y,\epsilon}(x)=0$ si $x\notin B(y,\epsilon)$, $H_{y,\epsilon}(x)=1$ si $x\in B(y,\epsilon/2)$ y $0\leq H_{y,\epsilon}(x)\leq 1$.



7. Definición: Sea X una variedad diferenciable. Diremos que $U\subset X$ es un abierto coordenado si es difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Dado $y\in X$, consideremos un entorno coordenado U de y, y sea $V\subset\mathbb{R}^n$ un abierto y $\phi\colon U\to V$ un difeomorfismo. Sea $\epsilon>0$ tal que $\overline{B(\phi(y),\epsilon)}\subset V$ y consideremos la función $H_{\phi(y),\epsilon}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Entonces, la función $H\in\mathcal{C}^\infty(X)$ definida por

$$H(u):=\begin{cases} H_{\phi(x),\epsilon}(\phi(u)), & \text{si } u\in U. \\ 0, & \text{si } u\notin U. \end{cases}$$

cumple que $0\leq H\leq 1$, $H=1$ en un entorno abierto de x y tiene soporte compacto incluido en U.

8. Definición: Diremos que una función $h\in\mathcal{C}^\infty(X)$ es una función machacona en $x\in X$, si $0\leq h\leq 1$, $h=1$ en un entorno abierto de x y $\mathrm{sop}(h)$ es compacto.

6.1.2. Diferenciales y derivaciones en un punto

9. Definición: Sea $\mathfrak{m}_\alpha \subset \mathscr{C}^\infty(X)$ el ideal de funciones que se anulan en $\alpha \in X$. Llamaremos módulo de diferenciales en α, al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$. Diremos que la aplicación

$$d_\alpha \colon \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2,\ \ d_\alpha f := \overline{f - f(\alpha)}$$

es la diferencial en α.

10. Observación: Si $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ se anula en un entorno V de α, entonces $f \in \mathfrak{m}_\alpha^n$, para todo n. En efecto sea $h \in \mathscr{C}^\infty(X)$ una función machacona en α con soporte incluido en V. Entonces, $f = (1-h)^n \cdot f \in \mathfrak{m}_\alpha^n$. Por tanto, si f y g son iguales en un entorno de α, entonces $d_\alpha f = d_\alpha g$.

11. Observación: 1. Si $U \subset X$ es un entorno abierto de α en X y $\mathfrak{m}_{U,\alpha}$ es el ideal de funciones de $\mathscr{C}^\infty(U)$ que se anulan en α, entonces el morfismo

$$\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \to \mathfrak{m}_{U,\alpha}/\mathfrak{m}_{U,\alpha}^2,\ \ \bar{f} \mapsto \overline{f_{|U}}$$

es un isomorfismo: el morfismo $\mathfrak{m}_{U,\alpha}/\mathfrak{m}_{U,\alpha}^2 \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, $\bar{g} \mapsto \bar{f}$, donde $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ es cualquier función que coincida con g en un entorno abierto de α, está bien definido y es el morfismo inverso buscado.

Con mayor generalidad, el morfismo $\mathscr{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_\alpha^n \to \mathscr{C}^\infty(U)/\mathfrak{m}_{U,\alpha}^n$, $\bar{f} \mapsto \overline{f_{|U}}$ es un isomorfismo.

2. Consideremos $\mathbb{R} = \mathscr{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_\alpha$ como $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo. Entonces,

$$\mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(X),\mathbb{R}) = \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_\alpha^2,\mathbb{R})) = \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(U)/\mathfrak{m}_{U,\alpha}^2,\mathbb{R}) = \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R}).$$

Explícitamente, a $D_\alpha \in \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(X),\mathbb{R})$ le asignamos $\tilde{D}_\alpha \in \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R})$ definida por $\tilde{D}_\alpha(f) = D_\alpha(F)$, donde F es cualquier función de X que coincida con f en un entorno de α. Recíprocamente, a $D_\alpha \in \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(U),\mathbb{R})$ le asignamos $\tilde{D}_\alpha \in \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(X),\mathbb{R})$, definida por $\tilde{D}_\alpha(f) = D_\alpha(f_{|U})$.

12. Proposición: *La diferencial $d_\alpha \colon \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ es una derivación y tenemos el isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal*

$$\begin{array}{rcl} (\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^* & \longleftrightarrow & \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathscr{C}^\infty(X),\mathbb{R}) \\ w & \longmapsto & w \circ d_\alpha \\ \tilde{D}_\alpha(d_\alpha f) := D_\alpha(f),\quad \tilde{D}_\alpha & \longleftarrow & D_\alpha \end{array}$$

Demostración. Podemos suponer que X es un abierto coordenado. En este caso la proposición es consecuencia de 5.3.3.

□

13. Notación: Denotaremos $T_\alpha X = (\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^* = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(X),\mathbb{R})$ y diremos que es el espacio tangente a X en α. Denotaremos $T^*_\alpha X = \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2)^*$ y diremos que es el espacio cotangente a X en α.

Dada una aplicación diferenciable $F\colon X \to X'$, tenemos el morfismo inducido entre los anillos de funciones diferenciables $F^*\colon \mathscr{C}^\infty(X') \to \mathscr{C}^\infty(X)$, $g \mapsto g\circ F$, que induce el morfismo

$$F^*_\alpha\colon T^*_{F(\alpha}X' = \mathfrak{m}_{F(\alpha)}/\mathfrak{m}^2_{F(\alpha)} \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 = T^*_\alpha X,\ \ d_{F(\alpha)}g \mapsto d_\alpha(g\circ F)$$

e induce el morfismo

$$F_{*,\alpha}\colon T_\alpha X \to T_{F(\alpha)}X',\ D_\alpha \mapsto D_\alpha \circ F^*,$$

que es el morfismo dual de F^*_α.

Sea U un entorno coordenado de α por las funciones $f_1,\dots,f_n$. Tenemos pues el difeomorfismo $F\colon U \to f(U)$, $F(p) = (f_1(p),\dots,f_n(p))$. Por tanto, los isomorfismos

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}^\infty(f(U)) & \simeq & \mathscr{C}^\infty(U) \\ x_i & \mapsto & f_i \\ h(x_1,\dots,x_n) & \mapsto & h(f_1,\dots,f_n) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathfrak{m}_{F(\alpha)}/\mathfrak{m}^2_{F(\alpha)} & \simeq & \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \\ d_{F(\alpha)}x_i & \mapsto & d_\alpha f_i \\ d_{F(\alpha)}h(x) & \mapsto & d_\alpha(h\circ F) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} T_\alpha U & \simeq & T_{F(\alpha)}f(U) \\ (\frac{\partial}{\partial f_i})_\alpha & \mapsto & (\frac{\partial}{\partial x_i})_{F(\alpha)} \end{array}$$

donde $\frac{\partial(h\circ F)}{\partial f_i}(\alpha) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(F(\alpha))$. El lector puede comprobar que dado $D_\alpha \in T_\alpha X$, tenemos que $D_\alpha = \sum_i D_\alpha(f_i)\cdot(\frac{\partial}{\partial f_i})_\alpha$ y

$$d_\alpha(h\circ F) = \sum_i \frac{\partial(h\circ F)}{\partial f_i}(\alpha)\cdot d_\alpha f_i$$

Si $F\colon X \to X'$ es una aplicación diferenciable $x_1,\dots,x_n$ es un sistema de coordenadas en $\alpha \in X$ y $x'_1,\dots,x'_m$ es un sistema de coordenadas en $F(\alpha)\in X'$. Tenemos

$$\begin{array}{rcl} T^*_{F(\alpha)} & \overset{F^*_\alpha}{\to} & T^*_\alpha \\ d_{F(\alpha)}g & \mapsto & \sum_i \frac{\partial(g\circ F)}{\partial x_i}\cdot d_\alpha x_i \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} T_\alpha X & \overset{F_{*,\alpha}}{\to} & T_{F(\alpha)}X' \\ (\frac{\partial}{\partial x_i})_\alpha & \mapsto & \sum_j \frac{\partial(x'_j\circ F)}{\partial x_i}(\alpha)\cdot(\frac{\partial}{\partial x'_j})_{F(\alpha)} \end{array}$$

6.1.3. Coordenadas. Subvariedades diferenciables

14. Definición: Sea X una variedad diferenciable. Diremos que $f_1,\dots,f_n \in \mathscr{C}^\infty(X)$ son un sistema de coordenadas en $\alpha \in X$, si existe un entorno abierto U de α, tal que la aplicación $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$ cumple que $f(U)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$ y f es un difeomorfismo de U con $f(U)$.

15. Proposición: *Las funciones $f_1,\dots,f_n \in \mathscr{C}^\infty(X)$ son un sistema de coordenadas en $\alpha \in X$ si y solo si $d_\alpha f_1,\dots,d_\alpha f_n$ es una base de $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$.*

Demostración. $\Rightarrow$) El difeomorfismo $f: U \to f(U)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ induce el isomorfismo

$$f_\alpha^*: \mathfrak{m}_{f(\alpha)}/\mathfrak{m}_{f(\alpha)}^2 \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2.$$

Por la proposición 5.3.2, $d_{f(\alpha)}x_1, \dots, d_{f(\alpha)}x_n$ es una base de $\mathfrak{m}_{f(\alpha)}/\mathfrak{m}_{f(\alpha)}^2$. Por tanto,

$$f_\alpha^* d_{f(\alpha)}x_1 = d_\alpha f_1, \dots, f_\alpha^* d_{f(\alpha)}x_n = d_\alpha f_n$$

es una base de $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$.

$\Leftarrow$) La aplicación diferenciable $f: X \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ induce el morfismo

$$f_\alpha^*: \mathfrak{m}_{f(\alpha)}/\mathfrak{m}_{f(\alpha)}^2 \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2,$$

que es isomorfismo, porque aplica la base $d_{f(\alpha)}x_1, \dots, d_{f(\alpha)}x_n$ en la base $d_\alpha f_1, \dots, d_\alpha f_n$. Sea U un abierto coordenado de α, por un difeomorfismo $\phi: U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Tenemos que $(f \circ \phi^{-1})_{\phi(\alpha)}^*: \mathfrak{m}_{f(\alpha)}/\mathfrak{m}_{f(\alpha^2)} \to \mathfrak{m}_{\phi(\alpha)}/\mathfrak{m}_{\phi(\alpha)}^2$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa $f \circ \phi^{-1}$ es un difeomorfismo de un entorno de $\phi(\alpha)$ con un entorno de $f(\alpha)$. Por tanto, f es un difeomorfismo de un entorno de α con un entorno de $f(\alpha)$. □

16. Definición: Diremos que un subespacio $Y \subset X$ de una variedad diferenciable, es una subvariedad diferenciable (de codimensión r) si para cada $y \in Y$ existe un entorno U_y de y, coordenado por unas funciones $f_1, \dots, f_n$ de modo que $Y \cap U_y = \{p \in U_y : f_1(p) = \cdots = f_r(p) = 0\}$.

17. Equivalentemente, un subespacio $Y \subset X$ de una variedad diferenciable, es una subvariedad diferenciable (de codimensión r) si y solo si para cada $y \in Y$ existen r-funciones $f_1, \dots, f_r$ y un entorno U_y de y, de modo que $d_y f_1, \dots, d_y f_r$ son linealmente independientes y $Y \cap U_y = \{p \in U_y : f_1(p) = \cdots = f_r(p) = 0\}$.

18. Ejemplo: La esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^3$.

19. Proposición: *Las subvariedades diferenciables son variedades diferenciables.*

Demostración. Sigamos notaciones previas. $Y \cap U_y$ está coordenado por las funciones $f_{r+1}, \dots, f_n$ (restringidas a $Y \cap U_y$): Consideremos el difeomorfismo

$$f = (f_1, \dots, f_n): U_y \to f(U_y) \subset \mathbb{R}^n.$$

Dado un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$, denotemos $[V]_{n-r} := \{y \in \mathbb{R}^{n-r} : (0, \overset{r}{\cdots}, 0, y) \in V\}$. Tenemos el homeomorfismo $Y \cap U_y \to [f(U_y)]_{n-r})$, $x \mapsto (f_{r+1}(x), \dots, f_n(x))$. Dado otro punto

$y' \in Y$, un entorno $U_{y'}$ coordenado por funciones $g_1, \dots, g_n$ de modo que $Y \cap U_{y'} = \{x \in U_{y'} \colon g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f(U_y \cap U_{y'}) \arrow[r, equal, "f^{-1}"] & U_y \cap U_{y'} \arrow[r, equal, "g"] & g(U_y \cap U_{y'}) \\
{[f(U_y \cap U_{y'})]_{n-r}} \arrow[r, equal] \arrow[u, hook] & Y \cap U_y \cap U_{y'} \arrow[r, equal] \arrow[u, hook] & {[g(U_y \cap U_{y'})]_{n-r}} \arrow[u, hook] \\
(0,x) \arrow[r, mapsto] & (0,(g\circ f^{-1})_{r+1}(0,,x),\dots,(g\circ f^{-1})_n(0,x)) & \\
x \arrow[u, mapsto] \arrow[r, dashed, mapsto] & ((g\circ f^{-1})_{r+1}(0,,x),\dots,(g\circ f^{-1})_n(0,x)) \arrow[u, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

que muestra que la composición de los morfismos horizontales inferiores es un difeomorfismo porque lo es $g \circ f^{-1}$. □

Obviamente, el morfismo de inclusión $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ es diferenciable. El morfismo inducido

$$i^* \colon \mathfrak{m}_{X,y}/\mathfrak{m}^2_{X,y} \to \mathfrak{m}_{Y,y}/\mathfrak{m}^2_{Y,y}, \; d_y h \mapsto d_y h_{|Y}$$

es epiyectivo y su núcleo es $\langle d_y f_1, \dots, d_y f_r \rangle$. Es decir,,

$$d_y h_{|Y} = 0 \text{ si y solo si } d_y h \in \langle d_y f_1, \dots, d_y f_r \rangle.$$

Tenemos que $T^*_y Y = T^*_y X / \langle d_y f_1, \dots, d_y f_r \rangle$. Dualmente,

$$T_y Y = \{D_y \in T_y X \colon D_y(f_1) = \cdot = D_y(f_r) = 0\}.$$

20. Multiplicadores de Lagrange. Máximos condicionados Dada $h \in \mathscr{C}^\infty(X)$, si $y \in Y$ cumple que existe un entorno de U de y de modo que $h(y) = \text{máx}\{h(y'); \forall\, y' \in Y \cap U\}$ entonces esto es equivalente a decir que $h_{|Y}$ alcanza un máximo local en y, luego $d_y h_{|Y} = 0$, luego $d_y h \in \langle d_y f_1, \dots, d_y f_r \rangle$.

Supongamos que $x_1, \dots, x_n$ es un sistema de coordenadas de X en y. Reordenando las coordenadas si es preciso, podemos suponer que $f_1, \dots, f_r, f_{r+1} := x_{r+1}, \dots, f_n := x_n$ es también un sistema de coordenadas en y. Entonces, $f_{r+1}, \dots, f_n$ (restringidas a Y) es un sistema de coordenadas de Y en y. Si $d_y h_{|Y} = 0$ y la matriz

$$\Big(\frac{\partial^2 h_{|Y}}{\partial f_{r+i} \partial f_{r+j}}(y)\Big) = \Big(\frac{\partial^2 h}{\partial f_{r+i} \partial f_{r+j}}(y)\Big)$$

es definida negativa, entonces y es un máximo local de $h_{|Y}$. Tenemos que calcular $\frac{\partial}{\partial f_{r+i}}$. Consideremos el morfismo $\mathrm{Id} \colon X \to X$ y las coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ en X y $\{f_1, \dots, f_n\}$ en X. Tenemos que

$$\mathrm{Id}_* = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}, \quad A = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)_{i,j \le r}, \; B = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)_{i \le r, j > r}$$

Entonces, $\mathrm{Id}_*^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$ y tendremos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial f_{r+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial f_n} \end{pmatrix} = -(A^{-1}B)^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{r+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

6.1.4. Particiones de la unidad

21. Teorema : *Sea X una variedad diferenciable y $K \subset X$ un compacto. Existe $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$, tal que $f_{|K} = 1$, $0 \le f \le 1$ y $\mathrm{sop}(f)$ es compacto.*

Demostración. Para cada $y \in K$ consideremos una función machacona en y, H_y . Por ser K compacto, existe un número finito de puntos $y_1, \dots, y_m \in K$ de modo que $K \subset \cup_i \{x \in X : H_{y_i}(x) = 1\}$. $H \ge 1$ en K y es de soporte compacto.

La función, $f = h \circ H$ (donde h es la función que aparece en 6.1.1) cumple las condiciones requeridas.

□

22. Proposición: *Sea X una variedad diferenciable, $K \subset X$ un compacto y $\{U_1, \dots, U_m\}$ abiertos de X tales que $K \subset \cup_i U_i$. Existen funciones $\phi_1, \dots, \phi_m \in \mathscr{C}^\infty(X)$, tales que*

1. $0 \le \phi_i \le 1$ *y* $\mathrm{sop}(\phi_i) \subset U_i$.
2. *Para todo $x \in K$, $\sum_i \phi_i(x) = 1$.*

Demostración. Cada $x \in K$ pertenece a un abierto $U_{\sigma(x)}$ $(1 \le \sigma(x) \le m)$ y existe una función machacona en x, h_x , cuyo soporte (compacto) está incluido en $U_{\sigma(x)}$. Existen $x_1, \dots, x_r \in K$ tales que $K \subset \cup_i \{x \in X : h_{x_i}(x) = 1\}$. Sea $U = \cup_i \{x \in X : h_{x_i}(x) > 0\}$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$, tal que $f_{|K} = 1$, $0 \le f \le 1$ y $\mathrm{sop}(f)$ es compacto. Entonces, las funciones

$$\phi_i := \begin{cases} f(x) \cdot \dfrac{\sum\limits_{\sigma(x_j)=i} h_{x_j}(x)}{\sum_j h_{x_j}(x)}, & \text{si } x \in U. \\ 0, & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

son las funciones requeridas. □

23. Definición: Sea X una variedad diferenciable y $\{U_i\}$ es un recubrimiento por abiertos de X. Diremos que una familia de funciones $\{\phi_i : X \to \mathbb{R}\}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ es una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_i\}$ si cumplen

1. $0 \le \phi_i$ y $\mathrm{sop}(\phi_i) \subset U_i$.

2. Para cada $x \in X$, existe un entorno abierto W de x, tal que $W \cap \operatorname{sop}(\phi_j) \neq \emptyset$ solo para un número finito de ϕ_j.

3. Para todo $x \in X$, $\sum_i \phi_i(x) = 1$.

24. Lema: *Sea X una variedad diferenciable. Existen compactos $\{K_m \subset X\}_{m\in\mathbb{N}}$ tales que $K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$ y $X = \cup_m K_m$.*

Demostración. $X = \cup_{m\in\mathbb{N}} U_m$, donde cada U_m es un abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Identifiquemos U_m con dicho abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $K_{mr} = \{x \in U_m : d(x, \partial U) \geq \frac{1}{r}$ y $d(x,0) \leq r\}$. Observemos que K_{mr} es compacto porque es cerrado y acotado, que $K_{mr} \subset \overset{\circ}{K}_{m(r+1)}$ y que $\cup_{r=1}^{\infty} K_{mr} = U_m$. Sea $\{K_r := \cup_{i=1}^{r} K_{ir}\}$ es la familia de compactos requerida. □

25. Teorema: *Todo recubrimiento $\{U_i\}$ de X por abiertos admite una partición de la unidad subordinada al recubrimiento.*

Demostración. Sea $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una familia de compactos de X, tal que $K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$ y $\cup_{m=1}^{\infty} K_m = X$. Sea $C_r = K_r - \overset{\circ}{K}_{r-1}$ que es compacto, porque es un cerrado de K_r, y $\cup_r C_r = X$. Sea $V_r = \overset{\circ}{K}_{r+1} - K_{r-1}$, que es abierto, $C_r \subset V_r$ y $V_r \cap V_s = \emptyset$, para todo $s \neq r+1, r, r-1$.

Para cada compacto $C_r \subset V_r$, existen un número finito de funciones $\phi'_{r,i} \in \mathscr{C}^\infty(V_r)$[2], tales que

1. $0 \leq \phi'_{r,i} \leq 1$ y $\operatorname{sop}(\phi'_{r,i}) \subset U_i \cap V_r$.

2. Para todo $x \in C_r$, $\sum_i \phi'_{r,i}(x) = 1$.

Entonces, la familia de funciones $\phi_i := \frac{\sum_r \phi'_{r,i}}{\sum_{s,k} \phi'_{s,k}} \in \mathscr{C}^\infty(X)$ es la partición de la unidad requerida. □

6.1.5. Teorema de inmersión de Whitney

26. Definición: Sea $\phi\colon Y \to X$ una aplicación diferenciable entre dos variedades. Se dice que ϕ es una inmersión local en $y \in Y$ si la aplicación lineal tangente en y es inyectiva.

[2] Extendidas por cero fuera de V_r podemos suponer que $\phi'_{r,i} \in \mathscr{C}^\infty(X)$.

Obviamente ϕ es una inmersión local en y si y solo si la aplicación lineal cotangente $\phi^*\colon \mathfrak{m}_{\phi(y)}/\mathfrak{m}^2_{\phi(y)} \to \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}^2_y$ es epiyectiva. En este caso, si $d_{\phi(y)}x_1,\dots,d_{\phi(y)}x_n$ es una base de $\mathfrak{m}_{\phi(y)}/\mathfrak{m}^2_{\phi(y)}$, reordenando la base, podemos suponer que $d_y(x_1\circ\phi),\dots,d_y(x_r\circ\phi)$ es una base de $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}^2_y$. Sea V un entorno abierto de y en el que $y_1 = x_1\circ\phi,\dots,y_r = x_r\circ\phi$ sean un sistema de coordenadas. Por tanto, para $j > r$, $x_j\circ\phi = f_j(x_1\circ\phi,\dots,x_r\circ\phi)$, para ciertas funciones diferenciables f_j. Las funciones $z_1 = x_1,\dots,z_r = x_r, z_{r+1} = x_{r+1} - f_{r+1}(x_1,\dots,x_r),\dots,z_n = x_n - f_n(x_1,\dots,x_r)$ son un sistema de coordenadas en un entorno U de $\phi(y)$. Reduciendo V si es preciso para que $\phi(V)\subset U$, tenemos

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & V,\{x_1,\dots,x_r\} & \to & U,\{z_1,\dots,z_n\} \\ & p=(p_1,\dots,p_r) & \mapsto & \phi(p)=(p_1,\dots,p_r,0,\dots,0) \end{array}$$

Recíprocamente, si existen sistemas de coordenadas en los que ϕ se expresa de este modo entonces ϕ es una inmersión local.

27. Definición: Sea $\phi\colon Y\to X$ una aplicación diferenciable entre dos variedades. Se dice que ϕ es una inmersión si ϕ es inyectiva e inmersión local an cada punto.

A pesar del nombre, puede ocurrir que la imagen de Y no se identifica con una subvariedad de X, como sucede con el “ocho” en el plano, parametrizado convenientemente. Ahora bien, si además $\phi\colon Y\to\phi(Y)$ es un homeomorfismo entonces $\phi(Y)$ es una subvariedad diferenciable de X y además $\phi\colon Y\to\phi(Y)$ es un difeomorfismo.

28. Observación: Si Y es compacta, entonces $\phi\colon Y\to\phi(Y)$ es un homeomorfismo, y, por tanto, $\phi(Y)$ es una subvariedad de X.

Sea X una variedad diferenciable compacta. Queremos encontrar una inmersión

$$\phi = (f_1,\dots,f_m)\colon X\to\mathbb{R}^m,$$

de modo que tendremos identificada la variedad X con una subvariedad de $\mathbb{R}^m$.

29. Proposición: *Sea $\phi=(f_1,\dots,f_m)\colon X\to\mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Entonces, ϕ es una inmersión si y solo si las funciones $f_1,\dots,f_m$ separan puntos de X y separan vectores tangentes de X.*

(Separan puntos si, para cualesquiera $x,x'\in X$ entonces $f_i(x)=f_i(x')$ para todo i, si y solo si $x=x'$. Separan vectores tangentes si, para todo punto $x\in X$ y todo par de vectores tangentes $D_x,D'_x\in T_xX$ se cumple que si $d_xf_i(D_x)=d_xf_i(D'_x)$, para todo i, entonces $D_x=D'_x$).

Demostración. Que separe puntos equivale a que ϕ sea inyectiva. Que separe vectores tangentes equivale a que la aplicación lineal tangente sea inyectiva en todo punto. □

30. Teorema de inmersión en el caso compacto: *Toda variedad diferenciable compacta es difeomorfa a una subvariedad diferenciable de algún $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Buscamos funciones $f_1,\dots,f_m$ que separen puntos y separen vectores tangentes.

Sea $U_1,\dots,U_r$ un recubrimiento finito por abiertos coordenados de X y $\{u_{i1},\dots,u_{in}\}$ el sistema de coordenadas en U_i. Sea $\{f_1,\dots,f_r\}\subset\mathscr{C}^\infty(X)$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento ($\operatorname{sop} f_i\subset U_i$, $\sum_i f_i=1$). Consideremos ahora la siguiente colección de funciones $\{f_i,f_i\cdot u_{ik}\}_{i,k}$, todas definidas en X, si extendemos $f_i\cdot u_{ik}$ por cero fuera del abierto U_i.

Comprobemos que esta colección separa puntos y vectores tangentes, y con ello habremos acabado la demostración.

