PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICA DISCRETA.
Ingenierías Técnicas de Informática de Gestión y de Sistemas.
2º Curso. Primer Cuatrimestre.
Curso 2006-2007

Tema 1: TEORÍA DE CONJUNTOS.

1. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
   Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ y $C = \{1, 5, 9\}$.
   Encontrar: $A \cup B$; $A \cap C$; A^c; $(A \cup B) \cap C$; $B \setminus A$; $(A \setminus C)^c$.

2. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
   Sean $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 7\}$ y $C = \{1, 5\}$.
   Encontrar: $A \cup B \cup C$; $(A \cap C^c) \cup B$; A^c; $(A^c \cup B)^c \cap C$; $B \setminus A^c$; $(A \setminus C)^c$.

3. Probar las identidades:
   $(\varnothing \cup A) \cap (B \cup A) = A$.
   $A \cup (B \cap A) = A$.

4. Probar que:
   a) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.
   b) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$.

5. Probar que:
   a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
   b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

6. Demostrar $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$.

7. Demostrar $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$.

8. Comprobar si son ciertas las siguientes igualdades. En caso de no serlo, poner ejemplos que lo muestren:
   a) $A^c \cap B^c = (A \cap B)^c$
   b) $A^c \setminus B^c = (A \setminus B)^c$
   c) $(A^c) \cap A = A \cap ((A \setminus B) \cap B)$

9. Escribir las siguientes expresiones como unión de intersecciones de conjuntos:

a) $((A \cup B)^c \cap C)^c$
b) $((A \cap B) \cap (A \cup B)) \cup ((A \cap B) \cap (A \cup B))$
c) $((A \setminus B) \cup (A \cup B)^c)^c$

10. Escribir las siguientes expresiones como unión de intersecciones de conjuntos:

a) $((A \setminus B)^c \cap C)^c$
b) $((A \cap B) \setminus (A \cup B)) \cup ((A \cap B) \setminus (A \cup B))$
c) $((A \cup B) \cup (A \cup B)^c)^c$

11. Escribir las siguientes expresiones como intersección de uniones de conjuntos:

a) $((A \setminus B)^c \cap C)^c$
b) $((A \cap B) \cap (A \cup B)) \cup ((A \cap B) \cap (A \cup B))$
c) $((A \cup B) \cup (A \cup B)^c)^c$

12. Escribir las siguientes expresiones como intersección de uniones de conjuntos:

a) $((A \cup B)^c \cap C)^c$
b) $((A \cap B) \setminus (A \cup B)) \cup ((A \cap B) \setminus (A \cup B))$
c) $((A \setminus B) \cup (A \cup B)^c)^c$

13. Obtener la tabla de verdad de las siguientes expresiones:

a) $((A \cup B)^c \cap C)^c$
b) $((A \cap B) \setminus (A \cup B)) \cup ((A \cap B) \setminus (A \cup B))$
c) $((A \setminus B) \cup (A \cup B)^c)^c$

14. Obtener la tabla de verdad de las siguientes expresiones:

a) $((A \setminus B)^c \cap C)^c$
b) $((A \cap B) \cap (A \cup B)) \cup ((A \cap B) \cap (A \cup B))$
c) $((A \cup B) \cup (A \cup B)^c)^c$

15. Probar que si A y B son dos conjuntos tales que $A \cup C = B \cup C$ y $A \cup C^c = B \cup C^c$, cualquiera sea el conjunto C, entonces $A = B$

16. Probar que si A y B son dos conjuntos tales que $A \cup C = B \cup C$ y $A \cup C^c = B \cup C^c$, para un determinado conjunto C, entonces $A = B$

17. Dado el conjunto universal $U = \{0, 1\}$, describir por extensión el conjunto

$$A = \{\{a, b, c\}\colon a, b, c \in U\}.$$

18. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{x, y\}$. Calcular A×C y A×B×C.

19. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{x, y, z\}$, se considera la siguiente relación de A a B:

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}.$$

   a) Dibujar R sobre el diagrama de coordenadas $A \times B$.
   b) Determinar R como tabla y determinar su matriz.
   c) Dibujar R como diagrama de flechas.
   d) Determinar la relación inversa, R^{-1}, de R.
   e) Determinar el rango y el dominio de R.
   f) ¿Cuales son los conjuntos inicial y final de R?

20. Sean R y S las relaciones sobre $A = \{1, 2, 3\}$ definidas por:
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$.
$S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$.
Encontrar: $R \cap S$; $R \cup S$; R^c; S^{-1}.

21. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{x, y, z\}$.
Sea R una relación entre A y B definida por $R = \{(1, b), (2, a), (2, c)\}$.
Sea S una relación entre B y C definida por $S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$.

   a) Encontrar $S \circ R$.
   b) Representar mediante tablas R, S y $S \circ R$, obteniendo sus respectivas matrices.

22. Considérense las siguientes cuatro relaciones sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$:
$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$.
$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
$T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$.
$A \times A$.
Estudiar, para cada una de ellas, las propiedades de reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad.

23. Sean R y S dos relaciones sobre un conjunto A. Razonar adecuadamente la veracidad o falsedad de los siguientes enunciado:

a) Si R y S son transitivas, entonces también lo es $R \cap S$.

b) Si R es transitiva, entonces también lo es $R \cup S$.

c) Si R es antisimétrica, entonces $R \cap S$ es antisimétrica.

d) Si R y S son antisimétricas, entonces también lo es $R \cap S$.

e) Si R es transitiva, entonces también lo es R^{-1}.

24. Sean R y S dos relaciones sobre un conjunto A. Razonar adecuadamente la veracidad o falsedad de los siguientes enunciado:

a) Si R y S son transitivas, entonces también lo es $R \cup S$.

b) Si R es reflexiva, entonces también lo es $R \cap S$.

c) Si R y S son simétricas, entonces también lo es $R \cap S$.

d) Si R y S son antisimétricas, entonces también lo es $R \cup S$.

e) Si R es simétrica, entonces también lo es R^{-1}.

25. Sean R y S dos relaciones sobre un conjunto A. Razonar adecuadamente la veracidad o falsedad de los siguientes enunciado:

a) Si R es transitiva, entonces también lo es $R \cap S$.

b) Si R es simétrica, entonces también lo es $R \cup S$.

c) Si R y S son simétricas, entonces también lo es $R \cup S$.

d) Si R es reflexiva, entonces también lo es R^{-1}.

26. Sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$, se consideran las siguientes relaciones:

$R = \{(a, c), (b, a), (b, c), (c, d), (d, d)\}$.

$S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$.

$T = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}$.

Estudiar qué propiedades verifica cada una de ellas.

27. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $\sim$ la relación sobre A definida por:

$$\text{“}(a, b) \sim (c, d) \text{ si } a + d = b + c''.$$

Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

28. Sobre el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la siguiente relación:

$$a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (a + d)^2 = (b + c)^2.$$

Estudiar razonada y detalladamente si se trata o no de una relación de equivalencia.

29. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

Encontrar: $f(3)$, $f(-2)$, $f(y)$, $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

30. Sea $f(x) = 2x - 3$. Probar que f es biyectiva y calcular su inversa.

31. Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$. Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.

32. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son finitos y, en los que sean infinitos, determinar cuáles son numerables y cuáles no.

$A = \{$estaciones del año$\}$.

$B = \{$enteros positivos menores que 0$\}$.

$C = \{$enteros menores que 0 y mayores que -2$\}$.

$D = \{$enteros impares$\}$.

$E = \{$gastos anuales de una familia en España$\}$.

$F = \{$números reales mayores que 2$\}$.

33. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:

$A = \{1, -3, 11, -28\}$.

$B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 5\}$.

$C = \{x\mathbb{R} : x^2 = 5\}$.

$D = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, ...\}$.

34. Probar que si $Card(A) = n$ (finito), entonces $Card(P(A)) = 2^n$.

35. En una encuesta realizada a 60 personas, se encontró que 25 leen la revista "El Semanal", 26 la revista "Timeτ 26 la revista "Fortune", 11 leen "El Semanalτ "Time", 9 leen "El Semanalτ "Fortuneτ 8 leen "Timeτ "Fortuneτ 8 no leen ninguna de las tres revistas.

   a) Encontrar el número de personas que leen las tres revistas.
   b) Representar la situación mediante diagramas de Venn (indicando sólo el número de personas).
   c) Determinar el número de personas que leen exactamente una revista.

36. En una reunión de 26 personas que hablan francés, inglés o alemán , tenemos que 15 de ellas hablan francés, 12 hablan inglés y 18 hablan alemán. Además, del citado grupo, 7 hablan francés e inglés, 8 francés y alemán y 5 hablan los tres idiomas. ¿Cuántas personas hablan el inglés y el alemán, pero no el francés?

37. Probar que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C),$$

donde denotamos por n al cardinal.