Separan puntos: dados dos puntos $x,x'\in X$, para algún j se cumple $f_j(x)\neq 0$. Si $0\neq f_j(x)=f_j(x')$ entonces $x,x'\in U_j$. Ahora ya, si $f_j(x)\cdot u_{jk}(x)=f_j(x')\cdot u_{jk}(x')$ para todo k, entonces $u_{jk}(x)=u_{jk}(x')$ y $x=x'$.

Separan vectores tangentes: Dados dos vectores tangentes $D_x,D'_x\in T_xX$, existe i tal que $f_i(x)\neq 0$. Si $d_xf_i(D_x)=d_xf_i(D'_x)$ y $d_x(f_i\cdot u_{ik})(D_x)=d_x(f_i\cdot u_{ik})(D'_x)$ para todo k, entonces $f_i(x)d_xu_{ik}(D_x)=f_i(x)d_xu_{ik}(D'_x)$ para todo k. Por tanto, $d_xu_{ik}(D_x)=d_xu_{ik}(D'_x)$ para todo k y $D_x=D'_x$.

□

6.2. El anillo $\mathscr{C}^\infty(X)$

6.2.1. Completitud

Si (X,d) es un espacio métrico y $d'=\text{mín}\{1,d\}$, entonces la topología definida por d es la misma que la definida por d', y $d'\leq 1$.

Sean ahora dos distancias d_1,d_2 en X y consideremos en X la topología menos fina que contenga a las topologías definidas por d_1 y d_2, que es justamente la topología definida por d_1+d_2. Como la topología definida por una distancia d es la misma que la definida por $\lambda\cdot d$, $\lambda>0$, entonces la topología definida por d_1+d_2 es la misma que la definida por $\lambda_1\cdot d_1+\lambda_2\cdot d_2$, $\lambda_1,\lambda_2>0$.

Sea ahora un conjunto numerable $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de distancias en X. La topología menos fina que contiene a las topologías definidas por todos los d_i coincide con la topología definida por la distancia $d:=\sum_i\frac{1}{2^i}\cdot\text{mín}\{1,d_i\}$.

Sea X una variedad diferenciable y $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ compactos incluidos en abiertos coordenados U_i de X tales que $\cup_i\overset{\circ}{K}_i=X$. Sea $\{x_1,\dots,x_n\}$ un sistema de coordenadas de U_i. Consideremos la pseudodistancia en $\mathscr{C}^k(X)$

$$d^k_{K_i}\colon\mathscr{C}^k(X)\times\mathscr{C}^k(X)\to\mathbb{R},\ d^k_{K_i}(f,g):=\text{máx}\{|D^\alpha(f-g)(x)|,\ |\alpha|\leq k, x\in K_i\},$$

donde $D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}\cdots\partial^{\alpha_n}_{x_n}}$ y $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. Si $\{y_1,\dots,y_n\}$ es otro sistema de coordenadas en U_i y denotamos $\bar d^k_{K_i}\colon\mathscr{C}^k(X)\times\mathscr{C}^k(X)\to\mathbb{R}$, $\bar d^k_{K_i}(f,g):=\text{máx}\{|\bar D^\alpha(f-g)(x)|,\ |\alpha|\leq k, x\in$

$K_i\}$, donde $\bar{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{y_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{y_n}^{\alpha_n}}$ entonces existen $0<\lambda<\mu$ tales que $\lambda\cdot\bar{d}^k_{K_i} < d^k_{K_i} < \mu\cdot\bar{d}^k_{K_i}$. Por tanto, ambas pseudométricas definen la misma topología.

Consideremos en $\mathscr{C}^k(X)$ la topología menos fina que contiene a las topologías definidas por las (pseudo)distancias $d^k_{K_i}$, para todo compacto K_i. Esta topología es igual a la topología definida por la distancia

$$d^k = \sum_i \frac{1}{2^i}\cdot \text{mín}\{1, d^k_{K_i}\}$$

Si en $\mathscr{C}^\infty(X)$ consideramos la topología menos fina que contiene a las topologías definidas por las distancias $d^k_{K_i}$, para todo compacto K_i y $k\in\mathbb{N}$, entonces esta topología coincide con la topología definida por

$$d = \sum_i \frac{1}{2^i}\cdot d^i$$

Expresemos de modo más simple la topología. Una base de entornos abiertos de la función $0\in\mathscr{C}^k(X)$ (con $k\leq\infty$), son las intersecciones de un número finito de "bolas"

$$B(K_i,\alpha,\epsilon) := \{f\in\mathscr{C}^k(X)\colon |D^\alpha f(x)|<\epsilon,\ \ \forall\, x\in K_i\}$$

variando el compacto K_i, $\epsilon = \frac{1}{n}$ y α (con $|\alpha|<k+1$). Una base de entornos de $f\in\mathscr{C}^k(X)$ son las intersecciones de un número finito de bolas $B(f,K_i,\alpha,\epsilon) = \{g\in\mathscr{C}^k(X)\colon g-f\in B(K_i,\alpha,\epsilon)\}$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ será de Cauchy si y solo si para cada $B(K_i,\alpha,\epsilon)$ existe n tal que $f_m - f_n\in B(K_i,\alpha,\epsilon)$ para todo $m\geq n$. Luego, $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy si y solo si $\{(D^\alpha f_n)_{|K_i}\}$ es de Cauchy, para cada K_i y α (con $|\alpha|<k+1$). Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge a f si y solo si $\{(D^\alpha f_n)_{|K_i}\}$ converge uniformemente a $(D^\alpha f)_{|K_i}$, para cada K_i y α (con $|\alpha|<k+1$).

1. Teorema: *$\mathscr{C}^k(X)$ es un espacio métrico completo para toda $0\leq k\leq\infty$.*

Demostración. Sea $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy.

Supongamos $k=0$. Para cada compacto K_i, la sucesión $\{f_{m|K}\}$ es de Cauchy. Por el teorema 2.3.59, converge a la función f_{K_i}, donde $f_{K_i}(x) := \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$, para cada $x\in K$. Por tanto, la sucesión $\{f_m\}$ converge a la función f, donde $f(x) := \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$.

Supongamos $k>0$. Para todo α con $|\alpha|\leq K_i$, $\{D^\alpha f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de Cauchy. Sean $f^\alpha\in\mathscr{C}^0(X)$ el límite de la sucesión $\{D^\alpha f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Basta probar que $D^\alpha f^0$ existe y coincide con f^α para todo α, con $|\alpha|\leq k$. Si $\alpha = (\beta_1,\dots,\beta_j+1,\dots,\beta_n)$, basta probar que $\frac{\partial f^\beta}{\partial x_j} = f^\alpha$. Es un problema local, podemos restringirnos a un abierto de cierre compacto. Estamos en las condiciones de 3.6.22 y hemos terminado.

□

6.2.2. Localización

2. Teorema: *Sea X una variedad diferenciable y $U \subseteq X$ un abierto. El morfismo*

$$\mathscr{C}^\infty(X)_U \to \mathscr{C}^\infty(U),\ \ \frac{f}{g} \mapsto f_{|U} \cdot g^{-1}_{|U}.$$

es un isomorfismo, donde $\mathscr{C}^\infty(X)_U := \mathscr{C}^\infty(X)_S$, y S es el conjunto de las funciones de X que no se anulan en ningún punto de U.

Demostración. Sean $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (difeomorfos a) bolas cerradas incluidas en U tales que $U = \cup_i \overset{\circ}{B}_i$. Sean $\phi_i \in \mathscr{C}^\infty(X)$ positivas en $\overset{\circ}{B}_i$ y nulas sobre $X - \overset{\circ}{B}_i$ Dada $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ sea

$$\lambda_k = \text{máx}\{d^k_{K_i}(f\phi_k, 0),\ \forall\ i \le k\}\ \text{ y }\ \mu_k = \text{máx}\{d^k_{K_i}(\phi_k, 0),\ \forall\ i \le k\}.$$

Las series

$$g = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i}\frac{f\phi_i}{1+\lambda_i+\mu_i};\qquad h = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i}\frac{\phi_i}{1+\lambda_i+\mu_i}$$

son funciones diferenciables, por el teorema anterior. Es evidente que $f = g/h$.

□

3. Observación: La función h construida en la primera parte de la demostración es positiva sobre U y nula en el complementario. Por tanto, todo cerrado de una variedad son los ceros de una función diferenciable.

Igualmente se puede probar que $\mathscr{C}^k(U) = \mathscr{C}^k(X)_U$.

4. Definición: Sea X una variedad diferenciable y $x \in X$. Dadas $f, g \in \mathscr{C}^\infty(X)$ que $f \sim g$ si existe un entorno abierto U de x, tal que $f_{|U} = g_{|U}$. Llamaremos anillo de gérmenes de funciones diferenciales en x a $\mathscr{C}^\infty_x(X) = \mathscr{C}^\infty(X)/\sim$ y a la clase de $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ en $\mathscr{C}^\infty_x(X)$ la denotaremos por $[f]_x$ y diremos que es el gérmen de f en x.[3]

Si $I \subset \mathscr{C}^\infty(X)$ es el ideal de las funciones que se anulan en algún entorno de x, entonces $\mathscr{C}^\infty(X)/I = \mathscr{C}^\infty_x(X)$, $\bar{f} \mapsto [f]_x$ es un isomorfismo. Observemos que $[f]_x = [g]_x$ si y solo si existe una función machacona h en x tal que $f \cdot h = g \cdot h$. Si U es un entorno abierto de x entonces morfismo $\mathscr{C}^\infty_x(X) \to \mathscr{C}^\infty_x(U)$, $[f]_x \mapsto [f_U]_x$ es un isomorfismo (si $h \in \mathscr{C}^\infty(X)$ es una función machacona en x con soporte incluido en U, el morfismo obvio $\mathscr{C}^\infty_x(U) \to \mathscr{C}^\infty_x(X)$, $[f]_x \mapsto [h \cdot f]_x$ es el morfismo inverso).

5. Proposición: *Sea X una variedad diferenciable, $x \in X$ y $\mathfrak{m}_x$ el ideal de las funciones que se anulan en x. El morfismo*

$$\mathscr{C}^\infty_x(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)_{\mathscr{C}^\infty(X)-\mathfrak{m}_x},\ \ [f]_x \mapsto \frac{f}{1}$$

es un isomorfismo.

[3] La suma y producto de gérmenes de funciones se define del modo obvio.

6.2.3. Restricción a un cerrado

6. Definición: Sea X una variedad diferenciable y $Y \subseteq X$ un cerrado. Se dice que una función $f: Y \to \mathbb{R}$ es diferenciable si para cada $y \in Y$ existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de y y una función $F \in \mathcal{C}^\infty(U)$ de modo que $F_{|Y\cap U} = f_{|Y\cap U}$.

7. Proposición: *Toda función diferenciable sobre un subespacio cerrado $Y \subseteq X$ es la restricción a dicho cerrado de una función diferenciable de X. Es decir,*

$$\mathcal{C}^\infty(Y) = \mathcal{C}^\infty(X)/I$$

donde $\mathcal{C}^\infty(Y)$ es el anillo de funciones diferenciables de Y e I es el ideal de las funciones diferenciables de X que se anulan en Y.

Demostración. Sea $f: Y \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Existen abiertos $\{U_i\}$ y funciones $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$ de modo que $\{U_i \cap Y\}$ recubren Y y $f_{i|U_i\cap Y} = f_{|U_i\cap Y}$.

Sea $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_i\}$ de $U = \cup_i U_i$. Recordemos que $\operatorname{sop}(\phi_i) \subset U_i$. Prolongando por 0 el producto $\phi_i f_i$ en el complementario de U_i, se obtiene una función diferenciable $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(X)$ y la familia de soportes de tales funciones es localmente finita. Luego, la suma $F = \sum_j \varphi_j$ es una función diferenciable en X. La restricción de F a Y es f, pues dado $y \in Y$

$$F(y) = \sum_i \varphi_i(y) = \sum_i \phi_i(y) f(y) = f(y).$$

□

8. Proposición: *Dados dos cerrados disjuntos Y_1 e Y_2 de una variedad diferenciable, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f_{|Y_1} = 1$ y $f_{|Y_2} = 0$.*

Demostración. Los abiertos $U_1 = X - Y_1$ e y $U_2 = X - Y_2$ recubren X. Existen ϕ_1 y ϕ_2, no negativas, tales que $\operatorname{sop}(\phi_1) \subset U_1$ y $\operatorname{sop}(\phi_2) \subset U_2$ y $\phi_1 + \phi_2 = 1$. La función $f = \phi_2$ cumple lo requerido. □

6.2.4. $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}^\infty(X)$

Denotamos por $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}^\infty(X)$ al conjunto de los ideales $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}^\infty(X)$ tales que el morfismo $\mathbb{R} \to \mathcal{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}$, $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ es un isomorfismo. Dado $x \in X$, el morfismo

$$\mathcal{C}^\infty(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(x)$$

es epiyectivo y el núcleo es el ideal $\mathfrak{m}_x$ de todas las funciones que se anulan en x, y se cumple que $\mathcal{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_x = \mathbb{R}$. Consideremos en $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}^\infty(X)$ la topología de Zariski: Los cerrados de $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}^\infty(X)$ son los conjuntos

$$(I)_0 = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}^\infty(X) \colon I \subset \mathfrak{m}\},$$

donde I es cualquier ideal de $\mathcal{C}^\infty(X)$. Observemos que $\cap_i (I_i)_0 = (\sum_i I_i)_0$, donde $\sum_i I_i$ es ideal de aquellas funciones que son suma (finita) de funciones de $\cup_i I_i$. Además, $(I)_0 \cup (J)_0 = (I \cap J)_0$: Comprobemos solo que $(I \cap J)_0 \subset (I)_0 \cup (J)_0$. Sea $\mathfrak{m} \in (I \cap J)_0$, si $\mathfrak{m} \notin (I)_0$ y $\mathfrak{m} \notin (J)_0$, entonces existen $f \in I$ y $g \in J$ que no pertenecen a $\mathfrak{m}$. Entonces, $f \cdot g \notin \mathfrak{m}$ (porque $\overline{fg} = \bar{f} \cdot \bar{g} \neq 0 \in \mathcal{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}$). Pero, $fg \in I \cap J$ y llegamos a contradicción.

9. Teorema: *El morfismo $i \colon X \to \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}^\infty(X)$, $i(x) = \mathfrak{m}_x$ es un homeomorfismo.*

Demostración. El morfismo i es claramente inyectivo. X es unión de compactos K_n, tales que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Sea $f_n \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que $0 \leq f_n \leq 1$, $f_{n|K_n} = 0$ y $f_{n|X - \overset{\circ}{K}_{n+1}} = 1$. La función $f = \sum_n f_n$ cumple que $f^{-1}(r)$ es compacto para todo $r \in \mathbb{R}$.

Sea $\mathfrak{m} \subset \mathcal{C}^\infty(X)$ un ideal tal que $\mathbb{R} = \mathcal{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}$. Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{f} = \bar{\lambda}$, luego $f - \lambda \in \mathfrak{m}$. $K = \{y \in X \colon f(y) - \lambda = 0\} = f^{-1}(\lambda)$ es un compacto. Supongamos para cada $y \in K$ existe una función $g_y \in \mathfrak{m}$ tal que $g_y(y) \neq 0$. Entonces, g_y no se anula en un entorno de U_y de y. Existe un número finito de puntos $y_1, \dots, y_n \in K$ tales que $K \subset \cup_i U_{y_i}$. Entonces, la función $g = (f - \lambda)^2 + \sum_i g_{y_i}^2$ es positiva en X, luego es invertible, $g^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(X)$ y $1 = \overline{g \cdot g^{-1}} = \bar{g} \cdot \overline{g^{-1}} = 0$ y hemos llegado a contradicción. Por tanto, existe $x \in K$ tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_x$, luego $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. Luego i es epiyectivo.

Dado un cerrado $(I)_0 \subset \operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}^\infty(X)$, se tiene que

$$i^{-1}((I)_0) = \{x \in X \colon I \subset \mathfrak{m}_x\} = \cap_{f \in I} \{x \in X \colon f(x) = 0\}$$

que es un cerrado, luego i es continua. Dado un cerrado $C \subset X$, sea $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ que se anule exactamente en C. Entonces, $i^{-1}((f)_0) = C$, luego $i(C) = (f)_0$ y el morfismo i es un homeomorfismo.

□

6.2.5. Teorema de Borel sobre los desarrollos de Taylor

Veamos ahora que el morfismo $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ que asigna a cada función diferenciable su desarrollo de Taylor infinito, en un punto $\alpha \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, es epiyectivo (sorprendentemente a primera vista).

10. Lema: *Sea $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$, tal que $D^\alpha(f)(0) = 0$, para todo α, con $|\alpha| \leq m$. Dado $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, que se anula en un entorno abierto de 0 tal que*

$$||f - g||_m < \epsilon$$

con $||f - g||_m := \sup\{|D^\alpha(f - g)(a)|,\ a \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| \leq m\}$.

Demostración. Sea $\eta(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\eta(x) = 0$, si $||x|| \leq 1/2$ y $\eta(x) = 1$ si $||x|| \geq 1$. Para $\delta > 0$, definamos

$$g_\delta(x) = \eta(\frac{x}{\delta}) \cdot f(x)$$

Claramente $g_\delta \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ y se anula en un entorno abierto de 0. Calculemos $||f - g_\delta||_m$.

Tenemos que $f - g_\delta = f \cdot (1 - \eta(x/\delta))$ que es nula para $||x|| > \delta$ y $||\eta(x)||_m < \infty$. Observemos que por las hipótesis $\lim_{x\to 0} D^\alpha f(x)/||x||^{m-|\alpha|} = 0$, luego

$$|D^\alpha(f - g_\delta)| = |D^\alpha f \cdot (1 - \eta(x/\delta)) + \sum_{0\leq\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot D^\beta f \cdot \delta^{-(|\alpha|-|\beta|)} \cdot D^{\alpha-\beta}\eta(x/\delta)| \leq \epsilon$$

para todo x, cuando δ es pequeño. En conclusión, $||f - g_\delta||_m \leq \epsilon$, para δ pequeño. □

11. Teorema de Borel: *El morfismo*

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$$

que asigna a cada función diferenciable su desarrollo de Taylor infinito en $0 \in \mathbb{R}^n$ *es epiyectivo.*

Demostración. Sea $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$. Sea $T_m = \sum_{|\alpha|=m+1} c_\alpha x^\alpha$ y $g_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que se anule en un entorno abierto de 0 y tal que $||T_m - g_m||_m \leq 1/2^m$.

Entonces $f = c_0 + \sum_m (T_m - g_m) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y el desarrollo de Taylor de f en el 0 es $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$. □

6.3. Módulo de derivaciones

Sea X una variedad diferenciable. Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tenemos su restricción $f_{|U}$ a cada abierto $U \subset X$. Si $\{U_i\}$ es un recubrimiento de X por abiertos y tenemos $g_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$ tales que $g_{i|U_i\cap U_j} = g_{j|U_i\cap U_j}$, entonces existe una única $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que $g_{|U_i} = g_i$, para todo i. Veamos que lo mismo sucede las derivaciones.

1. Denotamos $\mathfrak{Der}_X = \mathrm{Der}_\mathbb{R}(\mathcal{C}^\infty(X), \mathcal{C}^\infty(X))$. Dada una derivación $D \in \mathfrak{Der}_X$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ nula en un abierto $U \subset X$, entonces Df también es nula U: dado $\alpha \in U$, sabemos que $f \in \mathfrak{m}_\alpha^2$, luego $D(f) \in \mathfrak{m}_\alpha$ y $D(f)(\alpha) = 0$. Por tanto, si $f = g$ en un entorno de α entonces $D(f) = D(g)$ en ese entorno.

Consideremos el morfismo natural

$$\mathfrak{Der}_X \to \mathfrak{Der}_U,\ D \mapsto D_{|U}$$

donde $(D_{|U} f)(\alpha) := D(F)(\alpha)$, siendo $F \in \mathcal{C}^\infty(X)$ cualquier función que es igual a $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ en un entorno abierto de α. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $D_{|X} = D$ y si V es un abierto incluido en U, entonces $(D_{|U})_{|V} = D_{|V}$.

2. Si $\{U_i\}$ es un recubrimiento por abiertos de X y $D_{|U_i} = 0$ para todo i entonces $D = 0$, pues $(Df)_{|U_i} = D_{|U_i} f_{|U_i} = 0$, para todo i, luego $Df = 0$ y $D = 0$. Por tanto, $D = D'$ si y solo si $D_{|U_i} = D'_{|U_i}$ para todo i.

3. Por otra parte, si tenemos para cada i, una derivación $D_i \in \mathfrak{Der}_{U_i}$ de modo que $(D_i)_{|U_i \cap U_j} = (D_j)_{|U_i \cap U_j}$, para todo i, j, entonces podemos definir una $D \in \mathfrak{Der}_X$, tal que $D_{|U_i} = D_i$, para todo i: $D(f)$ se define como la función que cumple que $(Df)_{|U_i} = D_i f_{|U_i}$.

Las propiedades 1., 2. y 3. se expresan diciendo que $\mathfrak{Der}_X$ es un haz.

Sea $U \subset X$ un abierto y $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que $\text{sop}(f) \subset U$. Dada $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$, denotamos por $f \cdot h$ la función de X definida por $(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$ si $x \in U$ y $(f \cdot h)(x) = 0$ si $x \notin U$. Dada $D \in \mathfrak{Der}_U$, denotamos por $f \cdot D$ la derivación de $\mathcal{C}^\infty(X)$ definida por $(f \cdot D)(h) = f \cdot D(h_{|U})$. Si $U_1, \dots, U_n$ es un recubrimiento de X por abiertos y $\phi_1, \dots, \phi_n$ es una partición de la unidad subordinada a este recubrimiento, entonces $D = \sum_i \phi_i \cdot D_{|U_i}$.

2. Proposición: $\mathfrak{Der}_X$ *es un* $\mathcal{C}^\infty(X)$*-módulo finito generado proyectivo.*

Demostración. Existe un número finito de abiertos coordenados $U_1, \dots, U_m$ que recubren la variedad diferenciable X (se demostrará más adelante). Sea $\phi_1, \dots, \phi_m$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento. Sea $h_i = \frac{\phi_i}{\sqrt{\sum_i \phi_i^2}}$. $\mathfrak{Der}_{U_i}$ es un $\mathcal{C}^\infty(U_i)$-módulo libre, y sea $\{D_{ij}\}$ una base. Consideremos el morfismo

$$\pi\colon \oplus_{i,j} \mathcal{C}^\infty(X) \to \mathfrak{Der}_X, \; \pi((f_{ij})) = \sum_{i,j} h_i \cdot f_{ij} \cdot D_{ij}$$

El morfismo $s\colon \mathfrak{Der}_X \to \oplus_{i,j} \mathcal{C}^\infty(X)$, $s(D) = (h_i f_{ij})$, donde $D_{|U_i} = \sum_j f_{ij} D_{ij}$, es una sección de π. □

3. Proposición: *Se cumple que*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} M & = & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(X)}(\mathfrak{Der}_X^*, M) \\ D \otimes m & \mapsto & (D \otimes m) \textit{ donde } (D \otimes m)(w) := w(D) \cdot m \end{array}$$

Demostración. Es consecuencia de que $\mathfrak{Der}_X$ es un módulo proyectivo finito generado. □

4. Notación: Sea X una variedad diferenciable y $U \subset X$ un abierto. dado un $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo M, denotaremos $M_U = M \otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} \mathcal{C}^\infty(U)$. Dado $i\colon M \to M_U$, $i(m) := m \otimes 1$, denotaremos $m \otimes 1 = m_U$.

Si N es un $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulo, entonces es un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo y el morfismo $N \to N_U$, $n \mapsto n\otimes 1$ es un isomorfismo (observemos que $n\otimes \frac{f}{g} = \frac{g}{g}\cdot n\otimes \frac{f}{g} = \frac{f}{g}\cdot n\otimes \frac{g}{g} = \frac{f}{g}\cdot n\otimes 1$ y que $N_U \to N$, $n\otimes h \mapsto hn$ es el morfismo inverso).

5. Toda derivación $D\colon \mathscr{C}^\infty(X)\to M$ induce la derivación

$$D_{|U}\colon \mathscr{C}^\infty(U)\to M_U,\ D_{|U}(\frac{f}{g}) := \frac{1}{g^2}\cdot (gD(f)-fD(g))_U.$$

Toda derivación $D_U\colon \mathscr{C}^\infty(U)\to N$, induce la derivación $D_U\circ i\colon \mathscr{C}^\infty(X)\to N$, es decir, $(D_U\circ i)(f) = D_U(f_{|U})$.

6. Proposición: *Sea N un $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulo. El morfismo natural*

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),N)\to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(X),N),\ D_U\mapsto D_U\circ i$$

es un isomorfismo.

Demostración. El morfismo inverso es la asignación $D\mapsto D_{|U}$.

□

7. Sea $f\in\mathscr{C}^\infty(X)$ con $\mathrm{sop}(f)\subset U$, el morfismo $f\cdot\colon M_U\to M$, $m\otimes h\mapsto (f\cdot h)\cdot m$ es un morfismo de $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulos. Dado $D_U\in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(U),M_U)$, denotaremos la composición $\mathscr{C}^\infty(X)\to\mathscr{C}^\infty(U)\xrightarrow{D_U} M_U\xrightarrow{f\cdot} M$ por $f\cdot D_U$. Explícitamente, $(f\cdot D_U)(g) = f\cdot D_U(g_{|U})$.

8. Lema: *Si M un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo tal que* $\mathrm{Nul}_X(M) = \cap_{x\in X,n\in\mathbb{N}}\mathfrak{m}_x^n\cdot M = 0$*, entonces* $\mathrm{Nul}_U(M_U) = 0$

Demostración. Observemos primero que si $m\otimes\frac{f}{g}, m'\otimes\frac{f'}{g'}\in M_U$ entonces $m\otimes\frac{f}{g}+m'\otimes\frac{f'}{g'} = (fg'm+f'gm')\otimes\frac{1}{gg'}$, luego todo elemento de M_U es de la forma $m\otimes\frac{1}{f}$.

Dado $x\in U$, tenemos que

$$\begin{aligned} M_U\otimes\mathscr{C}^\infty(U)/\mathfrak{m}_{U,x}^n &= M\otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)}\mathscr{C}^\infty(U)\otimes_{\mathscr{C}^\infty(U)}\mathscr{C}^\infty(U)/\mathfrak{m}_{U,x}^n = M\otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)}\mathscr{C}^\infty(U)/\mathfrak{m}_{U,x}^n\\ &= M\otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)}\mathscr{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_x^n \end{aligned}$$

Por tanto, si $m\otimes\frac{1}{f}\in\mathfrak{m}_{U,x}^n M_U$, entonces $\overline{m\otimes\frac{1}{f}} = 0$ en $M_U\otimes\mathscr{C}^\infty(U)/\mathfrak{m}_{U,x}^n$, luego $\overline{m\otimes 1} = 0$ y $\bar m = 0$ en $M\otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)}\mathscr{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_x^n$, es decir, $m\in\mathfrak{m}_x^n M$. Sea $h\in\mathscr{C}^\infty(X)$ que no se anule en ningún punto de U y $h\in\mathfrak{m}_y^n$, para todo $y\in X-U$ y todo $n>0$. Si $m\otimes\frac{1}{f}\in\mathrm{Nul}_U(M_U)$, entonces $hm\in\mathrm{Nul}(M) = \{0\}$, luego $h\cdot(m\otimes\frac{1}{f}) = hm\otimes\frac{1}{f} = 0$ y $m\otimes\frac{1}{f} = 0$.

□

9. Proposición: *Sea M un $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo tal que* $\mathrm{Nul}(M)=0$. *Entonces, el morfismo natural*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} M & \to & \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X), M), \\ D\otimes m & \mapsto & (D\otimes m), \text{ donde } (D\otimes m)(f) := D(f)\cdot m \end{array}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $U\subset X$ un abierto $D\in \mathfrak{Der}_X$, $m\in M$, $D'\in \mathrm{Der}_U \otimes M$ y $f\in \mathcal{C}^\infty(X)$ con $\mathrm{sop}(f)\subset U$. Entonces, $(D\otimes m)_{|U}=(D_{|U}\otimes m_U)$ y $(f\cdot D')=f\cdot (D')$.

Si U es un abierto coordenado, entonces el morfismo

$$\mathfrak{Der}_U \otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} M = \mathfrak{Der}_U \otimes_{\mathcal{C}^\infty(U)} M_U \overset{5.2.4}{=} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U), M_U),\ \ D\otimes m\mapsto (D\otimes m)$$

es isomorfismo. Denotemos el morfismo inverso con corchetes $D\mapsto [D]$.

Sea un número finito de abiertos coordenados $U_1,\dots,U_m$ que recubren la variedad diferenciable X y $\phi_1,\dots,\phi_m$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento.

El morfismo $s\colon \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M)\to \mathfrak{Der}_X\otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} M$, $s(D):=\sum_i \phi_i\cdot [D_{|U_i}]$, es el morfismo inverso del dado:

$$\begin{array}{l} D\otimes m\mapsto (D\otimes m)\mapsto \sum_i \phi_i\cdot[(D\otimes m)_{|U_i})] = \sum_i\phi_i\cdot [(D_{|U_i}\otimes m_{U_i})] = \sum_i \phi_i\cdot D_{|U_i}\otimes m = D\otimes m \\ D\mapsto \sum_i \phi_i\cdot [D_{|U_i}]\mapsto (\sum_i\phi_i\cdot [D_{|U_i}]) = \sum_i \phi_i\cdot ([D_{|U_i}]) = \sum_i\phi_i\cdot D_{|U_i} = D \end{array}$$

□

10. Corolario: *Sea M un $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo tal que* $\mathrm{Nul}(M)=0$. *Entonces, el morfismo* $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M)_U\to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U),M_U)$*, $D\otimes h\mapsto h\cdot D_{|U}$ es un isomorfismo. En particular,*

$$(\mathfrak{Der}_X)_U = \mathfrak{Der}_U\,.$$

Demostración. $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M)_U \overset{6.3.9}{=} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M_U) \overset{6.3.6}{=} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(U),M_U)$. □

11. Corolario: *Sea M un $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo tal que* $\mathrm{Nul}(M)=0$. *Entonces, el morfismo*

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M)/\mathfrak{m}_x^n\,\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M)\to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M/\mathfrak{m}_x^n M),\ \ \bar D\mapsto \pi\circ D$$

es un isomorfismo, donde $\pi\colon M\to M/\mathfrak{m}_x^n M$ es el morfismo de paso al cociente..

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M)\otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)}\mathcal{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_x^n &\overset{6.3.9}{=} \mathfrak{Der}_X\otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} M\otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)}\mathcal{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_x^n \\ &= \mathfrak{Der}_X\otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} M/\mathfrak{m}_x^n M \overset{6.3.9}{=} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(X),M/\mathfrak{m}_x^n M). \end{aligned}$$

□

6.4. Diferenciales de Kahler

Sea k un cuerpo, A un anillo y $k \hookrightarrow A$ un morfismo de anillos (en este caso se dice que A es una k-álgebra y escribiremos $\lambda \mapsto \lambda$). Sea E el A-módulo libre de base $\{\mathbf{da}$, para todo $a \in A\}$, es decir, E es el A-módulo formado por las sumas formales finitas $\sum_{a\in A} b_a \mathbf{da}$ ($b_a \in A$ y casi todos son nulos). Sea E' el A-submódulo de E generado por los elementos $\mathbf{d(a+a')} - \mathbf{da} - \mathbf{da'}$, $\mathbf{d}(\lambda\mathbf{a}) - \lambda\mathbf{da}$ y $\mathbf{d(aa')} - a'\mathbf{da} - a\mathbf{da'}$ (para todo $a, a' \in A$ y $\lambda \in k$).

1. Definición: Llamaremos A-módulo de diferenciales de Kahler de A sobre k, que denotaremos por $\Omega_{A/k}$, a

$$\Omega_{A/k} := E/E'$$

2. Notación: *Denotaremos* $\overline{b\mathbf{da}}$ *por* bda.

El morfismo natural $d\colon A \to \Omega_{A/k}$, $a \mapsto da$, es una derivación, es decir, verifica que $d(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot da$, $d(a+a') = da + da'$, $d(aa') = ada' + a'da$ (para todo $\lambda \in k$ y $a, a' \in A$). Observemos que $d(1) = 0$, porque $d(1) = d(1\cdot 1) = d1 + d1$, luego $d(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in k$.

Dar un morfismo de A-módulos $\phi\colon \Omega_{A/k} \to M$, equivale a dar un morfismo de A-módulos $E \to M$, que se anule sobre E', es decir, equivale a dar $\phi(da)$, para todo $a \in A$, de modo que $\phi(d(a+a')) = \phi(da) + \phi(da')$, $\phi(d\lambda a)) = \lambda\phi(da)$ y $\phi(daa') = a'\phi(da) + a\phi(da')$. En términos matemáticos precisos:

3. Proposición: *Sea A una k-álgebra y M un A-módulo. Se cumple que*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) & = & \operatorname{Der}_k(A, M) \\ T & \longmapsto & T \circ d \\ (i_D(adb) := aDb) \quad i_D & \longleftarrow & D \end{array}$$

4. Corolario: $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k} = k[x_1,\dots,x_n]\cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus k[x_1,\dots,x_n]\cdot dx_n$.

Demostración. La diferencial $d\colon k[x_1,\dots,x_n] \to \Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}$ es una derivación, luego $d = \sum_i dx_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ por el teorema anterior y $dp(x) = \sum_i \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \cdot dx_i$. Por tanto, $dx_1, \dots dx_n$ es un sistema generador de $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}$. Por otra parte, el morfismo $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k} \to k[x_1,\dots,x_n]dx_1 \oplus \cdots \oplus k[x_1,\dots,x_n]dx_n$, $dp(x) \mapsto \sum_i \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \cdot dx_i$, está bien definido, lo que muestra que $dx_1, \dots dx_n$ es una base.

Otro método de demostración estándar en Matemáticas, que esencialmente hemos seguido, dice: de la igualdad (para todo M) de los dos extremos de las igualdades,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{k[x_1,\dots,x_n]}(\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k}, M) &= \operatorname{Der}_{k[x_1,\dots,x_n]}(k[x_1,\dots,x_n], M) = M\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus M\frac{\partial}{\partial x_n} \\ &= \operatorname{Hom}_{k[x_1,\dots,x_n]}(k[x_1,\dots,x_n]dx_1 \oplus \cdots \oplus k[x_1,\dots,x_n]dx_n, M) \end{aligned}$$

se deduce que $\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k} = k[x_1,\dots,x_n]dx_1 \oplus \cdots \oplus k[x_1,\dots,x_n]dx_n$. □

Sea $\mathfrak{m}_\alpha \subset A$ un ideal maximal tal que $A/\mathfrak{m}_\alpha = k$ como k-álgebras. Dado $a \in A$, denotemos $a(\alpha) = \bar{a} \in k = A/\mathfrak{m}_\alpha$. La aplicación

$$d_\alpha \colon A \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2, \quad d_\alpha a := \overline{a - a(\alpha)}$$

es una k-derivación: Observemos que $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ es un A-módulo, $a \cdot \bar{m} := \overline{am} = a(\alpha) \cdot \bar{m}$ (porque $(a - a(\alpha)) \cdot m \in \mathfrak{m}_\alpha^2$). Ahora ya,

$$d_\alpha(a \cdot b) = \overline{a \cdot b - a(\alpha) \cdot b(\alpha)} = \overline{a \cdot (b - b(\alpha)) + b(\alpha) \cdot (a - a(\alpha))} = a(\alpha) \cdot d_\alpha b + b(\alpha) \cdot d_\alpha a$$

5. Nota: Dado un A-módulo M, denotemos $M_\alpha = M/\mathfrak{m}_\alpha \cdot M$ y dado $m \in M$ denotemos $m_\alpha = \bar{m} \in M/\mathfrak{m}_\alpha M$.

6. Teorema: $(\Omega_{A/k})_\alpha = \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$.

Demostración. El morfismo $(\Omega_{A/k})_\alpha \to \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, $(adb)_\alpha \mapsto a(\alpha) d_\alpha b$ está bien definido y el morfismo inverso es $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \to (\Omega_{A/k})_\alpha$, $d_\alpha b \mapsto (db)_\alpha$. □

Dado $\alpha \in k^n$, el núcleo del morfismo $k[x_1, \dots, x_n] \to k$, $p(x_1, \dots, x_n) \mapsto p(\alpha)$, es el ideal maximal $\mathfrak{m}_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$. El morfismo natural, $(\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]/k})_\alpha = \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$, asigna $(dp)_\alpha \mapsto d_\alpha p$. Como $dp = \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i$ entonces $d_\alpha p = \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(\alpha) \cdot d_\alpha x_i$.

Si N es un A-módulo anulado por un ideal I, en particular es un A/I-módulo, $\bar{a} \cdot n := a \cdot n$. Recíprocamente, si N es un A/I-módulo es en particular un A-módulo $a \cdot n := \bar{a} \cdot n$. Si N' es otro A/I-módulo entonces $\operatorname{Hom}_A(N, N') = \operatorname{Hom}_{A/I}(N, N')$. Si M y N son A-módulos y N es un A-módulo anulado por un ideal I, entonces todo morfismo de A-módulos $f \colon M \to N$ se anula en $I \cdot M$, luego podemos definir $\bar{f} \colon M/I \cdot M \to N$, $\bar{m} \mapsto f(m)$ y $f = \bar{f} \circ \pi$, donde $\pi \colon M \to M/I \cdot M$, $\pi(m) := \bar{m}$. Tenemos $\operatorname{Hom}_A(M, N) = \operatorname{Hom}_A(M/I \cdot M, N)$, $f \mapsto \bar{f}$.

7. Teorema: *Sea N un A-módulo anulado por $\mathfrak{m}_\alpha$ (es decir, un $A/\mathfrak{m}_\alpha$-módulo). Entonces,*

$$\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2, N) = \operatorname{Der}_k(A, N)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2, N) &= \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2, N) = \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}(\alpha), N) = \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, N) \\ &= \operatorname{Der}_k(A, N).\end{aligned}$$

Explícitamente, dada $w \colon \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \to N$ tenemos la derivación $w \circ d_\alpha \colon A \to N$; dada una derivación $D \colon A \to N$, tenemos $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \to N$, $d_\alpha b \mapsto Db$. □

Todo morfismo de k-álgebras $f \colon A \to B$ induce el morfismo

$$\Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k}, \; ada' \mapsto f(a) df(a').$$

6.4.1. Módulo de diferenciales en Geometría Diferencial

Sea X una variedad diferenciable. Recordemos que dado un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo M, denotamos $\mathrm{Nul}(M) = \cap_{\alpha\in U, n>0}\mathfrak{m}_\alpha^n \cdot M$ y $\tilde{M} = M/\mathrm{Nul}(M)$.

8. Definición: Diremos que $\Omega_X := \tilde{\Omega}_{C^\infty(X)/\mathbb{R}}$ es el módulo de diferenciales de X.

La composición $\mathscr{C}^\infty(X) \xrightarrow{d} \Omega_{C^\infty(X)/\mathbb{R}} \to \Omega_X$ la denotaremos también por d. Obviamente d es una derivación.

9. Proposición: *El morfismo* $(\Omega_X)_x \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, $\overline{df} \mapsto d_x f$ *es un isomorfismo.*

Demostración. En efecto,

$$(\Omega_X)_x = \Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}/(\mathfrak{m}_x\Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}} + \mathrm{Nul}(\Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}) = \Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}/\mathfrak{m}_x\Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}} = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

□

10. Teorema: *Sea M un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo tal que* $\mathrm{Nul}(M) = 0$. *Entonces, la aplicación*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\infty(X)}(\Omega_X, M) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(X), M),\ \ F \mapsto F\circ d,$$

es un isomorfismo de $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulos.

Demostración. En efecto,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\infty(X)}(\Omega_X, M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\infty(X)}(\Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}, M) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(X), M).$$

□

11. Corolario: *Sea $U \subset X$ un abierto coordenado por las funciones $x_1, \dots, x_n \in \mathscr{C}^\infty(U)$. La aplicación,*

$$\Omega_U \to \mathscr{C}^\infty(U)\cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{C}^\infty(U)\cdot dx_n,\ \ g df \mapsto g\cdot (\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot dx_i),$$

es un isomorfismo de $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulos.

Demostración. Para todo $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulo M, tal que $\mathrm{Nul}_U(M) = 0$, se cumple que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}(\Omega_U, M) &= \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U), M) \overset{5.2.4}{=} M\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus M\frac{\partial}{\partial x_n} \\ &= \mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U)dx_1 \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)dx_n, M).\end{aligned}$$

Luego, $\Omega_U = \mathscr{C}^\infty(U)\cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{C}^\infty(U)\cdot dx_n$. □

12. Como $\mathrm{Nul}(\mathscr{C}^\infty(X))=0$ todo submódulo M de un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo libre cumple que $\mathrm{Nul}(M)=0$. En particular, si P es un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo proyectivo entonces $\mathrm{Nul}(P)=0$.

13. Teorema: *El morfismo natural*

$$\Omega_X \to \mathfrak{Der}_X^*,\ \ f dg \mapsto (f dg),\ \textit{donde}\ (f dg)(D) := f D(g),$$

es un isomorfismo. En particular, Ω_X es un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo finito generado proyectivo.

Demostración. En efecto,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\infty(X)}(\mathfrak{Der}_X^*, M) \overset{6.3.3}{=} \mathfrak{Der}_X \otimes M \overset{6.3.9}{=} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^\infty(X), M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\infty(X)}(\Omega_X, M),$$

para todo módulo M, tal que $\mathrm{Nul}(M)=0$. Luego, $\Omega_X = \mathfrak{Der}_X^*$.

□

14. Corolario: *El morfismo natural $(\Omega_X)_U \to \Omega_U$, $df\otimes h \mapsto h\cdot df_{|U}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Por ser $\mathfrak{Der}_X$ un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo proyectivo,

$$(\Omega_X)_U = (\mathfrak{Der}_X^*)_U = \mathfrak{Der}_U^* = \Omega_U\,.$$

□

Ω_X es un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo finito generado proyectivo, luego es un sumando directo de un módulo libre, por tanto $\bigcap_{x\in X} \mathfrak{m}_x\cdot\Omega_X = 0$. Por tanto, $w\in\Omega_X$ es igual a cero si y sólo si $w_x=0$, para todo $x\in X$

15. Teorema: *Sea X una variedad diferenciable y $N=\bigcap_{x\in X}\mathfrak{m}_x\cdot\Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}$, entonces*

$$\Omega_X = \Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}/N.$$

Demostración. En efecto,

$$\Omega_X = \Omega_X/\bigcap_{x\in X}\mathfrak{m}_x\cdot\Omega_X = \Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}/(N+\mathrm{Nul}(\Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}) = \Omega_{\mathscr{C}^\infty(X)/\mathbb{R}}/N.$$

□

6.4.2. Campos de tensores y formas diferenciales

16. Definición: Cada elemento de $T^r\,\mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} T^s\,\Omega$ se dice que es un campo de tensores s-veces covariante y r-veces contravariante.

17. Definición: Se dice que $\Lambda^r_{\mathscr{C}^\infty(X)}\Omega_X$ es el $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo de las r-formas diferenciales de X. Se dice que $S^r_{\mathscr{C}^\infty(X)}\Omega_X$ es el $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo de los campos de tensores simétricos de orden r de X.

18. Notación: A partir de ahora escribiremos $\Omega^r_X = \Lambda^r\,\Omega_X$.

Todos estos módulos son módulos proyectivos. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&T^r\,\mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} T^s\,\Omega = \mathrm{Multl}_{\mathscr{C}^\infty(X)}(\Omega_X \times \overset{r}{\cdots} \times \Omega_X \times \mathfrak{Der}_X \times \overset{s}{\cdots} \times \mathfrak{Der}_X, \mathscr{C}^\infty(X))\\
&\Omega^r_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} M = \mathrm{Hem}_{\mathscr{C}^\infty(X)}(\mathfrak{Der}_X \times \overset{r}{\cdots} \times \mathfrak{Der}_X, M)\\
&S^r\,\mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} M = \mathrm{Sim}_{\mathscr{C}^\infty(X)}(\Omega_X \times \overset{r}{\cdots} \times \Omega_X, M)
\end{aligned}$$

Dado un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo M y un abierto $U \subset X$, denotamos $M_U = M \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} \mathscr{C}^\infty(U)$. Para cada abierto $U \subset X$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&(T^r\,\mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} T^s\,\Omega_X)_U = T^r\,\mathfrak{Der}_U \otimes_{\mathscr{C}^\infty(U)} T^s\,\Omega_U\\
&(\Omega^r_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} M)_U = \Omega^r_U \otimes_{\mathscr{C}^\infty(U)} M_U\\
&(S^r\,\mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} M)_U = S^r\,\mathfrak{Der}_U \otimes_{\mathscr{C}^\infty(U)} M_U.
\end{aligned}$$

Dado un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo M, denotamos $M_x = M/\mathfrak{m}_x M = M \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} \mathscr{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_x$.Para todo $x \in X$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&(T^r\,\mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} T^s\,\Omega_X)_x = T^r(T_xX) \otimes_{\mathbb{R}} T^s(T^*_xX)\\
&(\Omega^r_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} M)_x = \Lambda^r T^*_xX \otimes_{\mathbb{R}} M_x\\
&(S^r\,\mathfrak{Der}_X \otimes_{\mathscr{C}^\infty(X)} M)_x = S^r(T_xX) \otimes_{\mathbb{R}} M_x.
\end{aligned}$$

Dado un morfismo $F\colon X \to Y$ diferenciable, tenemos el morfismo de anillos

$$F^*\colon \mathscr{C}^\infty(Y) \to \mathscr{C}^\infty(X),\ F^*(g) = g \circ F,$$

que induce el morfismo

$$F^*\colon\ \Omega_Y \to \Omega_X,\ F^*(gdh) = (g \circ F)d(h \circ F)$$

que induce los morfismos naturales

$$\begin{aligned}
&F^*\colon T^r\,\Omega_V \to T^r\,\Omega_U, \quad && F^*(gdf_1 \otimes \cdots \otimes df_r) = (g \circ F)d(f_1 \circ F) \otimes \cdots \otimes d(f_r \circ F)\\
&F^*\colon\ \Omega^r_V \to \Omega^r_U, && F^*(gdf_1 \wedge \cdots \wedge df_r) = (g \circ F)d(f_1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(f_r \circ F).
\end{aligned}$$

19. Los $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo proyectivos finitos generados P cumplen las propiedades de los haces, porque son sumando directos de un $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulo libre $\mathcal{C}^\infty(X)^n$ y $\mathcal{C}^\infty(X)$ es haz. Expliquemosnos con más detalle. Sea Q tal que $P \oplus Q = \mathcal{C}^\infty(X)^n$. Obviamente, $P_U \oplus Q_U = (\mathcal{C}^\infty(X)^n)_U = \mathcal{C}^\infty(U)^n$. Dado $p \in P$ denotemos $p_U = p \otimes 1 \in P_U$. Se cumple

1. $p_X = p$ y si $V \subset U$ entonces $(p_U)_V = p_V$.
2. Si $\{U_i\}$ es un recubrimiento por abiertos de X y $p_{U_i} = 0$ para todo i entonces $p = 0$.
3. Por otra parte, si tenemos para cada i, $p_i \in P_{U_i}$ de modo que $(p_i)_{U_i \cap U_j} = (p_j)_{U_i \cap U_j}$, para todo i, j, entonces existe $p \in P$, tal que $p_{U_i} = p_i$, para todo i.

Si $\{\phi_i\}$ es una partición de la unidad subordinada a un recubrimiento $\{U_i\}$ de X y tenemos $p_i \in P_{U_i}$, podemos definir la suma infinita $p = \sum_i \phi_i \cdot p_i \in P$, porque para determinar p solo hay que determinarla en cada abierto U_i (donde todos los sumandos son nulos salvo un número finito) y observar que se cumple 3.

Dado $x \in X$ y $p \in P$, denotemos $p_x = \bar{p} \in P_x$. Si $x \in U \subset X$, recordemos que $\mathcal{C}^\infty(X)/\mathfrak{m}_x = \mathcal{C}^\infty(U)/\mathfrak{m}_{U,x}$ y por tanto es fácil probar que $(p_U)_x = p_x$.

20. Definición: Una variedad diferenciable junto con un campo de tensores $T_2 \in S^2\Omega_X$ tal que $T_{2,x}$ es un producto escalar para todo $x \in X$, se dice que es una variedad riemanniana.

Si U es un abierto coordenado de una variedad X, por funciones $x_1, \dots, x_n$ entonces $(U, T_2 = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n)$ es una variedad riemanniana. Consideremos ahora en una variedad diferenciable X un recubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos coordenados por funciones $\{x_{ij}\}_{j=1,\dots,n}$. Sea $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento y $T_{2,i} = \sum_j dx_{ij} \otimes dx_{ij}$. Entonces, $(X, \sum_i \phi_i T_{2,i})$ es una variedad riemanniana.

6.5. Integración de formas diferenciales

1. Definición: Se dice que una variedad diferenciable X de dimensión n es orientable si existe una n-forma diferenciable w no nula en todo punto ($w_x \neq 0$, para todo $x \in X$). Dar una orientación es dar una familia $\{h \cdot w\}_{h>0}$ (con $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$), donde w es una n-forma diferenciable no nula en todo punto Se dice también que X está orientada por w.

Que X está orientada es equivalente a que $\Omega_X^n \simeq \mathcal{C}^\infty(X)$ como $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulos. En una variedad diferenciable orientable sólo hay dos orientaciones. Sean (X, w) y (X', w') dos variedades diferenciables orientadas. Se dice que un difeomorfismo $f \colon X \to X'$ conserva la orientación (o está orientado) si $f^* w' = h \cdot w$ con $h > 0$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, con la orientación $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Sea $w = f \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega_U^n$ y supongamos que $\operatorname{sop} f$ es compacto.

2. Definición: Se define $\int_U w := \int_U f \cdot dx_1 \cdots dx_n$.

Sea $U' \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y escribamos ahora las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^n$ con las letras $y_1, \dots, y_n$. Si $\varphi\colon U' \to U$ es un difeomorfismo que conserve la orientación, entonces el teorema del cambio de variables en integración (ver $\overset{*}{=}$, más abajo) implica que

$$\int_{U'=\varphi^{-1}U} \varphi^* w = \int_U w$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\varphi^* w &= \varphi^*(f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = f(\varphi) \cdot d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n \\ &= f(\varphi) \cdot (\sum_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} dy_i) \wedge \cdots \wedge (\sum_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_i} dy_i) = f(\varphi) \cdot \det(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}) \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n\end{aligned}$$

luego

$$\int_{U'=\varphi^{-1}U} \varphi^* w = \int_{U'} f(\varphi(y)) \cdot \det(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}) \cdot dy_1 \cdots dy_n \overset{*}{=} \int_U f(x) \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_U w$$

Sea X una variedad diferenciable orientada de dimensión n. Dada w una r-forma en X definimos $\operatorname{sop} w = \{x \in X$ tales que $w_x \neq 0\}$. Sea w una n-forma diferenciable en X y supongamos que $\operatorname{sop} w$ es compacto. Supongamos que existe un difeomorfismo $\phi\colon X \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ orientado. Consideremos el isomorfismo inducido $\phi^*\colon \Omega^n_{U'} \to \Omega^n_X$, Entonces existe una n-forma diferenciable en U', $w' = f(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, tal que $\phi^* w' = w$ (luego, $w = f(\phi_1, \dots, \phi_n) \cdot d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_n$) y definimos

$$\int_X w = \int_{\phi^{-1}(U')} \phi^* w' := \int_{U'} w' := \int_{U'} f(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_1 \cdots dx_n.$$

Veamos que la definición no depende del ϕ considerado. Sea $\phi''\colon X \to U'' \subseteq \mathbb{R}^n$ otro difeomorfismo orientado, entonces $\varphi = \phi' \circ \phi''^{-1}\colon U'' \to U'$, $y \mapsto (\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)$ es un difeomorfismo orientado. Definamos $w'' = \varphi^* w'$, que cumple que $\phi''^*(w'') = \phi''^* \varphi^* w' = \phi'^* w' = w$. Por tanto,

$$\int_X w \overset{\text{vía } \phi''}{=} \int_{U''} w'' = \int_{\varphi^{-1}(U')} \varphi^* w' = \int_{U'} w' \overset{\text{vía } \phi'}{=} \int_X w$$

Sea X una variedad diferenciable de dimensión n orientada y w una n-forma diferenciable de soporte compacto. Sea un número finito de abiertos coordenados $U_1, \dots, U_n$ que recubran $\operatorname{sop} w$ y consideremos el recubrimiento de X, $\{U_1, \dots, U_n, X - \operatorname{sop} w\}$. Sea $\{f_1, \dots, f_n, f\}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento. Observemos que $w = f_1 \cdot w + \cdots + f_n w$ (y $f \cdot w = 0$) y que $\operatorname{sop} f_i \cdot w \subset U_i$. Definimos

$$\int_X w := \int_{U_1} f_1 w + \cdots + \int_{U_n} f_n w$$

Esta definición no depende del recubrimiento ni de la partición: Sea $\{V_1,\dots,V_m\}$ abiertos coordenados que recubran $\operatorname{sop} w$ y $\{g_1,\dots,g_m,g\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{V_1,\dots,V_m,X-\operatorname{sop} w\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\int_{U_i} f_i w &= \sum_{i=1}^n\int_{U_i}\sum_{j=1}^m f_i g_j w = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int_{U_i\cap V_j} f_i g_j w = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int_{V_j} f_i g_j w\\ &= \sum_{j=1}^m\int_{V_j}\sum_{i=1}^n f_i g_j w = \sum_{j=1}^m\int_{V_j} g_j w\end{aligned}$$

Dejamos ya que el lector pruebe:

1. Si $w_1,\dots,w_r$ son n-formas con soporte compacto entonces $\int_X\sum_i w_i = \sum_i\int w_i$.
2. Si $\phi\colon X\to X'$ es un difeomorfismo orientado entre variedades diferenciables orientadas entonces para toda n-forma diferenciable w' de X' de soporte compacto se satisface que
$$\boxed{\int_X \phi^* w' = \int_{X'} w'}$$

6.6. Longitudes, áreas y volúmenes

1. Definición: Sea X una variedad diferenciable compacta orientable y $w\in\Omega_X^n$ una forma de volumen. Se denomina volumen de X a $\int_X w$.

Sea (X,T_2) una variedad orientada (digamos por w_n) riemanniana. Llamaremos forma de volumen de X a $\frac{w_n}{||w_n||}$, es decir a la única forma de volumen positivamente orientada de módulo 1.

El volumen de una variedad de dimensión uno se denomina longitud, el de una variedad de dimensión dos área y para dimensión mayor que tres hipervolumen.

Longitud de una curva

1. Calculemos la longitud de una curva dada en cartesianas.

Sea $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $\sigma(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ una curva. $\mathbb{R}^n$ es una variedad riemanniana con la métrica $T_2 = dx_1\otimes dx_1+\cdots+dx_n\otimes dx_n$. La curva σ (subvariedad de $\mathbb{R}^n$) con la métrica $T_{2|\sigma}$ es una variedad riemanniana.

$$T_{2|\sigma} = dx_1(t)\otimes dx_1(t)+\cdots+dx_n(t)\otimes dx_n(t) = \sum_i {x'}_i(t)^2\cdot dt\otimes dt$$

La forma de longitud de σ, w_σ en la coordenada t es $w_\sigma = \sqrt{\sum_i {x'}_i(t)^2}\cdot dt$ y

$$\text{Longitud de } \sigma \text{ entre } t_0 \text{ y } t_1 := \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\sum_i {x'}_i(t)^2}\cdot dt.$$

En particular, si la curva es la gráfica de una función $f(x)$, es decir, la curva $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, f(x)$, entonces

$$\text{Longitud de la gráfica de } f \text{ entre } x_0 \text{ y } x_1 := \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+f_x^2} \cdot dt.$$

2. Calculemos la longitud de una curva plana dada en coordenadas polares ρ, θ.

Sea $\sigma\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \times S^1$, $\sigma(t) = (\rho(t), \theta(t))$. Recordemos que la relación entre las coordenadas cartesianas y las polares es $x_1 = \rho \cdot \cos\theta$, $x_2 = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$. Luego,

$$\begin{aligned} dx_1 &= \cos\theta \cdot d\rho - \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta \\ dx_2 &= \operatorname{sen}\theta \cdot d\rho + \rho \cdot \cos\theta \cdot d\theta \end{aligned}$$

y $T_2 = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 = \ldots = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\theta \otimes d\theta$. Ahora ya,

$$T_{2|\sigma(t)} = ({\rho'}^2 + \rho^2 \cdot {\theta'}^2) \cdot dt \otimes dt$$

y

$$\text{Longitud de } \sigma \text{ entre } t_0 \text{ y } t_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{{\rho'}^2 + \rho^2 \cdot {\theta'}^2} \cdot dt$$

3. Supongamos ahora que la curva viene dada en implícitas $C \equiv p(x, y) = 0$ (donde x, y son las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$). Un campo normal a la curva es $D = T^2(dp(x, y)) = p_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + p_y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$. Sea $N = D/\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. Por tanto, la forma de longitud de C es $w_C = i_N(dx \wedge dy) = \frac{p_x \cdot dy - p_y \cdot dx}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}$. Supongamos que $x, p(x, y)$ forman un sistema de coordenadas, entonces en C, $0 = dp(x, y) = p_x dx + p_y dy$ y $dy = -\frac{p_x}{p_y} \cdot dx$. En conclusión si parametrizamos C por x, tenemos que

$$\text{Longitud de } \sigma \text{ entre } x_0 \text{ y } x_1 = \int_C \frac{p_x \cdot dy - p_y \cdot dx}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} = \ldots = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{p_x^2}{p_y^2}} \cdot dx$$

que coincide con el cálculo de 1., si consideramos la parametrización $x \mapsto (x, y(x))$ (y es función de x en C), y recordamos que en C, $0 = dp = p_x dx + p_y dy$, luego $dy = -\frac{p_x}{p_y} dx$.

Área de una superficie

1. El área del círculo C de radio r, que en coordenadas polares es la región definida por $\{0 < \rho \leq r, 0 < \theta \leq 2\pi\}$, es igual a

$$\int_C \sqrt{|T_2|} \cdot d\rho \wedge d\theta = \int_{\substack{0 < \rho \leq r \\ 0 < \theta \leq 2\pi}} \rho \cdot d\rho \cdot d\theta = \int_0^r 2\pi \cdot \rho d\rho = \pi \cdot \rho^2|_0^r = \pi \cdot r^2$$

El área de la región del plano limitada por la gráfica de una función $y = f(x)$ (supongamos $f(x) \geq 0$ y coordenadas cartesianas x, y) , es por definición $\int_A dx \wedge dy$, donde A es la región del plano limitada por la gráfica $L_1 = \{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\}$, el eje OY, $L_2\{y = 0, a \leq x \leq b\}$ y las rectas $L_3 = \{x = a,\ 0 \leq y \leq f(a)\}$, $L_4 = \{x = b,\ 0 \leq y \leq f(b)\}$ (no me preocupo por las orientaciones, pero sí del resultado final). Por el teorema de Stokes

$$\int_A dx \wedge dy = \int_{L_1 \cup \cdots \cup L_4} y \cdot dx = \int_{L_1} y \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

2. Calculemos el área del triángulo T limitado por la gráfica de una función (dada en polares) $\rho = \rho(\theta)$ y el origen:

$$\text{Área del triángulo } T = \int_T \sqrt{|T_2|} \cdot d\rho \wedge d\theta = \int_T \rho \cdot d\rho \wedge d\theta = \int_{\partial T} \frac{\rho^2}{2} \cdot d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\rho(\theta)^2}{2} \cdot d\theta$$

3. Calculemos el área de la superficie S que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x)$ alrededor del eje OX.

Consideremos coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$, x, ρ, θ, es decir, $x = x$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \theta$. En estas coordenadas $S = \{\rho = f(x), a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, x, θ son un sistema de coordenadas en S y $d\rho = df(x) = f' dx$ en S.

$T_2 = dx \otimes dx + d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\theta \otimes d\theta$ en coordenadas cilíndricas. Por tanto, $T_{2|S} = (1 + f'^2) \cdot dx \otimes dx + f^2 \cdot d\theta \otimes d\theta$ y

$$\text{Área de S} = \int_S \sqrt{|T_{2|S}|} \cdot dx \wedge d\theta = \int_S \sqrt{1 + f'^2} \cdot f \cdot dx \wedge d\theta = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

Igualmente se tiene que el área de la superficie S que se obtiene al girar la curva plana parametrizada $(x_1(t), x_2(t))$ alrededor del eje OX es

$$\int_{t_0}^{t_1} 2\pi \cdot x_2(t) \cdot \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2} \cdot dt \qquad (*)$$

El área de la superficie de la esfera (que se obtiene al girar la semicircunferencia $\{(r \cdot \cos t, r \cdot \operatorname{sen} t), 0 \leq t \leq \pi\}$ alrededor del eje OX) es

$$\int_0^{\pi} 2\pi \cdot r \cdot \operatorname{sen} t \cdot \sqrt{r^2} \cdot dt = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

El área de la superficie tórica que se obtiene al girar la circunferencia $\{(r \cdot \cos t, a + r \cdot \operatorname{sen} t)\}$, $a \geq r$ alrededor del eje OX es

$$\int_0^{2\pi} 2\pi \cdot (a + r \cdot \operatorname{sen} t) \cdot \sqrt{r^2} \cdot dt = 4 \cdot \pi^2 \cdot a \cdot r$$

Veamos que la fórmula $(*)$ está diciendo que el área de una superficie de revolución es la longitud de una sección por el perímetro de la circunferencia que describe el centro de gravedad de una sección: Si tenemos dos masas m y m' en los puntos del plano $x = (x_1, x_2)$ y $x' = (x'_1, x'_2)$ el centro de gravedad de ambas masas es $\frac{m\cdot x + m'\cdot x'}{m+m'}$. Si tenemos una curva (homogénea) en el plano, que troceamos en incrementos Δ_i, el centro de gravedad de la curva es $\frac{\sum x_i\cdot \Delta_i}{\sum \Delta_i}$ es decir, el centro de gravedad de la curva $C \equiv \{(x_1(t), x_2(t)\}$, de forma de longitud $w_C = \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2}\cdot dt$ es

$$\frac{\int_C x\cdot w_C}{\int_C w_C} = \frac{(\int_C x_1\cdot w_C, \int_C x_2\cdot w_C)}{\text{Long. } C}$$

El perímetro de la circunferencia (alrededor del eje OX) que describe el centro de gravedad es

$$2\pi\cdot\frac{\int_C x_2 w_C}{\text{Long. } C}$$

Por tanto,

$$2\pi\cdot\frac{\int_C x_2\cdot w_C}{\text{Long. } C}\cdot\text{Long. } C = \int_{t_0}^{t_1} 2\pi\cdot x_2(t)\cdot \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2}\cdot dt$$

Volúmenes

1. Consideremos en el plano una región A y sea $V \subset \mathbb{R}^3$ el cuerpo de revolución obtenido al girar la región S alrededor del eje OX. Sean x_1, x_2, x_3 coordenadas cartesianas y x_1, ρ, θ coordenadas cilíndricas, es decir, $x_1 = x_1$, $x_2 = \rho\cdot\operatorname{sen}\theta$, $x_3 = \rho\cdot\cos\theta$. Un punto $(x_1, x_2, x_3) \in V \iff (x_1, \rho) \in A$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Por tanto, el volumen del cuerpo revolución es

$$\int_V dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 = \int_{A\times[0,2\pi]} \rho\cdot dx_1\wedge d\rho\wedge d\theta = \int_A 2\pi\rho\cdot dx_1\wedge d\rho = \int_A 2\pi x_2\cdot w_A$$

donde w_A es la forma de área de A y la última igualdad es un simple cambio de notación. Argumentando como más arriba el lector puede probar que el volumen de un cuerpo de revolución es el es el área de la región A por el perímetro de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la región A.

Calculemos el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida entre la gráfica de una función $f(x)$ y el intervalo $[a, b]$ del eje OX:

$$\int_V dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 = \int_A 2\pi\rho\cdot dx_1\wedge d\rho = \int_a^b \pi f(x)^2\cdot dx.$$

Calculemos el volumen del toro “macizo”, que se obtiene al girar el círculo C del plano OXY de radio r y centrado en $(0, a)$ alrededor del eje OX. Consideremos en el plano las coordenadas ρ, θ, con $x_1 = \rho\operatorname{sen}\theta$ y $x_2 = a + \rho\cos\theta$, entonces

$$\text{Vol. Toro} = \int_C 2\pi \cdot x_2 \cdot w_C = \int_{[0,r]\times[0,2\pi]} 2\pi(a+\rho\cos\theta)\cdot\rho\cdot d\rho\wedge d\theta = \int_0^r 4\pi^2\cdot a\cdot\rho\cdot d\rho = 2\cdot\pi^2\cdot a\cdot r^2.$$

El volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX el triángulo T de vértice el origen y lado opuesto un arco de curva $\rho = \rho(\theta)$ (en coordenadas polares) es

$$\int_T 2\pi x_2 w_T = \int_{0<\rho\leq\rho(\theta),\theta\in[\theta_0,\theta_1]} 2\pi\cdot\rho\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\rho\cdot d\rho\wedge d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{2\pi}{3}\cdot\rho(\theta)^3\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot d\theta$$

2. Calculemos el volumen del cuerpo de revolución V obtenido al girar alrededor del origen, pasando por el eje OZ, cada punto del "triángulo del plano OXY" de vértice el origen y lado opuesto un arco de curva. Consideremos coordenadas esféricas ρ,θ,ϕ, es decir,

$$x_1 = \rho\cos\theta\cos\phi, \quad x_2 = \rho\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad x_3 = \rho\operatorname{sen}\phi$$

Sea la ecuación de la curva plana en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$. Entonces, $(x_1,x_2,x_3)\in V \iff \theta_0\leq\theta\leq\theta_1$, $0\leq\phi\leq 2\pi$ y $0<\rho\leq f(\theta)$ y

$$\text{Vol. } V = \int_V dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 = \int \rho^2|\cos\phi|\cdot d\rho\wedge d\theta\wedge d\phi = \int 4\rho^2\cdot d\rho\wedge d\theta = \frac{4}{3}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\rho(\theta)^3\cdot d\theta$$

La esfera de radio r se obtiene al girar la curva $\rho = r$ (con $\theta\in[0,\pi]$) alrededor del origen, luego su volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Hipervolumen

1. Calculemos el volumen de la bola de radio r, $B = \{(x_1,\dots,x_4)\,|\,x_1^2+\dots+x_4^2\leq r^2\}$, de $\mathbb{R}^4$. Consideremos coordenadas hiperesféricas ρ,θ,ϕ,φ, es decir,

$$x_1 = \rho\cos\theta\cos\phi\cos\varphi, \quad x_2 = \rho\operatorname{sen}\theta\cos\phi\cos\varphi, \quad x_3 = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\varphi, \quad x_4 = \rho\operatorname{sen}\varphi$$

$B = \{0<\rho\leq r, 0\leq\theta<2\pi, -\pi/2\leq\phi\leq\pi/2, -\pi/2\leq\varphi\leq\pi/2\}$ y $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_4 = \rho^3\cos\phi\cos^2\varphi\cdot d\rho\wedge d\theta\wedge d\phi\wedge d\varphi$ y

$$\text{Vol. } B. = \int_{[0,r]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times[-\pi/2,\pi/2]} \rho^3\cos\phi\cos^2\varphi\cdot d\rho\wedge d\theta\wedge d\phi\wedge d\varphi = \frac{\pi^2 r^4}{2}$$

2. Sea X una variedad diferenciable de dimensión n, w_X una forma de volumen en X y $t\colon X\to\mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$-diferenciable, tal que $d_x t\neq 0$ para todo $x\in X$. Denotemos $X_s = \{x\in X\colon t(x) = s\}$, que si no es vacía es una subvariedad diferenciable de X de dimensión $n-1$. Sea D un campo de vectores tal que $D(t) = 1$. La $(n-1)$-forma diferenciable $i_D w_X$ restringida a X_s, es una $(n-1)$-forma de volumen de X_s y no depende del campo D escogido: Es un problema local en un entorno U_x de cada

punto x. Podemos suponer que U_x está coordenado por $t, x_2, \dots, x_n$. Entonces, $D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=2} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y una base de campos de $\mathfrak{Der}_{X_s}$ es $\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Entonces, $i_D w_X(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = w_X(D, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = w_X(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) \neq 0$ y no depende el campo D escogido. Así pues podemos definir en cada X_s la forma de volumen $w_{X_s} := (i_D w_X)_{|X_s}$. Sea $X_{t_0}^{t_1} = \{x \in C \colon t(x) \in [t_0, t_1]\}$ y f una función con soporte compacto. Probemos que

$$\int_{X_{t_0}^t} f \cdot w_X = \int_{t_0}^t \left(\int_{X_s} f \cdot w_{X_s} \right) \cdot ds.$$

Observemos que $w_X = dt \wedge i_D w_X$ ya que al contraer por el campo D coinciden. En U_x, $w_X = g \cdot dt \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ y $w_{X_s} = (i_D w_X)_{|X_s} = g \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{X_{t_0}^t \cap U_x} f \cdot w_X &= \int_{X_{t_0}^t \cap U_x} fg \cdot dt \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{t_0}^t \left(\int_{X_s \cap U_x} fg \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \cdot ds \\
&= \int_{t_0}^t \left(\int_{X_s \cap U_x} f \cdot w_{X_s} \right) \cdot ds.
\end{aligned}$$

Si $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ recubren sop(f) y $\{\phi_i\}$ es una partición de la unidad subordinada al recubrimiento de X, $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}, X - \text{sop}(f)$, entonces

$$\int_{X_{t_0}^t} f \cdot w_X = \sum_i \int_{X_{t_0}^t} \phi_i \cdot f \cdot w_X = \sum_i \int_{t_0}^t \left(\int_{X_s} \phi_i \cdot f \cdot w_{X_s} \right) \cdot ds = \int_{t_0}^t \left(\int_{X_s} f \cdot w_{X_s} \right) \cdot ds.$$

Si (X, T_2) es una variedad diferenciable riemanniana orientada, w_X es su forma de volumen y suponemos que $T^2(dt, dt) = 1$. El campo $D := i_{dt} T^2$, cumple que $D(t) = D(dt) = T^2(dt, dt) = 1$ y $T_2(D, D) = T^2(dt, dt) = 1$. Entonces w_{X_s} es la forma de volumen de la variedad riemanniana X_s, porque $i_D w_X$ es una $(n-1)$-forma de módulo 1.

Derivando

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{X_{t_0}^t} f \cdot w_X = \int_{X_t} f \cdot w_{X_t}.$$

Apliquemos esta fórmula para calcular el volumen de $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1^2 + \cdots + x_4^2 = r^2\}$:

$$\text{Vol. } S = (\text{Vol.}\{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1^2 + \cdots + x_4^2 \leq r^2\})' = \left(\frac{\pi^2 r^4}{2}\right)' = 2\pi^2 r^3.$$

6.7. Problemas

1. Sea $A \cdot x^t = b^t$ un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales. Calcula los x tales que la función $f(x) := ||A \cdot x^t - b^t||$ es mínima. Entre todos éstos calcula el de norma mínima.

   Solución: $||A \cdot x^t - b^t||$ es mínimo si y solo si $g(x) = (x \cdot A^t - b) \cdot (A \cdot x^t - b^t)$ es mínimo. Tenemos que calcular los x tales que $g' = 0$, es decir, $dg = 0$. Ahora bien,

   $$\begin{aligned}
   0 = dg &= dx \cdot A^t \cdot (A \cdot x^t - b^t) + (x \cdot A^t - b) \cdot A \cdot dx^t \\
   &= 2dx \cdot A^t \cdot (A \cdot x^t - b^t)
   \end{aligned}$$

para todo i, si y solo si $A^t \cdot A \cdot x^t = A^t \cdot b^t$. Si tomamos la matriz de segundas derivadas de $g(x)$ obtenemos la matriz $A \cdot A^t$ que es una métrica semidefinida positiva. Por tanto, los mínimos locales son las soluciones de $A^t \cdot A \cdot x^t = A^t \cdot b^t$. Observemos que $\operatorname{Ker}(A^t \cdot A) = \operatorname{Ker} A$, porque si $y \notin \operatorname{Ker}(A^t \cdot A)$, entonces $y \cdot A^t \cdot A \cdot y^t = (A \cdot y^t)^t \cdot (A \cdot y^t) > 0$. Por tanto, $\operatorname{Im}(A^t \cdot A) = \operatorname{Im} A^t$, existen mínimos y en todos el valor de $f(x)$ es el mismo.

Entre los x tales que $A^t \cdot A \cdot x^t = A^t \cdot b^t$ tenemos que calcular el que tiene norma $||x||$ mínima (o $x \cdot x^t$ sea mínimo). Por los multiplicadores de Lagrange, tendremos que $d(x \cdot x^t) = 2x \cdot dx^t$ tiene que ser combinación lineal de las filas de la matriz $d(A^t \cdot A \cdot x^t - A^t \cdot b^t) = A^t \cdot A \cdot dx^t$. Es decir, x es combinación lineal de las filas de $A^t \cdot A$, o equivalentemente $x^t \in \operatorname{Im}((A^t \cdot A)^t) = \operatorname{Im}(A^t \cdot A) = \operatorname{Im} A^t$.

2. Sea C un conjunto de m puntos (con posibles repeticiones) de $\mathbb{R}^n$ y consideremos la matriz $A = \sum_{a \in C} a^t \cdot a \in M_n(\mathbb{R})$.

   a) Prueba que el punto más cercano a los puntos de C es $\mu = \frac{\sum_{a\in C}}{m}$,

   b) Prueba que una recta de $\mathbb{R}^n$ que mejor se aproxima a C es la recta que pasa por μ y de vector director un autovector de A de autovalor máximo.

   Solución: a) Buscamos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x) := \sum_{a \in C} d(x,a)^2$ sea mínimo. La función $F(x)$ alcanza el mínimo en un $x \in B := \{y \in \mathbb{R}^n : ||y|| \leq 2 \cdot \sum_{a \in C} ||a||\}$, Tenemos que ver cuándo

$$0 = dF(x) = d \sum_{a \in C} d(x,a)^2 = d \sum_{a \in C} (x-a) \cdot (x-a)^t = \sum_{a \in C} 2 \cdot (x-a) \cdot dx^t$$

   Luego, $0 = \sum_{a \in C} (x-a) = m \cdot x - \sum_{a \in C} a$ y $x = \frac{\sum_{a \in C} a}{m} = \mu$.
   b) Buscamos una recta R que pasa por $y \in \mathbb{R}^n$ y de vector director x (que puedo suponer que cumple $x \cdot x^t = 1$) tal que

$$\sum_{a \in C} d(a,R)^2 = \sum_{a \in C} (a-y) \cdot (a-y)^t - \sum_{a \in C} (a-y) \cdot x^t =: G(x,y))$$

   sea mínimo. Fijado x, calculemos y tal que $G(x,y)$ sea mínimo. Sea $y^{\langle x \rangle}$ la proyección ortogonal de y sobre $\langle x \rangle$ y $y^{\langle x \rangle^\perp}$ la proyección ortogonal de y sobre $\langle x \rangle^\perp$. La recta que pasa por $y^{\langle x \rangle^\perp}$ y vector director x es igual a la recta que pasa por y y vector director x. Luego,

$$\begin{aligned} G(x,y) = G(x, y^{\langle x \rangle^\perp}) &= \sum_{a \in C} (a - y^{\langle x \rangle^\perp}) \cdot (a - y^{\langle x \rangle^\perp})^t - \sum_{a \in C} a \cdot x^t \\ &= \sum_{a \in C} (a^{\langle x \rangle^\perp} - y^{\langle x \rangle^\perp}) \cdot (a^{\langle x \rangle^\perp} - y^{\langle x \rangle^\perp})^t - \sum_{a \in C} a \cdot x^t \end{aligned}$$

   Por el apartado *a*), $G(x,y)$ alcanza el mínimo en $y^{\langle x \rangle^\perp} = \frac{\sum_{a \in C} a^{\langle x \rangle^\perp}}{m}$. Podemos tomar $y = \frac{\sum_{a \in C} a^{\langle x \rangle^\perp}}{m} + \frac{\sum_{a \in C} a^{\langle x \rangle}}{m} = \frac{\sum_{a \in C} a}{m} = \mu$, que no depende del x fijado.

Nos falta por último calcular el valor $x = b$ (con $b \cdot b^t = 1$ en el que $H(x) = (\sum_{a\in C}(a-\mu)\cdot x^t)^2 = (x \cdot A \cdot x^t$ sea máximo. Tenemos que calcular los puntos $x = b$ en los $dH(x) = dx \cdot A \cdot x^t + x \cdot A \cdot dx^t = 2x \cdot A \cdot dx^t$ es proporcional a $d(x \cdot x^t) = 2xdx^t$. Es decir, ha de cumplirse que

$$b \cdot A \cdot d_b x^t = \lambda \cdot b \cdot d_b x^t$$

para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, luego $b \cdot A = \lambda \cdot b$ y $A \cdot b^t = \lambda \cdot b^t$. Luego, b es un autovector de A (de autovalor λ). Ahora bien, $H(b) = b \cdot A \cdot b^t = \lambda \cdot b \cdot b^t = \lambda$, luego λ es el autovalor mayor de todos.

3. Se dice que la longitud de un arco de circunferencia de radio 1 es el ángulo, medido en radianes, de d¡cho arco. Calcula el ángulo del arco de circunferencia entre los puntos $(1,0)$ y $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

   Solución: El arco de curva considerado es $[0,\alpha] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$. La longitude de este arco de curva es igual a

   $$\int_0^\alpha \sqrt{\cos(t)^2 + \operatorname{sen}(t)^2} \cdot dt = \int_0^\alpha 1 \cdot dt = t]_0^\alpha = \alpha.$$

4. **Trompeta de Torricelli:** Prueba que el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función $\frac{1}{x}$ definida en $(1,\infty)$ es infinita. Prueba que el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar alrededor del origen la región comprendida entre la gráfica anterior y el intervalo $(1,\infty)$ del eje OX es igual a π.

   Solución: El área es igual

   $$\int_1^\infty 2\pi \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + (\frac{1}{x})'^2} \cdot dx = \int_1^\infty \frac{2\pi}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot dx \geq \int_1^\infty \frac{2\pi}{x} \cdot dx = 2\pi \ln(x)]_1^\infty = \infty.$$

   El volumen es $\int_1^\infty \pi \cdot (\frac{1}{x})^2 \cdot dx = \frac{-\pi}{x}]_1^\infty = \pi$.

5. Demuestra la **segunda ley de Kepler**.

   Solución: Tenemos que probar que el área barrida por la semirecta que une a un planeta (digamos la Tierra) con el Sol crece de modo constante a lo largo del tiempo. Consideremos que el Sol está en el origen de coordenadas y que la trayectoria del planeta en función del tiempo es $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. En un incremento de tiempo barre un triángulo de lados $x(t)$ y $x'(t)$, cuyo área es $\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x \cdot x & xx' \\ x'x & x'x' \end{vmatrix}}$. Luego el área barrida entre t_0 y t_1 es $\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x\cdot x)(x'\cdot x')-(x\cdot x')^2}}{2}\, dt$. [4]

[4] De otro modo: Si consideramos las coordenadas $(x_1, x_2) = \lambda \cdot (x_1(t), x_2(t))$ entonces $\int_T dx_1 dx_2 = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \sqrt{\begin{vmatrix} \partial_\lambda \cdot \partial_\lambda & \partial_\lambda \cdot \partial_t \\ \partial_t \cdot \partial_\lambda & \partial_t \cdot \partial_t \end{vmatrix}} d\lambda dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x\cdot x)(x'\cdot x') - (x \cdot x')^2} \cdot \lambda \, d\lambda dt \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x\cdot x)(x'\cdot x')-(x\cdot x')^2}}{2}\, dt$.

Tenemos que probar que $(x\cdot x)(x'\cdot x')-(x\cdot x')^2 = cte$ y derivando tenemos que probar que

$$0=[(x\cdot x)(x'\cdot x')-(x\cdot x')^2]' = 2(x'\cdot x)(x'\cdot x')+2(x\cdot x)(x'\cdot x'')-2(x\cdot x')(x'\cdot x'+x\cdot x'').$$

Por la ley de Newton $x'' = \frac{K}{||x||^3}\cdot x$ y sustituyendo x'' por $\frac{K}{||x||^3}\cdot x$ fácilmente concluimos.

Capítulo 7

Cálculo tensorial diferencial

7.1. Diferencial, contracción por un campo, derivada de Lie

1. Teorema : *El morfismo natural $d\colon A \to \Omega_{A/k}$ extiende de modo único a una antiderivación de grado 1 del álgebra exterior de $\Omega_{A/k}$ de cuadrado nulo, es decir, existen morfismos únicos $d_i\colon \Lambda^i\Omega_{A/k} \to \Lambda^{i+1}\Omega_{A/k}$, de modo que $d_0 = d$, $d_{i+1}\circ d_i = 0$ y*

$$d_{n+m}(\Omega_n \wedge \Omega_m) = (d_n\Omega_n)\wedge\Omega_m + (-1)^n\Omega_n \wedge (d_m\Omega_m)$$

Demostración. Estamos obligados a definir $d_1\colon \Omega_{A/k} \to \Lambda^2\Omega_{A/k}$, $adb \mapsto da\wedge db$ (que está bien definida) y en general $d_n(w_1\wedge\cdots\wedge w_n) := \sum_i (-1)^{i-1}\cdot w_1\wedge\cdots\wedge d_1(w_i)\wedge\cdots w_n$.

Obsérvese que $d_n(adb_1\wedge\cdots\wedge db_n) = da\wedge db_1\wedge\cdots\wedge db_n$, luego $d_{i+1}\circ d_i = 0$.

□

2. Notación: *Denotaremos $d_n = d$, si no induce a equivocación, $\Omega^i = \Lambda^i\Omega_{A/k}$, siendo $\Omega^0 = A$. Denotaremos $\Omega^{\cdot} = \overset{\infty}{\underset{i=0}{\oplus}}\Omega^i$. $\Omega^{\cdot}$, con el producto exterior es un álgebra "anticonmutativa".*

3. Definición : Dada $D \in\in \mathrm{Der}_k(A,A)$, definimos $D^L\colon \Omega_{A/k} \to \Omega_{A/k}$, $D^L(adb) = D(a)db + adD(b)$ (que está bien definida).

Es fácil comprobar que $D^L(f\cdot w) = D(f)\cdot w + f\cdot D^L(w)$ y que por tanto, D^L es una derivación de $\Omega_{A/k}$ y por tanto extiende a una única derivación (de grado cero) del álgebra tensorial $T^{\cdot}\Omega_{A/k}$ y por paso al cociente de $\Omega^{\cdot}$. Podemos definir también

$$D^L\colon \mathrm{Der}_k(A,A) = \Omega^*_{A/k} \to \Omega^*_{A/k} = \mathrm{Der}_k(A,A),\ (D^LD')(w) := D(D'(w)) - D'(D^Lw).$$

Si tomamos $w = da$, obtenemos que $(D^LD)(a) = D(D'(a)) - D'(D(a))$, es decir,

$$D^LD' = D\circ D' - D'\circ D =: [D,D']$$

"paréntesis de Lie de las derivaciones D y D'. Puede comprobarse que D^L sobre $\mathrm{Der}_k(A,A)$ es una derivación.

4. Hemos definido D^L sobre A, $\mathrm{Der}_k(A,A)$ y $\Omega_{A/k}$. Podemos extender D^L sobre la A-álgebra tensorial $T^{\cdot}\mathrm{Der}_k(A,A)\otimes_A T^{\cdot}\Omega_{A/k}$, de modo único imponiendo que sea una derivación de grado cero.

5. Proposición: *Sea $D\in \mathrm{Der}_k(A,A)=\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k},A)$. Entonces,*

$$D^L = i_D\circ d + d\circ i_D$$

sobre $\Omega^{\cdot}$ (definimos $i_D(f)=0$, para toda $f\in A$).

Demostración. Por ser i_D y d antiderivaciones de grado -1 y 1 respectivamente, entonces $i_D\circ d + d\circ i_D$ es una derivación de grado cero (como puede comprobarse). Como D^L y $i_D\circ d+d\circ i_D$ coinciden sobre df, entonces son iguales.

□

6. Proposición: $\boxed{D^L\circ d = d\circ D^L}$.

Demostración. $D^L\circ d = (i_D\circ d + d\circ i_D)\circ d = d\circ i_D\circ d$. $d\circ D^L = d\circ(i_D\circ d + d\circ i_D) = d\circ i_D\circ d$. □

7. Proposición: *Sean $D,D'\in \mathrm{Der}_k(A,A)$ dos derivaciones. Entonces*

$$\boxed{D^L\circ i_{D'} - i_{D'}\circ D^L = i_{[D,D']}}$$

sobre $\Omega^{\cdot}$.

Demostración. Por ser D^L una derivación de grado cero y $i_{D'}$ una antiderivación de grado -1. entonces $D^L\circ i_{D'} - i_{D'}\circ D^L$ es una antiderivación de grado -1, que estará determinada por lo que vale sobre cada $da\in\Omega_{A/k}$, que es $i_{[D,D']}$. □

8. Proposición: *Sean $D,D'\in \mathrm{Der}_k(A,A)$ dos derivaciones. Entonces*

$$\boxed{D^L\circ D'^L - D'^L\circ D^L = [D,D']^L}$$

Demostración. $D^L\circ D'^L - D'^L\circ D^L$ y $[D,D']^L$ son derivaciones de $T^{\cdot}\Omega_{A/k}\otimes T^{\cdot}\mathrm{Der}_k(A,A)$ (y $\Omega^{\cdot}$) de grado cero, que coinciden sobre da, para todo $a\in A$, y sobre $\mathrm{Der}_k(A,A)$. □

9. Fórmula de Cartan: *Dada $w\in\Omega_{A/k}$ entonces*

$$\boxed{dw(D,D') = D(w(D')) - D'(w(D)) - w([D,D'])}$$

Demostración. $dw(D,D') = i_{D'}(i_D dw) = i_{D'}((D^L - d\circ i_D)(w)) = (D^L \circ i_{D'} - i_{[D,D']})w - D'w(D) = D(w(D')) - w([D,D']) - D'w(D)$. □

10. Grupo uniparamétrico asociado a un campo de vectores: Sea $D\in \mathfrak{Der}_X$. Argumentando como hemos hecho en la subsección 5.4.2, tenemos que para cada $x\in X$ existe un abierto conexo maximal $U^x\subset\mathbb{R}$ que contiene a 0, tal que existe una (única) aplicación diferenciable $\sigma^x\colon U^x\to X$ de modo que $\sigma^x_*((\frac{\partial}{\partial t})_s) = D_{\sigma^x(s)}$, para todo $s\in U^x$ y $\sigma(0)=x$. Se dice que σ es la curva integral de D que pasa por x. Se cumple que $W=\cup_{x\in X}U^x\times x$ es un abierto de $\mathbb{R}\times X$ y la aplicación $\tau\colon W\to X$, $\tau(t,x):=\sigma^x(t)$ es diferenciable y cumple que $\tau_*(\frac{\partial}{\partial t})_{(s,x)} = D_{\tau(s,x)}$ y $\tau(0,x)=x$, para todo x. Además, τ es la única aplicación cumpliendo estas propiedades. Se dice que τ es el grupo uniparamétrico local asociado a D. Si el soporte de D es compacto, entonces $W=\mathbb{R}\times X$. Por último, si denotamos $\tau_t(x)=\tau(t,x)$, se tiene que

$$\tau_t(\tau_s(x)) = \tau_{t+s}(x)$$

para todo (s,x) y $(t+s,x)\in W$.

11. Dado un difeomorfismo $F\colon X\to Y$ y un campo tensorial (o una forma diferenciable) T en X, se define del modo obvio $F(T)$.

Sea T un campo tensorial (o una r-forma diferenciable), $D\in\mathfrak{Der}_X$ y τ_t el grupo uniparamétrico local asociado a D. Veamos que

$$\boxed{D^LT = \lim_{t\to 0}\frac{\tau_{-t}(T)-T}{t}}\,[1]$$

Si $D_p\neq 0$ entonces en un entorno V de p, $D=\frac{\partial}{\partial z_1}$ en cierto sistema de coordenadas $z_1,\dots,z_n$. Entonces $\tau_t((z_1,\dots,z_n)) = (z_1+t,z_2,\dots,z_n)$, como es de comprobación inmediata. Supongamos que $T=\sum f_{i_1\dots i_r}\cdot dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_r}$, entonces en V

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau_{-t}(T)-T}{t} = \sum\frac{\partial f_{i_1\dots i_r}}{\partial z_1}\cdot dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_r} = D^LT$$

Si $D=0$ en un entorno abierto V de p entonces $\tau_t(x)=x$ para todo $x\in V$, como es de comprobación inmediata. Entonces en V, $D^LT = 0 = \lim_{t\to 0}\frac{\tau_t^*(T)-T}{t}$.

En conclusión, $D^LT=\lim_{t\to 0}\frac{\tau_t(T)-T}{t}$ en un abierto denso de puntos, luego son iguales.

12. Dado un campo tensorial T y el grupo uniparamétrico local τ_t de un campo de vectores D, denotemos $T(t):=\tau_{-t}T$. Hemos probado que su derivada en $t=0$ es D^LT. Observemos que

$$T(t)' = \lim_{s\to 0}\frac{\tau_{-t-s}T-\tau_{-t}T}{s} = \tau_{-t}(\lim_{s\to 0}\frac{\tau_{-s}T-T}{s}) = (D^LT)(t).$$

[1] Definimos $(\tau_{-t}T)_U := \tau_{-t}(T_{\tau_t(U)})$ (estando τ_t definido en U). Si T es covariante, $\tau_{-t}T=\tau_t^*T$ (es decir, $(\tau_{-t}T)_x = \tau^*_{t,x}T_{\tau_t(x)}$). Si S es contravariante, $(\tau_{-t}S)_x = \tau_{-t,\tau_t(x),*}S_{\tau_t(x)}$.

13. Teorema : *Sea $D \in \mathfrak{Der}_X$ y τ_t el grupo uniparamétrico (local) asociado y T un campo de tensores. Entonces,*

1. *$D^L T = 0 \iff T(t) = T$, para todo t, x donde está definido τ (si T es covariante equivale a que $\tau_{t,x}^* T_{\tau_t(x)} = T_x$, si es contravariante a $\tau_{t,x,*} T_x = T_{\tau_t(x)}$).*

2. *$D^L T = h \cdot T \iff T(t) = f(t,x) \cdot T$, para todo t, x donde está definido τ (si T es covariante, $\tau_{t,x}^* T_{\tau_t(x)} \in \langle T_x \rangle$, si T es contravariante $\tau_{t,x,*} T_x \in \langle T_{\tau_t(x)} \rangle$).*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) $T(t)' = D^L T(t) = 0$, luego $T(t)$ es constante.

2. $\Rightarrow$) Escribamos $D^L T = h \cdot T$, es decir, $T(t)' = (h \cdot T)(t) = h(t) \cdot T(t)$. Sea $g(t) = e^{-\int_0^t h(s) \cdot ds}$, entonces $(g(t) \cdot T(t))' = 0$, luego $g(t) \cdot T(t)$ es constante. Por tanto, $g(t) \cdot T(t) = g(0) \cdot T(0)$ y $T(t) = g(t)^{-1} \cdot g(0) \cdot T(0) = e^{\int_0^t h(s) \cdot ds} \cdot T$.

□

14. Definición: Dado $D \in \mathfrak{Der}_X$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$, se dice que f es una integral primera de D si $D(f) = 0$.

Por el teorema anterior, f es una integral primera si y solo si es constante a lo largo de cada curva integral de D.

15. Lema de Poincaré : *Una r-forma diferenciable $w_r \in \Omega^r_{\mathbb{R}^n}$ es cerrada, es decir, cumple que $dw_r = 0$ si y solo si es exacta, es decir, existe una $(r-1)$-forma diferenciable $w_{r-1} \in \Omega^{r-1}_{\mathbb{R}^n}$ tal que $w_r = dw_{r-1}$.*

Demostración. Consideremos el grupo uniparamétrico $\tau \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau((t,x)) = e^t \cdot x$, cuya derivación asociada es $D = \sum_i x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$. Sea $\tau_t(x) = \tau(t,x)$ y denotemos $\tau_t^* w_r =: w_r(t)$. Se cumple que $w_r(t)' = \lim\limits_{s \to 0} \frac{\tau_{t+s}^* w_r - \tau_t^* w_r}{s} = \tau_t^* (\lim\limits_{s \to 0} \frac{\tau_s^* w_r - w_r}{s}) = (D^L w_r)(t)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
w_r = w_r(0) - w_r(-\infty) &= \int_{-\infty}^0 w_r(t)' \cdot dt = \int_{-\infty}^0 (D^L w_r)(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^0 ([i_D d + d i_D] w_r)(t) \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^0 (d i_D w_r)(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^0 d(i_D w_r(t)) \cdot dt = d \int_{-\infty}^0 i_D w_r(t) \cdot dt = dw_{r-1}.
\end{aligned}
$$

□

7.2. Fórmula de Stokes.

1. Definición: Sea X una variedad diferenciable, $B \subset X$ un cerrado y ∂B el borde de B. Diremos que B es una variedad con borde si para todo $p \in \partial B$ existe un entorno coordenado $U, u_1, \dots, u_n$ de p en X de modo que $B \cap U = \{x \in U : u_1(x) \leq 0\}$.

Observemos que $\partial B \cap U \equiv u_1 = 0$, luego ∂B es una subvariedad diferenciable de X. Si w_X es una forma diferenciable de volumen en X que lo orienta (y denotemos $w_U = (w_X)_{|U}$), podemos definir una orientación en ∂B: en $\partial B \cap U$, $(i_{\partial_{u_1}} w_U)_{|\partial B \cap U}$. Si en U, existe otro sistema de coordenadas $v_1, \dots, v_n$ de modo que $B \cap U = \{x \in U : v_1(x) \leq 0\}$, entonces $v_1 = F \cdot u_1$, con $F > 0$ en U (incluso cuando $u_1 = 0$, ya que $d_p v_1 = F(p) \cdot d_p u_1$ si $u_1(p) = 0$, y F ha de ser no nulo en todos los puntos de $u_1 = 0$). Como $w_U = dv_1 \wedge i_{\partial_{v_1}} w_U$, entonces

$$i_{\partial_{u_1}} w_U = \partial_{u_1} v_1 \cdot i_{\partial_{v_1}} w_U + dv_1 \wedge i_{\partial_{u_1}} i_{\partial_{v_1}} w_U$$

y $(i_{\partial_{u_1}} w_U)_{|\partial B \cap U} = F_{|\partial B} \cdot (i_{\partial_{v_1}} w_U)_{|\partial B \cap U}$.

Nota: Cuando escribamos $\int_B w$ querremos decir $\int_{\overset{0}{B}} w$.

2. Lema : *Sea X una variedad diferenciable orientada de dimensión n y $B \subset X$ una variedad con borde. Para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x de modo que para toda $n-1$-forma diferenciable w sobre X de soporte compacto contenido en U se cumple que*

$$\int_B dw = \int_{\partial B} w$$

Demostración. 1. Si $x \notin B$, tómese $U = X - B$. Si w tiene soporte compacto contenido en U entonces $\int_B dw = 0 = \int_{\partial B} w$.

2. Si $x \in \overset{0}{B}$, sea U, $u_1, \dots, u_n$ un entorno coordenado de x, contenido en $\overset{0}{B}$, isomorfo a un cubo, es decir, tenemos

$$U \underset{\sim}{\overset{(u_1,\dots,u_n)}{\longrightarrow}} \bar{U} \subset \mathbb{R}^n, \qquad \bar{U} = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$$

Si w es una $n-1$ forma con soporte compacto incluido en U entonces $\int_{\partial B} w = 0$. Veamos que $\int_B dw = 0$: Por la linealidad de la integral podemos suponer que $w = f du_2 \wedge \cdots \wedge du_n$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_B dw &= \int_U d(f du_2 \wedge \cdots \wedge du_n) = \int_U \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot du_1 \cdots du_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} (\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1) \cdot du_2 \cdots du_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} (f(b_1, u_2, \dots, u_n) - f(a_1, u_2, \dots, u_n)) \cdot du_2 \cdots du_n = 0\end{aligned}$$

porque w es nula sobre los hiperplanos $u_1 = a_1$, $u_1 = b_1$.

3. Si $x \in \partial B$ sea $U, u_1, \dots, u_n$ un entorno coordenado de x tal que $B \cap U \equiv u_1 \leq 0$ y de modo que U sea isomorfo a un cubo $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, como en el caso anterior. Observemos que $\partial B \cap U$ está coordenado por $u_2, \dots, u_n$ y es difeomorfo al cubo $(a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. Consideremos una $n-1$-forma diferenciable con soporte compacto incluido en U.

Escribamos $w=\sum_i f_i du_1\wedge\cdots\wedge\hat{du_i}\wedge\cdots\wedge du_n$. Entonces, $w_{|\partial B}=f_1(0,u_2,\dots,u_n)du_2\wedge\cdots\wedge du_n$ y

$$\int_{\partial B} w=\int_{\partial B\cap U}=\int_{(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)} f_1(0,u_2,\dots,u_n)\cdot du_2\cdots du_n$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\int_B dw=\int_{B\cap U} dw&=\int_{u_1=a_1}^{u_1=0}\int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2}\cdots\int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n}\sum_i(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial u_i}du_1\cdots du_n\\&=\int_{u_1=a_1}^{u_1=0}\int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2}\cdots\int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}du_1\cdots du_n\end{aligned}$$

pues, $\frac{\partial f_i}{\partial u_i}du_1\cdots du_n$ son formas como en 2. nulas sobre los hiperplanos $u_i=a_i$, $u_i=b_i$. Por tanto,

$$\int_B dw=\int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2}\cdots\int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n}(\int_{a_1}^{0}\frac{\partial f_1}{\partial u_1})\cdot du_1\cdots du_n=\int_{u_2=a_2}^{u_2=b_2}\cdots\int_{u_n=a_n}^{u_n=b_n}f_1(0,u_2,\dots,u_n)\cdot du_2\cdots du_n$$

□

3. Teorema de Stokes: *Sea w una $n-1$-forma de soporte compacto sobre X. Se cumple que*

$$\boxed{\int_B dw=\int_{\partial B} w}$$

Demostración. Sea $\{U_1,\dots,U_n\}$ abiertos coordenados que recubran el soporte de w y que satisfagan el lema anterior. Sea $f_1,\dots,f_n,f$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_1,\dots,U_n,X-B\}$. Entonces

$$\int_B dw=\int_B d(\sum_i f_i w)=\sum_i\int_B d(f_i w_i)=\sum_i\int_{\partial B} f_i w_i=\int_{\partial B} f_i w_i=\int_B w$$

□

7.3. Gradiente, divergencia y rotacional

Ssa (X,T_2) una variedad riemanniana. T_2 induce la polaridad, $T_2\colon \mathfrak{Der}_X\to\Omega_X$, $T_2(D):=i_D T_2$. Denotemos por T^2 el morfismo inverso de T_2.

1. Definición: Dada $f\in\mathscr{C}^\infty(X)$ se define $\operatorname{grad} f=T^2(df)$ y diremos que es el gradiente de f.

Dado $p \in X$ y un vector $D_p \in T_pX$, tenemos que

$$D_pf = i_{D_p}d_pf = i_{D_p}T_{2,p}((\operatorname{grad} f)_p) = D_p \cdot (\operatorname{grad} f)_p.$$

Por tanto, el vector D_p de módulo 1, tal que D_pf es máximo es $\frac{\operatorname{grad} f(p)}{||\operatorname{grad} f(p)||}$ y $\frac{\operatorname{grad} f}{||\operatorname{grad} f||}f = ||\operatorname{grad} f||$.

2. Ejemplo: Consideremos la variedad de Riemann $(\mathbb{R}^n, T_2 = \sum_i dx_i \otimes dx_i)$. Dado $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $\operatorname{grad} f = T^2(\sum_i f_{x_i} \cdot dx_i) = \sum_i f_{x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dado $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $t(p) =$ presión en p, se dice que las curvas $t = cte$ son las isobaras, las curvas integrales de $\operatorname{grad} t$ son las curvas de máxima variacion de presión y $\operatorname{grad} t$ se interpreta como el campo de fuerzas originado por las diferencias de presión.

3. Proposición: *Se cumple que*

1. $\operatorname{grad}(\lambda f) = \lambda \operatorname{grad} f$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad} g$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
3. $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

Supongamos que X es orientable y sea $w_X \in \Omega_X^n$ la forma de volumen. Observemos que $\Omega_X^{n+1} = 0$ y por tanto, $dw_X = 0$.

4. Definición: Dado $D \in \mathfrak{Der}_X$ se define la divergencia de D, que denotaremos por $\operatorname{div} D$, como la función que cumple

$$\boxed{D^L w_X = (\operatorname{div} D) \cdot w_X}$$

Observemos que $D^L w_X = (di_D + i_D d)w_X = di_D w_X$. Así pues,

$$\boxed{di_D w_X = (\operatorname{div} D) \cdot w_X}$$

5. Ejemplo: Sea $D = \sum_i f_i \partial_{x_i} \in \mathfrak{Der}_{\mathbb{R}^n}$. Entonces,

$$di_D w_{\mathbb{R}^n} = d(\sum_i (-1)^{i-1} f_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots dx_n = (\sum_i \partial_{x_i} f_i) \cdot w_{\mathbb{R}^n}.$$

Luego, $\operatorname{div}(\sum_i f_i \partial_{x_i}) = \sum_i \partial_{x_i} f_i$.

6. Teorema de la divergencia: *Sea $B \subset X$ una subvariedad con borde compacta. Sea w_X una forma de volumen en X, N un campo normal al borde ∂B de módulo 1 y $w_{\partial B}$ la forma de volumen en ∂B. Sea D un campo diferencial de vectores en X. Entonces por el teorema de Stokes*

$$\int_B (\operatorname{div} D) \cdot w_X = \int_{\partial B} i_D w_X = \int_{\partial B} (D \cdot N) \cdot w_{\partial B}$$

Se dice que $\int_{\partial B}(D\cdot N)\cdot w_{\partial B}$ es el flujo de D a través de ∂B.

7. Proposición: $\operatorname{div}(fD) = f\cdot \operatorname{div} D + Df$.

Demostración. $\operatorname{div}(fD)\cdot w_X = (fD)^L w_X = (d\circ i_{fD})w_X = d(i_{fD}w_X) = d(f\cdot i_D w_X) = df\wedge i_D w_X + f d i_D w_X = -i_D(df\wedge w_X) + (i_D df)\wedge w_X + fD^L w_X = Df\cdot w_X + f\operatorname{div} D\cdot w_X$. □

El morfismo $\mathfrak{Der}_X \to \Omega_X^{n-1}$, $D\mapsto i_D w_X$ es un isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(X)$-módulos.

8. Definición: Supongamos además que $\dim X = 3$. Dado $D\in\mathfrak{Der}_X$ se define el rotacional de D, que denotamos por $\operatorname{rot} D$, como el campo que cumple que

$$\boxed{i_{\operatorname{rot} D} w_{\mathbb{R}^3} = d i_D T_2}$$

9. Ejemplo: Sea $D = \sum_{i=1}^{3} f_i\partial_{x_i}\in\mathfrak{Der}_{\mathbb{R}^3}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d i_D T_2 &= d(\sum_{i=1}^{3} f_i dx_i)\\ &= (\partial_{x_1}f_2 - \partial_{x_2}f_1)\cdot dx_1\wedge dx_2 + (\partial_{x_1}f_3 - \partial_{x_3}f_1)\cdot dx_1\wedge dx_3 + (\partial_{x_2}f_3 - \partial_{x_3}f_2)\cdot dx_2\wedge dx_3. \end{aligned}$$

Luego, $\operatorname{rot}(\sum_{i=1}^{3} f_i\partial_{x_i}) = (\partial_{x_2}f_3 - \partial_{x_3}f_2)\cdot\partial_{x_1} - (\partial_{x_1}f_3 - \partial_{x_3}f_1)\cdot\partial_{x_2} + (\partial_{x_1}f_2 - \partial_{x_2}f_1)\cdot\partial_{x_3}$.

10. Teorema: *Sea S una subvariedad diferenciable compacta de dimensión 2 de X (que es una variedad riemanniana orientada de dimensión 3), y N un vector normal a S de módulo 1. Sea $B\subset S$ una subvariedad con borde y sea T un vector tangente a ∂B de módulo 1. Sea D un campo diferencial de vectores en X. Entonces por el teorema de Stokes*

$$\int_B ((\operatorname{rot} D)\cdot N)\cdot w_B = \int_B i_{\operatorname{rot} D} w_{\mathbb{R}^3} = \int_{\partial B} i_D T_2 = \int_{\partial B}(D\cdot T)\cdot w_{\partial B}$$

11. Teorema: *Sea $D\in\mathfrak{Der}_{\mathbb{R}^3}$. Entonces,* $\operatorname{rot}(D) = 0 \iff$ *existe una función $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $D = \operatorname{grad} f$.*

Demostración. $\operatorname{rot} D = 0 \iff 0 = i_{\operatorname{rot} D} w_{\mathbb{R}^3} = d(T_2(D)) \iff T_2(D) = df$, para cierta $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \iff D = T^2(df) = \operatorname{grad} f$ para cierta $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. □

12. Sea C es una curva en X de campo de vectores tangentes de módulo 1, T, y sea F un campo diferencial de vectores en X. Se dice que $\int_C i_D T_2 = \int_C F\cdot T\, w_C$ es la circulación de F a lo largo de C. Si C es la trayectoria de una masa m y F un campo de fuerzas en X, se dice que $\int_C F\cdot T\, w_C$ es el trabajo realizado sobre m a lo largo de C. Un campo de fuerzas F se dice que es conservativo si $\int_C i_F T_2 = 0$ para toda curva cerrada

C, que implica que $\mathrm{rot}F = 0$, que equivale a que F es un gradiente si toda 1-forma cerrada es exacta, que implica que es conservativo.

El campo de fuerzas (gravitatorio) $F = \frac{K}{||x||^3}\cdot(\sum_i x_i\partial_{x_i})$ es conservativo (en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$), porque $i_F T_2 = d||x||^{-1}$

13. Teorema: *Sea $D' \in \mathfrak{Der}_{\mathbb{R}^3}$. Entonces,* $\mathrm{div}D' = 0 \iff$ *existe una derivación D tal que $D' = \mathrm{rot}D$.*

Demostración. $\mathrm{div}(D') = 0 \iff 0 = \mathrm{div}(D')\cdot w_{\mathbb{R}^3} = d(i_{D'}w_{\mathbb{R}^3}) \iff$ Existe $w \in \Omega_{\mathbb{R}^3}$ tal que $i_{D'}w_{\mathbb{R}^3} = dw$. Ahora bien, para toda $w \in \Omega_{\mathbb{R}^3}$ existe una (única) derivación D tal que $w = T_2(D)$. Por tanto, $\mathrm{div}(D') = 0 \iff$ Existe D tal que $i_{D'}w_{\mathbb{R}^3} = dT_2(D) \iff D' = \mathrm{rot}D$, para cierto D. □

14. Ejercicio: $\mathrm{rot} fD = f\cdot\mathrm{rot}D + \mathrm{grad}(f)\times D$.

7.4. Cálculo valorado

1. Definición: Una aplicación $d\colon M \to M\otimes_A \Omega_{A/k}$ diremos que es una diferencial en M, si

1. $d(m+m') = dm + dm'$.
2. $d(am) = adm + m\otimes da$.

2. Ejemplo: La diferencial canónica $d\colon A \to \Omega_{A/k} = A\otimes_A \Omega_{A/k}$ es una diferencial de A (la única salvo multiplicación por elementos de A).

La diferencial $d\colon M \to M\otimes\Omega_{A/k}$ extiende a un morfismo

$$d\colon M\otimes\Omega^{\cdot}_{A/k} \to M\otimes\Omega^{\cdot}_{A/k},\ d(m\otimes\Omega_i) := dm\wedge\Omega_i + m\otimes d\Omega_i$$

(observemos que $dm = \sum\limits_j m_j\otimes w_j$, con $w_j \in \Omega_{A/k}$ y denotamos $dm\wedge\Omega_i = \sum\limits_j m_j\otimes w_j\wedge\Omega_i$). Los elementos de $M\otimes\Omega^i$ los llamaremos i-formas valoradas en M.

Dada otra diferencial $d\colon M' \to M'\otimes\Omega_{A/k}$, tenemos la diferencial

$$d\colon M\otimes_A M' \to M\otimes_A M'\otimes_A \Omega_{A/k},\ d(m\otimes m') := dm\otimes m' + m\otimes dm'$$

(reordenando en el primer sumando los factores del producto tensorial para que todo tenga sentido).

Dadas $m\otimes\Omega_i \in M\otimes\Omega^i$ y $m'\otimes\Omega_j \in M'\otimes\Omega^j$ denotemos $(m\otimes\Omega_i)\wedge(m'\otimes\Omega_j) := m\otimes m'\otimes\Omega_i\wedge\Omega_j \in M\otimes M'\otimes\Omega^{i+j}$. Tenemos el morfismo

$$\begin{array}{ccc} (M\otimes\Omega^{\cdot})\otimes(M'\otimes\Omega^{\cdot}) & \xrightarrow{\wedge} & M\otimes M'\otimes\Omega^{\cdot} \\ w_i\otimes w_j & \mapsto & w_i\wedge w_j \end{array}$$

que cumple que $\boxed{d(w_i\wedge w_j)=dw_i\wedge w_j+(-1)^i w_i\wedge dw_j}$.

Dado $D\in \operatorname{Der}_k(A,A)$, sea $i_D\colon M\otimes\Omega^{\cdot}\to M\otimes\Omega^{\cdot}$, $i_D(m\otimes\Omega_i)=m\otimes i_D\Omega_i$. Obviamente,

$$\boxed{i_D(w_i\wedge w_j)=i_Dw_i\wedge w_j+(-1)^i w_i\wedge i_Dw_j}$$

Sea $D^L\colon M\otimes\Omega^{\cdot}\to M\otimes\Omega^{\cdot}$, definido por $D^L:=i_D\circ d+d\circ i_D$, que resulta ser una derivación, es decir

$$\boxed{D^L(w_i\wedge w_j)=D^Lw_i\wedge w_j+w_i\wedge D^Lw_j}$$

Es sencillo comprobar que

$$\boxed{D^L\circ i_{D'}-i_{D'}\circ D^L=i_{[D,D']}}$$

porque ambos términos son antidervaciones de grado -1 y coinciden sobre $w\in\Omega$ por la proposición 7.1.7.

Denotaremos $D^Lm=i_Ddm=:D^\nabla m$. Dada una 1-forma valorada $w\in M\otimes\Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned} dw(D_1,D_2)=i_{D_2}(i_{D_1}dw)&=i_{D_2}(-d(w(D_1))+D_1^Lw)=-D_2^\nabla(w(D_1))+(i_{D_2}\circ D_1^L)(w)\\ &=D_1^\nabla(w(D_2))-D_2^\nabla(w(D_1))-w([D_1,D_2]). \end{aligned}$$

3. Definición: Una conexión ∇ en un A-módulo M es una aplicación

$$\operatorname{Der}_k(A,A)\times M\to M,\ \ (D,m)\mapsto D^\nabla m,$$

que cumple

1. $(D+D')^\nabla m=(D^\nabla m)+(D'^\nabla m)$.
2. $(aD)^\nabla m=a(D^\nabla m)$.
3. $D^\nabla(am)=(Da)\cdot m+aD^\nabla m$.
4. $D^\nabla(m+m')=D^\nabla m+D^\nabla m'$.

   Para todo $a\in A$, $m,m'\in M$, $D,D'\in\operatorname{Der}_k(A,A)$.

Toda diferencial $d\colon M\to M\otimes_A\Omega_{A/k}$, define la conexión ∇ dada por $D^\nabla m:=i_D(dm)$, que cumple que

$$D^\nabla(am)=i_D(d(am))=i_D(m\otimes da+adm)=(Da)m+ai_Ddm=(Da)m+aD^\nabla m$$

y las demás propiedades exigidas a las conexiones.

A partir de ahora supondremos que $\Omega_{A/k}$ es un A-módulo proyectivo finito generado

$\operatorname{Der}_k(A,A)$ es un A-módulo proyectivo finito generado y $\Omega_{A/k}$ y $\operatorname{Der}_k(A,A)$ son duales entre sí. Además, $M\otimes_A\Omega_{A/k}=\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Der}_k(A,A),M)$ y $m\otimes w\in M\otimes_A\Omega_{A/k}$ pensado en $\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Der}_k(A,A),M)$ es la aplicación lineal $(m\otimes w)(D):=w(D)m$.

4. Proposición : *Supongamos que $\Omega_{A/k}$ es un A-módulo proyectivo finito generado. Existe una correspondencia biunívoca entre conexiones en M y diferenciales de M.*

Demostración. A cada diferencial le hemos asignado ya una conexión lineal. Recíprocamente, dada la conexión ∇ sea $d(m)$, tal que $dm(D) = D^\nabla m$.

□

5. Definición: El morfismo A-lineal $d^2\colon M \to M \otimes \Omega^2$ diremos que es el tensor de curvatura.

6. Proposición: $d^2(m)(D_1, D_2) = D_1^\nabla D_2^\nabla m - D_2^\nabla D_1^\nabla m - [D_1, D_2]^\nabla m.$

Demostración. $i_{D_2}(i_{D_1} d^2 m) = i_{D_2}(D_1^L dm - d i_{D_1} dm) = D_1^L(i_{D_2}(dm)) - dm([D_1, D_2]) - (dD_1^\nabla m)(D_2) = D_1^\nabla D_2^\nabla m - D_2^\nabla D_1^\nabla m - [D_1, D_2]^\nabla m.$ □

Recordemos que $\mathrm{Hom}_A(M, M \otimes \Omega^2) = \mathrm{End}_A M \otimes \Omega^2$. Denotaré por $R \in \mathrm{End}_A(M) \otimes \Omega^2$ al tensor correspondiente a d^2, luego $R(m) = d^2 m$. Observemos que

$$R(D_1, D_2, m) = d^2(m)(D_1, D_2) = D_1^\nabla D_2^\nabla m - D_2^\nabla D_1^\nabla m - [D_1, D_2]^\nabla m.$$

Si tenemos dos módulos M, N con sendas diferenciales, podemos definir una diferencial en $\mathrm{Hom}_A(M, N)$:

$$\begin{array}{rcl} d\colon \mathrm{Hom}_A(M,N) & \to & \mathrm{Hom}_A(M,N) \otimes \Omega_{A/k} = \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes \Omega_{A/k}) \\ T & \mapsto & d(T), \quad \text{donde } d(T)(m) := d(T(m)) - (T \otimes 1)(dm). \end{array}$$

Un morfismo $T\colon M \to N$ de A-módulos diremos que es diferencial si $dT = 0$, es decir, $d \circ T = T \circ d$. Si el morfismo T es diferencial, entonces $T\colon M \otimes \Omega^\cdot \to M' \otimes \Omega^\cdot$ conmuta con d, i_D, D^L. El morfismo $\mathrm{Hom}_A(M,N) \otimes M \to N$, $\phi \otimes m \mapsto \phi(m)$, resulta ser diferencial. La composición

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \otimes \Omega^\cdot \otimes M \otimes \Omega^\cdot \xrightarrow{\wedge} \mathrm{Hom}_A(M,N) \otimes M \otimes \Omega^\cdot \to N \otimes \Omega^\cdot$$

con abuso de notación la denotaremos $\wedge$.

7. Proposición: *Dada $w \in M \otimes \Omega^i$, entonces*

$$\boxed{d^2 w = R \wedge w}$$

Demostración. Escribamos $w = m \otimes \Omega_i$. Entonces, $d^2(m \otimes \Omega_i) = d(dm \wedge \Omega_i + m \otimes d\Omega_i) = d^2 m \wedge \Omega_i - dm \wedge d\Omega_i + dm \wedge d\Omega_i + m \otimes d^2\Omega_i) = d^2 m \wedge \Omega_i = R \wedge (m \otimes \Omega_i) = R \wedge w.$ □

8. Identidad diferencial de Bianchi : $dR = 0$.

Demostración. La diferencial del morfismo $M \xrightarrow{d^2} M \otimes \Omega^2$ es nula ya que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "d"] & M \otimes \Omega^2 \arrow[d, "d"] \\ M \otimes \Omega \arrow[r, "d^2"] & M \otimes \Omega^3 \end{tikzcd}$$

es conmutativo. □

9. Definición: Una conexión sobre $M = \mathrm{Der}_k(A,A)$ se llama conexión lineal.

Supongamos que $\Omega_{A/k}$ es un A-módulo libre finito generado y que tenemos una conexión lineal. Pensemos $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, \Omega_{A/k}) = \mathrm{Der}_k(A,A) \otimes \Omega$ como una 1-forma valorada (no como endomorfismo). Denotemos $d\,\mathrm{Id} = \mathrm{Tor}_\nabla \in \mathrm{Der}_k(A,A) \otimes \Omega^2$ y calculemos

$$\mathrm{Tor}_\nabla(D_1,D_2) = D_1^\nabla(\mathrm{Id}(D_2)) - D_2(\mathrm{Id}(D_1)) - \mathrm{Id}([D_1,D_2]) = D_1^\nabla D_2 - D_2^\nabla D_1 - [D_1,D_2]$$

Supongamos que ∇ es una conexión lineal simétrica, es decir, $\mathrm{Tor}_\nabla = 0$. Entonces, $0 = d^2(\mathrm{Id}) = R \wedge \mathrm{Id}$.

10. Identidad lineal de Bianchi: *Si ∇ es una conexión lineal simétrica entonces*

$$R \wedge \mathrm{Id} = 0$$

Interpretemos esta igualdad: $0 = R \wedge \mathrm{Id}(D_1,D_2,D_3) = (i_{D_1}(R \wedge \mathrm{Id}))(D_2,D_3) = (i_{D_1}R) \wedge \mathrm{Id} + R \wedge i_{D_1}\mathrm{Id})(D_2,D_3) = R(D_1,D_2)(\mathrm{Id}(D_3)) - R(D_1,D_3)(\mathrm{Id}(D_2)) + R(D_2,D_3)(\mathrm{Id}(D_1))$. Luego,

$$\boxed{R(D_1,D_2)(D_3) + R(D_3,D_1)(D_2) + R(D_2,D_3)(D_1) = 0}$$

11. Proposición: *Sea ∇ una conexión lineal, $d\colon \Omega \to \Omega \otimes \Omega$ la diferencial definida por ∇ y $\pi\colon \Omega \otimes \Omega \to \Omega^2$ el morfismo natural de paso al cociente. Sea d_C la diferencial de Cartan. Se cumple que*

$$\pi \circ d - d_C = \mathrm{Tor}_\nabla \in \mathrm{Der}_k(A,A) \otimes \Omega^2$$

Una conexión lineal es simétrica si y solo si $\pi \circ d = d_C$

Demostración. $\pi(d(w))(D_1,D_2) = D_1^\nabla w(D_2) - D_2^\nabla w(D_1) = D_1(w(D_2)) - w(D_1^\nabla D_2) - D_2(w(D_1)) + w(D_2^\nabla D_1)$. Por la fórmula de Cartan, $d_C(w)(D_1,D_2) = D_1(w(D_2)) - D_2(w(D_1)) - w([D_1,D_2])$. Por tanto, $(\pi \circ d - d_C)(w, D_1, D_2) = \mathrm{Tor}_\nabla(w, D_1, D_2)$. □

Si definimos $D^{\nabla'} D' = D^\nabla D - \frac{1}{2}\mathrm{Tor}_\nabla(D,D')$, se tiene que ∇' es simétrica.

Consideremos los morfismos canónicos $\pi_1\colon \Omega \otimes \Omega \to \Omega^2$, $\pi_2\colon \Omega \otimes \Omega \to S^2\Omega$. Consideremos el isomorfismo $\phi\colon \Omega \otimes \Omega = \Lambda^2\Omega \oplus S^2\Omega$, $\phi(w) = (\pi_1(w), \pi_2(w))$. Dada una conexión lineal simétrica y el morfismo diferencial $d\colon \Omega \to \Omega \otimes \Omega$, tenemos que $\pi_1 \circ d = d_C$ y

$\pi_2 \circ d = d_s$, con $d_s(w)(D_1, D_2) = (D_1^\nabla w)(D_2) + (D_2^\nabla w)(D_1)$. Se cumple que d_s es k-lineal y $d_s(f \cdot w) = (df) \cdot w + f \cdot d_s w$ y diremos que d_s es una diferencial simétrica.

Dar la conexión lineal simétrica ∇ equivale a dar la diferencial simétrica $d_s \colon \Omega \to S^2\Omega$.

Sea $d_s \colon S^m\Omega \to S^{m+1}\Omega$, $d_s(w_1 \cdots w_m) := \sum_i w_1 \cdots w_{i-1} \cdot d_s w_i \cdots w_m$. Para $m = 0$ definimos $d_s = d$.

7.5. Módulos de jets y operadores diferenciales

Sean M y N dos A-módulos. Se dice que $F \colon N \to M$ es un operador diferencial de orden 0 si $F(an) = a \cdot F(n)$, para todo $a \in A$ y $n \in N$, es decir, si F es un morfismo de A-módulos.

1. Definición: Una aplicación k-lineal $F \colon N \to M$ se dice que es un operador diferencial de orden $n-1$ si

$$\sum_{\{i_1,\ldots,i_r\}\cup\{j_1,\ldots,j_{n-r}\}=\{1,\ldots,n\}} (-1)^r a_{i_1} \cdots a_{i_r} \cdot F(a_{j_1} \cdots a_{j_{n-r}} \cdot n) = 0$$

para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $n \in N$.

Las derivaciones son operadores diferenciales de orden 1.

2. Proposición: *$F \colon N \to M$ es un operador diferencial de orden $n > 0$ si y solo si $[F, a] := F \circ a \cdot - a \cdot F$ es un operador diferencial de orden $n-1$ para todo $a \in A$.*

3. Proposición: *La composición de un operador diferencial de orden r con uno de orden s es un operador diferencial de orden $r+s$.*

Demostración. Sea $F \colon N \to M$ un operador diferencial de orden r y $G \colon M \to M'$ un operador diferencial de orden s. Procedamos por inducción sobre $r+s$. Por hipótesis de inducción

$$[a, G \circ F] = a \cdot G \circ F - G \circ F \circ a \cdot = (a \circ G \circ F - G \circ a \cdot \circ F) + (G \circ a \cdot \circ F - G \circ a \cdot \circ F) = [a, G] \circ F + G \circ [a, F]$$

es un operador diferencial de orden $r+s-1$, luego $G \circ F$ es un operador diferencial de orden $r+s$.

□

4. Notación: $\mathrm{Diff}_k^n(N, M)$ denota el conjunto de opradores diferenciales de N en M de orden N.

5. Proposición: *Sea $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal tal que $A/\mathfrak{m} = k$. Supongamos que M es un $A/\mathfrak{m}$-módulo. Entonces,*

$$\mathrm{Diff}_k^n(N, M) = \mathrm{Hom}_k(N/\mathfrak{m}^{n+1} \cdot N, M)$$

Demostración. Todo aplicación k-lineal $F\colon N/\mathfrak{m}^{n+1}\cdot N \to M$ es un operador diferencial de orden n: Si $a \in \mathfrak{m}$ entonces $[F,a]$ se anula en $\mathfrak{m}^n \cdot \bar{N} \subset N/\mathfrak{m}^{n+1}$, es decir, tenemos $[F,a]\colon N/\mathfrak{m}^n \cdot N \to M$, que es un operador diferencial de orden $n-1$, por hipótesis de inducción. Si $a \in k$ entonces $[F,a]=0$. En conclusión, $[F,a]$ es un operador diferencial de orden $n-1$ y F es un operador diferencial de orden n. Por tanto, si $\pi\colon N \to N/\mathfrak{m}^{n+1}\cdot N$ es el morfismo de paso al cociente $F\circ\pi\colon N \to M$ es un operador diferencial de orden n.

Todo operador diferencial $F\colon N \to M$ de orden n se anula en $\mathfrak{m}^{n+1}\cdot N$ (recordemos que $\mathfrak{m}\cdot M = 0$), por la definición de operador diferencial de orden n. Por tanto, F factoriza vía $N/\mathfrak{m}^{n+1}\cdot N$.

□

6. Definición: Sea M un A-módulo. Diremos que $J_k^n M := (A\otimes_k A/\Delta^{n+1})\otimes_A M$ es el módulo de r-jets de N.

7. Proposición: $\mathrm{Hom}_A(J_k^n N, M) = \mathrm{Diff}_k^n(N,M)$.

En particular, $\mathrm{Hom}_A(J^n_{A/k}, A) = \mathrm{Diff}_k^n(A,A)$.

Demostración. Consideremos $A\otimes_k N$ como $A\otimes A$-módulo, $A\otimes_k A$ como A-álgebra, $A \to A\otimes_k A$, $a\mapsto a\otimes 1$ y M es un $A\otimes_k A/\Delta$-módulo. $\mathrm{Diff}_k^n(N,M) = \mathrm{Diff}_A^n(A\otimes_k N, M)$, $D\mapsto \mathrm{Id}\otimes D$, luego

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}_k^n(N,M) &= \mathrm{Diff}_A^n(A\otimes_k N, M) = \mathrm{Hom}_A((A\otimes_k N)/(\Delta^{n+1}\cdot(A\otimes_k N)), M)\\ &= \mathrm{Hom}_A((A\otimes_k A/\Delta^{n+1})\otimes_A N, M) = \mathrm{Hom}_A(J_k^n N, M).\end{aligned}$$

□

8. Proposición: *Sea* $\mathfrak{m}\subset A$ *un ideal tal que* $A/\mathfrak{m} = k$ *y sea* M *un* A*-módulo. Entonces*

$$(J_k^n M)\otimes_A A/\mathfrak{m} = M/\mathfrak{m}^n\cdot M$$

9. Observación:

$$\mathrm{Diff}_k^n(N,M) = \mathrm{Hom}_A(J^n_{N/k}, M) = \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(J^n_{A/k}, M)) = \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Diff}_k^n(A,M))$$

Explícitamente, a $D \in \mathrm{Diff}_k^n(N,M)$ le asignamos $\tilde{D} \in \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Diff}_k^n(A,M))$, definido por $\tilde{D}(n)(a) := D(an)$ ($\mathrm{Diff}_k^n(A,M)$ lo consideramos A-módulo por la "derecha" $D\cdot a = D\circ a\cdot$).

Dado el morfismo $\mathrm{Id}\colon J^n_{N/k} \to J^n_{N/k}$, tendremos que $j\colon N \to J^n_{N/k}$, $n\mapsto 1\otimes n$ es un operador diferencial de orden n y todo operador diferencial de orden n, $F\colon N\to N'$, es igual a la composición de j y un morfismo de A-módulos $f\colon J^n_{N/k} \to N'$.

La composición,

$$N \xrightarrow{j_N} J^r_{N/k} \xrightarrow{j_{J^r_{N/k}}} J^s_{J^r_{N/k}} = J^s_{A/k}\otimes_A J^r_{A/k}\otimes_A N$$

es un operador diferencial de orden $r+s$, que define un morfismo natural

$$J^{r+s}_{N/k} \to J^s_{A/k} \otimes_A J^r_{N/k},$$

que dualmente es el morfismo natural $\mathrm{Diff}^s_k(N, \mathrm{Diff}^r_k(A,M)) \to \mathrm{Diff}^{r+s}_k(N,M)$, $D \mapsto \tilde{D}$, $\tilde{D}(n) := D(n)(1)$.

Tenemos la cadena de inclusiones (en $\mathrm{Hom}_k(A,A)$)

$$\mathrm{Diff}^1_k(A,A) \hookrightarrow \mathrm{Diff}^2_k(A,A) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{Diff}^n_k(A,A) \hookrightarrow \cdots$$

El dual de la sucesión exacta $0 \to S^n\Omega \to (A\otimes A)/\Delta^{n+1} \to (A\otimes A)/\Delta^n \to 0$ es

$$0 \to \mathrm{Diff}^{n-1}_k(A,A) \to \mathrm{Diff}^n_k(A,A) \overset{\mathrm{simb}_n}{\to} S^n\,\mathrm{Der}_k(A,A) \to 0$$

Se dice que $\mathrm{simb}_n(F)$ es el símbolo del operador F.

10. Notación: Denotemos $\mathrm{Diff}_k(A,A) = \overset{\infty}{\underset{i=0}{\cup}} \mathrm{Diff}^i_k(A,A)$.

Supongamos que A es una k-álgebra lisa, es decir, el morfismo natural $S^n\Omega \to \Delta^n/\Delta^{n+1}$ es un isomorfismo, para todo n.

11. Teorema: *Sea d_s la diferencial simétrica asociada a una conexión lineal simétrica. Los morfismos*

$$(A\otimes A)/\Delta^{n+1} \overset{\phi_n}{\to} A \oplus \Omega \oplus \cdots \oplus S^n\Omega, \quad \overline{a\otimes b} \mapsto a\cdot(b, db, d_s^2 b/2, \dots, d_s^n b/n!)$$

son isomorfismos de A-álgebras y los diagramas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Delta^n/\Delta^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (A\otimes A)/\Delta^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n"] & (A\otimes A)/\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^n\Omega \arrow[r] & A\oplus\Omega\oplus\cdots\oplus S^n\Omega \arrow[r] & A\oplus\Omega\oplus\cdots\oplus S^{n-1}\Omega \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Demostración. Es fácil comprobar que ϕ_n es un morfismo de A-álgebras. Obviamente $\phi_n(\overline{a\otimes 1 - 1\otimes a}) = (0, da, -, ..., -)$, luego, ϕ_n es la identidad sobre Δ^n/Δ^{n+1}. Ahora es fácil ver que el diagrama es conmutativo y demostrar por inducción sobre n que los ϕ_n son isomorfismos. □

12. Corolario: *El morfismo $A/\mathfrak{m}_x^{n+1} \to k \oplus \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1}$, $\bar{f} \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{d_s^i f}{i!}(x)$, es un isomorfismo de k-álgebras.*

Se dice que $\frac{d_s^2 f}{2}(x)$ es el Hessiano de f en x.

13. Teorema: *Sea d_s la diferencial simétrica asociada a una conexión lineal simétrica. Entonces,*

$$S^{\cdot}\,\mathrm{Der}_k(A,A) \overset{\varphi}{=} \mathrm{Diff}_k(A,A),\ \varphi(D_1\cdots D_n)(a) := \frac{d_s^n a}{n!}(D_1,\ldots,D_n)$$

y se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overset{n-1}{\underset{i=0}{\oplus}} S^i\,\mathrm{Der}_k(A,A) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal, "\varphi"] & \overset{n}{\underset{i=0}{\oplus}} S^i\,\mathrm{Der}_k(A,A) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\varphi"] & S^n\,\mathrm{Der}_k(A,A) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Diff}_k^{n-1}(A,A) \arrow[r, hook] & \mathrm{Diff}_k^{n}(A,A) \arrow[r] & S^n\,\mathrm{Der}_k(A,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Además se cumple la "fórmula de Leibniz"

$$\varphi(D_1\cdots D_n)(a\cdot b) = \sum_{\{i_1,\ldots,i_r\}\cup\{j_1,\ldots,j_{n-r}\}=\{1,\ldots,n\}} \varphi(D_{i_1}\cdots D_{i_r})(a)\cdot\varphi(D_{j_1}\cdots D_{j_{n-r}})(b)$$

Ahora, $\mathrm{Diff}_k(A,A)$ vía φ, tiene estructura de álgebra conmutativa graduada:

$$\varphi(D_1\cdots D_n) * \varphi(D'_1\cdots D'_m) := \varphi(D_1\cdots D_n\cdot D'_1\cdots D'_m)$$

Sea $\mathrm{Diff}_+^r(A,A) := \{D \in \mathrm{Diff}_k^r(A,A) \colon D(1) = 0\}$.

14. Proposición:

$\{$*Conexiones lineales simétricas*$\} = \{s \in \mathrm{Hom}_A(S^2\,\mathrm{Der}(A,A), \mathrm{Diff}_+^2(A,A)) \colon \ \mathrm{simb}_2 \circ s = \mathrm{Id}\}$

Demostración. Dada una conexión lineal simétrica, ∇, definimos $s\colon S^2\,\mathrm{Der}(A,A) \to \mathrm{Diff}_+^2(A,A)$ por $s(D_1\cdot D_2) := D_1\circ D_2 - D_1^{\nabla}D_2$. Recíprocamente, dado s definimos $D_1^{\nabla}D_2 := D_1\circ D_2 - s(D_1\cdot D_2)$, que como pertenece al núcleo de simb_2, pertenece a $\mathrm{Der}_k(A,A)$.

□

En $\mathrm{Diff}_k(A,A)$ existe una conexión canónica: $D^{\nabla}F := D\circ F$, para todo $F \in \mathrm{Diff}_k(A,A)$ y $D \in \mathrm{Der}_k(A,A)$. Por tanto, existe una diferencial canónica $d\colon\ \mathrm{Diff}_k(A,A)\otimes\Omega_{A,k}$, que extiende a una diferencial en el complejo $\mathrm{Diff}_k(A,A)\otimes\Omega^{\cdot}_{A,k}$. Observemos que $R = d^2 = 0$, porque $R(D_1,D_2) = D_1\circ D_2\circ - D_2\circ D_1\circ - [D_1,D_2]\circ = 0$. Por tanto, $\mathrm{Diff}_k(A,A)\otimes\Omega^{\cdot}_{A,k}$ es un complejo diferencial.

Sea E un A-módulos finito generado libre. Sea $K = S^{\cdot}E\otimes\Lambda^{\cdot}E^*$ el complejo cuya diferencial d es tensorializar por Id, es decir, si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base de E y $\{w_1,\ldots,w_n\}$ es la base dual, entonces

$$d(s_i\otimes\Omega_j) = \sum_r s_i\cdot e_r\otimes w_r\wedge\Omega_j =: \mathrm{Id}\wedge(s_i\otimes\Omega_j)$$

Obviamente, $d^2 = 0$. Graduemos $K = \oplus_r K_r$, donde $K_r := S^{\cdot}E\otimes\Lambda^r E^*$. Obviamente $d(K_r)\subset K_{r+1}$.

15. Lema:

$$H^i(K) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq n \\ \Lambda^n E^* & si\ i = n \end{cases}$$

16. Teorema de Takens: *Se cumple que*

$$H^i(\mathrm{Diff}_k(A,A) \otimes_A \Omega^{\cdot}_{A,k}) = \begin{cases} 0\ si\ i \neq n \\ \Omega^n_{A,k}\ si\ i = n \end{cases}$$

Sea $T_2 \in \Omega \otimes \Omega$ una métrica simétrica no singular y denotemos la polaridad también por

$$T_2 \colon \mathrm{Der}_k(A,A) \to \Omega.$$

Sea $d_s \colon \Omega \to S^2\Omega$, $d_s(w) := T^2(w)^L T_2$. Tenemos pues definida una conexión lineal simétrica en $\mathrm{Der}_k(A,A)$, denominada conexión de Levi-Civita asociada a T_2.

7.6. Apéndice

7.6.1. Sistemas de Pfaff

1. Lema de Nakayama: *Sea M un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo finito generado. Dados $m_1 \ldots, m_n \in M$, si $m_{1,x}, \ldots, m_{n,x}$ generan M_x, entonces existe un entorno abierto U de x tal que $M_U = \langle m_1 \ldots, m_n \rangle_U$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Supongamos que $n = 0$. Escribamos $M = \langle n_1, \ldots, n_r \rangle$. Supongamos que n_1 no es combinación $\mathscr{C}^\infty(X)$-lineal de $n_2, \ldots, n_r$. porque si no lo quitaríamos de la lista. $M_x = 0$, luego $M = \mathfrak{m}_x \cdot M$. Entonces, $n_1 = f_1 n_1 + \cdots + f_r n_r$, con $f_i \in \mathfrak{m}_x$ para todo i. Sea $U = X - \{1 - f_1 = 0\}$, entonces $n_1 = \frac{1}{1-f_1} \cdot (f_2 n_2 + \cdots + f_r n_r)$ en U y $M_U = \langle n_2, \ldots, n_r \rangle_U$ (como $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulo). Repitiendo el argumento anterior, reduciendo U si es preciso, tendremos que $M_U = \langle n_3, \ldots, n_r \rangle_U$. Así sucesivamente, reduciendo U si es preciso, tendremos que $M_U = 0$.

Denotemos $N = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$, entonces

$$(M/N)_x = M_x/N_x = M_x/\langle m_{1,x}, \ldots, m_{n,x} \rangle = 0$$

Luego, existe un entorno abierto U de x tal que $0 = (M/N)_U = M_U/N_U$, y $M_U = N_U$.

□

2. Corolario: *Sea M un $\mathscr{C}^\infty(X)$-submódulo de un módulo libre L. Entonces,*

1. *Dado $m \in M$, si para cada $\alpha \in X$ existe un entorno U_α tal que $m_{U_\alpha} = 0$, entonces $m = 0$.*

2. *Dado $m \in M$, si $m_x = 0$ en L_x, para todo $x \in X$, entonces $m = 0$.*

3. *Supongamos que M es finito generado. Si $M_x = 0$ para todo $x \in X$, entonces $M = 0$.*

Demostración. Escribamos $M \subset \oplus^I \mathscr{C}^\infty(X)$.

1. Escribamos $m = (f_i(x))$. Para cada $\alpha \in X$ existe un entorno U_α tal que $m_{U_\alpha} = 0$, entonces $f_{iU_\alpha} = 0$, luego $f_i = 0$ y $m = 0$.

2. Es obvio.

3. Para cada $x \in X$ existe un entorno U_x tal que $M_{U_x} = 0$, por el lema de Nakayama. Luego, dado $m \in M$, tenemos que $m_{U_x} = 0$, para cada U_x, entonces $m = 0$ y $M = 0$. □

3. Proposición: *Sea M un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo finito generado. M es localmente libre si y solo si la función $f(\alpha) := \dim_{\mathbb{R}} M_\alpha$ es localmente constante (luego constante en cada componente conexa de X).*

Demostración. $\Leftarrow$) Dado $\alpha \in X$, sean $m_1, \dots, m_r \in M$ tales que $m_{1,x}, \dots, m_{r,x}$ sean una base de M_x. Por el lema de Nakayama, existe un entorno coordenado conexo U de α tal que $\langle m_1, \dots, m_r \rangle_U = M_U$. Consideremos una combinación $\mathscr{C}^\infty(U)$-lineal $\sum_i f_i \cdot m_i = 0$. Si para algún $\beta \in U$ e i, tenemos que $f_i(\beta) \neq 0$, entonces $\dim_{\mathbb{R}} M_\beta < r$ y llegamos a contradicción. Es decir, $m_1, \dots, m_r$ es una base de M_U.

□

4. Teorema: *Sea M un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo finito generado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M es un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo proyectivo.*
2. *Existe un recubrimiento finito por abiertos $\{U_i\}$ de X tal que M_{U_i} es libre.*
3. *La función $f(\alpha) := \dim_{\mathbb{R}} M_\alpha$ es localmente constante y M es submódulo de un módulo libre.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 3. Por el lema de Nakayama, si $\dim M_x = r$ entonces en un entorno U de x se cumple que $\dim M_y \leq n$, para todo $y \in U$. Consideremos un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo N tal que $M \oplus N = \mathscr{C}^\infty(X)^n$. Dado $x \in X$, sea $r = \dim M_x$ y $s = \dim N_x$, luego $r + s = n$. En un entorno U de x, tenemos que

$$n = \dim M_y + \dim N_y \leq r + s = n$$

para todo $y \in U$. Luego, $\dim M_y = r$, para todo $y \in U$.

3. $\Rightarrow$ 2. Escribamos $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ y sea $V := \{\beta \in X : m_{1,\beta}, \dots, m_{r,\beta}$ son una base de $M_\beta\}$. V es abierto y $m_{1,V}, \dots, m_{r,V}$ es una base de M_V. Veamos que generan. Dada $m \in M_V$, para cada $x \in V$, existe un entorno abierto U_x y $f_i \in \mathscr{C}^\infty(U_x)$ únicas tales que $m_{U_x} = \sum_i f_i m_{iU_x}$. Luego existen, $F_i \in \mathscr{C}^\infty(V)$, únicas tales que $F_{iU_x} = f_i$ (para todo x) y $m = \sum_i F_i \cdot m_{i,V}$ porque localmente son iguales.

Para cada subconjunto $J \subset \{1,\dots,n\}$, sea V_J el abierto de puntos α en los que $\{m_{j,\alpha}\}_{j\in J}$ es una base de M_α. $\{V_J\}_J$ es el recubrimiento buscado.

2. $\Rightarrow$ 1. Sean $m_{ij} \in M$ tales que $\{m_{ij_{U_i}}\}_j$ sea una base de M_{U_i}, para cada i. Sea ϕ_i una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_i\}$. Consideremos el morfismo $\pi\colon \oplus_{ij}\mathscr{C}^\infty(X) \to M$, $\pi((f_{ij})) := \sum_{ij} f_{ij}\cdot m_{ij}$. Sea $s\colon M \to \oplus_{ij}\mathscr{C}^\infty(X)$, $s(m) := (f_{ij})$, donde $(\phi_i\cdot m)_{U_i} = \sum_j f_{ij}\cdot m_{ij_{U_i}}$ (como el soporte de $f_{ij}\in\mathscr{C}^\infty(U_i)$ está incluido en U_i, podemos suponer que $f_{ij}\in C^\infty(X)$ y que es nula fuera de U_i). Observemos que $m = \sum_i \phi_i\cdot m$ y que $\phi_i\cdot m = \sum_j f_{ij}\cdot m_{ij}$, porque son iguales para todo $\alpha\in X$. Entonces, s es una sección de π:

$$\pi(s(m)) = \pi(\sum_{ij} f_{ij}\cdot m_{ij}) = \sum_{ij} f_{ij}\cdot m_{ij} = \sum_i \phi_i\cdot m = m.$$

Luego, M es un sumando directo de $\oplus_{ij}\mathscr{C}^\infty(X)$.

□

5. Proposición: *Sea $f\colon P\to P'$ un morfismo de $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulos, entre módulos proyectivos finito generados. Si la función $g(x) := \dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Ker} f_x$ es localmente constante, entonces $\operatorname{Ker} f$ es un sumando directo de P y $(\operatorname{Ker} f)_x = \operatorname{Ker} f_x$, para todo $x\in X$. Además, $\operatorname{Im} f$ es un sumando directo de P' y $(\operatorname{Im} f)_x = \operatorname{Im} f_x$ para todo $x\in X$.*

Demostración. $(P'/\operatorname{Im} f)_x = P'_x/\operatorname{Im} f_x$, luego

$$g(x) = \dim_{\mathbb{R}}(P'/\operatorname{Im} f)_x = \dim_{\mathbb{R}} P'_x - \dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Im} f_x = \dim_{\mathbb{R}} P'_x - \dim_{\mathbb{R}} P_x + \dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Ker} f_x$$

es una función es localmente constante. Luego, $P'/\operatorname{Im} f$ es localmente libre. Luego, localmente $\operatorname{Im} f$ es un sumando directo de P', luego es localmente libre. Es más, $\operatorname{Im} f$ es proyectivo y $(\operatorname{Im} f)_x = \operatorname{Im} f_x$. Por tanto, P es suma directa de $\operatorname{Ker} f$ y $\operatorname{Im} f$. Es fácil probar que $(\operatorname{Ker} f)_x = \operatorname{Ker} f_x$.

□

6. Proposición: *Sea P un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo proyectivo finito generado y $M\subset P$ un submódulo finito generado. Dado $x\in X$, si el morfismo $M_x \to P_x$ es inyectivo, entonces existe un entorno U de x tal que M_U es un sumando directo de P_U (en particular, M_U es un $\mathscr{C}^\infty(U)$-módulo proyectivo y reduciendo U si es necesario es libre).*

Demostración. Sea U un entorno de x, tal que $P_U = \mathscr{C}^\infty(U)^n$. Sean $m_1,\dots,m_r\in M_U$ y $m_{r+1},\dots,m_n\in P_U$ tales que $m_{1,x},\dots,m_{n,x}$ sea una base de P_x. Entonces, reduciendo U si es preciso $m_1,\dots,m_n$ es una base de P_U y $m_1,\dots,m_r$ generan M_U, luego son base de M_U y $m_{r+1},\dots,m_n$ son base de un suplementario de M_U en P_U.

□

7. Proposición: *Sea P un $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo proyectivo finito generado y supongamos que $P = M\oplus N$. Dado $p\in P$, se cumple que $p\in M$ si y solo si $p_x\in M_x$ para todo $x\in X$.*

Demostración. Escribamos $p = m+n$, con $m \in M$ y $n \in N$. Observemos que $n=0$ si localmente es cero. Podemos suponer que M y N son libres y en tal caso como $n_x = 0$ para todo X, tenemos que $n=0$.

□

8. Definiciones: Los sumandos directos del $\mathscr{C}^\infty(X)$-módulo Ω_X diremos que son sistemas de Pfaff. Los sumandos directos de $\mathfrak{Der}_X$ diremos que son distribuciones. Diremos que una distribución $\mathscr{D}$ es involutiva si $[D,D'] \in \mathscr{D}$, para todo $D,D' \in \mathscr{D}$.

Dado un A-submódulo $N \subset M$, denotamos $N^\circ = \{w \in M^* : w(n) = 0$, para todo $n \in N\}$, es decir, N° es el núcleo del morfismo natural $M^* \to N^*$. Si M es un A-módulo proyectivo finito generado, recordemos que $M^{**} = M$, entonces es inmediato que $N \subset N^{\circ\circ}$ y si además N es un sumando directo de M, entonces $N = N^{\circ\circ}$.

Observemos que un submódulo $\mathscr{P} \subset \Omega_X$ es un sistema de Pfaff si y solo si $\mathscr{P}^\circ$ es una distribución.

9. Proposición: *Sea τ_t el grupo uniparamétrico local asociado a un campo D y $\mathscr{P}$ un sistema de Pfaff. Si $D^L\mathscr{P} \subset \mathscr{P}$ entonces $\tau_{t,x}^*\mathscr{P}_{\tau_t(x)} = \mathscr{P}_x$, para todo (t,x) en el que esté definido τ. Igualmente, dada una distribución $\mathscr{D}$, si $D^L\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$ entonces $\tau_{t,x*}\mathscr{D}_x = \mathscr{D}_{\tau_t(x)}$, para todo (t,x) en el que esté definido τ.*

Demostración. Es un problema local, luego podemos suponer que $\mathscr{P}$ es libre de rango r. Como $D^L\mathscr{P} \subset \mathscr{P}$, entonces $D^L\Lambda^r\mathscr{P} \subset \Lambda^r\mathscr{P}$. Por el teorema 7.1.13, $\tau_{t,x}^*\Lambda^r\mathscr{P}_{\tau_t(x)} = \Lambda^r\mathscr{P}_x$. lo que implica que $\tau_{t,x}^*\mathscr{P}_{\tau_t(x)} = \mathscr{P}_x$.

□

10. Proyección local definida por un campo de vectores: Sea $D \in \mathfrak{Der}_X$ y $\alpha \in X$ tal que $D_\alpha \neq 0$. Existe un entorno abierto U de α coordenado por funciones $x_1,\dots,x_n$, de modo que $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Reduciendo U si es necesario podemos suponer que $U = (-a,a)^n$, $\beta \mapsto (x_1(\beta),\dots,x_n(\beta))$ y el grupo uniparamétrico local asociado a $D_{|U}$ es $\tau_t(x_1,\dots,x_n) = (x_1+t,x_2,\dots,x_n)$. La aplicación $\pi\colon U \to (-a,a)^{n-1} =: \bar{U}$, $\pi(\beta) = (x_2(\beta),\dots,x_n(\beta))$ es epiyectiva y diferenciable, de fibras las curvas integrales de $D_{|U}$. Si decimos que dos puntos de U son equivalentes, $x \sim y$ si y solo si yacen en una misma curva integral de $D_{|U}$, entonces $\bar{U} = U/\sim$ y π es el morfismo de paso al cociente. Observemos que el núcleo del epimorfismo $\pi_{\beta,*}\colon T_\beta U \to T_{\pi(\beta)}\bar{U}$ es $\langle D_\beta\rangle$.

11. Definición: Diremos que una aplicación diferenciable $\pi\colon X \to \bar{X}$ es una proyección regular si es epiyectiva y $\pi_{x,*}\colon T_xX \to T_{\pi(x)}\bar{X}$ es epiyectiva, para todo $x \in X$.

12. Veamos cómo son las proyecciones regulares $\pi\colon X \to \bar{X}$ en coordenadas. Sean $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ un sistema de coordenadas en $\pi(x)$. La aplicación $\pi_x^*\colon T_{\pi(x)}^*\bar{X} \hookrightarrow T_x^*X$ es inyectiva, por tanto, $\pi_x^*d\bar{x}_1 = dx_1 \circ \pi,\dots,\pi_x^*d\bar{x}_n = dx_n \circ \pi$ son linealmente independientes. Sean $x_1 = \bar{x}_1 \circ \pi,\dots,x_n = \bar{x}_n \circ \pi,\dots,x_m$ un sistema de coordenadas en x. Entonces, π aplica el punto de coordenadas $(x_1,\dots,x_m)$ en el punto de coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$.

Escribamos $\Omega_{\bar{X}} = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ y sea

$$\mathscr{D}_\pi := \{D \in \mathfrak{Der}_X : i_D \pi^* w_i = 0,\ \forall i\}$$

$\mathscr{D}_\pi = \langle \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \rangle$ localmente. Luego, $\mathscr{D}_\pi$ es una distribución involutiva y son los campos tangentes a la fibras de π. Además, $(\mathscr{D}_\pi)_y = \operatorname{Ker} \pi_{y,*}$, para todo $y \in X$. Dados $w \in \Omega_{\bar{X}}$ y $D \in \mathscr{D}_\pi$ tenemos que $i_D \pi^* w = 0$ y $i_D d\pi^* w = 0$. Por último,

$$\{f \in \mathscr{C}^\infty(X) \colon D(f) = 0\ \forall D \in \mathscr{D}_\pi\} = \mathscr{C}^\infty(\bar{X}),\ f \mapsto f \circ \pi.$$

Es decir, $\mathscr{C}^\infty(\bar{X})$ se identifica con el anillo de integrales primeras de $\mathscr{D}_\pi$.

13. Definición: Dado un $\mathscr{C}^\infty(X)$-submódulo $\mathscr{P} \subset \Omega_X$ denotemos

$$\mathscr{D}_{\mathscr{P}} := \{D \in \mathfrak{Der}_X : i_D \mathscr{P} = 0 \text{ y } D^L \mathscr{P} \subset \mathscr{P}\} = \{D \in \mathfrak{Der}_X : i_D \mathscr{P} = 0 \text{ y } i_D d\mathscr{P} \subset \mathscr{P}\}$$
$$\mathscr{D}_{\mathscr{P}_x} := \{D_x \in T_x X : i_{D_x} \mathscr{P}_x = 0 \text{ y } i_{D_x} d_x \mathscr{P} \subset \mathscr{P}_x\}$$

Diremos que $\mathscr{D}_{\mathscr{P}}$ es el sistema característico de $\mathscr{P}$.

Si $\mathscr{P}$ es un sistema de Pfaff y escribimos $\mathscr{P} = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ y $\mathscr{P}^\circ = \langle D_1, \dots, D_s \rangle$, entonces

$$\mathscr{D}_{\mathscr{P}} = \{D \in \mathscr{P}^\circ :\ i_D(i_{D_i} dw_j) = 0,\ \forall i, j\}.$$

Por la proposición 7.6.5, si $\dim \mathscr{D}_{\mathscr{P}_x}$ es localmente constante, entonces $\mathscr{D}_{\mathscr{P}}$ es una distribución y $(\mathscr{D}_{\mathscr{P}})_x = \mathscr{D}_{\mathscr{P}_x}$.

Si $D, D' \in \mathscr{D}_{\mathscr{P}}$ entonces $[D, D'] \in \mathscr{D}_{\mathscr{P}}$: ya que $i_{[D,D']} = i_D \circ D'^L - D'^L \circ i_D$ y $[D, D']^L = D^L D'^L - D'^L D^L$.

14. Definición: Sea $\pi \colon X \to \bar{X}$ una proyección regular. Diremos que un sistema de Pfaff $\mathscr{P} \subset \Omega_X$ es π-proyectable si existe un (único) sistema de Pfaff $\bar{\mathscr{P}} \subset \Omega_{\bar{X}}$ tal que $\pi_x^* \bar{\mathscr{P}}_{\pi(x)} = \mathscr{P}_x$, para todo $x \in X$ (o equivalentemente, $\mathscr{P} = \langle \pi^* \bar{\mathscr{P}} \rangle$). Diremos que una distribución $\mathscr{D} \subset \mathfrak{Der}_X$ es π-proyectable si existe una (única) distribución $\bar{\mathscr{D}} \subset \mathfrak{Der}_{\bar{X}}$ tal que $\pi_{x,*}^{-1} \bar{\mathscr{D}}_{\pi(x)} = \mathscr{D}_x$, para todo $x \in X$.

Por la proposición 7.6.9, si $\mathscr{P}$ es π-proyectable, entonces $\mathscr{D}_\pi \subset \mathscr{D}_{\mathscr{P}}$, y si una distribución $\mathscr{D}$ es π-proyectable, entonces $\mathscr{D}_\pi \subset \mathscr{D}$.

15. Proposición: *Sea D un campo de vectores y $\mathscr{P}$ un sistema de Pfaff. Entonces, $D^L \mathscr{P} \subset \mathscr{P}$ si y solo si $D^L \mathscr{P}^\circ \subset \mathscr{P}^\circ$.*

Demostración. Observemos que $(D^L w)(D') = D(w(D')) - w(D^L D') = -w(D^L D')$, si $w \in \mathscr{P}$ y $D' \in \mathscr{P}^\circ$. Por tanto, $D^L w \in \mathscr{P}$, $\forall w \in \mathscr{P} \iff (D^L w)(D') = 0$, $\forall w \in \mathscr{P}$ y $\forall D' \in \mathscr{P}^\circ \iff w(D^L D') = 0$, $\forall w \in \mathscr{P}$ y $\forall D' \in \mathscr{P}^\circ \iff D^L D' \in \mathscr{P}^\circ$, $\forall D' \in \mathscr{P}^\circ$.

De otro modo: $D^L \mathscr{P} \subset \mathscr{P} \iff \mathscr{P} = \mathscr{P}(t) \iff \mathscr{P}^\circ = (\mathscr{P}(t))^\circ = \mathscr{P}^\circ(t) \iff D^L \mathscr{P}^\circ \subset \mathscr{P}^\circ$. □

Observemos que una distribución $\mathscr{D}$ es involutiva si y solo si $\mathscr{D} = \mathscr{D}_{\mathscr{D}^\circ}$.

16. Proposición: *Sea $\pi\colon X \to \bar X$ una proyección regular y $\mathcal{P}$ un sistema de Pfaff.*

1. *$\mathcal{P}$ es π-proyectable a $\bar{\mathcal{P}}$ si y solo si $\mathcal{P}^\circ$ es π-proyectable a $\bar{\mathcal{P}}^\circ$.*

2. *Si $\mathcal{P}$ es π-proyectable a $\bar{\mathcal{P}}$, entonces $\mathcal{D}_{\mathcal{P}_x} = \pi_{x,*}^{-1}\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{P}}_{\pi(x)}}$ (luego, $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{P}}_{\pi(x)}} = \pi_{x,*}\mathcal{D}_{\mathcal{P}_x}$).*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) $\pi_{x,*}^{-1}(\bar{\mathcal{P}}^\circ)_{\pi(x)} = \{D'_x \in T_xX$, tales que $i_{\pi_{x,*}D'_x}\bar{\mathcal{P}}_{\pi(x)} = 0\} = \{D'_x \in T_xX$, tales que $i_{D'_x}\pi_x^*\bar{\mathcal{P}}_{\pi(x)} = 0\} = (\mathcal{P}^\circ)_x$.

Para el recíproco se argumenta igual.

2. $\pi_{x,*}^{-1}\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{P}}_{\pi(x)}} = \{D'_x \in \mathcal{P}_x^\circ$, tales que $i_{\pi_{x,*}D_x}i_{\pi_{x,*}D'_x}d_{\pi(x)}\bar{\mathcal{P}} = 0$, $\forall D_x \in \mathcal{P}_x^\circ\} = \mathcal{D}_{\mathcal{P}_x}$.

□

17. Teorema de la proyección: *Sea $\mathcal{P} \subset \Omega_X$ un sistema de Pfaff y $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ una distribución involutiva. Para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x y una proyección regular $\pi\colon U \to \bar U$, tal que $\mathcal{D}_U = \mathcal{D}_\pi$ y $\mathcal{P}_U$ es π-proyectable.*

Demostración. El problema es local en X. Podemos suponer que existe un campo $D \in \mathcal{D}$ no nulo en todo punto. Consideremos la proyección regular definida por D: podemos suponer que $X = (-a,a)^n$, $\bar X = (-a,a)^{n-1}$, $\pi\colon X \to \bar X$, $\pi(a_1,\dots,a_n) = (a_2,\dots,a_n)$ y $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Consideremos la sección $s\colon \bar X \to X$, $s(a_2,\dots,a_n) = (0,a_2,\dots,a_n)$ del morfismo π. El sistema de Pfaff generado por $\pi^*s^*\mathcal{P}$ coincide con $\mathcal{P}$: Dado $s(\bar x) \in X$ y $w_{s(\bar x)} \in \mathcal{P}_{s(\bar x)}$, tenemos que $(\pi_{s(\bar x)}^* s_{\bar x}^* w_{s(\bar x)})(D_{s(\bar x)}) = 0$ y

$$(\pi_{s(\bar x)}^* s_{\bar x}^* w_{s(\bar x)})(s_{\bar x,*}D'_{\bar x}) = s_{\bar x}^* w_{s(\bar x)}(D'_{\bar x}) = w_{s(\bar x)}(s_{\bar x,*}D'_{\bar x})$$

para todo $D'_{\bar x} \in T_{\bar x}\bar X$. Luego, $\pi^*s^*\mathcal{P}$ coincide con $\mathcal{P}$ en todos los puntos de $s(\bar X)$. Además, ambos sistemas de Pfaff son estables por τ_t^*, luego coinciden en todo punto.

En conclusión, $\mathcal{P}$ es π-proyectable a $\bar{\mathcal{P}} := s^*\mathcal{P}$. Igualmente, $\mathcal{D}^\circ$ es π-proyectable a un sistema de Pfaff $\overline{\mathcal{D}^\circ}$, luego $\mathcal{D}$ es π-proyectable a una distribución $\bar{\mathcal{D}}$. Como $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{D}^\circ}$ entonces $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_{\overline{\mathcal{D}^\circ}}$ es involutiva y $\bar{\mathcal{D}}_{\pi(x)} = \pi_{x,*}\mathcal{D}_x \subset \pi_*\mathcal{D}_{\mathcal{P}_x} = \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{P}}_{\pi(x)}}$, luego $\bar{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{P}}}$.

Repitiendo en $\bar X$ con $\bar{\mathcal{P}}$ y $\bar{\mathcal{D}}$, lo que hemos hecho en X con $\mathcal{P}$ y $\mathcal{D}$, de modo reiterado, obtenemos el teorema

□

18. Definición: Diremos que una distribución $\mathcal{D}$ es integrable si para cada punto $x \in X$ existe un entorno U_x coordenado por una coordenadas $x_1,\dots,x_n$, de modo que $\mathcal{D}_{|U_x} = \langle \frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\rangle$. Diremos que un sistema de Pfaff $\mathcal{P}$ es integrable si para cada punto $x \in X$ existe un entorno U_x coordenado por una coordenadas $x_1,\dots,x_n$, de modo que $\mathcal{P}_{|U_x} = \langle dx_1,\dots,dx_r\rangle$.

Obviamente, una distribución $\mathcal{D}$ es integrable si y solo si $\mathcal{D}^\circ$ es integrable.

19. Teorema de Frobenius: *Un sistema de Pfaff $\mathcal{P}$ es integrable si y solo si $\mathcal{P}^\circ$ es involutiva.*

Demostración. $\Rightarrow$) Denotemos $\mathcal{D}=\mathcal{P}^\circ$. $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ porque $\mathcal{D}$ es involutivo.. Por el teorema de proyección, existe (localmente) una proyección $\pi\colon X\mapsto \bar X$ tal que $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\pi$ y $\mathcal{P}$ es π-proyectable a un sistema de Pfaff $\bar{\mathcal{P}}$. Además, $\mathcal{D}$ es π-proyectable a cero y a $\bar{\mathcal{P}}^\circ$. Luego, $\bar{\mathcal{P}}=\Omega_{\bar X}$. Podemos suponer que $X=(-a,a)^n$, $\bar X=(-a,a)^r$ y $\pi(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_r)$, luego $\mathcal{P}=\langle \pi^*\Omega_{\bar X}\rangle=\langle dx_1,\dots,dx_r\rangle$.

□

20. Notación: Dada $w\in\Omega_X$ y $x\in X$ denotemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_w &:= \{D\in \mathfrak{Der}_X\colon i_D w=0, i_D dw=0\}=\{D\in\mathfrak{Der}_X\colon i_D w=0, D^L w=0\}\\ \mathcal{D}_{w_x} &:= \{D_x\in T_xX\colon i_{D_x}w_x=0, i_{D_x}(dw)_x=0\}\end{aligned}$$

21. Definición: Se dice que $w\in\Omega_X$ es regular de clase $\mathcal{C}^m$, si $w_x\neq 0$

$$\dim_x \mathcal{D}_{w_x}=\dim X-m$$

para todo x.

Por la proposición 7.6.5, en el caso de que w sea regular, $\mathcal{D}_w$ es una distribución, y $(\mathcal{D}_w)_x=\mathcal{D}_{w_x}$. Además, $\mathcal{D}_w$ es involutiva: Dados $D,D'\in\mathcal{D}_w$, tenemos que

$$\begin{aligned} w([D,D']) &= D(w(D'))-(D^Lw)(D')=0\\ [D,D']^L(w) &= D^LD'^Lw-D'^LD^Lw=0\end{aligned}$$

Luego, $[D,D']\in\mathcal{D}_w$ y $\mathcal{D}_w$ es involutiva.

22. Teorema de Darboux: *Sea w es una 1-forma regular de clase $\mathcal{C}^m$. Entonces:*

Si $m=2k+1$, para cada $x\in X$, existe un entorno U coordenado por funciones z,x_i,p_i de modo que

$$w=dz-p_1dx_1-\cdots-p_kdx_k.$$

Si $m=2k$, para cada $x\in X$, existe un entorno U coordenado por funciones x_i,p_i de modo que

$$w=p_1dx_1+\cdots+p_kdx_k.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre $\dim X$. Si $\dim X=1$, entonces en un entorno coordenado U de x, tenemos que $w=dz$ porque $dw=0$. Supongamos $n>1$. Sea $U=(-\epsilon,\epsilon)^n$ un entorno de x coordenado por funciones $x_1,\dots,x_n$ de modo que $\mathcal{D}_w=\langle\frac{\partial}{\partial x_{m+1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\rangle$. Entonces, $w=f_1(x_1,\dots,x_m)\cdot dx_1+\cdots+f_m(x_1,\dots,x_m)\cdot dx_m$. Como w considerada como una 1-forma sobre $(-\epsilon,\epsilon)^m$, está en las hipótesis de inducción (salvo cuando $m=n$), w cumple el teorema. Luego el teorema es cierto si $\mathcal{D}_w\neq 0$.

Supongamos que $\mathcal{D}_w=0$ (es decir, $n=m$).

Supongamos que $n=2k+1$. En cada punto $y\in U$, $(dw)_y$ es una métrica hemisimétrica. Luego, la dimensión de $\mathrm{Rad}(dw)_y:=\{D_y\in T_yX\colon i_{D_y}(dw)_y=0\}$ es mayor o igual que 1; y no puede ser mayor que 1 porque en tal caso $\mathcal{D}_{w_y}\neq 0$. Sea U un entorno de x de modo que existe un campo D no nulo en todo punto, tal que $i_D dw = 0$ (y $i_D w$ es no nulo en todo punto). Tomando $\frac{1}{w(D)} \cdot D$, podemos suponer que $w(D) = 1$. Reduciendo U si es preciso, podemos suponer que $D = \frac{\partial}{\partial z}$. Entonces $\theta := dz - w$ es regular y $\mathscr{D}_\theta = \langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle$. Entonces, existen coordenadas z', p_i, x_i, tales que $\theta = \sum_i p_i dx_i$. Como $i_D d\theta = 0$, tenemos que $D(p_i) = D(x_i) = 0$ y dz es linealmente independiente de dp_i, dx_i en todo punto, luego z, p_i, x_i es un sistema de coordenadas y $w = dz - \sum_i p_i dx_i$.

Supongamos que $n = 2k$. La dimensión de $\operatorname{Rad}(dw)_y := \{D_y \in T_y X \colon i_{D_y}(dw)_y = 0\}$ es par; y no puede ser mayor o igual que 2 porque $\mathscr{D}_{w_y} = 0$. Por tanto,

$$\mathscr{D}_{w_x} = \{D_x \in T_x X \colon i_{D_x} w_x = 0, i_{D_x} d_x w \in \langle w_x \rangle\} = \{D_x \in T_x X \colon i_{D_x} d_x w \in \langle w_x \rangle\}$$

es de dimensión 1, para todo x. Podemos suponer que $\mathscr{D}_{\langle w \rangle} = \langle D \rangle$ (con $D_x \neq 0$ para todo x). Por el teorema de la proyección, existe (localmente) una proyección $\pi \colon X \to \bar{X}$, tal que $\mathscr{D}_\pi = \mathscr{D}_{\langle w \rangle}$ y $\langle w \rangle$ es π-proyectable a un sistema de Pfaff $\langle \bar{w} \rangle$. Luego, $\pi^* \bar{w} = f \cdot w$, con f invertible y $\mathscr{D}_{\langle \bar{w} \rangle} = 0$. Por tanto, $\mathscr{D}_{\bar{w}} = 0$. Por hipótesis de inducción, $\bar{w} = dx_1 + \sum_{i=2}^k \bar{p}_i dx_i$. Entonces, $w = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$ (con $p_1 = f^{-1}$, $p_i = f^{-1} \bar{p}_i$). Resulta que dp_i, dx_i son linealmente independientes porque dw no tiene radical.

□

7.6.2. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

Se entiende por ecuación en derivadas parciales de primer orden una ecuación de la forma

$$(1) \qquad F(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0$$

donde F es una función en abierto de $\mathbb{R}^{2n+1}$, y donde el problema consiste en sustituir z por una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ de modo que se cumpla la ecuación (1). Una tal f se llamará solución, en sentido clásico de (1).

Denominemos las coordenadas de $\mathbb{R}^{2n+1}$, $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ y consideremos la 1-forma

$$w = dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n.$$

Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es una solución clásica de (1) y consideramos la subvariedad $\bar{X}$ de $\mathbb{R}^{2n+1}$ de ecuaciones

$$z = f(x_1, \ldots, x_n),\ p_1 = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots,\ p_1 = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n},$$

entonces $F = 0$ y $w = 0$ restringidas a $\bar{X}$. Recíprocamente, si $\bar{X}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$ parametrizable por $x_1, \ldots, x_n$, donde $F = 0$ y $w = 0$, entonces $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, como $w = 0$ tenemos que $p_i = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$ para todo i, y como $F = 0$ entonces f es una solución clásica de (1) y por dimensiones la variedad de ecuaciones

$$z = f(x_1, \ldots, x_n),\ p_1 = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}$$

es $\bar{X}$. Por otra parte, si $\bar{X}$ es una subvariedad conexa de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tal que $F(\bar{x})=0$ para un punto $\bar{x}\in\bar{X}$, entonces $F=0$ en $\bar{X}$ si y solo si $dF=0$ en $\bar{X}$.

23. Proposición : *Si $\bar{X}\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ es una subvariedad tal que $w=0$ restringida a $\bar{X}$, entonces* $\dim\bar{X}\leq n$.

Demostración. La métrica (hemisimétrica) $d_x w$ es de radical $\langle(\frac{\partial}{\partial z})_x\rangle$, luego la métrica que define en $T_x\mathbb{R}^{2n+1}/\langle(\frac{\partial}{\partial z})_x\rangle$ es no singular. Como $w=0$ en $\bar{X}$, entonces $0 = dw=\sum_i dx_i\wedge dp_i$ en $\bar{X}$. Tenemos que $T_x\bar{X}\in\langle w_x\rangle^\circ$ y Como $w_x((\frac{\partial}{\partial z})_x)=1$, entonces la composición $T_x\bar{X}\subset T_x\mathbb{R}^{2n+1}\to T_x\mathbb{R}^{2n+1}/\langle(\frac{\partial}{\partial z})_x\rangle$ es inyectiva, y es un espacio vectorial isótropo, es decir incluido en su ortogonal. Entonces, $\dim T_x\bar{X}\leq 2n-\dim T_x\bar{X}$ y $\dim\bar{X}=\dim T_x\bar{X}\leq n$.

□

24. Definición : Llamaremos solución de Lie, de la ecuación en derivadas parciales de primer orden (1), a toda subvariedad $X\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ de dimensión n, tal que la restricción del sistema de Pfaff $\langle w,dF\rangle$ es nula.

Supondremos que $\langle w,dF\rangle$ es un sistema de Pfaff, es decir, estaremos en el abierto complementario del cerrado $F_{p_i}=0$, $F_{x_i}+p_iF_z=0$, para $i=1,\dots,n$. Un cálculo inmediato muestra que $\mathscr{D}_{\langle w,dF\rangle}$ está generado por el campo de vectores (no nulo en todo punto)

$$D_F=\sum_{i=1}^n F_{p_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^n(F_{x_i}+p_iF_z)\cdot\frac{\partial}{\partial p_i}+\sum_{i=1}^n p_iF_{p_i}\cdot\frac{\partial}{\partial z},$$

el cual cumple

$$D_FF=0,\ w(D_F)=0,\ i_{D_F}dw=dF-F_zw.$$

25. Proposición : *D_F es tangente a toda solución de Lie.*

Demostración. Si X es una solución de Lie y $(D_F)_x\notin T_xX$, entonces (localmente) las curvas integrales de D_F que pasan por un entorno de $x\in X$, forman una variedad de dimensión $n+1$, donde $\langle w,dF\rangle$ es cero. Llegamos a contradicción con la proposición 7.6.23. □

26. Definición : Las curvas integrales de D_F se denominan bandas características y su proyección a $\mathbb{R}^{n+1}$ características de Cauchy.

27. Supongamos que la hipersuperficie $x_n=0$ es transversal a D_F en $0\in\mathbb{R}^{2n+1}$ ($\frac{\partial F}{\partial x_n}(0)\neq 0$. Sean $X_1,\dots,X_{n-1},Z,P_1,\dots,P_n$ integrales primeras de D_F, que restringidas a $x_n=0$ coincidan con las funciones $x_1,\dots,x_{n-1},z,p_1,\dots,p_n$. Por la desmotración del teorema de la proyección

$$\langle w,dF\rangle=\langle dZ-P_1dX_1-\dots-P_{n-1}dX_{n-1},dF\rangle$$

Una solución de (1) que sobre la hipersuperficie $x_n = 0$ coincida con cierta función $f(x_1,\dots,x_{n-1})$ es

$$F = 0,\; Z = f(X_1,\dots,X_{n-1}),\; P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_1,\dots,X_{n-1}) \quad (i = 1,\dots,n-1),$$

(que en general definen una subvariedad de dimensión n). Otras soluciones son

$$F = 0,\; Z = \lambda_n,\; X_1 = \lambda_1,\dots,\; X_{n-1} = \lambda_{n-1} \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

28. Método de Lagrange-Charpit: Supongamos que $n = 2$. Sea G una integral primera de D_F. Es fácil comprobar que $D_G F = D_F G$, luego $D_G F = 0$. Supongamos que $\mathcal{P} = \langle w, dF, dG\rangle$ es un sistema de Pfaff de rango 3. D_F y D_G son linealmente independientes porque $i_{D_F} dw = dF - F_z w$ y $i_{D_G} dw = dG - G_z w$, y dF, dG, w son linealmente independientes. Obviamente $\mathcal{D}_{\mathcal{P}} = \langle D_F, D_G\rangle$, luego $\mathcal{P}$ es integrable, luego $\mathcal{P} = \langle dF, dG, dH\rangle$. Por tanto, una solución de Lie de (1) es $F = 0$, $G = \lambda_1$ y $H = \lambda_2$.

29. Método de Jacobi: Supongamos que en la ecuación (1) no aparece z y consideremos F como función de $\mathbb{R}^{2n}$, es decir, depende de las coordenadas $x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_n$. Una solución clásica $z(x_1,\dots,x_n)$ define la subvariedad dimensión n de $\mathbb{R}^{2n}$, $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i = 1,\dots,n)$ en la que $\omega := \sum_i p_i dx_i$ especializa en dz y por tanto $d\omega = 0$. Recíprocamente, si $d\omega = 0$ en una subvariedad de dimensión n, entonces localmente por el lema de Poincaré 7.1.15, $\omega = dz$ y si $x_1,\dots,x_n$ es un sistema de coordenadas en la subvariedad entonces z es una solución clásica.

Tenemos que ω_2 es una dos forma cerrada no singular de $\mathbb{R}^{2n}$. La dos forma ω_2 define la polaridad $\mathfrak{Der}_{\mathbb{R}^{2n}} \to \Omega_{\mathbb{R}^{2n}}, D \mapsto i_D\omega_2$. Dada una función G, sea D_G el campo de vectores tal que $i_{D_G}\omega_2 = dG$. Entonces, $D_G(H) = i_{D_G}(dH) = i_{D_G}(i_{D_H}\omega_2) = \omega_2(D_H, D_G)$, luego $D_G G = 0$ y $D_G H = -D_H G$. Además, $D^L_G \omega_2 = d i_{D_G}\omega_2 - i_{D_G} d\omega_2 = d(dG) + 0 = 0$ y $[D_G, D_H] = D_{D_G H}$, porque

$$i_{[D_G,D_H]}\omega_2 = (i_{D_G} \circ D^L_H - D^L_H \circ i_{D_G})\omega_2 = -D^L_H(dG) = -dD_H G = dD_G H.$$

Sea $F_1 = F$ (suponemos que localmente dF no se nula en ningún punto). Sea F_2 una integral primera de D_{F_1}, tal que $\langle dF_1, dF_2\rangle$ es un sistema de Pfaff. Tenemos que $\langle D_{F_1}, D_{F_2}\rangle$ es una distribución involutiva (incluida en $\langle dF_1, dF_2\rangle^\circ$), luego integrable. Sea F_3 una integral primera de $\langle D_{F_1}, D_{F_2}\rangle$, tal que $\langle dF_1, dF_2, dF_3\rangle$ es un sistema de Pfaff. Así sucesivamente, obtenemos un sistema de Pfaff $\langle dF_1,\dots,dF_n\rangle$ con incidente la distribución involutiva $\langle D_{F_1},\dots,D_{F_n}\rangle$. Luego, $\omega_2(D_{F_i}, D_{F_j}) = D_{F_i}(F_j) = 0$. Por tanto, $\omega_2 = 0$ sobre la subvariedad $F = 0, F_2 = \lambda_2,\dots,F_n = \lambda_n$.

30. Definición: El locus singular de (1) es el conjunto de los puntos de $F = 0$ donde $(D_F)_x = 0$, es decir, el conjunto de soluciones de las ecuaciones

$$F = 0,\; F_{p_i} = 0,\; F_{x_i} + p_i F_z = 0 \qquad (i = 1,\dots,n).$$

Se llama solución singular a toda solución de Lie contenida en el locus singular.

31. Proposición: *Supongamos que $F, F_{p_1}, \dots, F_{p_n}, x_1, \dots, x_n$ es un sistema de coordenadas en un punto $\alpha \in \mathbb{R}^{2n+1}$. La subvariedad X de $\mathbb{R}^{2n+1}$ definida en un entorno de α por las ecuaciones*

$$F = 0,\ F_{p_i} = 0,\ (i = 1, \dots, n).$$

es una solución de (1) *si y solo si está incluida en el locus singular.*

Demostración. Las funciones $x_1, \dots, x_n$ es un sistema de coordenadas en Y. Si $w = 0$ en Y, entonces $dF = 0$ en Y si y solo si $F_{x_i} + p_i F_z = 0$.

□

Capítulo 8

Aplicaciones de la teoría

8.1. Ejemplos en Física

Quiero establecer justificadamente los principios mínimos o básicos de la física Newtoniana y la Relativista.

"Todo individuo tiene conocimiento solo de un entorno relativamente pequeño (infinitesimal) suyo. En cada instante de tiempo y lugar el individuo observará un tiempo y un espacio". El espacio físico X en una variedad diferenciable de dimensión cuatro (infinitesimalmente $T_xX = \mathbb{R}^4$). Dar un individuo-observador es dar una curva $C \hookrightarrow X$ (curva espacio-temporal) y un punto $c \in C$ digamos que es el individuo en un instante y lugar determinados.

"Cada individuo infinitesimalmente tiene una concepción de tiempo y espacio, romperá su realidad observada en dos bien diferenciadas: tiempo y espacio. Además suponemos que cada individuo le puede comunicar a uno cercano qué hora tiene y qué lugar ocupa. Infinitesimalmente el individuo rompe su realidad física en tiempo y espacio y lo puede comunicar". Es decir, $T_cX = T_cC \oplus E_c$, donde diremos que T_cC es el tiempo infinitesimal del individuo-observador C en c y E_c es el espacio del observador C en c. La condición de comunicabilidad (que no hemos expresado o detallado con rigor) se traduce en que T_cX sucede una de las dos posibilidades siguientes:

1. Existe una métrica simétrica (de Lorentz) que en una base ortogonal es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $E_c = T_cC^\perp$.

2. Existe una métrica simétrica que en una base ortogonal es de la forma

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $E_c = \operatorname{rad} T_2$

Índice alfabético